บทที่ 4
การพิสูจน์ว่าสมการที่หาได้เป็นค่าต่ำสุด

วิธีการหาค่าต่ำสุดจากการหาอนุพันธ์อันดับที่ 2

จากหัวข้อก่อนนั้นทำให้ทราบว่า เงื่อนไขที่ทำให้เห็นว่าค่าที่ได้นั้นเป็นค่าต่ำสุดไม่ใช่ค่าสูงสุด มีเงื่อนไขเป็น

$$F_{y'y'} \geq 0$$

จากหัวข้อการวิจัยที่ผ่านมาจะได้ว่าเส้นทางที่ใช้เวลาน้อยที่สุดนั้นเป็นรูป cycloid แล้วแต่กรณีต่อไปนี้จะแสดงเส้นทางที่วัตถุใช้เคลื่อนที่ไปเป็นรูป Cycloid นั้นใช้เวลาน้อยที่สุด สำหรับในกรณีนี้ความเร็วต้นของการเคลื่อนที่จะเป็นศูนย์ จะได้สมการของ Cycloid เป็น

$$X = b(\theta - \sin\theta) \qquad (4.1)$$

$$Y = b(1 - \cos\theta) \qquad (4.2)$$

$$F = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}$$

จาก (4.1) จะได้ $\quad dx/d\theta = b - b\cos\theta \qquad (4.3)$

จาก (4.2) จะได้ $\quad dy/d\theta = b\sin\theta \qquad (4.4)$

(4.3)/(4.4) จะได้ $$y = \tan \theta/2 \qquad (4.5)$$

ในที่นี้ เราหาอนุพันธ์ เทียบกับ y และจาก (5) จะได้

$$[1+y^2]^{1/2} = 1/\cos(\theta/2) \qquad (4.6)$$

จากสมการ (4.3) หาอนุพันธ์ F เทียบกับ y' แล้วแทนค่า (4.5) และ (4.6) ลงไปจะได้

$$F_{y'} = (1/2gy)^{1/2}\sin(\theta/2) \qquad (4.7)$$

จากสมการที่ (4.7) พยายามทำทางขวามือให้กลับเป็นรูป F อีกครั้งหนึ่ง เพื่อจะได้หาอนุพันธ์เทียบกับ y อีกครั้งและจากสมการ (4.6) จะเขียนได้เป็น

$$F_{y'} = \frac{\sin(\theta/2).F}{(1+y^2)^{1/2}} \qquad (4.8)$$

เมื่อ b เป็นค่าคงที่ค่าหนึ่ง หาอนุพันธ์อีกครั้งเทียบกับ Y' จะได้

$$F_{y'y'} = \frac{\sin^2(\theta/2)}{2(gb)^{1/2}} \qquad (4.9)$$

จากสมการ (4.9)จะได้ว่า $F_{y'y'}$ มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เพราะตัวหารเป็นจำนวนบวก และค่า sin มีค่าอยู่ระหว่างศูนย์ถึงหนึ่ง นั่นแสดงว่าค่าที่หาออกมาได้นี้เป็นค่าต่ำสุดไม่ใช่ค่าสูงสุด ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข $F_{y'y'} \geq 0$ สำหรับในกรณีอื่นๆ ก็ใช้วิธีพิสูจน์คล้ายๆกัน จะไม่แสดงไว้ในที่นี้

สมการแฮมิลตัน

ในหัวข้อที่แล้วได้แสดงการหาค่าสูงสุดและต่ำสุดโดยใช้สมการของออยเลอร์ ซึ่งต่อไปนี้จะแสดงวิธีการหาโดยใช้สมการของ แฮมิลตัน ซึ่งแตกต่างจากที่ได้แสดงมาแล้วโดยสิ้นเชิง ซึ่งผลที่ได้นั้นมีค่าออกมาเหมือนกัน

สมการของ แฮมิลตัน คือ

$$\dot{p} = -\partial H/\partial q \qquad (A)$$

$$\dot{q} = \partial H/\partial P \qquad (B)$$

เมื่อ q คือ ฟังก์ชั่นของตำแหน่ง และ P เป็นฟังก์ชั่นของโมเมนตัม หรือทิศทางและได้ความสัมพันธ์ว่า

$$\partial L/\partial q = -\partial H/\partial q \qquad (C)$$

และ จะได้

$$P = \partial L/\partial \dot{q} \qquad (D)$$

$$H = \Sigma p\dot{q} - L(q,\dot{q}) \qquad (E)$$

ให้ทรงกระบอกกลิ้งด้วยความเร็วต้น U ไปยังจุดที่อยู่ต่ำกว่า จะหาสมการการเคลื่อนที่ของมัน

$$E_A = E_B \qquad (4.10)$$

$$mgh_1 + 1/2mu^2 + 1/2.Iw_1^2 = mgh_2 + 1/2mv^2 + 1/2Iw_2^2 \qquad (4.11)$$

แทนค่า $I = 1/2\ mR^2$ จะได้

$$v^2 = 4/3\ gy + u^2 \tag{4.12}$$

จาก ds คือ ระยะทางตามส่วนโค้ง A ไป B

dt คือ เวลาที่ใช้

$$T = \int_A^B ds/v \tag{4.13}$$

ดังนั้น จะได้เวลา
$$T = \sqrt{\frac{1+\dot{y}^2}{u^2+4/3\ gy}}\ dx \tag{4.14}$$

$$F = \sqrt{\frac{1+\dot{y}^2}{u^2+4/3\ gy}} \tag{4.15}$$

จะเห็นว่า ค่า U เป็นค่าคงที่ และ 4/3 g ก็เป็นค่าคงที่ ดังนั้นฟังก์ชั่นที่ต้องการศึกษาจริงๆนั้น จะมีเพียง

$$F = \sqrt{\frac{1+\dot{y}^2}{y}} \tag{4.16}$$

แล้วใช้ Lagendre transform ,yเป็น q ,เปลี่ยน$L(q,\dot{q},t)$ เป็น $H(q,p,t)$ <u>L ตัวนี้ ไม่ใช่พลังงานจลน์ลบด้วยพลังงานศักย์</u> ดังนั้นฟังก์ชั่นตามสมการ (4.16)จะเขียนได้เป็น $F(\dot{q},q)$ เพราะขึ้นอยู่กับค่าของ q และ q เปลี่ยน$F(\dot{q},q)$เป็น $L(\dot{q},q)$แล้วใช้สมการ

$$H(q,p) = \Sigma\, p\dot{q} - L(q,\dot{q})$$

โดย $P = \partial L/\partial \dot{q}$ จะสามารถหา H (p,q) ได้

$$L(\dot{q},q) = [(1+\dot{q}^2)/q]^{1/2} \tag{4.17}$$

นำสมการ(4.17) ไปแทนลงในสมการ C,D,E แล้วแก้สมการออกมาจะได้

$$H(p,q) = -[(1/q) - p^2]^{1/2} \tag{4.18}$$

ในการหาค่าต่ำสุดตามที่ได้ศึกษามาแล้วนั้น ได้แสดงว่า ถ้าหาอนุพันธ์ ให้ถึงอันดับสองแล้ว ถ้าผลลัพธ์ที่ได้มีค่ามากกว่า หรือเท่ากับศูนย์แล้ว ฟังก์ชั่นนั้นจะเป็นค่าต่ำสุดวิธีแรกที่แสดงให้ดูคือ ใช้สมการออยเลอร์ และหาได้ว่าฟังก์ชั่นที่สนใจ ในกรณีของทรงกระบอกที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วต้น U มายังจุดสุดท้ายที่อยู่ต่ำกว่า และแสดงให้เห็นแล้วว่า $F_{\dot{y}\dot{y}}$ มีค่า ≥ 0

ต่อไปนี้จะเป็นวิธีที่สองที่จะแสดงให้เห็น คือการใช้สมการแฮมิลตัน ที่เรากำลังหาอยู่นี้นั้นเองโดยจะหาจาก Legendre transformation ที่หาได้ไว้แล้วโดยใช้วิธีเหมือนกับที่เคยหามาแล้วคือหาอนุพันธ์ไปจนถึงอันดับที่สอง ถ้าค่าที่ได้มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ แสดงว่าฟังก์ชั่นที่หาออกมานี้เป็นค่าต่ำสุด จะหาอนุพันธ์ H ถึงอันดับที่สอง ถ้าผลที่ได้ออกมามีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์แสดงว่าฟังก์ชั่นที่หามาด้วยการใช้สมการแฮมิลตันนี้เป็นค่าต่ำสุด

จากสมการบนจะได้
$$H = -\sqrt{\frac{1-p^2q}{q}} \tag{4.19}$$

หาอนุพันธ์ ครั้งที่ 1 จากสมการแฮมิลตันเทียบกับ q

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\left[\sqrt{(1-pq)}(-1/2)\sqrt{q^{-3}} - \sqrt{q^{-1}}\,(1/2)\sqrt{(1-p^2q)^{-1}}\,(p)^2\right] \tag{4.20}$$

หาอนุพันธ์ ครั้งที่ 2

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} = (1/2)d\left[(1-p^2q)^{1/2}q^{-3/2}\right] + (1/2)p^2 d\sqrt{[(1-p^2q)q]^{-1}} \tag{4.21}$$

ทำทีละเทอม ที่เทอมแรกก่อน ดังนั้นจะได้สมการรวมเป็น

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} = \frac{(-3/4)(1-p^2q)^{1/2}}{q^{5/2}} - \frac{(1/4)\ p^2}{q^{3/2}(1-p^2q)^{1/2}} - \frac{(1/4)\ p^2}{(1-p^2q)^{1/2}q^{3/2}} + \frac{(1/4)p^4}{(1-p^2q)^{3/2}q^{1/2}} \quad (4.22)$$

กระจายเทอมยกกำลังสองให้เป็นผลสำเร็จ จะได้

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} = \frac{-\ 3 + 4\ p^2q}{4q^{5/2}(1-p^2q)^{3/2}} \quad (4.23)$$

เริ่มต้นสมการใหม่จาก $H = -\ [(1-pq)/q]^{1/2}$ (4.24)

ยกกำลัง 3 จะได้ $-\ H^3\ q^{3/2} = [1-p^2q]^{3/2}$ (4.25)

เอา $(1-p^2q)^{3/2}$ ไปแทนในสมการ ($\partial^2 H/\partial q^2$) สมการสุดท้ายที่ได้ จะได้

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} = \frac{3\ -\ 4\ p^2q}{4\ q^4\ H^3} \quad (4.26)$$

$$3\ -\ 4\ p^2q\ =\ 0 \quad (4.27)$$

หรือ $p^2\ q\ =\ 3/4$ (4.28)

นั่นคือเมื่อหาอนุพันธ์ มาจนถึงอันดับสองแล้วค่าที่ได้จะออกมาเป็นบวก นั่นแสดงว่าค่าฟังก์ชั่นที่หามาได้นี้เป็นค่าต่ำสุด การใช้สมการ แฮมิลตัน หาค่าสูงสุดต่ำสุดนั้นยากกว่าวิธีการของออยเลอร์ เพราะมีทั้งตำแหน่งและโมเมนตัมพร้อมๆกัน แต่ก็ให้รายละเอียดได้ชัดกว่า