หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 2

วิธีฟรอนทัล (Frontal Method)

2.1 ความนำ

ปัญหาในการวิเคราะห์โครงสร้างทั่ว ๆ ไป จะเป็นการแก้ปัญหาของสมการที่มีความสัมพันธ์กันเป็นเส้นตรง

$$\underline{\underline{K}}\,\underline{U} = \underline{F} \qquad (2.1)$$

โดยที่ $\underline{\underline{K}}$ = สติฟเนสเมทริกซ์ของชิ้นส่วนย่อยในพิกัดของโครงสร้าง

$\underline{U}$ = เวคเตอร์ของค่าการเคลื่อนที่ที่ยังไม่ทราบในพิกัดของโครงสร้าง

$\underline{F}$ = เวคเตอร์ของแรงกระทำที่ปลายในพิกัดของโครงสร้าง

หลักการของวิธีการฟรอนทัลได้มาจากวิธีการยองเกาซ์ (Gauss Process) เมื่อต้องการกำจัดค่าดีกรียองความอิสระ Un ดังนี้

$$k'_{ij} = k_{ij} - k^*_{nj}\,\frac{k^*_{ni}}{k^*_{nn}} \qquad (2.2)$$

$$f'_i = f_i - f^*_n\,\frac{k^*_{ni}}{k^*_{nn}} \qquad (2.3)$$

โดยที่

n = ลำดับที่ยองดีกรียองความอิสระที่ถูกกำจัดออก

k_{ij}, f_i = สัมประสิทธิ์ก่อนทำการกำจัดค่าดีกรียองความอิสระ

k'_{ij}, f'_i = สัมประสิทธิ์หลังจากการกำจัดค่าดีกรียองความอิสระ

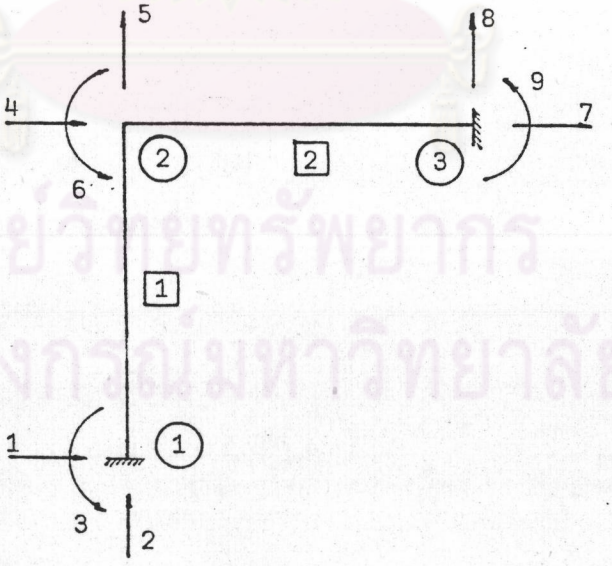
k^*_{nj}, k^*_{ni}, k^*_{nn}, f^*_n = สัมประสิทธิ์ที่อยู่ในสมการเดียวกับดีกรียองความอิสระที่ถูกกำจัดออก

วิธีการฟรอนทัลนี้จะเป็นการรวมสติฟเนสเมทริกซ์ และเวคเตอร์ของแรงของยืนส่วนย่อย เข้าด้วยกันทีละยืนส่วน และทำการกำจัดค่าดีกรีของความอิสระของยั้วที่ไม่ได้ต่อกับยืนส่วนอื่น โดยใช้วิธีการของเกาส์ เก็บเฉพาะค่าสัมประสิทธิ์ของสติฟเนสเมทริกซ์ และเวคเตอร์ของแรงของค่าดีกรีของความอิสระที่ถูกกำจัดออกไปไว้ในแผ่นจานแม่เหล็ก (Diskette) ดังนั้น จึงมีแต่เพียงสัมประสิทธิ์ของสติฟเนสเมทริกซ์ และเวคเตอร์ของแรงของยั้วที่ไม่ถูกกำจัดออกอยู่ในหน่วยความจำของเครื่อง ซึ่งเป็นส่วนน้อย ทำให้วิเคราะห์โครงสร้างใหญ่ ๆ ที่มีจุดต่อมาก ๆ ได้

วิธีฟรอนทัลจะมีตัวแปรชุดที่ชื่อ ฟรอนท์ (Front) ทำหน้าที่เก็บข้อมูลเลขที่ยั้วที่เข้ามาในฟรอนท์ทั้งก่อนและหลังที่มีการกำจัดค่าใดออกไปในบางครั้งฟรอนท์อาจหมายถึงค่าดีกรีของความอิสระหรือสมการ (Equation) ก็ได้

2.2 วิธีการฟรอนทัลในการวิเคราะห์โครงสร้าง

จากรูปที่ 2.1 เป็นโครงสร้างตัวอย่างมี 2 ยืนส่วนย่อย และ 3 ยั้ว ลำดับยั้ว ลำดับยืนส่วนย่อย และลำดับค่าดีกรีของความอิสระเป็นดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 ตัวอย่างโครงสร้าง

สติฟเนสเมทริกซ์ และเวคเตอร์ของแรงของยืนส่วนย่อยที่ 1 และที่ 2 คือ $\underset{\sim}{K}_1$ $F_{\sim 1}$, $\underset{\sim}{K}_2$ และ $F_{\sim 2}$ ตามลำดับ โดยที่

$$\underset{\sim}{K}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \qquad (2.4)$$

$$\underset{\sim}{F}_1 = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{Bmatrix} \qquad (2.5)$$

$$\underset{\sim}{K}_2 = \begin{bmatrix} b_{44} & b_{45} & b_{46} & b_{47} & b_{48} & b_{49} \\ b_{54} & b_{55} & b_{56} & b_{57} & b_{58} & b_{59} \\ b_{64} & b_{65} & b_{66} & b_{67} & b_{68} & b_{69} \\ b_{74} & b_{75} & b_{76} & b_{77} & b_{78} & b_{79} \\ b_{84} & b_{85} & b_{86} & b_{87} & b_{88} & b_{89} \\ b_{94} & b_{95} & b_{96} & b_{97} & b_{98} & b_{99} \end{bmatrix} \qquad (2.6)$$

$$\underset{\sim}{F}_2 = \begin{Bmatrix} d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \\ d_9 \end{Bmatrix} \qquad (2.7)$$

ขั้นตอนวิธีการฟรอนทัลมีดังต่อไปนี้

2.2.1 นำชิ้นส่วนที่ 1 เข้ามาในฟรอนท์ ทำการกำจัดค่าดีกรีของความอิสระของขั้วที่ 1 จะได้ สัมประสิทธิ์ของสติฟเนสเมทริกซ์ และเวคเตอร์ของแรงดังนี้

$$\underset{\sim}{K}'_1 = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} & a'_{15} & a'_{16} \\ o & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & a'_{25} & a'_{26} \\ o & o & a'_{33} & a'_{34} & a'_{35} & a'_{36} \\ o & o & o & a'_{44} & a'_{45} & a'_{46} \\ o & o & o & a'_{54} & a'_{55} & a'_{56} \\ o & o & o & a'_{64} & a'_{65} & a'_{66} \end{bmatrix} \qquad (2.8)$$

$$\underset{\sim}{K}'_1 = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{R} & \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{S} \end{bmatrix} \qquad (2.9)$$

$$\underset{\sim}{F}'_1 = \begin{Bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \\ c'_4 \\ c'_5 \\ c'_6 \end{Bmatrix} \qquad (2.10)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\underset{\sim}{F}_1 = \left\{ \begin{array}{c} \underset{\sim}{P} \\ \hline \\ \underset{\sim}{Q} \end{array} \right\} \qquad (2.11)$$

โดยที่

$\underset{\sim}{R}$, $\underset{\sim}{P}$ – สัมประสิทธิ์ของสติฟเนสเมทริกซ์และเวคเตอร์ของแรงของดีกรีของความอิสระที่ถูกกำจัดออกไปตามลำดับ

$\underset{\sim}{S}$, $\underset{\sim}{Q}$ – สัมประสิทธิ์ของสติฟเนสเมทริกซ์และเวคเตอร์ของแรงของดีกรีของความอิสระที่ยังไม่ถูกกำจัดออกไป ตามลำดับ

$\underset{\sim}{R}$ และ $\underset{\sim}{P}$ นำไปใช้ในการแทนค่าย้อนกลับเพื่อหาค่าดีกรีของความอิสระ

2.2.2 นำขั้นส่วนที่ 2 เข้ามารวมจะต้องรวมสติฟเนสเมทริกซ์ และเวคเตอร์ของแรงของขั้นส่วนที่ 2 ($\underset{\sim}{K}_2$ และ $\underset{\sim}{F}_2$ ตามลำดับ) กับสัมประสิทธิ์ของสติฟเนสเมทริกซ์ และเวคเตอร์ของแรงของดีกรีของความอิสระที่ไม่ถูกกำจัดออกในขั้นตอนที่ 2.2.1 ($\underset{\sim}{S}$ และ $\underset{\sim}{Q}$ ตามลำดับ) ได้ $\underset{\sim}{K}'_2$ และ $\underset{\sim}{F}'_2$ ดังนี้

$$\underset{\sim}{K}'_2 = \begin{bmatrix} a'_{44}+b_{44} & a'_{45}+b_{45} & a'_{46}+b_{46} & b_{47} & b_{48} & b_{49} \\ a'_{54}+b_{54} & a'_{55}+b_{55} & a'_{56}+b_{56} & b_{57} & b_{58} & b_{59} \\ a'_{64}+b_{64} & a'_{65}+b_{65} & a'_{66}+b_{66} & b_{67} & b_{68} & b_{69} \\ b_{74} & b_{75} & b_{76} & b_{77} & b_{78} & b_{79} \\ b_{84} & b_{85} & b_{86} & b_{87} & b_{88} & b_{89} \\ b_{94} & b_{95} & b_{96} & b_{97} & b_{98} & b_{99} \end{bmatrix} \qquad (2.12)$$

$$\underset{\sim}{F}_2' = \begin{Bmatrix} c_4' + d_4 \\ c_5' + d_5 \\ c_6' + d_6 \\ d_7 \\ d_8 \\ d_9 \end{Bmatrix} \qquad (2.13)$$

2.2.3 กำจัดค่าดีกรีของความอิสระทั้งยั้วที่ 2 และ 3 ออก จะได้สัมประสิทธิ์ของสติฟเนสเมทริกซ์ และเวคเตอร์ของแรง $\underset{\simeq}{K}_2''$ และ $\underset{\sim}{F}_2''$ ตามลำดับดังนี้

$$\underset{\simeq}{K}_2'' = \begin{bmatrix} b_{44}' & b_{45}' & b_{46}' & b_{47}' & b_{48}' & b_{49}' \\ o & b_{55}' & b_{56}' & b_{57}' & b_{58}' & b_{59}' \\ o & o & b_{66}' & b_{67}' & b_{68}' & b_{69}' \\ o & o & o & b_{77}' & b_{78}' & b_{79}' \\ o & o & o & o & b_{88}' & b_{89}' \\ o & o & o & o & o & b_{99}' \end{bmatrix} \qquad (2.14)$$

$$\underset{\sim}{F}_2'' = \begin{Bmatrix} d_4' \\ d_5' \\ d_6' \\ d_7' \\ d_8' \\ d_9' \end{Bmatrix} \qquad (2.15)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2.2.4 แทนค่าย้อนกลับในขั้นตอนที่ 2.2.3 ตามสมการที่ 2.1 จะได้ค่าดีกรีของความอิสระที่ข้อ 2 และ 3

2.2.5 แทนค่าย้อนกลับในขั้นตอนที่ 2.2.1 ด้วยค่าดีกรีของความอิสระที่ข้อ 2 ซึ่งหาได้ในขั้นตอนที่ 2.2.4 จะได้ค่าดีกรีของความอิสระที่ข้อ 1

จากขั้นตอนที่ 2.2.1 - 2.2.5 จะได้ค่าการเคลื่อนที่ที่ข้อแต่ละข้อออกมา จึงนำค่าเหล่านี้ไปคำนวณหาแรงภายในที่ปลายของชิ้นส่วนย่อยต่อไป

2.3 <u>วิธีการฟรอนทัลในการประยุกต์กับไมโครคอมพิวเตอร์</u>

การนำเอาวิธีฟรอนทัลมาใช้กับไมโครคอมพิวเตอร์ สำหรับวิเคราะห์โครงสร้างชนิดโครงระนาบนี้ จะมีขั้นตอนการทำงานของไมโครคอมพิวเตอร์ ย่อ ๆ ดังแผนภูมิในรูปที่ 2.2 รายละเอียดตามขั้นตอนต่อไปนี้ (พิจารณารูปที่ 2.3)

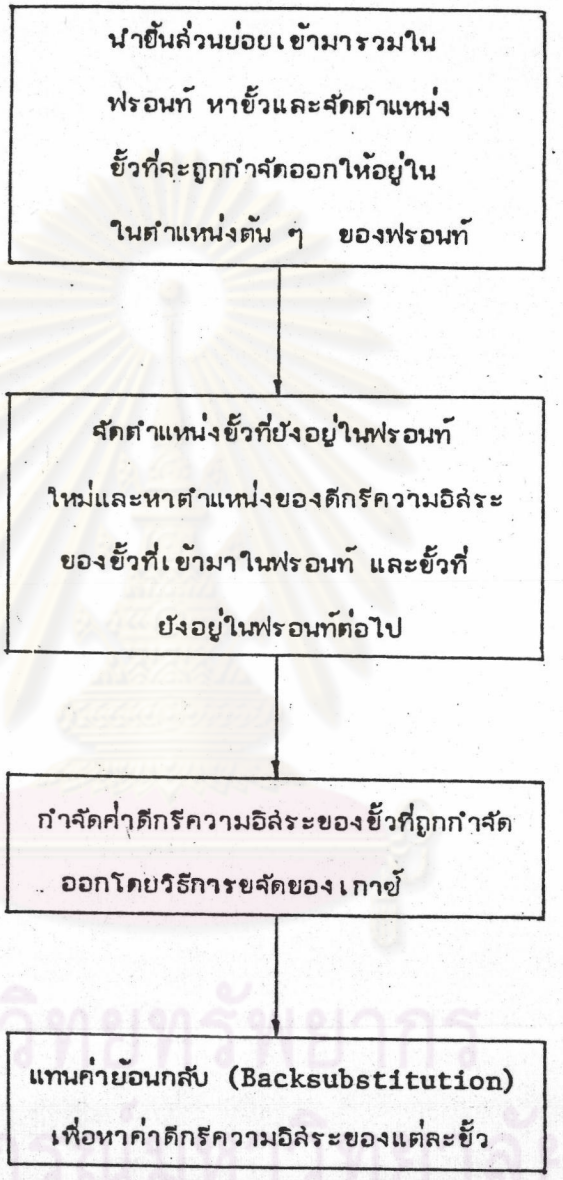
2.3.1 นำชิ้นส่วนย่อยเข้ามารวมในฟรอนท์ทีละชิ้นส่วน ดังรูปที่ 2.5 และเก็บข้อมูลเลขที่ชิ้นไว้ในฟรอนท์ พร้อมทั้งหาเลขที่ข้อที่จะถูกกำจัดออกจากฟรอนท์ จัดตำแหน่งข้อที่จะถูกกำจัดออกให้อยู่ในตำแหน่งต้น ๆ ของฟรอนท์ ดังรูปที่ 2.6

2.3.2 จัดตำแหน่งของข้อที่ยังอยู่ในฟรอนท์ต่อไปให้อยู่ในตำแหน่งเดิม ดังรูปที่ 2.7 จนกว่าจะถูกกำจัดออกไป พร้อมทั้งหาตำแหน่งของดีกรีของความอิสระของข้อที่เข้ามาในฟรอนท์และข้อที่ยังคงอยู่ในฟรอนท์ต่อไป

2.3.3 ทำการกำจัดค่าดีกรีของความอิสระของข้อที่จะถูกกำจัดออกในขั้นตอนที่ 2.3.1 ตามสมการที่ 2.1 โดยวิธีการของเกาส์ แล้วเก็บข้อมูลของสัมประสิทธิ์ของสติฟเนสเมทริกซ์ และเวคเตอร์ของแรงของดีกรีของความอิสระที่ถูกกำจัดออกไว้ในแผ่นจานแม่เหล็ก สติฟเนสเมทริกซ์ และเวคเตอร์ของแรงที่เหลือจะถูกนำไปรวมกับของชิ้นส่วนต่อไป

2.3.4 แทนค่าย้อนกลับ (Backsubstitution) จากสมการสุดท้ายจนถึงสมการแรก จะได้ค่าดีกรีของความอิสระที่แต่ละข้อ

พิจารณารูปที่ 2.3 ก. ซึ่งประกอบด้วยชิ้นส่วนย่อย 9 ชิ้นส่วน สมมติให้แต่ละข้อมีค่าดีกรีของความอิสระ เท่ากับ 1 รวมชิ้นส่วนย่อยโดยเริ่มที่ชิ้นส่วนที่ 1 จะมีข้อที่ 1 และข้อที่ 3 อยู่ในฟรอนท์ ข้อที่ 1 จะไม่ต่อกับชิ้นส่วนอื่น จึงจะถูกกำจัดออกจากฟรอนท์ จากนั้นจึงนำชิ้น-



รูปที่ 2.2 แผนภูมิแสดงขั้นตอนของวิธีฟรอนทัล

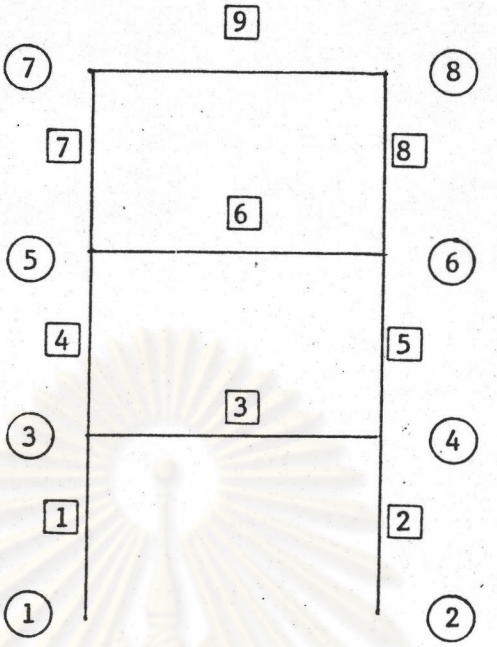
ส่วนที่ 2 เข้ามารวมกับยื่นส่วนแรก ทำให้ฟรอนท์มียนาดใหญ่ยื่น ประกอบด้วย 2, 3 และ 4 ในฟรอนท์ที่ 2 นี้ ยั้วที่ 2 จะถูกกำจัดออกไปจากฟรอนท์ ในการหาฟรอนท์ที่เหลือก็จะกระทำเช่นเดียวกัน ยั้วต่าง ๆ ที่ยังคงอยู่ในฟรอนท์ และจะถูกกำจัดออกจากฟรอนท์ จะแสดงไว้ในรูปที่ 2.3 ย.

ขณะทำการรวมยื่นส่วนย่อย จะทำการจัดตำแหน่งของยั้วที่ยังอยู่ในฟรอนท์ต่อไป ทั้งนี้เพื่อให้ตำแหน่งของยั้วที่จะถูกกำจัดในฟรอนท์ต่อไป อยู่ในตำแหน่งที่ถูกต้อง และเพื่อให้มีการสับเปลี่ยนตำแหน่งของยั้วที่ยังไม่ถูกกำจัดออกให้น้อยที่สุด เป็นการลดเวลาการทำงานของเครื่องที่จะทำการโยกย้ายตำแหน่งที่อยู่บ่อย ๆ

ขนาดฟรอนท์ยื่นอยู่กับการจัดลำดับของยื่นส่วนย่อย ดังรูปที่ 2.3.ก. ฟรอนท์จะมีขนาดใหญ่ที่สุดเมื่อมีจำนวนยั้ว 3 ยั้ว ส่วนในรูปที่ 2.4.ก. ฟรอนท์จะมีขนาดใหญ่ที่สุดเมื่อมีจำนวนยั้ว 4 ยั้ว เห็นได้ว่าการจัดลำดับของยื่นส่วนย่อยไปทางด้านลั้น จะให้ขนาดของฟรอนท์ที่เล็กกว่าการจัดลำดับไปทางด้านยาว ความต้องการเนื้อที่ในหน่วยความจำของเครื่องไมโครคอมพิวเตอร์จึงน้อยลงไปด้วย

จากตัวอย่างในรูปที่ 2.3.ก. สมมติให้แต่ละยั้วมีค่าดีกรีของความอิสระเท่ากับ 3 ค่า ดังนั้นฟรอนท์ที่ใหญ่ที่สุดจะใช้เนื้อที่ในการเก็บสัมประสิทธิ์ของสติฟเนสเมทริกซ์เพียง 45 ตัว ถ้าใช้วิธีการเก็บแบบเมทริกซ์แถบที่สมมาตร (Banded Symmetric Matrix) [2] จะต้องใช้เนื้อที่เก็บถึง 216 ตัว จะเห็นได้ว่ามีค่าต่างกันมากในทั้งสองวิธี

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



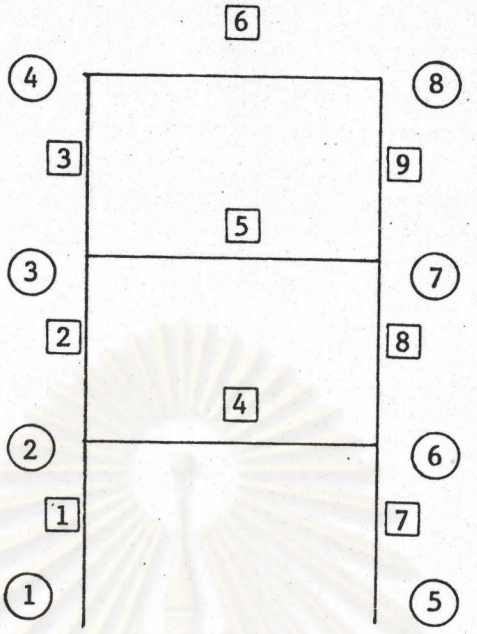
(ก) การจัดลำดับยื่นล่วนย่อยและขั้ว

ฟรอนท์	ยื่นล่วนที่	เลยที่ขั้วในฟรอนท์	
		ขั้วที่ถูกกำจัด	ขั้วที่ยังคงอยู่
1	1	1	3
2	2	2	3 4
3	3	–	4 3
4	4	3	4 5
5	5	4	6 5
6	6	–	5 6
7	7	5	6 7
8	8	6	8 7
9	9	7 8	–

(ข) การรวมยื่นล่วนย่อยและการกำจัดขั้ว

รูปที่ 2.3 ตัวอย่างวิธีการฟรอนทัล

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



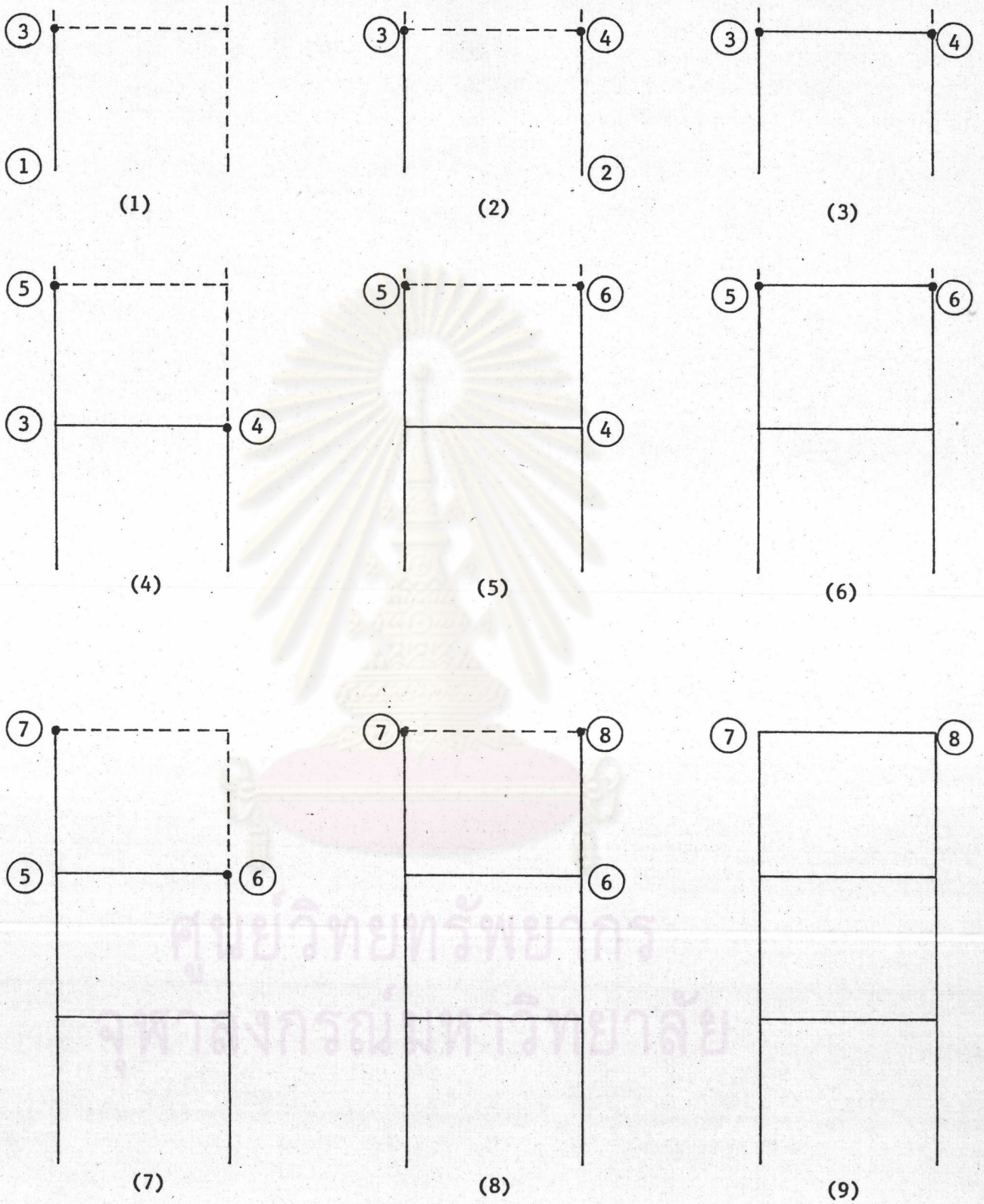
(ก) การจัดลำดับยื้นล่วนย่อยและยั้ว

ฟรอนท์	ยื้นล่วนที่	เลยที่ยั้วในฟรอนท์	
		ยั้วที่ถูกกำจัด	ยั้วที่ยังคงอยู่
1	1	1	2
2	2	–	3 2
3	3	–	3 2 4
4	4	2	3 4 6
5	5	3	7 4 6
6	6	4	7 8 6
7	7	5	7 8 6
8	8	6	7 8
9	9	8 7	–

(ข) การรวมยื้นล่วนย่อยและการกำจัดยั้ว

รูปที่ 2.4 ตัวอย่างวิธีการฟรอนทัล

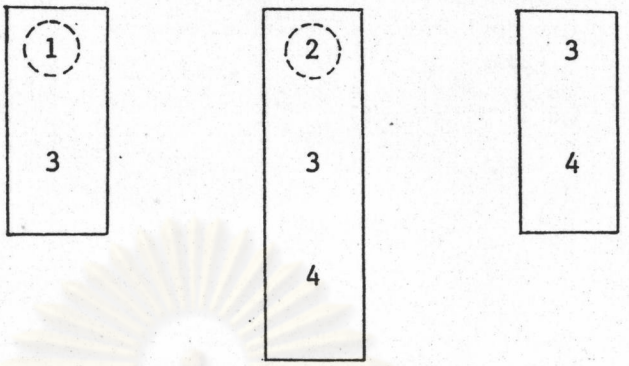
009755



• – ยั๊วที่ยังอยู่ในฟรอนท์ต่อไป

รูปที่ 2.5 แสดงการรวมยีนล่วนย่อย

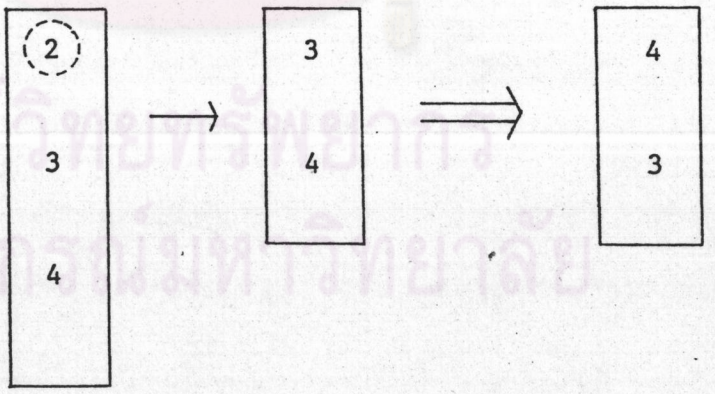
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ฟรอนท์ที่ 1 2 3 . . . .

◯ - ยั้วที่ถูกกำจัดออกจากฟรอนท์

รูปที่ 2.6 แสดงยั้วที่อยู่ในฟรอนท์



ฟรอนท์ที่ 2 (ปัจจุบัน) ฟรอนท์ที่ 3 (ต่อไป) ฟรอนท์ที่ 3 (หลังจากจัดตำแหน่ง)

รูปที่ 2.7 แสดงการจัดตำแหน่งยั้วระหว่าง 2 ฟรอนท์