บทที่ 3

การคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

การคำนวณหาค่าสนามไฟฟ้านั้น สามารถทำได้หลายวิธี ได้แก่

1) วิธีเชิงวิเคราะห์ (Analytical Method) เป็นการหาสนามไฟฟ้าด้วยสมการคณิต-ศาสตร์วิเคราะห์ ผลลัพธ์ที่ได้จะมีความแม่นยำสูง แต่ในทางปฏิบัติแล้ว วิธีนี้จะเหมาะกับสนามไฟฟ้าที่มีรูปแบบไม่ซับซ้อนเท่านั้น
2) วิธีเชิงเลข (Numerical Method) เป็นวิธีที่นิยมใช้กันมากในปัจจุบัน เพราะสามารถใช้ได้กับสนามไฟฟ้าที่มีรูปแบบซับซ้อนได้ และผลลัพธ์ที่ได้ก็มีความแม่นยำเพียงพอ ตัวอย่างของวิธีเชิงเลขที่ใช้กันอยู่ได้แก่
   - ก) วิธีจำลองแบบประจุ (Charge Simulation Method)
   - ข) วิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite Difference Method)
   - ค) วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ (Finite Element Method)

การวิจัยนี้ ใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในการหาค่าสนามไฟฟ้าภายในระบบฉนวน เนื่องจาก

- ก) สามารถคำนวณบนบริเวณที่ประกอบด้วยตัวกลางมากกว่า 1 ชนิดได้สะดวกกว่าวิธีจำลองแบบประจุ โดยเฉพาะในกรณีของลูกถ้วยฉนวน ซึ่งมีรูปลักษณะที่ซับ-ซ้อน
- ข) มีความยืดหยุ่นในการเลือกใช้ชนิดของอีลีเมนต์ในการคำนวณมากกว่าวิธีผลต่างสืบเนื่อง(Finite Difference Method)
- ค) สามารถคำนวณบนปัญหาบริเวณเปิดได้โดยใช้การแปลงทางคณิตศาสตร์เข้าช่วย
- ง) สามารถคำนวณบนบริเวณที่ประกอบด้วยสารกึ่งตัวนำได้โดยง่าย

3.1 สมการพื้นฐานของสนามไฟฟ้า

สมการพื้นฐานของสนามไฟฟ้าที่จะใช้คือ[1]

$$\nabla\vec{E} = -\rho / \varepsilon$$
$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

เมื่อ $\vec{E}$ คือความเครียดสนามไฟฟ้า

ϕ คือศักย์ไฟฟ้า

ε คือค่าคงตัวไดอิเล็กตริก

ρ คือความหนาแน่นของประจุไฟฟ้า

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

ฉะนั้น จะได้ว่า

$$-\varepsilon\nabla^2\phi = \rho \tag{3.1}$$

ถ้าหากระบบไฟฟ้าที่พิจารณาประกอบด้วยวัสดุชนิดแอนไอโซทรอปิก (Anisotropic material) จะเขียนตัวดำเนินการ ∇ และค่าคงตัวไดอิเล็กตริกในรูปเมตริกซ์ได้โดย

$$\nabla = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

แสดงความเครียดสนามไฟฟ้าในรูปเมตริกซ์ได้เป็น

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\phi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \tag{3.2}$$

ซึ่งจะเขียนสมการที่ (3.1)ให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้เป็น

$$\nabla^t \varepsilon\mathbf{E} = \nabla^t \varepsilon\nabla\phi = -\rho \tag{3.3}$$

เนื่องจากในระบบที่ต้องการศึกษานั้น จะเป็นวัสดุชนิดไอโซทรอปิก (Isotropic material) ซึ่งมีค่าคงตัวไดอิเล็กตริกคงที่ไม่ขึ้นกับทิศทาง และเนื่องจากเป็นระบบฉนวนสมบูรณ์แบบ ค่าของความหนาแน่นของประจุไฟฟ้าจะมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้น จะได้รูปของสมการเป็น

$$\nabla^t \varepsilon\nabla\phi = 0$$
$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right) = 0 \tag{3.4}$$

และ ค่าความเครียดสนามไฟฟ้าจะเป็นไปตามสมการ

$$\vec{E} = -\nabla\phi = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\phi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial z} \end{bmatrix}$$

3.2 วิธีการไฟไนต์อีลีเมนต์

วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์เป็นวิธีการหนึ่งที่สามารถนำมาใช้แก้หาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary value problem) ดังเช่นในกรณีของการวิเคราะห์สนามไฟฟ้านี้วิธีการไฟไนต์อีลีเมนต์จะวิเคราะห์ปัญหาโดยการแปลงสมการอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปของสมการอินทิกรัลซึ่งมีการอินทิเกรตเหนือบริเวณของการวิเคราะห์ ต่อจากนั้นจึงแบ่งบริเวณออกเป็นส่วนย่อย เรียกว่า<u>อีลีเมนต์</u> เพื่อให้สามารถคำนวณหาอินทิเกรตโดยอาศัยของการอินทิเกรตเหนือบริเวณอีลีเมนต์ การคำนวณอินทิเกรตเหนือบริเวณอีลีเมนต์จะทำโดยประมาณฟังก์ชันโพลิโนเมียลซึ่งง่ายต่อการอินทิเกรต เมื่อทำการอินทิเกรตแต่ละอีลีเมนต์แล้วจะนำผลลัพธ์ที่ได้มารวมกันในรูปของสมการเมตริกซ์แล้วจึงแก้สมการหาคำตอบด้วยคอมพิวเตอร์โปรแกรม

การประมาณฟังก์ชันของศักย์ไฟฟ้าในแต่ละอีลีเมนต์และฟังก์ชันรูปร่าง(Shape function)

การประมาณจะทำโดยแบ่งบริเวณของการวิเคราะห์ออกเป็นบริเวณย่อย ๆ ที่เป็นรูปสามเหลี่ยม อีลีเมนต์จะประกอบด้วยจุด (Node) ดังรูปที่ 3.1 [12]จะเห็นว่าอีลีเมนต์สามเหลี่ยมจะประกอบด้วยจุด i, j, m ตามลำดับและนับแบบทวนเข็มนาฬิกา

การประมาณศักย์ไฟฟ้าที่จุดใด ๆ ในแต่ละอีลีเมนต์จะทำด้วยสมการพหุนาม[12]

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 x^2 + \ldots$$

ซึ่งในที่นี้จะใช้การประมาณด้วยสมการพหุนามกำลังหนึ่ง คือ

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad \underline{\text{สำหรับอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยม}} \qquad (3.5)$$

ดังนั้นที่จุด i , j และ m จะมีค่าศักย์ไฟฟ้าเป็น

$$\phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \tag{3.6}$$

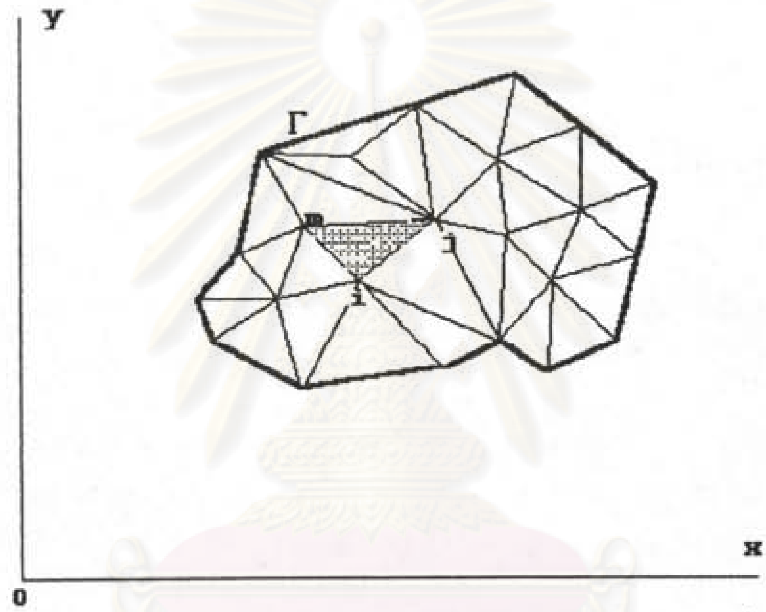
$$\phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \tag{3.7}$$

$$\phi_m = \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m \tag{3.8}$$

โดย

ϕ_i, ϕ_j, ϕ_m เป็นศักย์ไฟฟ้าของจุด i, j, m ตามลำดับ

(x,y) เป็นพิกัดของจุดทั้งสาม



รูปที่ 3.1 แสดงการแบ่งบริเวณ 2 มิติเป็นอีลีเมนต์ย่อยรูปสามเหลี่ยม

จากสมการที่ (3.6) , (3.7) และ (3.8) อาจเขียน α ในรูปของ ϕ_i, ϕ_j, ϕ_m แล้วนำไปแทนลงในสมการที่ (3.5) ทำการจัดรูปใหม่จะได้ฟังก์ชันสำหรับการประมาณค่าศักย์ไฟฟ้าเป็น

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2(\Delta A)}\left[(a_i + b_i x + c_i y)\phi_i + (a_j + b_j x + c_j y)\phi_j + (a_m + b_m x + c_m y)\phi_m\right] \tag{3.9}$$

เมื่อ a, bและ c เป็นค่าคงที่ซึ่งขึ้นกับตำแหน่งของจุดของอีลีเมนต์

$$a_i = x_i y_m - x_m y_i \tag{3.10}$$

$$b_i = y_j - y_m \tag{3.11}$$

$$c_i = x_m - x_j \tag{3.12}$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} \tag{3.13}$$

ค่าของ ΔA จะเท่ากับพื้นที่ของอีลีเมนต์ ijm นั่นเอง

จากสมการที่ (3.9) จะเห็นว่าค่าศักย์ไฟฟ้าจากการประมาณในแต่ละอีลีเมนต์จะขึ้นอยู่กับ

- ศักย์ไฟฟ้าที่จุดทั้งสามของสามเหลี่ยม
- ตำแหน่งของจุดทั้งสามของสามเหลี่ยม
- ตำแหน่งของจุดที่ประมาณค่า

ถ้ากำหนดให้ N_i เป็นฟังก์ชันรูปร่างของจุด i ในอีลีเมนต์ โดยในที่นี้จะเท่ากับ $\frac{a_i + b_i x + c_i y}{2(\Delta A)}$ เมื่อจุด (x,y) อยู่ในอีลีเมนต์ และเท่ากับศูนย์เมื่อจุดไม่อยู่ในอีลีเมนต์ สามารถเขียนแรงดันไฟฟ้าให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ที่ขึ้นกับค่าแรงดันที่จุดในแต่ละอีลีเมนต์ได้เป็น

$$\phi = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_m \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

ถ้าพิจารณาฟังก์ชันรูปแบบของจุด i ในอีลีเมนต์ จะพบว่า N_i มีค่าเท่ากับหนึ่งบนจุด i และมีค่าเท่ากับศูนย์บนจุด j และ m และศักย์ไฟฟ้าจากการประมาณภายในอีลีเมนต์จะเป็นผลรวมของผลคูณของฟังก์ชันรูปแบบกับศักย์ไฟฟ้าของจุดทั้งสามนั่นเอง

3.3 การสร้างสมการอินทิกรัลของปัญหาที่วิเคราะห์

ในวิธีการไฟไนต์อีลีเมนต์จะวิเคราะห์ปัญหาโดยการแปลงสมการอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปของสมการอินทิกรัลเพื่อให้สามารถคำนวณหาอินทิเกรตโดยอาศัยของการอินทิเกรตเหนือบริเวณอีลีเมนต์ และสร้างสมการเชิงเส้นเพื่อหาคำตอบของปัญหา

พิจารณากลุ่มของสมการอนุพันธ์ที่ต้องการหาคำตอบ

$$A(v) = \begin{Bmatrix} A_1(v) \\ A_2(v) \\ \dots \end{Bmatrix} = 0 \tag{3.15}$$

v คือ คำตอบที่ต้องการ

โดยในบริเวณซึ่งอาจจะเป็นปริมาตร หรือ พื้นที่ จะกำหนดด้วยเงื่อนไขขอบเขต

$$\mathbf{B}(v) = \begin{Bmatrix} B_1(v) \\ B_2(v) \\ \dots \end{Bmatrix} = 0 \qquad (3.16)$$

วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์จะหาคำตอบของสมการในรูปของการประมาณ

$$\phi \approx \hat{\phi} = \mathbf{N}\overline{\phi} = \sum_i^n N_i \phi_i \qquad (3.17)$$

โดยที่ N_i หมายถึง ฟังก์ชันรูปแบบซึ่งเป็นฟังก์ชันของพิกัด

ϕ_i หมายถึง ศักย์ไฟฟ้าที่จุด i

n หมายถึง จำนวนของจุดทั้งหมดภายในบริเวณ

จะสังเกตเห็นได้ว่าฟังก์ชันรูปแบบนั้นจะกำหนดโดยอีลีเมนต์ และถ้าแทนสมการที่ (3.15) ให้อยู่ในรูปอินทิกรัลได้ ก็จะสามารถแทนการประมาณของสมการที่ (3.17) ลงในสมการที่ (3.15) ได้

นั่นคือ จะต้องปรับรูปของสมการให้อยู่ในรูปของ

$$\int_\Omega G_j(\hat{\phi}) \cdot d\Omega + \int_\Gamma g_j(\hat{\phi}) \cdot d\Gamma = 0 \qquad (3.18)$$

j = 1, 2, ..., n

ซึ่ง G_j และ g_j เป็นฟังก์ชันหรือตัวดำเนินการที่ทราบค่า สมการที่ (3.18) จะประมาณได้เป็น

$$\int_\Omega G_j(\hat{\phi}) \cdot d\Omega + \int_\Gamma g_j(\hat{\phi}) \cdot d\Gamma = \sum_{e=1}^{m} \left(\int_{\Omega_e} G_j(\hat{\phi}) \cdot d\Omega + \int_{\Gamma_e} g_j(\hat{\phi}) \cdot d\Gamma \right) \qquad (3.19)$$

เมื่อ Ωe และ Γe เป็น บริเวณและขอบเขตของอีลีเมนต์ย่อย ๆ ตามลำดับ

ดังนั้น หลักการสำคัญของวิธีการไฟไนต์อีลีเมนต์คือ การแปลงรูปแบบของปัญหาจากสมการอนุพันธ์มาอยู่ในรูปของสมการอินทิกรัล ดังเช่นสมการที่ (3.19) ซึ่งสามารถกระทำได้ 2 วิธี [12] คือ

1) วิธีเศษค้างถ่วงน้ำหนัก (Weighted Residual Method)

2) หลักการแปรผัน (Variational Principles)

ในที่นี้จะกล่าวถึงวิธีที่ 2 เท่านั้น เนื่องจากในกรณีของสนามไฟฟ้าสถิตวิธีทั้งสองได้รูปของสมการอินทิกรัลสุดท้ายเหมือนกัน[12] แต่วิธีที่ 2 จะให้ความหมายทางกายภาพ ทำให้สามารถเข้าใจได้โดยง่าย

3.4 หลักการแปรผัน

หลักการแปรผันเป็นอีกวิธีหนึ่งที่จะสร้างสมการอินทิกรัลเพื่อนำมาใช้ในการคำนวณด้วยวิธีการไฟไนต์อีลีเมนต์ หลักการสำคัญของวิธีนี้ก็คือ เงื่อนไขของค่าศักย์ไฟฟ้าที่จะทำให้ภายในบริเวณของปัญหามีค่าพลังงานต่ำที่สุด[3] ในกรณีของสนามไฟฟ้าสถิตย์ เมื่อบริเวณประกอบด้วยตัวกลางฉนวน พลังงาน,W มีค่าเท่ากับ

$$W = \int_{\Omega} \frac{\varepsilon}{2}(\nabla\phi)^{t}(\nabla\phi)d\Omega \tag{3.20}$$

เมื่อคำนวณบนบริเวณ 2 มิติ

$$W = z\iint_{A} \frac{\varepsilon}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right]dxdy \tag{3.21}$$

ให้ W_e เป็นพลังงานของแต่ละอีลีเมนต์

χ^e เป็น พลังงานต่อหนึ่งหน่วยความยาวในแกน z ของแต่ละอีลีเมนต์

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon z[\Delta A]\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right] \tag{3.22}$$

$$\chi^e = \frac{W_e}{z} = \frac{1}{2}\varepsilon[\Delta A]\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right] \tag{3.23}$$

จากเงื่อนไขพลังงานต่ำที่สุดจะได้ว่า

$$\frac{\partial\chi}{\partial\phi_i} = 0 \tag{3.24}$$

$$\chi = \sum \chi^e \tag{3.25}$$

เมื่อ χ เป็น พลังงานต่อหนึ่งหน่วยความยาวในแกน z ของบริเวณทั้งหมด

ϕ_i เป็น ศักย์ไฟฟ้าของจุด i ที่ไม่ทราบค่า

พิจารณา $\frac{\partial\chi^e}{\partial\phi_e}$ ในแต่ละอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยม เมื่อ

$$\phi = N_i\phi_i + N_j\phi_j + N_m\phi_m \tag{3.36}$$

$$\frac{\partial\chi^e}{\partial\phi_i} = \Delta A\,\varepsilon\begin{bmatrix}\left[\frac{\partial N_i}{\partial x}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial x}\phi_j + \frac{\partial N_m}{\partial x}\phi_m\right)\right] + \\ \left[\frac{\partial N_i}{\partial y}\left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial y}\phi_j + \frac{\partial N_m}{\partial y}\phi_m\right)\right]\end{bmatrix} \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial \phi_j} = \Delta A \cdot \varepsilon \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial N_j}{\partial x} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} \phi_j + \frac{\partial N_m}{\partial x} \phi_m \right) \right] + \\ \left[\frac{\partial N_j}{\partial y} \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} \phi_j + \frac{\partial N_m}{\partial y} \phi_m \right) \right] \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial \phi_{mi}} = \Delta A \cdot \varepsilon \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial N_m}{\partial x} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} \phi_j + \frac{\partial N_m}{\partial x} \phi_m \right) \right] \\ + \left[\frac{\partial N_m}{\partial y} \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} \phi_j + \frac{\partial N_m}{\partial y} \phi_m \right) \right] \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

จากสมการที่ (3.27), (3.28) และ (3.29) สามารถเขียนในรูปเมตริกซ์เป็น

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial \phi^e} = \mathbf{K}^e \overline{\phi}^e \quad (3.30)$$

$\overline{\phi}^e$ เป็น เมตริกซ์ศักย์ไฟฟ้าที่จุดทั้งสามของอีลีเมนต์

$\mathbf{K}^e$ เป็น เมตริกซ์เฉพาะอีลีเมนต์ (Element Metrix) เป็นผลจากการอินทิเกรตอีลีเมนต์ย่อย ๆ แต่ละอีลีเมนต์ มี k_{ij}^e เป็นสมาชิกของเมตริกซ์

$$k_{ij}^e = \varepsilon(\Delta A)\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right) \quad (3.31)$$

เมื่อ N เป็นฟังก์ชันรูปแบบดังแสดงในหัวข้อที่ 3.2.1

$$N_i = \frac{\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i x + \mathbf{c}_i y}{2\Delta \mathrm{A}} \quad (3.32)$$

$$N_j = \frac{\mathbf{a}_j + \mathbf{b}_j x + \mathbf{c}_j y}{2\Delta \mathrm{A}} \quad (3.33)$$

$$N_m = \frac{\mathbf{a}_m + \mathbf{b}_m x + \mathbf{c}_m y}{2\Delta \mathrm{A}} \quad (3.34)$$

เมื่อแทนค่าของฟังก์ชันรูปแบบจากสมการที่ (3.32) ถึง (3.34) ลงในสมการที่ (3.31) จะได้ค่าของ เมตริกซ์เฉพาะอีลีเมนต์($\mathbf{K}^e$) ออกมาเป็น

$$K^e = \frac{\varepsilon}{4\Delta \mathrm{A}} \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_j + c_m c_m \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_m + c_j c_{mj} \\ b_i b_j + c_m c_m & b_j b_m + c_j c_{mj} & b_m^2 + c_m^2 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

เมื่อหาค่าเมตริกซ์เฉพาะอีลีเมนต์จนครบทั้งบริเวณแล้ว จะสามารถนำมาประกอบเป็นเมตริกซ์รวม(Global Matrix) และจากเงื่อนไขพลังงานต่ำที่สุดในสมการที่ (3.24) จะได้ว่า

$$\mathbf{K}\overline{\phi} = 0 \quad (3.36)$$

เมื่อ $\overline{\phi}$ เป็นเมตริกซ์ศักย์ไฟฟ้าของจุดทั้งหมดในบริเวณ

ดังนั้น โดยการแทนค่า ϕ_j เมื่อ j เป็นจุดที่อยู่บนขอบเขตที่ทราบค่าศักย์ไฟฟ้าลงในระบบสมการเชิงเส้น (3.29) จะสามารถแก้สมการหาค่าของเมตริกซ์ $\overline{\phi}$ ที่ไม่ทราบค่าออกมาได้

3.5 การหาค่าความเครียดสนามไฟฟ้า

พิจารณาจุด P ในอีลีเมนต์ใด ๆ จะได้ว่า

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

ศักย์ไฟฟ้าที่จุด P

$$\phi \approx \hat{\phi} = \mathrm{N}\overline{\phi}$$

ในระนาบ x-y ความเครียดสนามไฟฟ้าจะเขียนได้ว่า

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} = -\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j}$$

เมื่อใช้อีลีเมนต์เป็นรูปสามเหลี่ยม ค่าของศักย์ไฟฟ้าจะประมาณโดย

$$\hat{\phi} = N_i\phi_i + N_j\phi_j + N_m\phi_m$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \phi_i\frac{\partial N_i}{\partial x} + \phi_j\frac{\partial N_j}{\partial x} + \phi_m\frac{\partial N_m}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \phi_i\frac{\partial N_i}{\partial y} + \phi_j\frac{\partial N_j}{\partial y} + \phi_m\frac{\partial N_m}{\partial y}$$

จากหัวข้อที่ 3.2.1

$$N = \frac{\mathrm{a} + \mathrm{b}x + \mathrm{c}y}{2\Delta\mathrm{A}}$$

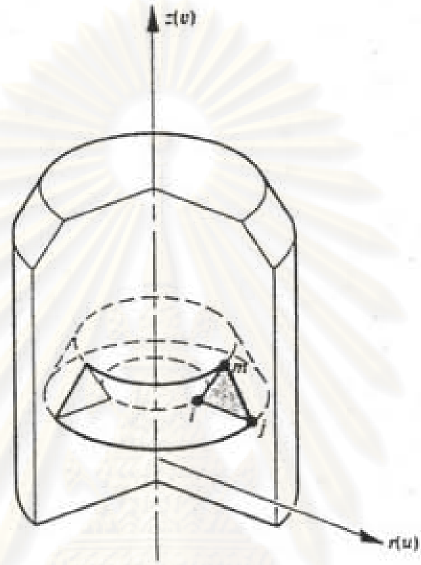
ดังนั้น

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -(\mathrm{b}_i\phi_i + \mathrm{b}_j\phi_j + \mathrm{b}_m\phi_m)/2\Delta\mathrm{A} \\ E_y &= -\frac{\partial\phi}{\partial y} = -(\mathrm{c}_i\phi_i + \mathrm{c}_j\phi_j + \mathrm{c}_m\phi_m)/2\Delta\mathrm{A} \end{aligned} \qquad (3.37)$$

และได้ค่าความเครียดสนามไฟฟ้าเท่ากับ $\sqrt{E_x^2 + E_y^2}$

3.6 การคำนวณหาสนามไฟฟ้าบนบริเวณที่มีลักษณะสมมาตรรอบแกนหมุน

เนื่องจากลูกถ้วยพอร์ซเลนมีลักษณะสมมาตรรอบแกนหมุน ดังนั้นอาจจะคำนวณหาสนามไฟฟ้าแบบ 2 มิติในระบบระนาบ r-z ได้ โดยใช้ทฤษฎีต่าง ๆ ที่ได้กล่าวมาแล้ว และมีการแบ่งอีลีเมนต์ดังรูปที่ 3.2 [12]



รูปที่ 3.2 แสดงอีลีเมนต์ของระบบที่สมมาตรรอบแกนหมุน

ในการคำนวณหาค่าสนามไฟฟ้าบนระนาบ r-z นั้น จะใช้วิธีการสร้างสมการอินทิกรัลจากหลักการแปรผันเช่นเดียวกับในระบบระนาบ x-y ซึ่งจะให้ผลลัพธ์ต่าง ๆ ดังนี้

กำหนดให้ $$\phi \approx \hat{\phi} = \mathbf{N}\bar{\phi} = \sum_{j=1}^{n} N_j \phi_j$$

<u>ในกรณีอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยม</u>

โดยที่

$$\left.\begin{aligned} N_i &= \frac{\mathrm{a}_i + \mathrm{b}_i r + \mathrm{c}_i z}{2\Delta \mathrm{A}} \\ \mathrm{a}_i &= r_j z_m + r_m z_j \\ \mathrm{b}_i &= z_j - z_m \\ \mathrm{c}_i &= r_m - r_j \end{aligned}\right\} \qquad (3.38)$$

ΔA = พื้นที่ของอีลีเมนต์

ได้

$$\mathbf{K}\bar{\phi} = \mathbf{0}$$
$$k_{ij} = \sum k_{ij}^e$$
$$k_{ij}^e = \int_{\Omega e} \nabla^t N_j \varepsilon \nabla N_i d\Omega$$

โดยใช้การประมาณในการอินทิเกรต [12] จะได้ค่าเมตริกซ์เฉพาะอีลีเมนต์เป็น

$$k_{ij}^e = 2\pi \iint_{\Delta} \nabla^t N_j \varepsilon \nabla N_i r dr dz$$
$$k_{ij}^e \approx 2\pi(\overline{\nabla^t N_j}) \cdot \varepsilon(\overline{\nabla N_i}) \bar{r} \Delta A$$

$$k_{ij}^e = \frac{\pi \bar{r} \varepsilon(\mathrm{b}_i \mathrm{b}_j + \mathrm{c}_i \mathrm{c}_j)}{2\Delta \mathrm{A}} \qquad (3.39)$$

เมื่อ $\bar{r}$ คือค่าเฉลี่ยของค่าพิกัด r ทั้ง 3 ค่า เท่ากับ $\frac{r_i + r_j + r_m}{3}$

และได้ค่าความเครียดสนามไฟฟ้าเป็น

$$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{-(\mathrm{b}_i \phi_i + \mathrm{b}_j \phi_j + \mathrm{b}_m \phi_m)}{2\Delta \mathrm{A}}$$
$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{-(\mathrm{c}_i \phi_i + \mathrm{c}_j \phi_j + \mathrm{c}_m \phi_m)}{2\Delta \mathrm{A}} \qquad (3.40)$$
$$|\vec{E}| = \sqrt{E_r^2 + E_z^2}$$

จากค่าความเครียดสนามไฟฟ้าในบริเวณของลูกถ้วยฉนวนพอร์ซเลนนี้ จะสามารถนำไปคำนวณหาค่าแรงดันวาบไฟตามผิวของลูกถ้วยฉนวน โดยอาศัยทฤษฎีเกี่ยวกับแรงดันเริ่มต้นของก๊าซได้

3.7 การใช้วิธีการไฟไนต์อีลีเมนต์กับปัญหาที่มีขอบเขตเปิด

ปัญหาสนามไฟฟ้าบนลูกถ้วยฉนวนนั้นเป็นปัญหาบนบริเวณเปิด เนื่องจากมีขอบเขตอยู่ที่ระยะอนันต์ การที่จะใช้วิธีการไฟไนต์อีลีเมนต์ในการคำนวณนั้น สามารถทำได้หลายวิธี เช่น[13]

ก) การประมาณบริเวณเปิดด้วยบริเวณปิดที่มีขนาดเพียงพอ

ข) การใช้แมปอีลีเมนต์ (Mapped Element)

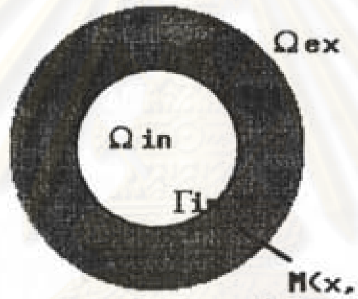
ค) การใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ร่วมกับวิธีอื่น เช่น วิธีจำลองแบบประจุ

ง) การใช้การแปลง(Transformation)ทางคณิตศาสตร์ เพื่อแปลงบริเวณของปัญหาจากบริเวณเปิดให้เป็นบริเวณปิด

ในที่นี้จะเลือกใช้การแปลงทางคณิตศาตร์ เนื่องจากเป็นวิธีที่ใช้กับวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ทั่วไปโดยไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปสมการมากนัก และให้คำตอบแม่นยำเพียงพอในบริเวณของปัญหาที่ต้องการคำตอบ[13]

3.7.1 แนวความคิดในการใช้การแปลงทางคณิตศาตร์

หลักการสำคัญของวิธีนี้คือการแปลงบริเวณของปัญหาให้เป็นบริเวณที่มีขอบเขตจำกัด เพื่อให้สามารถคำนวณได้ด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์[8]



รูปที่ 3.3 แสดงบริเวณของปัญหาที่ถูกแบ่งออกเป็น 2 ส่วน

ในปัญหาที่มีขอบเขตเปิดนั้น จะแบ่งบริเวณของปัญหาออกเป็น 2 ส่วน คือ Ω_{in} และ Ω_{ex} ดังรูปที่ 3.3 โดยที่

$\Omega_{in} \cup \Omega_{ex} = \Omega$ เป็นบริเวณของปัญหาทั้งหมด

$\Omega_{in} \cap \Omega_{ex} = \Gamma$ เป็นขอบเขตที่จะเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่าง บริเวณทั้งสอง

Ω_{in} เป็นบริเวณปิดที่ต้องการคำตอบของปัญหาหรือสมการเชิงอนุพันธ์ ส่วน Ω_{ex} เป็นบริเวณเปิดที่ไม่สนใจคำตอบของปัญหาและประกอบด้วยตัวกลางเพียงหนึ่งชนิด

เมื่อแปลงบริเวณ Ω_{ex} ของปัญหาให้เป็นบริเวณปิด โดยใช้ฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ F ทำให้บริเวณของปัญหาเปลี่ยนไป ดังรูปที่ 3.4

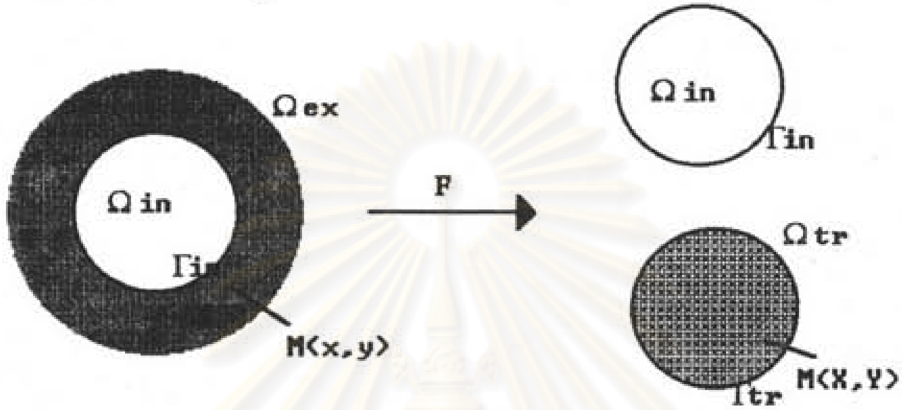
จากรูปที่ 3.4 จะเห็นว่าบริเวณ Ω_{ex} จะถูกแปลงเป็นบริเวณ Ω_{tr} ซึ่งเป็นบริเวณปิด เพื่อที่จะทำการคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ พิกัดของบริเวณหลังการแปลง(Ω_{tr}) จะกำหนดโดย

$$X_i = F_i(\mathbf{x})$$

X_i เป็นพิกัดที่ i ของบริเวณหลังการแปลง

$\mathbf{x}$ เป็น พิกัดของบริเวณก่อนการแปลง $\{x_1, x_2, x_3\}$

i = 1,2 หรือ 3 ขึ้นอยู่กับมิติของการคำนวณ



รูปที่ 3.4 บริเวณของปัญหาหลังจากใช้การแปลงทางคณิตศาสตร์

ฟังก์ชันของการแปลงที่เลือกใช้จะต้องทำให้ $\phi(x)$ ของบริเวณ Ω_{ex} จะต้องเท่ากับ $\Phi(X)$ ของบริเวณ Ω_{tr} เมื่อเป็นเช่นนี้จะพิจารณาของปัญหาเป็น 2 บริเวณ คือ Ω_{in} และ Ω_{tr} ซึ่งเชื่อมกันด้วยความสัมพันธ์ง่าย ๆ คือ

$$\Phi(X) = \phi(x) \qquad ; X \in \Gamma_{tr}, x \in \Gamma_{in}$$

Γ_{tr}, Γ_{in} เป็นขอบเขตของบริเวณหลังการแปลงทั้งสอง ดังที่แสดงในรูปที่ 3.5

ดังนั้นหลังจากใช้การแปลงทางคณิตศาตร์แล้ว จะพิจารณาปัญหาบนบริเวณปิดที่มีขอบเขตจำกัด 2 บริเวณ คือ Ω_{in} และ Ω_{tr} แทนบริเวณเดิมของปัญหาที่มีขอบเขตไม่จำกัด

3.7.2 สมการพลังงานในบริเวณหลังการแปลง

ตามหลักการแปรผัน เงื่อนไขที่ค่าพลังงานภายในบริเวณของปัญหา, W จะต้องมีค่าต่ำที่สุด ดังนั้นเมื่อพิจารณาพลังงานในบริเวณของปัญหา ซึ่งเป็นผลรวมของพลังงานใน 2 บริเวณ คือ $W(\Omega_{in})$ และ $W(\Omega_{ex})$

$$W(\Omega) = W(\Omega_{in}) + W(\Omega_{ex}) \tag{3.41}$$

$$W(\Omega_{in}) = \int_{\Omega in} (\nabla\phi)^t \frac{\varepsilon}{2} (\nabla\phi) d\mathbf{x} \tag{3.42}$$

$$W(\Omega_{\alpha}) = \int_{\Omega\alpha} (\nabla\phi)^{t} \frac{\varepsilon}{2} (\nabla\phi) d\mathbf{x} \tag{3.43}$$

เมื่อ $d\mathbf{x} = \prod dx_i$

เขียนสมการที่ (3.43) ใหม่เป็นอินทิกรัลบนบริเวณหลังการแปลง, Ω_{tr} แทน[9]

$$W(\Omega_{\alpha}) = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega tr} (\nabla\phi)^{t} \mathbf{M}(\mathbf{x}) (\nabla\phi) d\mathbf{x} \tag{3.44}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{Jn})(\mathbf{Jn})^{t}}{|\det(\mathbf{Jn})|}$$

$$\mathbf{Jn} = \text{Jacobian Matrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

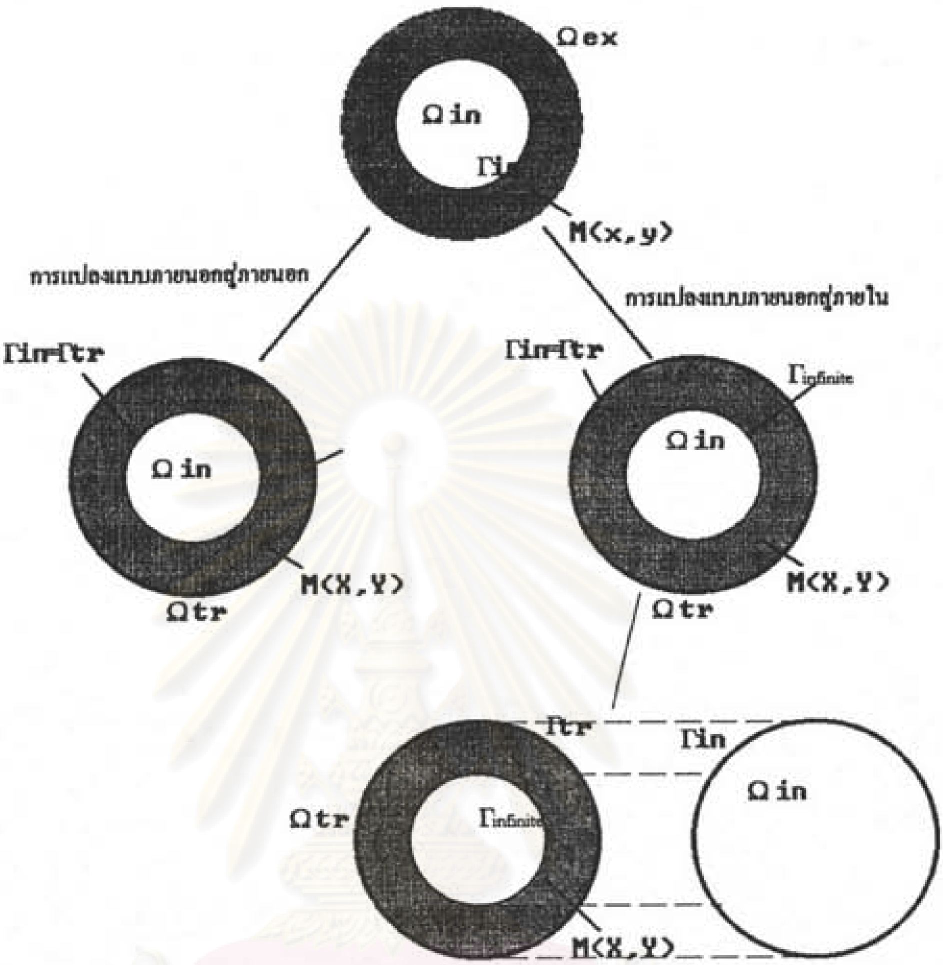
ดังนั้นจากสมการแปลง $X_i = F_i(\mathbf{x})$ จะหาเมตริกซ์ **Jn** ได้และนำไปแทนในสมการที่ (3.44) ก็จะได้พลังงานของบริเวณ Ω_{α} ในรูปของอินทิกรัลบนบริเวณ Ω_{tr} หลังการแปลง

3.7.3 รูปแบบของการแปลงที่ใช้

ลักษณะของการแปลงทางคณิตศาสตร์อาจแบ่งออกเป็น 2 แบบดังรูปที่ 3.5 คือ

ก) การแปลงแบบภายนอกสู่ภายใน ในการแปลงแบบนี้ Γ_{∞} ซึ่งเป็นขอบเขตที่เกิดจากขอบเขตที่ระยะอนันต์ของบริเวณเดิมจะอยู่ด้านในของ Γ ซึ่งเป็นขอบเขตระหว่าง Ω_{in} และ Ω_{tr}

ข) การแปลงแบบภายนอกสู่ภายนอก ในการแปลงแบบนี้ Γ_{∞} ซึ่งเป็นขอบเขตที่เกิดจากขอบเขตที่ระยะอนันต์ของบริเวณเดิมจะอยู่ด้านนอกของ Γ ซึ่งเป็นขอบเขตระหว่าง Ω_{in} และ Ω_{tr}



รูปที่ 3.5 ลักษณะของการแปลงที่ใช้

ต่อไปจะพิจารณารูปแบบของการแปลงทั้งสองในปัญหา 2 มิติบนระนาบ X-Y และปัญหา 2 มิติที่มีลักษณะสมมาตรรอบแกนหมุน

3.7.4 การแปลงแบบภายนอกสู่ภายใน

ในวิธีนี้จะทำการแปลงบริเวณที่มีระยะห่างจากจุดกำเนิดมากกว่า Ro โดยจะใช้สมการในการแปลงของ Imhoff, Meunier และAbonnadiere[8] คือ

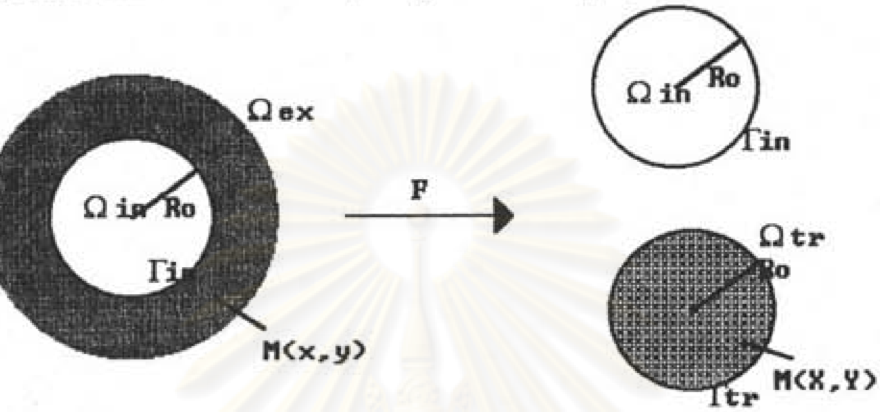
$$X_i = F_i(\mathbf{x}) = \left(\frac{R_o^2}{x^2}\right)x_i \qquad (3.45)$$

เมื่อ $x^2 = \sum x_i^2$

i เท่ากับ 1, 2 หรือ 3 ขึ้นอยู่กับมิติของปัญหา

Ro คือรัศมีของการแปลงเป็นจำนวนจริงบวกค่าคงที่

ภาพของการแปลงจะเห็นดังรูปที่ 3.6 จะเห็นว่า จุดบนขอบเขตระยะอนันต์จะแปลงเป็นจุดกำเนิดของบริเวณหลังการแปลง และบริเวณ Ω_{α} ซึ่งเป็นส่วนที่มีระยะห่างจากจุดกำเนิดมากกว่า Ro จะแปลงเป็นวงกลมหรือทรงกลม(ขึ้นอยู่กับมิติของปัญหา)ที่มีรัศมีเท่ากับ Ro นั่นเอง



รูปที่ 3.6 แสดงบริเวณก่อนและหลังการแปลงแบบภายนอกสู่ภายใน

ในการแปลงแบบนี้ จะได้ว่า

$$(\mathrm{Jn})(\mathrm{Jn})^{t} = \frac{Ro^4}{x^4}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = Ro^4\left(\frac{X^2}{Ro^4}\right)^2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \frac{X^4}{Ro^4}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\left|\det(\mathrm{Jn}^{-1})\right| = \left|\frac{-x^4}{Ro^4}\right| = \frac{Ro^4}{X^4} \qquad \text{เมื่อ } n = 2$$

$$\left|\det(\mathrm{Jn}^{-1})\right| = \left|\frac{-x^4}{Ro^4}\right|^{n-2} = \left(\frac{Ro^4}{X^4}\right)^{n-2} \qquad \text{เมื่อ } n > 2$$

จากสมการที่ (3.44) พิจารณาพลังงานภายในบริเวณ Ω_{α} ในกรณีต่าง ๆ คือ

ก) ปัญหา 2 มิติบนระนาบ X-Y

จะเห็นได้ว่าในกรณีนี้ จะไม่มีการเปลี่ยนแปลง สมการพลังงานของปัญหาจะอยู่ในรูปเดิมทุกประการ

$$W(\Omega_{\alpha}) = \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega tr}(\nabla\phi)^{t}(\nabla\phi)d\mathrm{X} \qquad (3.46)$$

$$;x_1 = x, x_2 = y$$

ข) ปัญหา 2 มิติที่มีลักษณะสมมาตรรอบแกนหมุน

$$W(\Omega_{\alpha}) = \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega tr}2\pi x_1(\nabla\phi)^{t}(\nabla\phi)d\mathrm{X}$$

$$;x_1 = r, x_2 = z$$

$$W(\Omega_\alpha) = \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega tr}\left(\frac{R_o^{\,2}}{X^2}\right)2\pi X_1 (\nabla\phi)^t(\nabla\phi)d\mathbf{X} \tag{3.47}$$

จากสมการ พบว่าสมการพลังงานจะคูณด้วยค่า $\frac{R_o^{\,2}}{X^2}$ จากสมการเดิม

ค) ปัญหา 3 มิติ

$$W(\Omega_\alpha) = \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega tr}\left(\frac{R_o^{\,2}}{X^2}\right)2\pi X_1 (\nabla\phi)^t(\nabla\phi)d\mathbf{X} \tag{3.48}$$

$$;x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$$

จากสมการ พบว่าสมการพลังงานคูณด้วยค่า $\frac{R_o^{\,2}}{X^2}$ จากสมการเดิมเช่นเดียวกับในกรณีของปัญหา 2 มิติที่สมมาตรรอบแกนหมุน

ดังนั้น จะได้สมการพลังงานในบริเวณ Ω_α ออกมาดังสมการที่ (3.46), (3.47) และ (3.48) แยกตามกรณีของปัญหา ซึ่งนำไปในการสร้างสมการอินทิกรัลตามเงื่อนไขพลังงานต่ำที่สุดต่อไปได้

3.7.5 การแปลงแบบภายนอกสู่ภายนอก

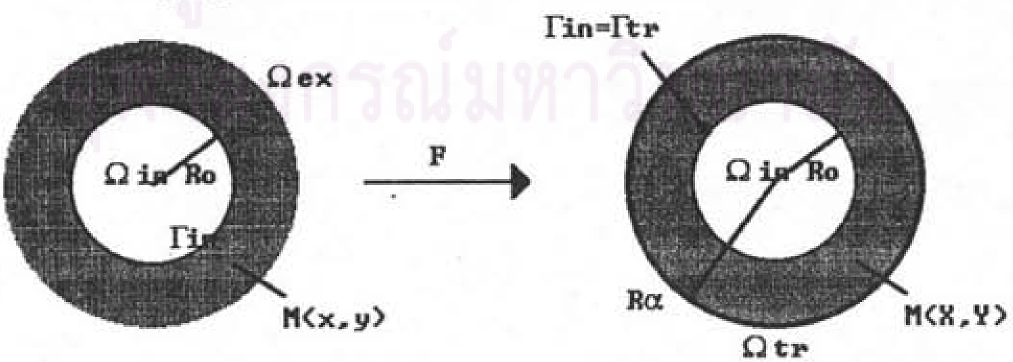
ในกรณีนี้ จะใช้สมการในการแปลงของImhoff, Meunier, Brunotte และAbonnadiere[14] คือ

$$X_i = F_i(x) = \left[\frac{R_\infty}{x} - \frac{R_o(R_\infty - R_o)}{x^2}\right]x_i \tag{3.49}$$

เมื่อ $x^2 = \sum x_i^2$

i เท่ากับ 1, 2 หรือ 3 ขึ้นอยู่กับมิติของปัญหา

R_o, R_∞ คือรัศมีของการแปลงเป็นจำนวนจริงบวกค่าคงที่



รูปที่ 3.7 แสดงบริเวณก่อนและหลังทำการแปลงแบบภายนอกสู่ภายนอก

สมการการแปลงที่ (3.49) สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 3.7 จะเห็นว่าที่ขอบเขตระยะอนันต์ของบริเวณเดิมจะแปลงเป็นจุดของวงกลมหรือผิวของทรงกลมรัศมีเท่ากับ R_∞ และจุดบนขอบเขต Γ_{in} ของบริเวณเดิมจะแปลงเป็น Γ_{tr} ซึ่งเป็นเส้นรอบวงของวงกลมหรือผิวของทรงกลมรัศมีเท่ากับ R_o นั่นคือจะมีพิกัดท่ากับจุดเดิมนั่นเอง

จากสมการที่(3.49) ได้เมตริกซ์จาโคเบียนเป็น[14]

$$[\mathbf{Jn}]_{ij} = \left\{\frac{R_\infty}{x} - \left(\frac{a^2}{x^2}\right)\right\} - \left\{\frac{R_\infty}{x} - 2\left(\frac{a^2}{x^2}\right)\right\}\left(\frac{x_i^2}{x^2}\right) \qquad \text{เมื่อ i เท่ากับ j}$$

$$[\mathbf{Jn}]_{ij} = \left\{\frac{R_\infty}{x} - 2\left(\frac{a^2}{x^2}\right)\right\}\left(\frac{x_i}{x}\right)\left(\frac{x_j}{x}\right) \qquad \text{เมื่อ i ไม่เท่ากับ j}$$

$$a^2 = R_o(R_\infty - R_o)$$

เมื่อพิจารณาปัญหาแยกเป็นกรณีเช่นเดียวกับในหัวข้อที่ 3.7.4 คือ

ก) ปัญหา 2 มิติบนระนาบ X-Y

$$W(\Omega_\alpha) = \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega tr} (\nabla\phi)^t [\mathbf{T}_2(\mathbf{x})](\nabla\phi) d\mathbf{x} \tag{3.50}$$

$[\mathbf{T}_2(\mathbf{x})]$ = เมตริกซ์สมมาตรขนาด 2x2 โดยสมาชิกของเมตริกซ์มีค่าดังนี้

$$[\mathbf{T}_2(\mathbf{x})]_{11} = (\alpha_x - 1)\left\{1 + \left[\frac{\alpha_x(2-\alpha_x)}{(\alpha_x-1)^2}\right]\left(\frac{x_2}{x}\right)^2\right\}$$

$$[\mathbf{T}\ (\mathbf{x})] \quad (\ {}_x \quad 1)\left\{1 \quad \left[\frac{{}_x(2 \quad {}_x)}{(\ {}_x \quad 1)}\right]\left(-\right)\ \right\} \tag{3.51}$$

$$[\mathbf{T}\ (\mathbf{x})] \quad [\mathbf{T}\ (\mathbf{x})] \quad (\ {}_x \quad 1)\left\{\left[\frac{{}_x(2 \quad {}_x)}{(\ {}_x \quad 1)}\right]\left(-\right)\left(-\right)\right\}$$

$$— \tag{3.52}$$

ข) ปัญหา 2 มิติที่มีลักษณะสมมาตรรอบแกนหมุน

$$W(\Omega_\alpha) = \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega tr} 2\pi x_1 (\nabla\phi)^t \eta(\mathbf{x})[\mathbf{T}_2(\mathbf{x})](\nabla\phi) d\mathbf{x} \tag{3.53}$$

$[\mathbf{T}_2(\mathbf{x})]$ มีค่าดังที่แสดงในสมการที่ (3.51) และ สมการที่(3.52)

$$\eta(\mathbf{x}) = (\alpha_x - 1)\left(\frac{x^2}{a^2}\right) \tag{3.54}$$

ค) ปัญหา 3 มิติ

$$W(\Omega_\alpha) = \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega tr} (\nabla\phi)^t \eta(\mathbf{x})[\mathbf{T}_3(\mathbf{x})](\nabla\phi) d\mathbf{x} \tag{3.55}$$

$[\mathbf{T}_3(\mathbf{x})]$ = เมตริกซ์สมมาตรขนาด 3x3 โดยสมาชิกของเมตริกซ์มีค่าดังนี้

$$[\mathbf{T}_3(\mathbf{x})]_{11} = \left(\frac{a^2}{x^2}\right)\left\{1+\left[\frac{\alpha_x(2-\alpha_x)}{(\alpha_x-1)^2}\right]\left[1-\left(\frac{x_1}{x}\right)^2\right]\right\}$$

$$[\mathbf{T}_3(\mathbf{x})]_{22} = \left(\frac{a^2}{x^2}\right)\left\{1+\left[\frac{\alpha_x(2-\alpha_x)}{(\alpha_x-1)^2}\right]\left[1-\left(\frac{x_2}{x}\right)^2\right]\right\}$$

$$[\mathbf{T}_3(\mathbf{x})]_{33} = \left(\frac{a^2}{x^2}\right)\left\{1+\left[\frac{\alpha_x(2-\alpha_x)}{(\alpha_x-1)^2}\right]\left[1-\left(\frac{x_3}{x}\right)^2\right]\right\}$$

$$[\mathbf{T}_3(\mathbf{x})]_{12} = [\mathbf{T}_3(\mathbf{x})]_{21} = \left(\frac{a^2}{x^2}\right)\left\{\left[\frac{\alpha_x(2-\alpha_x)}{(\alpha_x-1)^2}\right]\left[\left(\frac{x_1}{x}\right)\left(\frac{x_2}{x}\right)\right]\right\}$$

$$[\mathbf{T}_3(\mathbf{x})]_{13} = [\mathbf{T}_3(\mathbf{x})]_{31} = \left(\frac{a^2}{x^2}\right)\left\{\left[\frac{\alpha_x(2-\alpha_x)}{(\alpha_x-1)^2}\right]\left[\left(\frac{x_1}{x}\right)\left(\frac{x_3}{x}\right)\right]\right\}$$

$$[\mathbf{T}_3(\mathbf{x})]_{23} = [\mathbf{T}_3(\mathbf{x})]_{32} = \left(\frac{a^2}{x^2}\right)\left\{\left[\frac{\alpha_x(2-\alpha_x)}{(\alpha_x-1)^2}\right]\left[\left(\frac{x_2}{x}\right)\left(\frac{x_3}{x}\right)\right]\right\}$$

จากสมการที่ (3.50), (3.53) และ (3.55) จะได้สมการพลังงานที่นำไปสร้างอินทิกรัลด้วยเงื่อนไขพลังงานต่ำที่สุดต่อไปได้

3.7.6 ความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้การแปลงทางคณิตศาสตร์

การใช้การแปลงทางคณิตศาสตร์ทั้ง 2 แบบนั้นจะให้ผลลัพธ์ในการคำนวณอย่างถูกต้องแม่นยำเพียงพอในบริเวณที่ต้องการหาคำตอบ โดยทำการแบ่งอีลีเมนต์ในบริเวณนั้นอย่างละเอียด แต่ไม่จำเป็นต้องแบ่งอีลีเมนต์ให้ละเอียดนักในบริเวณที่ทำการแปลง (Ω_{tr}) นอกจากนี้วิธีนี้ยังใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธีอื่น ๆ อีกด้วย ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงเลือกใช้การแปลงทางคณิตศาสตร์ในการคำนวณบนบริเวณที่มีขอบเขตเปิด

Stonical[9] ได้พบว่าความแม่นยำของวิธีการแปลงทั้ง 2 วิธีนั้น จะขึ้นอยู่กับสมการของปัญหา และเงื่อนไขอื่น ๆ อีกมาก ดังนั้นการเลือกใช้ จะพิจารณาวิธีที่ให้ผลลัพธ์แม่นยำกว่าในการคำนวณปัญหาด้านสนามไฟฟ้าสถิตบนบริเวณเปิดซึ่งเป็นปัญหาที่ทำในงานวิจัยครั้งนี้

3.8 การคำนวณหาสนามไฟฟ้าบริเวณที่มีด้วยสารกึ่งตัวนำด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

3.8.1 สมการพลังงานไฟฟ้าในบริเวณที่ประกอบด้วยสารกึ่งตัวนำและเมตริกซ์ที่ได้

ในกรณีของฉนวนที่ไม่มีประจุค้าง (Space Charge) อยู่นั้น ศักย์ไฟฟ้าจะเป็นไปตามสมการ[3]

$$\varepsilon \nabla^2 \phi = 0$$

และสมการพลังงานเป็น[3]

$$W = \int_{\Omega} \frac{\varepsilon}{2} (\nabla \phi)^t (\nabla \phi) d\mathbf{x}$$

เมื่อในบริเวณประกอบด้วยสารกึ่งตัวนำ ในสารกึ่งตัวนำศักย์ไฟฟ้าเป็นไปตามสมการ[3]

$$\sigma \nabla^2 \phi = 0$$

และสมการพลังงานเป็น[3]

$$W = \int_{\Omega} \frac{\sigma}{2} (\nabla \phi)^t (\nabla \phi) d\mathbf{x}$$

พิจารณาพลังงานในกรณีของไฟฟ้ากระแสสลับความถี่ต่ำ ซึ่งเป็นผลรวมของพลังงานของทั้งส่วนของฉนวนและส่วนของสารกึ่งตัวนำ[3]

$$W = \int_{\Omega} \frac{\sigma}{2} \left(\nabla \bar{\dot{\phi}}\right)^t \left(\nabla \dot{\phi}\right) d\mathbf{x} + j\varpi \int_{\Omega} \frac{\varepsilon}{2} \left(\nabla \bar{\dot{\phi}}\right)^t \left(\nabla \dot{\phi}\right) d\mathbf{x} \qquad (3.56)$$

$\dot{\phi}$ คือศักย์ไฟฟ้า เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดย $\phi = \mathrm{Re}\left\{ \dot{\phi} e^{j\omega t} \right\}$

ด้วยเงื่อนไขพลังงานต่ำสุดจะได้ว่า

$$\frac{\partial W}{\partial \dot{\phi}} = 0$$

พิจารณาเมตริกซ์เฉพาะอีลีเมนต์เป็น 2 ส่วนคือ ฉนวนและสารกึ่งตัวนำ โดยในกรณีของปัญหา 2 มิติบนระนาบ X-Y จะได้ว่า

ในบริเวณสารกึ่งตัวนำ

$$K^e = \frac{\sigma}{4\Delta A} \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_j + c_m c_m \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_m + c_j c_{mj} \\ b_i b_j + c_m c_m & b_j b_m + c_j c_{mj} & b_m^2 + c_m^2 \end{bmatrix} \qquad (3.57)$$

และในบริเวณฉนวน

$$K^e = \frac{j\varpi\varepsilon}{4\Delta A} \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_j + c_m c_m \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_m + c_j c_{mj} \\ b_i b_j + c_m c_m & b_j b_m + c_j c_{mj} & b_m^2 + c_m^2 \end{bmatrix} \qquad (3.58)$$

จากสมการที่ (3.57) และ(3.58) จะได้เมตริกซ์รวมเป็น

$$\left[\dot{K}\right]\left[\dot{\phi}\right]=0$$

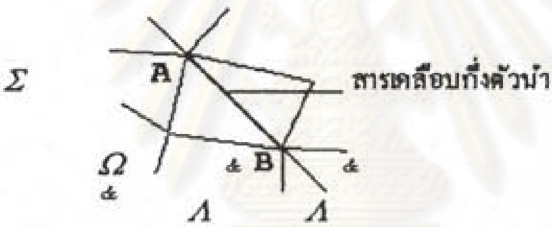
$\left[\dot{K}\right]$ = เมตริกซ์รวมเป็นเมตริกซ์ของจำนวนเชิงซ้อน

$\left[\dot{\phi}\right]$ = เมตริกซ์ของศักย์ไฟฟ้าที่จุดภายในบริเวณ

ซึ่งเมื่อแทนเงื่อนไขขอบเขตลงไป ก็จะแก้สมการหาค่าศักย์ไฟฟ้าในบริเวณออกมาได้

3.8.2 สมการพลังงานไฟฟ้าในบริเวณที่ประกอบด้วยสารเคลือบกึ่งตัวนำและเมตริกซ์ที่ได้

ในกรณีของสารเคลือบกึ่งตัวนำนั้น จะพิจารณาเป็นพื้นผิวที่ไม่มีความหนาและแทนด้วยอีลีเมนต์เส้นตรงในกรณีของปัญหา 2 มิติ ดังแสดงในรูปที่ 3.8[3]



รูปที่ 3.8 การแทนสารเคลือบกึ่งตัวนำด้วยอีลีเมนต์เส้นตรง

ใช้สมการโพลีโนเมียลกำลังหนึ่งประมาณศักย์ไฟฟ้าในอีลีเมนต์เส้นตรง AB

$$\dot{\phi}=\dot{\phi}_A+\left(\dot{\phi}_B-\dot{\phi}_A\right)\frac{l}{L} \qquad (3.59)$$

L = ความยาวของเส้นตรง AB

l = ระยะทางจากจุด A

จากการประมาณศักย์ไฟฟ้าในสมการที่ (3.59) ได้พลังงานของอีลีเมนต์ AB ในกรณีของปัญหา 2 มิติบนระนาบ X-Y เป็น

$$W_e=\int_{\Omega e}\frac{\sigma_S}{2}\left(\frac{\dot{\phi}_B-\dot{\phi}_A}{L}\right)^2 dl$$

σ = ความนำไฟฟ้าของพื้นผิว (Surface Conductivity)

$$\frac{\partial\ _e}{\partial\phi_A}=\frac{\sigma_S}{}\phi_A-\frac{\sigma_S}{}\phi_B$$

$$\frac{\partial W_e}{\partial \dot{\phi}_B} = -\frac{\sigma_S}{L}\dot{\phi}_A + \frac{\sigma_S}{L}\dot{\phi}_B$$

และได้ Element Stiffness Matrix เป็น

$$K^e = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_S}{L} & -\frac{\sigma_S}{L} \\ -\frac{\sigma_S}{L} & \frac{\sigma_S}{L} \end{bmatrix}$$

ในกรณีของปัญหา 2 มิติที่มีลักษณะสมมาตรรอบแกนหมุน จากการประมาณศักย์ไฟฟ้าในสมการที่ (3.59) ได้พลังงานของอีลีเมนต์ AB เป็น

$$W_e = \int_{\Omega_e} 2\pi\bar{r}\,\frac{\sigma_S}{2}\left(\frac{\dot{\phi}_B - \dot{\phi}_A}{L}\right)^2 dl$$

และได้เมตริกซ์เฉพาะอีลีเมนต์เป็น

$$K^e = 2\pi\bar{r}\begin{bmatrix} \frac{\sigma_S}{L} & -\frac{\sigma_S}{L} \\ -\frac{\sigma_S}{L} & \frac{\sigma_S}{L} \end{bmatrix} \tag{3.60}$$

ดังนั้น กรณีของลูกถ้วยก้านตรงที่มีการเคลือบสารกึ่งตัวนำอยู่ จะใช้ค่าของเมตริกซ์เฉพาะอีลีเมนต์จากสมการที่ (3.60) บนบริเวณสารเคลือบกึ่งตัวนำ เพราะเป็นกรณีปัญหา 2 มิติที่มีลักษณะสมมาตรรอบแกนหมุน