รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

โกวิทย์ ประวาลพฤกษ์ และ สมศักดิ์ สินธุระเวชญ์. **การประเมินในชั้นเรียน.** กรุงเทพมหานคร : วัฒนาพานิช, 2523.

จรรยา ภูอุดม. **ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนตามการประเมินของครู.** วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2524.

เฉลียว บุษเนียร. **ความสัมพันธ์ระหว่างพฤติกรรมการเรียน พฤติกรรมการสอน พื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์ เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์กับผลสัมฤทธิ์การเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เขตการศึกษา 8.** วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2530.

ชัยวัฒน์ คุประตกุล. คณิตศาสตร์สำคัญไฉน. สารคดี 2 (กันยายน 2529) : 110.

ทองหล่อ วงษ์อินทร์. **การวิเคราะห์ความรู้เฉพาะด้าน กระบวนการในการคิดแก้ปัญหาและเมตาคอคนิชัน ของนักเรียนมัธยมศึกษาผู้ชำนาญ และไม่ชำนาญในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์.** วิทยานิพนธ์ปริญญาดุษฎีบัณฑิต จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2536.

ธนาภรณ์ ตันเจริญ. **การพัฒนารูปแบบการสอนตามแนวเมตาคอคนิชัน เพื่อเพิ่มความสามารถทางดนตรีในการทำอิมโพรไวเซชัน.** วิทยานิพนธ์ปริญญาดุษฎีบัณฑิต จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2535.

ธาริณี เจียรวัฒนะ. **พฤติกรรมการเรียนการสอนที่ส่งเสริมผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิทยาศาสตร์ตามการรับรู้ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิทยาศาสตร์สูง.** วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2531.

แน่งน้อย ทองธวัช. **ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถด้านเหตุผลเชิงถ้อยคำ และความสามารถในการใช้นิยามและทฤษฎีบทกับความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4.** วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2526.

ประภาเพ็ญ สุวรรณ. **ทัศนคติ : การวัดการเปลี่ยนแปลงและพฤติกรรมอนามัย.** กรุงเทพมหานคร : ไทยวัฒนาพานิช, 2520.

ปรีชา เนาว์เย็นผล. การพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์. **วารสารคณิตศาสตร์** 38 (พฤศจิกายน-ธันวาคม 2537) : 66-74.

ปาน พึ่งสุจริต. **วิวัฒนาการวิชาคณิตศาสตร์ตั้งแต่รัชกาลที่ 5 ถึงปัจจุบัน.** ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2517.

พจน์ สะเพียรชัย. "โครงสร้างของหลักสูตรทั่วไป." **รายงานการสัมมนาการฝึกหัดครูในประเทศไทย.** กรุงเทพมหานคร : สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ, 2515.

พรทิพย์ ยาวะประภาษ. เทคนิคการสอนการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์. **วารสารคณิตศาสตร์** 38 (มีนาคม-เมษายน 2538) : 24-27.

ยุพิน พิพิธกุล. **การสอนคณิตศาสตร์.** กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์-มหาวิทยาลัย, 2530.

ยุรวัฒน์ คล้ายมงคล. **การศึกษากระบวนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานการประถมศึกษากรุงเทพมหานคร.** วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2533.

ล้วน สายยศ และ อังคณา สายยศ. **หลักการวิจัยทางการศึกษา.** กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ศึกษาพร, 2531.

วราภรณ์ ศิลปพงษ์. **ความสัมพันธ์ระหว่างพฤติกรรมการสอนของครูวิทยาศาสตร์ตามการรับรู้ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิทยาศาสตร์ เขตการศึกษา 11.** วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2530.

วัฒนาพร ระงับทุกข์. **การเปรียบเทียบประสิทธิ์ผลของรูปแบบการฝึกฯ ยุทธศาสตร์ การเรียนรู้เมตาคอคนิชันในการอ่านภาษาอังกฤษเพื่อความเข้าใจสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแบบโดยตรงกับแบบสอดแทรกในเนื้อหาการสอน.** วิทยานิพนธ์ปริญญาดุษฎีบัณฑิต จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2538.

วิชาการ, กรม. **โครงการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนทางด้านความรู้ความคิด เอกสารฉบับที่ 3 : รายงานผลการวิจัยเกี่ยวกับกระบวนการคิดและความรู้สึก.** กองการวิจัยทางการศึกษา, 2531.

——— . **คู่มือการประเมินผลการเรียน : ตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533).** กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2533.

วิชาการ, กรม. **การประเมินคุณภาพการศึกษาของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปีการศึกษา 2536.** กรุงเทพมหานคร : สำนักงานทดสอบทางการศึกษา, 2536.

ศิริพร ฉันทนานนท์. **ความสัมพันธ์ระหว่างพฤติกรรมการสอนของครู และเวลาที่ใช้ในการเรียนของนักเรียนกับผลสัมฤทธิ์ในการเรียนภาษาอังกฤษ ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนปลาย กรุงเทพมหานคร.** วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2532.

สมจิต สวธนไพบูรณ์. **เอกสารประกอบการสอนบทที่ 6 วิธีสังเกตพฤติกรรมการสอนอย่างมีระบบ.** ภาควิชาหลักสูตรและการสอน มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2529. (อัดสำเนา).

สาโรช บัวศรี. **จุดยืนและทิศทางการศึกษาไทย.** กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์วัฒนาพานิช, 2518.

สิริพร ทิพย์คง. การแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ในชั้นประถมศึกษา. **วารสารคณิตศาสตร์** 38 (กรกฎาคม-สิงหาคม 2537) : 58-59.

สิริมาศ สิทธิหล่อ. **การพัฒนาวิธีการวัดกระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ โดยวิธีการคิดออกเสียง.** วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2534.

สุพิศา แก้วสุวรรณ. **การเปรียบเทียบกระบวนการคิดแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ของนักเรียนช่างอุตสาหกรรมระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพ ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์แตกต่างกัน.** วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2535.

โสภณ บำรุงสงฆ์ และ สมหวัง ไตรตันวงศ์. **เทคนิคและวิธีการสอนคณิตศาสตร์แนวใหม่.** กรุงเทพมหานคร : ไทยวัฒนาพานิช, 2520.

อารีรักษ์ สืบถิ่น. **ความสัมพันธ์ระหว่างความตระหนักในเมตาคอคนิชันกับความเข้าใจในการอ่านภาษาไทย และภาษาอังกฤษของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 กรุงเทพมหานคร.** วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2535.

อำนวย เลิศชยันดี. **การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถทางสมองกับความสามารถทางทักษะการคิดแก้ปัญหาในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา.** ปริญญานิพนธ์การศึกษาดุษฎีบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2523.

ภาษาอังกฤษ

Adams, S. **Teaching Mathematics.** New York : Haper & Row Publishers, 1977.

Anderson, K. B., and Pingry, R. E. **The Learning of Mathematics : Its Theory and Practice.** Washington D. C. : The National Council of Teachers of Mathematics, 1973.

Bitter,G. G. **Mathematics methods for the elementary and middle school : a comprehensive approach.** Boston : Allyn and Bacon, 1989.

Bruckner, L. J. and Grossnickle, F. E. **How to make Arithmetic Meaningtul.** Philadelphia : The John C Winston Co., 1957.

Costa, A. L. Mediating the Metacognitive. **Educational leadership** 3 (November 1984) : 57-62.

Cronbach, L. J. **Educational Psychology.** New Jersey : Harcourt, Brace & Woeld Inc., 1962.

Cross, D. R. and Paris, S. G. Developmental and Instructional Analysis of childen's Metacognition and Reading Comprehension. **Journal of Educational Psychology** 80 (June 1988) : 131-142.

Eggen, P. **Educational psychology : classroom connections.** 2nd ed. New York : Merrill, 1994.

Ferguson, G. A. **Statistical Analysis in Psychology and Education.** Tokyo : McGraw-Hill, 1981.

Fernandez, M. L. Problem Solving : Managing It all. **Mathematics-Teacher** 87 (March 1974) : 195-199.

Flavell, J. H. **Cognitive development.** New Jersey : Prentice-Hall, Inc., 1985.

Fortunato, I., Hecht, D., Tittle, C. K., and Alvarez, L. Metacognition and Problem Solving. **Arithmetic Teacher** 39 (December 1991) : 38-40.

Good, C. V. **Dictionary of Education.** New York : McGraw-Hill Book Company, 1973.

Guildford, J. P. **Foundamental Statistics in Psychology and Education.** 6th ed. Tokyo : McGraw-Hill, 1979.

Hall, L. E. "Metacognitive behaviours and mathematical problem-solving : A study of grade 9 students with learning problems." **MAI.** 30/03, 1992 : 446.

Hall, W. D. "A Study of the Relationship between Estimation and Mathematics Problem Solving among Fifth Grade Students." **Dissertation Abstracts International.** 37 (April 1977) : 6324-6325-A.

Jun, Sung-Yun. "Principal Leadership, Teacher Job Satisfaction and Student Achievement in Selected Korean Elementary Schools." **Dissertation Abstracts International.** 42 (December 1981) : 2405-A.

Koffka, K. **Encyclopedia of the Social Science.** Vol. 3-4. New York : The Macmillan Company, 1978.

Krulik, S. **Problem solving.** Massachusettes : Allyn and Bacon, Inc., 1987.

LeBlanc, J. F. You Can Teach Problem Solving. **Arithmetic Teacher** 25 (November 1977) : 16-20.

National Council of Teachers of Mathematics. Problem Solving in School Mathematics. **Arithmetic Teacher** 25 (Novermber 1977) : 17.

O'Malley, M. J., Chamot, A. U., Manzanares, G. S., Russo, R. R., and Kupper, L. Learning Strategy Application with Students of English as a Second Language. **TESOL Quarterly** 19 (September 1985) : 557-577.

Phye, G. D., and Andre, T., eds. **Cognitive classroom learning : understanding, thinking, and problem solving.** Orlando : Academic Press, 1986.

Polya, A. **How to solve it.** New York : Doubleday-auchor, 1957.

Runes, D. D. **Dictionary of Philosophy.** New Jersey : Littlefield, Adams & Co., 1971.

Russel, P.V. **Essentials of Mathematics.** New York : John Wiley & San Inc., 1961.

Samrerng Boonruarngrutana. "A Model of School Effects." Ph.D. dissertation, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1978.

Schoenfeld A. H. Metacognitive and epistemological issue in mathematical understanding. in **Teaching and learning mathematical Problem solving : Research perspectives,** edited by E. A. Silver, New Jersey : Erlbaum and Associates, 1985.

Swanson, H. L. Influence of metacognition knowledge and aptitude on problem solving. **Journal of educational psychology.** Vol. 82, No.2, 1990 : 306-314.

Tanner, D. **Curriculum Development.** New York : Macmillan Company, 1975.

Tucker, B. F. "A Correlation Study of Three Primary Skills which Contribute to Arithmetic Problem Solving Ability among Fourth Grade Students." **Dissertation Abstracts International.** 36 (November 1975) : 2620-A.

Webb, N. L. "An Exploration of Mathematical Problem Solving Process." **Dissertation Abstracts International.** 36 (November 1975) : 2689-A.

West, T. A. Rx for Verbal Problems : A Diagnostic Preseriptive Approach. **Arithmetic Teacher** 25 (November 1977) : 57-58

Whirl, R. J. Problem solving solution or technique. **Mathematics Teacher** 6 (October 1973) : 551-553.

Wong, P. S. K. "The Effects of Academic Settings on Students' Metacognition in Mathematical Problem Solving." Paper presented at the Annual Meeting of the Australian Association for Research in Education (November 28 - December 2, 1989) : 35.

Woolfolk, A. E. **Educational psychology.** 5th ed. Boston : Allyn and Bacon, 1993.

Yotis, C., and Hosticka, A. Promoting the Transition to Formal Thought Through the Development of Problem Solving Skills in Middle School Mathematics and Science Curriculum. **School Science and Mathematics** 80 (November 1980) : 557-565.

ภาคผนวก

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ก
รายนามผู้ทรงคุณวุฒิ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รายนามผู้ทรงคุณวุฒิ

แบบสอบถามพฤติกรรมการสอนของครูตามการรับรู้ของนักเรียน

1. ศาสตราจารย์ยุพิน พิพิธกุล
   ศาสตราจารย์เกียรติคุณ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
2. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สิริพร ทิพย์คง
   ภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
3. ผู้ช่วยศาสตราจารย์วรรณี ศิริโชติ
   ภาควิชาประถมศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบวัดความตระหนักในเมตาคอคนิชัน

1. รองศาสตราจารย์ ดร.ชุมพร ยงกิตติกุล
   ภาควิชาจิตวิทยา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
2. รองศาสตราจารย์ ดร.เพ็ญพิไล ฤทธาคณานนท์
   ภาควิชาจิตวิทยา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
3. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทองหล่อ วงษ์อินทร์
   รองอธิการบดีฝ่ายวิชาการ สถาบันราชภัฏเพชรบุรีวิทยาลงกรณ์
   จ.ปทุมธานี

แบบทดสอบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

1. รองศาสตราจารย์ศักดา บุญโต
   ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
2. อาจารย์ชนินทร์ อังสุโวทัย
   หัวหน้าหมวดคณิตศาสตร์ โรงเรียนอัสสัมชัญ กรุงเทพฯ
3. อาจารย์พิทยา ศิริชัย
   หัวหน้าหมวดคณิตศาสตร์ โรงเรียนเซนต์โยเซฟคอนแวนต์
4. อาจารย์ปรีชาวรรณ นาคนิยม
   หมวดคณิตศาสตร์ โรงเรียนเบญจมราชานุสรณ์
5. อาจารย์รุ่งทิวา นาบำรุง
   หมวดคณิตศาสตร์ โรงเรียนศรีบุณยานนท์

ภาคผนวก ข

หนังสือขอความร่วมมือในการวิจัย

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ที่ ทม 0309/838

บัณฑิตวิทยาลัย
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพฯ 10330

24 มกราคม 2539

เรื่อง ขอความร่วมมือในการวิจัย
เรียน ผู้อำนวยการกองการมัธยมศึกษา กรมสามัญศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ
สิ่งที่ส่งมาด้วย 1. เครื่องมือวิจัย
2. รายชื่อโรงเรียน

เนื่องด้วย น.ส.ณัฏฐี เจริญเกียรติบวร นิสิตชั้นปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา กำลังดำเนินการวิจัยเพื่อเสนอเป็นวิทยานิพนธ์ เรื่อง "ความสัมพันธ์ระหว่างพฤติกรรมการสอนของครูตามการรับรู้ของนักเรียน และความตระหนักในเมตาคอคนิชันกับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กรุงเทพมหานคร" โดยมี รองศาสตราจารย์พร้อมพรรณ อุดมสิน เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้นิสิตจำเป็นต้องเก็บรวบรวมข้อมูลที่เกี่ยวข้องโดยการนำเครื่องมือวิจัยไปเก็บข้อมูลกับนักเรียนชั้น ม. 4 ของโรงเรียนมัธยมศึกษา ในสังกัดของกองการมัธยมศึกษา กรมสามัญศึกษา ในเขตกรุงเทพมหานคร

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านได้โปรดพิจารณาอนุญาตให้ น.ส.ณัฏฐี เจริญเกียรติบวร ได้เก็บรวบรวมข้อมูลดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการ และขอขอบคุณเป็นอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้ด้วย

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.ประจักษ์ ศกุนตะลักษณ์)
รองคณบดีฝ่ายวิชาการ
รับราชการแทนคณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

งานมาตรฐานการศึกษา
โทร. 2183530

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ที่ ศธ. 0806/2104

กรมสามัญศึกษา
กระทรวงศึกษาธิการ กทม. 10330

7 กุมภาพันธ์ 2539

เรื่อง ขอความร่วมมือในการวิจัย

เรียน

ด้วยนางสาวณัฏฐี เจริญเกียรติบวร นิสิตระดับปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กำลังดำเนินการวิจัยเพื่อเสนอเป็นวิทยานิพนธ์ เรื่อง "ความสัมพันธ์ระหว่างพฤติกรรมการสอนของครูตามการรับรู้ของนักเรียน และความตระหนักในเมตาคอคนิชัน กับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กรุงเทพมหานคร" ในการนี้ นิสิตมีความประสงค์ จะขอแจกแบบทดสอบแก่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของโรงเรียนนี้เพื่อเป็นข้อมูลประกอบการวิจัย

กรมสามัญศึกษาได้พิจารณาแล้วเห็นว่า การวิจัยดังกล่าวจะเป็นประโยชน์ต่อการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมศึกษา สมควรให้การสนับสนุน

จึงเรียนมาเพื่อพิจารณาให้ความอนุเคราะห์ ขอขอบคุณมา ณ โอกาสนี้ด้วย

ขอแสดงความนับถือ

(นายธรรมนูญ วิสัยจร)
รองอธิบดี ปฏิบัติราชการแทน
อธิบดีกรมสามัญศึกษา

กองการมัธยมศึกษา
โทร. 2828466
โทรสาร 2824096

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ค

รายชื่อโรงเรียนและจำนวนนักเรียนที่เป็นตัวอย่างประชากร

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รายชื่อโรงเรียนและจำนวนนักเรียนที่เป็นตัวอย่างประชากร

กลุ่มที่	ชื่อโรงเรียน	จำนวนห้อง	จำนวนนักเรียน
1	สตรีวิทยา	1	20
	วัดสังเวช	1	20
	โยธินบูรณะ	2	40
2	ไตรมิตรวิทยาลัย	1	20
	สตรีมหาพฤฒาราม	1	20
	วัดสุทธิวราราม	2	40
3	ศรีอยุธยา	2	40
	สารวิทยา	2	40
4	วชิรธรรมสาธิต	1	20
	สิริรัตนาธร	1	20
	พระโขนงพิทยาลัย	2	40
5	ลาดปลาเค้าพิทยาคม	2	40
	สตรีวิทยา 2	2	40
6	สตรีวัดระฆัง	2	40
	สุวรรณารามวิทยาคม	2	40
7	มัธยมวัดดาวคนอง	1	20
	วัดอินทาราม	1	20
	ศึกษานารี	2	40
8	วัดนวลนรดิศ	1	20
	วัดประดู่ในทรงธรรม	1	20
	สตรีวัดอัปสรสวรรค์	2	40
รวม	21	32	640

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ง

การปรับปรุงเฉลยวิธีการหาคำตอบที่ถูกต้องในโจทย์เรื่องฟังก์ชัน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

1. กำหนดให้ $f(8x-7) = 2x-5$ และ $(f^{-1}+g)(x) = x^2+3x-2$ จงหาค่าของ $g(x)$

1.1 จากบทนิยามของพีชคณิตของฟังก์ชันนั้น ค่าของ $(f^{-1}+g)(x)$ จะเท่ากับอะไร

1.2 สิ่งที่ต้องหาเพื่อนำไปสู่การหาค่าของ $g(x)$ คืออะไร

1.3 จงแสดงวิธีทำและหาคำตอบที่ถูกต้อง

เฉลย

การให้คะแนน

1.1 $f^{-1}(x) + g(x)$ — 1 คะแนน

1.2 $f^{-1}(x)$ — 2 คะแนน

วิธีที่ 1

1.3 จาก $f(8x-7) = 2x-5$ — 2 คะแนน

ดังนั้น $f^{-1}(2x-5) = 8x-7$

ให้ $2x-5 = t$

$x = \frac{t+5}{2}$

$8x-7 = 8\left(\frac{t+5}{2}\right)-7$ — 2 คะแนน

$= 4t+20-7$

$= 4t+13$

จะได้ $f^{-1}(t) = 4t+13$ — 1 คะแนน

$\therefore f^{-1}(x) = 4x+13$

จาก $(f^{-1}+g)(x) = x^2+3x-2$ — 1 คะแนน

$f^{-1}(x)+g(x) = x^2+3x-2$

$4x+13+g(x) = x^2+3x-2$ — 1 คะแนน

$\therefore g(x) = x^2-x-15$

วิธีที่ 2

การให้คะแนน

1.3 จาก $f(8x-7) = 2x-5$

ให้ $8x-7 = t$

$x = \frac{t+7}{8}$

$2x-5 = 2\left(\frac{t+7}{8}\right)-5$

$= \frac{t+7}{4}-5$

$= \frac{t-13}{4}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จะได้ $f(t) = \frac{t - 13}{4}$ } 3 คะแนน

$\therefore f(x) = \frac{x - 13}{4}$

หรือ $y = \frac{x - 13}{4}$

หาอินเวอร์สของฟังก์ชัน f จะได้

$x = \frac{y - 13}{4}$ } 2 คะแนน

$\therefore y = 4x + 13$

นั่นคือ $f^{-1}(x) = 4x + 13$

จาก $(f^{-1}+g)(x) = x^2 + 3x - 2$ } 1 คะแนน

$f^{-1}(x) + g(x) = x^2 + 3x - 2$

$4x + 13 + g(x) = x^2 + 3x - 2$ } 1 คะแนน

$\therefore g(x) = x^2 - x - 15$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

7. ถ้า $f^{-1}(x) = \frac{x}{x-2}$ และ $(fog)(x) = x+3$ แล้วจงหาค่าของ $g(x)$

7.1 จากบทนิยามของฟังก์ชันคอมโพสิทนั้น ค่าของ $(fog)(x)$ จะเท่ากับอะไร

7.2 สิ่งที่ต้องหาเพื่อนำไปสู่การหาค่าของ $g(x)$ คืออะไร

7.3 จงแสดงวิธีทำและหาคำตอบที่ถูกต้อง

เฉลย

การให้คะแนน

7.1 $f(g(x))$ — 1 คะแนน

7.2 $f(x)$ — 1 คะแนน

วิธีที่ 1 7.3 จาก $f^{-1}(x) = \frac{x}{x-2}$

ดังนั้น $f(\frac{x}{x-2}) = x$ — 1 คะแนน

ให้ $\frac{x}{x-2} = t$

$x = t(x-2)$

$x = xt - 2t$ — 2 คะแนน

$x - xt = -2t$

$x(1-t) = -2t$

$x = \frac{-2t}{1-t}$

จะได้ $f(t) = \frac{-2t}{1-t}$ — 1 คะแนน

$\therefore f(x) = \frac{-2x}{1-x}$

จาก $(f \circ g)(x) = x + 3$

$f(g(x)) = x + 3$ — 1 คะแนน

$\frac{-2g(x)}{1-g(x)} = x + 3$

$-2g(x) = (x+3)(1-g(x))$

$-2g(x) = x - xg(x) + 3 - 3g(x)$ — 2 คะแนน

$xg(x) + g(x) = x + 3$

$(x+1)g(x) = x + 3$

$\therefore g(x) = \frac{x+3}{x+1}$ — 1 คะแนน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การให้คะแนน

วิธีที่ 2 7.3 จาก $f^{-1}(x) = \frac{x}{x-2}$ — 1 คะแนน

หรือ $y = \frac{x}{x-2}$

หาอินเวอร์สของฟังก์ชัน f^{-1} จะได้

$$x = \frac{y}{y-2}$$

$$x(y-2) = y$$

$$xy - y = 2x$$

$$y(x-1) = 2x$$

$$\therefore y = \frac{2x}{x-1}$$ — 2 คะแนน

นั่นคือ $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ — 1 คะแนน

จาก $(f \circ g)(x) = x + 3$

$$f(g(x)) = x + 3$$

$$\frac{-2g(x)}{1-g(x)} = x + 3$$ — 1 คะแนน

$$-2g(x) = (x+3)(1-g(x))$$

$$-2g(x) = x - xg(x) + 3 - 3g(x)$$

$$xg(x) + g(x) = x + 3$$

$$(x+1)g(x) = x + 3$$ — 2 คะแนน

$$\therefore g(x) = \frac{x+3}{x+1}$$ — 1 คะแนน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก จ

การปรับปรุงเกณฑ์การตรวจให้คะแนนเรื่องภาคตัดกรวยและฟังก์ชัน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. จงหาสมการของพาราโบลาซึ่งมีเส้นตรง $x+5 = 0$ เป็นเส้นไดเรกตริกซ์ และมีจุดโฟกัสอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$

2.1 จากโจทย์จงเขียนรูปแสดงเส้นไดเรกตริกซ์ จุดศูนย์กลางของวงกลมและพาราโบลา

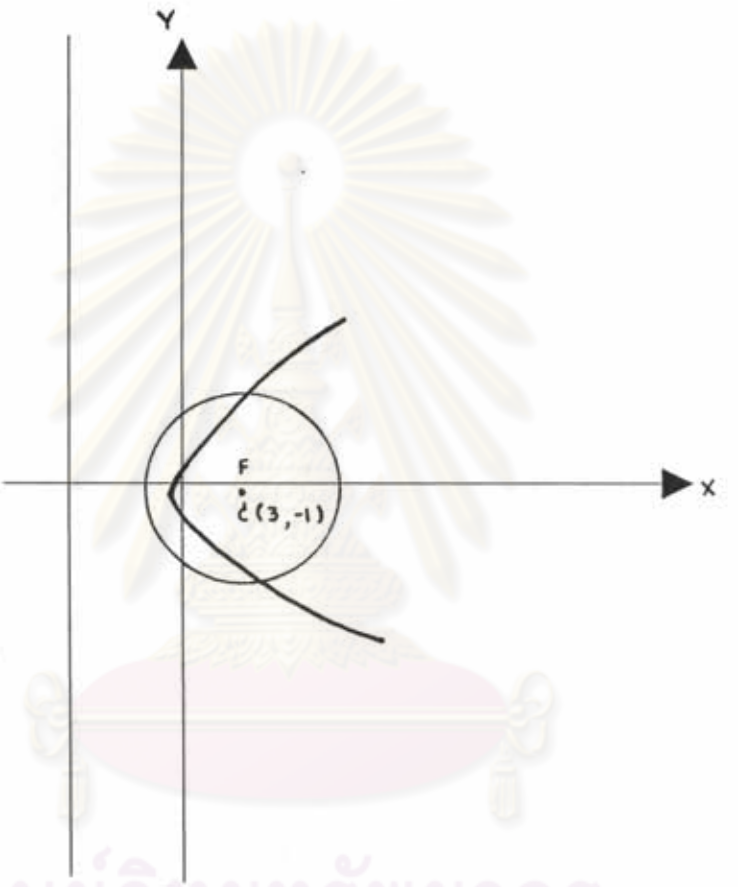
2.2 จงเขียนสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาที่ใช้สำหรับสร้างสมการของพาราโบลาในข้อนี้

2.3 จงแสดงวิธีทำและหาคำตอบที่ถูกต้อง

เฉลย

การให้คะแนน

2.1



1 คะแนน

ปรับปรุงเป็น

2 คะแนน

2.2 $(y-k)^2 = 4c(x-h)$ — 1 คะแนน

2.3 จากสมการวงกลม $x^2+y^2-6x+2y-15 = 0$

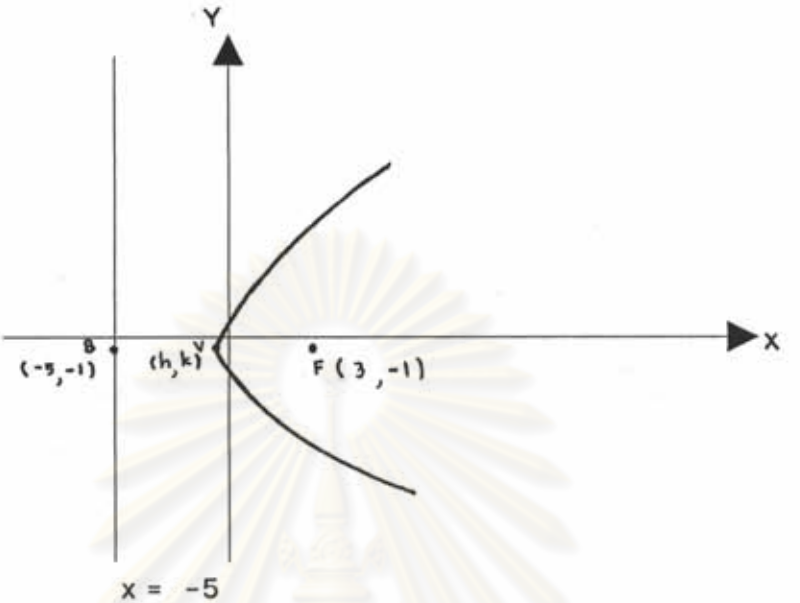
$(x^2 - 6x) + (y^2 + 2y) = 15$ — 2 คะแนน

$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 2y + 1) = 15 + 9 + 1$ — ปรับปรุงเป็น

$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$ — 1 คะแนน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่ C(3, -1) ดังนั้นจุดโฟกัสของพาราโบลาอยู่ที่ F(3, -1)



1 คะแนน

ให้จุดยอดของพาโบลาคือ V(h, k) และเนื่องจากเส้นไดเรกตริกซ์ คือ x = -5 และจุดโฟกัสคือ จุด (3, -1) ดังนั้นจุดยอด จุดโฟกัส และจุด B(5, -1) จะอยู่ในเส้นตรงแนวเดียวกันโดยที่จุดยอดเป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด (3, -1) และ (5, -1) แล้ว

2 คะแนน

$$h = \frac{-5 + 3}{2} = -1 \qquad \text{และ} \quad k = \frac{(-1) + (-1)}{2} = -1$$

ดังนั้นจุดยอด คือ V(-1, -1)

จากจุดโฟกัส คือ F(3, -1) จะได้ว่า

$$h + c = 3$$
$$-1 + c = 3$$
$$\therefore c = 4$$

1 คะแนน

จากสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลา คือ

$$(y - k)^2 = 4c(x - h)$$

จะได้ว่า

$$(y + 1)^2 = 4(4)(x + 1)$$
$$(y + 1)^2 = 16(x + 1)$$

2 คะแนน

หรือ $y^2 - 16x + 2y - 15 = 0$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

5. กำหนดให้ $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ และ $g(x) = \begin{cases} x+1 & ; x > 0 \\ x-2 & ; x \leq 0 \end{cases}$ จงหาค่าของ $(f+g^{-1})(3)$

5.1 ในการหาค่าของ $(f+g^{-1})(3)$ นักเรียนจะต้องทราบค่าของอะไร

5.2 ในการหาค่าของ $(f+g^{-1})(3)$ นักเรียนจะต้องหาอินเวอร์สของฟังก์ชันใด

5.3 จงแสดงวิธีทำและหาคำตอบที่ถูกต้อง

เฉลย

การให้คะแนน

5.1 $f(3)$ และ $g^{-1}(3)$ — 2 คะแนน

5.2 g — 1 คะแนน

5.3 จาก $g(x) = \begin{cases} x+1 & ; x > 0 \\ x-2 & ; x \leq 0 \end{cases}$

กรณีที่ 1 $g(x) = x + 1 \quad ; \quad x > 0$ — 3 คะแนน

$y = x + 1 \quad ; \quad x > 0$ แล้ว $y > 1$ — ปรับปรุงเป็น

หาอินเวอร์สของฟังก์ชัน g จะได้ — 2 คะแนน

$x = y + 1$

$\therefore y = x - 1$

นั่นคือ $g^{-1}(x) = x - 1 \quad ; \quad x > 1$

กรณีที่ 2 $g(x) = x - 2 \quad ; \quad x \leq 0$ — 2 คะแนน

$y = x - 2 \quad ; \quad x \leq 0$ แล้ว $y \leq -2$

หาอินเวอร์สของฟังก์ชัน g จะได้

$x = y - 2$

$\therefore y = x + 2$

นั่นคือ $g^{-1}(x) = x + 2 \quad ; \quad x \leq -2$

สรุป $g^{-1}(x) = \begin{cases} x - 1 & ; x > 1 \\ x + 2 & ; x \leq -2 \end{cases}$ — 1 คะแนน

จาก $(f + g^{-1})(3) = f(3) + g^{-1}(3)$ — 1 คะแนน

$= \left(\frac{3 + 1}{3 - 1}\right) + (3 - 1)$ — ปรับปรุงเป็น

$= 2 + 2$ — 2 คะแนน

$= 4$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ฉ

แบบทดสอบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ทดลองใช้ครั้งที่ 1

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบทดสอบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

คำชี้แจง 1. แบบทดสอบฉบับนี้มีทั้งหมด 16 ข้อ เรื่องภาคตัดกรวย 8 ข้อ และฟังก์ชัน 8 ข้อ

2. ให้นักเรียนแสดงวิธีทำทุกข้อ

3. แต่ละข้อคะแนนเต็ม 10 คะแนน

1. กำหนดวงกลมวงหนึ่งผ่านจุด(2,3) กับ (1,-2) และมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง x+y = 1 จงหาสมการวงกลม โดยที่

1.1 ให้เขียนรูปแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้

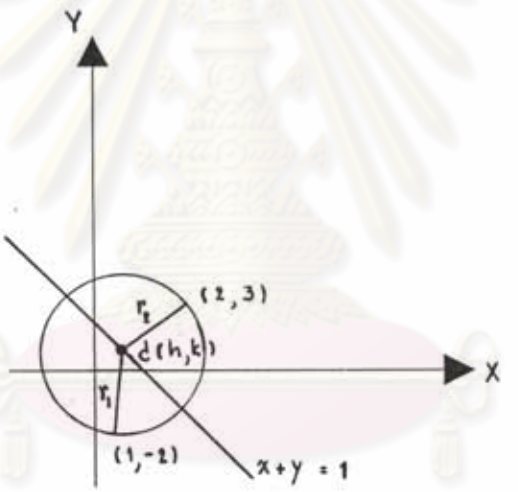
1.2 จากรูปมีความสัมพันธ์ใดที่นักเรียนสามารถนำไปใช้ในการแก้โจทย์ข้อนี้ได้ ถ้ากำหนดจุดศูนย์กลางคือ C(h,k)

1.3 จงแสดงวิธีทำและหาคำตอบที่ถูกต้อง

เฉลย

การให้คะแนน

1.1



1 คะแนน

1.2 ความยาวของรัศมีที่ลากจากจุดศูนย์กลางไปยังจุด (1, -2) เท่ากับความยาวของรัศมีที่ลากจากจุดศูนย์กลางไปยังจุด (2,3) นั่นคือ $r_1 = r_2$ ดังรูป และ C(h,k) อยู่บนเส้นตรง $x + y = 1$ จะได้ $h + k = 1$

2 คะแนน

1.3 ให้ C(h, k) เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และ (h, k) อยู่บนเส้นตรง $x + y = 1$

ดังนั้น $h + k = 1$ ——— ①

1 คะแนน

จากรูป $r_1 = r_2$

$\sqrt{(h-1)^2 + (k+2)^2} = \sqrt{(h-2)^2 + (k-3)^2}$

$\left(\sqrt{(h-1)^2 + (k+2)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(h-2)^2 + (k-3)^2}\right)^2$

2 คะแนน

$(h-1)^2 + (k+2)^2 = (h-2)^2 + (k-3)^2$

$h^2 - 2h + 1 + k^2 + 4k + 4 = h^2 - 4h + 4 + k^2 - 6k + 9$

$2h + 10k = 8$

$h + 5k = 4$ ——————— ②

แก้ระบบสมการ ① กับ ②

$h + k = 1$ ——————— ①

$h + 5k = 4$ ——————— ② } 1 คะแนน

② - ① $4k = 3$

$\therefore k = \frac{3}{4}$

แทนค่า $k = \frac{3}{4}$ ลงใน ①

$h + \frac{3}{4} = 1$

$h = 1 - \frac{3}{4}$ } 1 คะแนน

$\therefore h = \frac{1}{4}$

ดังนั้น C(h, k) ได้เป็น $C\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

หารัศมีจาก $r_1 = \sqrt{(h-1)^2 + (k+2)^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{1}{4} - 1\right)^2 + \left(\frac{3}{4} + 2\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{121}{16}}$ } 1 คะแนน

$= \sqrt{\frac{130}{16}}$

$= \sqrt{\frac{65}{8}}$

จากบทนิยามของวงกลม $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

ดังนั้นจะได้สมการวงกลมคือ $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{65}{8}$ } 1 คะแนน

หรือ $2x^2 + 2y^2 - x - 3y - 15 = 0$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. จงหาสมการของพาราโบลาซึ่งมีเส้นตรง $x+5 = 0$ เป็นเส้นไดเรกตริกซ์ และมีจุดโฟกัสอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2+ y^2 -6x+2y-15 = 0$

2.1 จากโจทย์จงเขียนรูปแสดงเส้นไดเรกตริกซ์ จุดศูนย์กลางของวงกลมและพาราโบลา

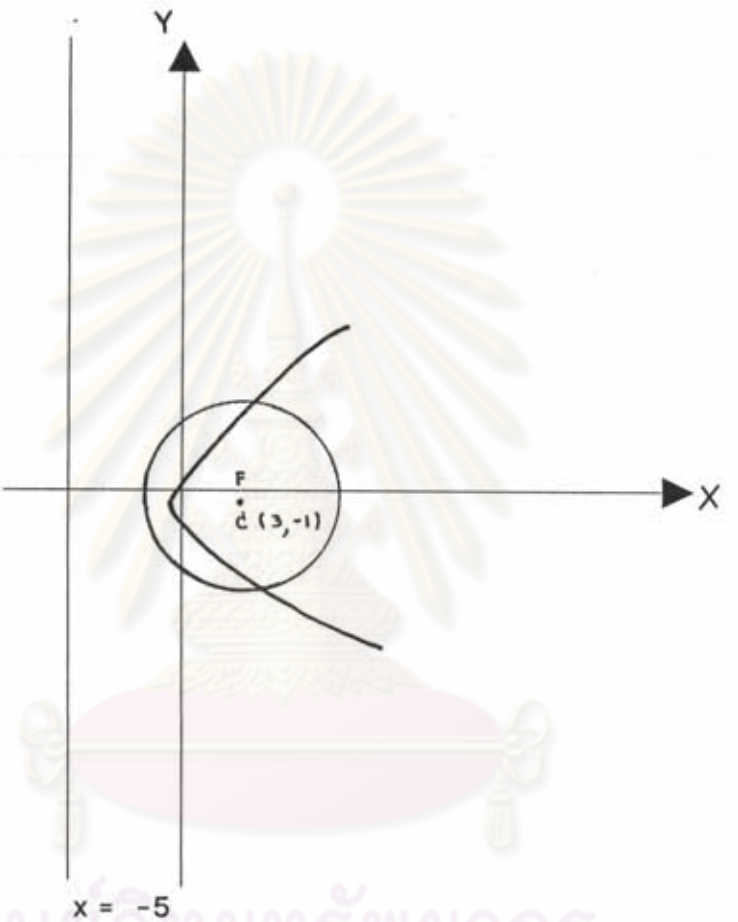
2.2 จงเขียนสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาที่ใช้สำหรับสร้างสมการของพาราโบลาในข้อนี้

2.3 จงแสดงวิธีทำและหาคำตอบที่ถูกต้อง

<u>เฉลย</u>

<u>การให้คะแนน</u>

2.1



2 คะแนน

2.2 $(y - k)^2 = 4c (x - h)$ 1 คะแนน

2.3 จากสมการวงกลม $x^2+y^2-6x+2y-15 = 0$

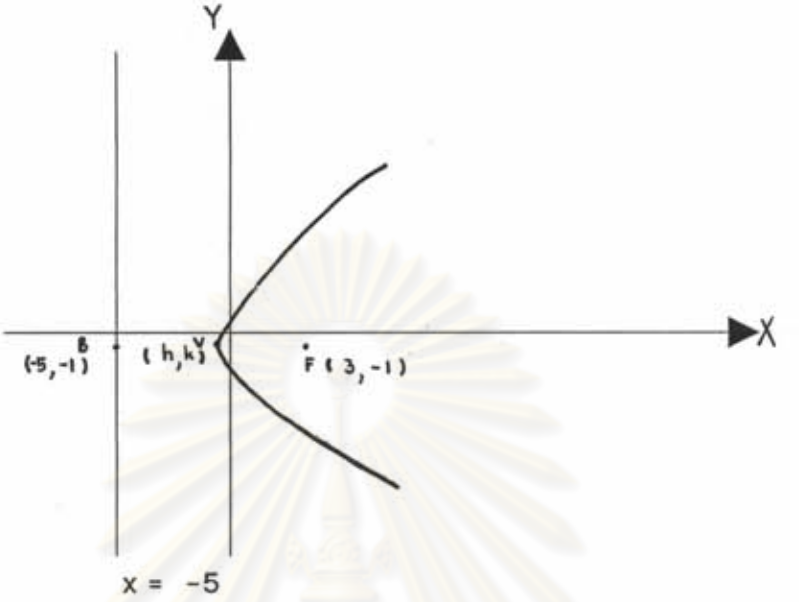
$(x^2 - 6x) + (y^2 + 2y) = 15$

$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 2y + 1) = 15 + 9 + 1$ 1 คะแนน

$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่ C(3, -1) ดังนั้นจุดโฟกัสของพาราโบลาอยู่ที่ F(3, -1)



1 คะแนน

ให้จุดยอดของพาโบลาคือ V(h, k) และเนื่องจากเส้นไดเรกตริกซ์ คือ x = -5 และจุดโฟกัสคือ จุด (3, -1) ดังนั้นจุดยอด จุดโฟกัส และจุด B(5, -1) จะอยู่ในเส้นตรงแนวเดียวกันโดยที่จุดยอดเป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด (3, -1) และ (5, -1) แล้ว

2 คะแนน

$$h = \frac{-5 + 3}{2} = -1 \qquad \text{และ} \quad k = \frac{(-1) + (-1)}{2} = -1$$

ดังนั้นจุดยอด คือ V(-1, -1)

จากจุดโฟกัส คือ F(3, -1) จะได้ว่า

1 คะแนน

$$h + c = 3$$
$$-1 + c = 3$$
$$\therefore\ c = 4$$

จากสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลา คือ

$$(y - k)^2 = 4c\,(x - h)$$

จะได้ว่า

$$(y + 1)^2 = 4(4)(x + 1)$$
$$(y + 1)^2 = 16(x + 1)$$

2 คะแนน

หรือ $y^2 - 16x + 2y - 15 = 0$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3. จงหาสมการวงรีซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดยอดของพาราโบลา $x^2-6x-4y+17 = 0$ มีจุดปลายแกนโทจุดหนึ่งอยู่ที่จุดโฟกัสของพาราโบลา แกนเอกอยู่บนเส้นตรง $y = 2$ และครึ่งแกนเอกยาว 5 หน่วย

3.1 จงบอกความสัมพันธ์ระหว่างวงรีกับพาราโบลาในโจทย์ข้อนี้

3.2 จงบอกสิ่งที่ต้องทำเพื่อหาจุดยอดและจุดโฟกัสของพาราโบลา

3.3 จงแสดงวิธีทำและหาคำตอบที่ถูกต้อง

เฉลย

การให้คะแนน

3.1 จุดศูนย์กลางของวงรีอยู่ที่จุดยอดของพาราโบลา
จุดปลายแกนโทจุดหนึ่งอยู่ที่จุดโฟกัสของพาราโบลา — 1 คะแนน

3.2 จัดรูปสมการพาราโบลาที่กำหนดนั้นให้อยู่ในรูปสมการมาตรฐาน — 1 คะแนน

3.3 จากสมการพาราโบลา $x^2 - 6x - 4y + 17 = 0$

$x^2 - 6x = 4y - 17$

$x^2 - 2x(3) + 9 = 4y - 17 + 9$

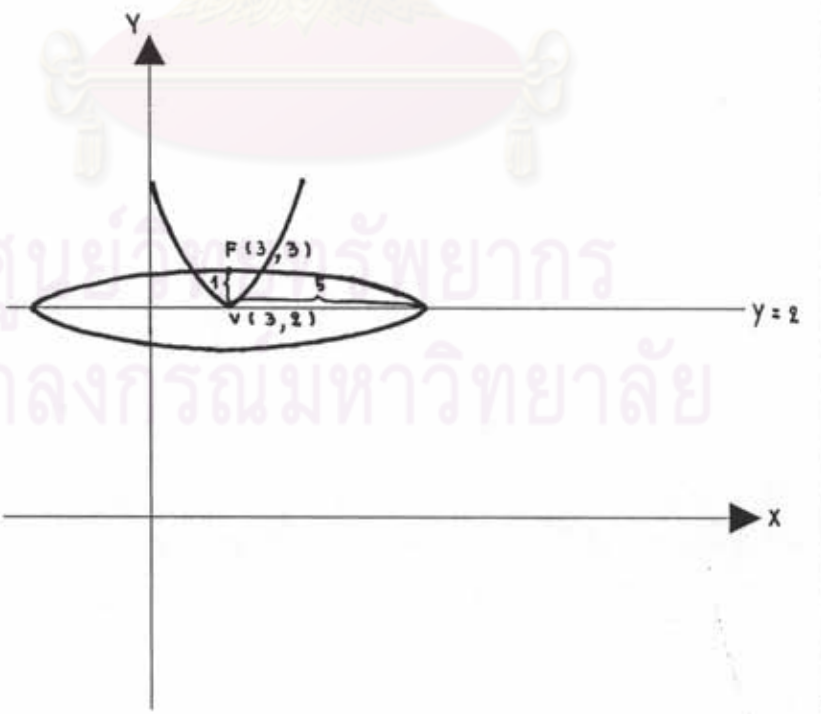
$(x - 3)^2 = 4y - 8$ — 2 คะแนน

$(x - 3)^2 = 4(y - 2)$

$(x - 3)^2 = 4(1)(y - 2)$

นั่นคือ $h = 3$, $k = 2$ และ $c = 1$

ดังนั้น จุดยอดของพาราโบลาอยู่ที่จุด (3, 2) และจุดโฟกัสอยู่ที่จุด (3, 3)



2 คะแนน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ วงรีดังกล่าวจะมีแกนเอกขนานกับแกน X และแกนโทขนานกับแกน Y ดังนั้นสมการมาตรฐานของวงรี คือ $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ 1 คะแนน

เนื่องจากจุดศูนย์กลางของวงรีอยู่ที่จุดยอดของพาราโบลา ดังนั้น (3, 2) เป็นจุดศูนย์กลางของวงรี

จากระยะห่างระหว่างจุดยอดกับจุดโฟกัสเท่ากับ 1 ดังนั้นแกนโทยาว 2 หน่วย หรือ $b = 1$ จะได้ $b^2 = 1$ 2 คะแนน

และจากครึ่งแกนเอกยาว 5 หน่วย ดังนั้น $a = 5$ จะได้ $a^2 = 25$

ดังนั้นสมการวงรี คือ $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1$ 1 คะแนน

หรือ $x^2 + 25y^2 - 6x - 100y + 84 = 0$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4. จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดของวงรี $25x^2+9y^2-100x+18y-116 = 0$ เป็นจุดโฟกัส และจุดโฟกัสของวงรีเป็นจุดยอด

4.1 จุดศูนย์กลางของวงรีคือจุดอะไรของไฮเพอร์โบลา

4.2 สิ่งที่ต้องทำเพื่อหาจุดยอดและจุดโฟกัสของวงรีคืออะไร

4.3 จงแสดงวิธีทำและหาคำตอบที่ถูกต้อง

เฉลย — การให้คะแนน

4.1 จุดศูนย์กลาง — 1 คะแนน

4.2 จัดรูปสมการวงรีในข้อนี้ให้เป็นรูปมาตรฐาน — 1 คะแนน

4.3 จากสมการวงรี $25x^2 + 9y^2 - 100x + 18y - 116 = 0$

$(25x^2 - 100x) + (9y^2 + 18y) = 116$

$25(x^2 - 4x) + 9(y^2 + 2y) = 116$

$25(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 + 2y + 1) = 116+100+9$ — 1 คะแนน

$25(x - 2)^2 + 9(y + 1)^2 = 225$

$\frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y + 1)^2}{25} = 1$

นั่นคือ $h = 2$ $k = -1$ จะได้จุดศูนย์กลางคือ $(2, -1)$ และ $a^2 = 25$ จะได้ $a = \pm 5$ และ $b^2 = 9$ จะได้ $b = \pm 3$ — 2 คะแนน

ดังนั้นจุดยอด คือ $(2, -1+5) = (2, 4)$ และ $(2, -1-5) = (2, -6)$

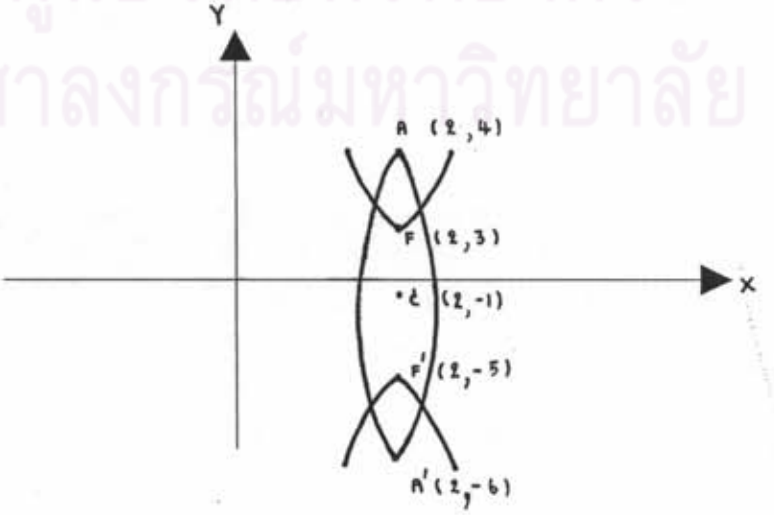
จากสมการความสัมพันธ์ $a^2 = b^2 + c^2$

$25 = 9 + c^2$

$c^2 = 16$ — 2 คะแนน

$\therefore c = \pm 4$

ดังนั้นจุดโฟกัสคือ $(2, -1+4) = (2, 3)$ และ $(2, -1-4) = (2, -5)$



ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ จะได้ว่าไฮเพอร์โบลาดังกล่าวจะมีแกนตามขวางขนานกับแกน Y และแกนสังยุคขนานกับแกน X

ดังนั้นสมการรูปมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

จากจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงรี ดังนั้น (2, -1) เป็นจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา — 2 คะแนน

เนื่องจากระยะห่างระหว่างจุด A(2, 4) กับ C(2, -1) เท่ากับ 5 หน่วย ดังนั้น $c = 5$ จะได้ $c^2 = 25$ และระยะห่างระหว่างจุด F(1, 2) กับ C(1, -2) เท่ากับ 4 หน่วย ดังนั้น $a = 4$ จะได้ $a^2 = 16$

จากสมการความสัมพันธ์ $c^2 = a^2 + b^2$

$25 = 16 + b^2$

$\therefore b^2 = 9$

ดังนั้นสมการไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{(y+1)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1$ — 1 คะแนน

หรือ $9y^2 - 16x^2 + 64x + 18y - 199 = 0$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

5. จงหาสมการของวงกลมซึ่งผ่านจุด A (2,3) และ B (3,6) และสัมผัสกับเส้นตรง 2x+y-2 = 0

5.1 จงเขียนรูปแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้

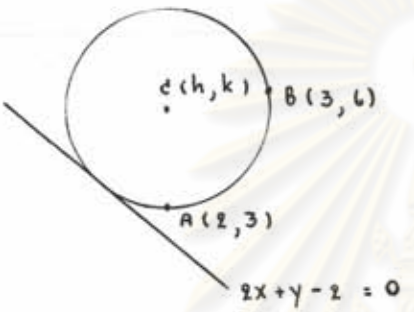
5.2 จากรูปมีความสัมพันธ์ใดที่นักเรียนสามารถนำไปใช้ในการแก้โจทย์ข้อนี้ได้ ถ้ากำหนดจุดศูนย์กลาง คือ C (h,k)

5.3 จงแสดงวิธีทำและหาคำตอบที่ถูกต้อง

เฉลย

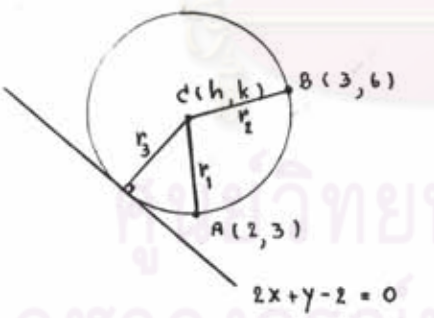
การให้คะแนน

5.1



1 คะแนน

5.2



$r_1 = r_2 = r_3$

หรือรัศมีของวงกลมที่ลากจากจุดศูนย์กลาง ไปยังจุด A, B และตั้งฉากกับเส้นตรง 2x+y-2 = 0 ยาวเท่ากัน

1 คะแนน

5.3 ให้ C(h, k) เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

จากรูป

$$r_1 = r_2$$

$$\sqrt{(h-2)^2 + (k-3)^2} = \sqrt{(h-3)^2 + (k-6)^2}$$

$$\left(\sqrt{(h-2)^2 + (k-3)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(h-3)^2 + (k-6)^2}\right)^2$$

$$(h-2)^2 + (k-3)^2 = (h-3)^2 + (k-6)^2$$

$$h^2 - 4h + 4 + k^2 - 6k + 9 = h^2 - 6h + 9 + k^2 - 12k + 36$$

2 คะแนน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$2h + 6k - 32 = 0$

$h + 3k - 16 = 0$

$h = 16 - 3k$ ——— ①

จากรูป $r_1 = r_3$

$\sqrt{(h-2)^2 + (k-3)^2} = \frac{|2h + k - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$ 1 คะแนน

$\left(\sqrt{5} \cdot \sqrt{(h-2)^2 + (k-3)^2}\right)^2 = (|2h + k - 2|)^2$

$5[(h-2)^2 + (k-3)^2] = (2h + k - 2)^2$ ——— ②

แทน $h = 16 - 3k$ ลงใน ②

$5[(16 - 3k - 2)^2 + (k-3)^2] = (2(16 - 3k) + k - 2)^2$

$5[(14 - 3k)^2 + (k-3)^2] = (32 - 6k + k - 2)^2$

$5[196 - 84k + 9k^2 + k^2 - 6k + 9] = (30 - 5k)^2$

$5[10k^2 - 90k + 205] = 900 - 300k + 25k^2$

$10k^2 - 90k + 205 = 180 - 60k + 5k^2$

$5k^2 - 30k + 25 = 0$ 2 คะแนน

$k^2 - 6k + 5 = 0$

$(k - 5)(k - 1) = 0$

$k = 5$ หรือ $k = 1$

แทนค่า k ลงใน ①

$\therefore h = 1$ หรือ $h = 13$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางคือ $C(1, 5)$ หรือ $C(13, 1)$

<u>กรณีที่ 1</u> จุดศูนย์กลาง คือ $C(1, 5)$ หารัศมีจาก r_1 โดย

$r_1 = \sqrt{(1-2)^2 + (5-3)^2}$

$= \sqrt{1 + 4}$ 1 คะแนน

$= \sqrt{5}$

สมการวงกลมคือ $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 5$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กรณีที่ 2 จุดศูนย์กลางคือ C(13, 1) หารัศมีจาก r_1 โดย

$$r_1 = \sqrt{(13 - 2)^2 + (1 - 3)^2}$$
$$= \sqrt{121 + 4}$$
$$= \sqrt{125}$$

1 คะแนน

สมการวงกลมคือ $(x - 13)^2 + (y - 1)^2 = 125$

สรุป สมการวงกลมคือ $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 5$ หรือ $(x - 13)^2 + (y - 1)^2 = 125$

1 คะแนน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

6. จงหาสมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่บนเส้นตรง 2x+y-7 = 0 และกราฟของพาราโบลารูปนี้ผ่านจุด (6,-1) โดยแกนของพาราโบลามีสมการ y-3 = 0

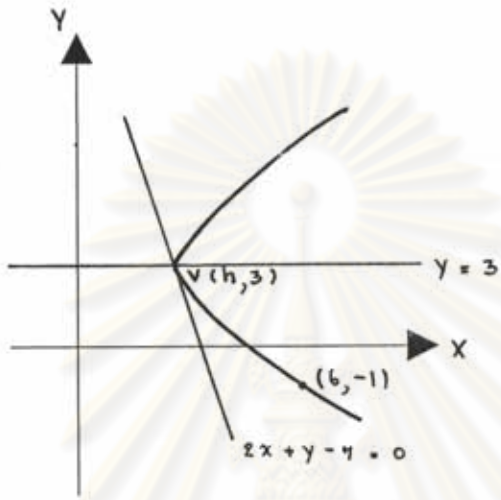
6.1 จงเขียนรูปแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้

6.2 จงเขียนสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาที่ใช้สำหรับสร้างสมการของพาราโบลาในข้อนี้

6.3 จงแสดงวิธีทำและหาคำตอบที่ถูกต้อง

<u>เฉลย</u> <u>การให้คะแนน</u>

6.1



2 คะแนน

6.2 $(y-k)^2 = 4c(x-h)$ 2 คะแนน

6.3 จากรูปจุดยอดของพาราโบลา คือ V(h, 3) อยู่บนเส้นตรง 2x+y-7 = 0 1 คะแนน

จะได้ $2h + 3 - 7 = 0$

$2h = 4$ } 2 คะแนน

$\therefore h = 2$

ดังนั้นจุดยอดของพาราโบลา คือ V(2, 3)

จากสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลา คือ $(y-k)^2 = 4c(x-h)$

และเนื่องจากพาราโบลาผ่านจุด (6, -1) และมีจุดยอดคือ V(2, 3) จะได้

$(-1-3)^2 = 4c(6-2)$

$16 = 16c$ } 2 คะแนน

$\therefore c = 1$

ดังนั้นสมการพาราโบลาคือ $(y-3)^2 = 4(1)(x-2)$

$(y-3)^2 = 4(x-2)$ } 1 คะแนน

หรือ $y^2 - 4x - 6y + 17 = 0$

7. จงหาสมการของวงรีที่มีจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (2,8) จุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่จุด (2,-2) และมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $2x+3y-10 = 0$

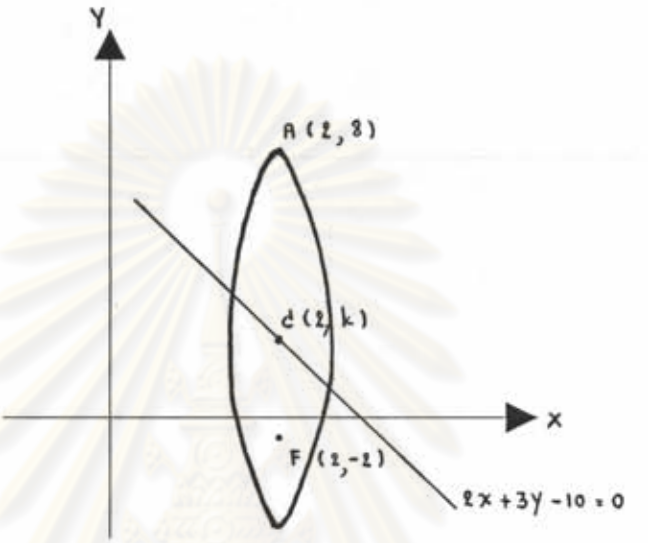
7.1 จงเขียนรูปแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้

7.2 จงเขียนสมการรูปมาตรฐานของวงรีที่ใช้สำหรับสร้างสมการของวงรีในข้อนี้

7.3 จงแสดงวิธีทำและหาคำตอบที่ถูกต้อง

<u>เฉลย</u> <u>การให้คะแนน</u>

7.1



2 คะแนน

7.2 $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ 1 คะแนน

7.3 เนื่องจากจุดศูนย์กลางของวงรีอยู่บนเส้นตรง $2x + 3y - 10 = 0$ จะได้

$2(2) + 3k - 10 = 0$

$4 + 3k - 10 = 0$

$3k = 6$

$\therefore k = 2$ } 1 คะแนน

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ C(2, 2)

จากจุดยอด A(2, 8) จะได้ว่า

$k + a = 8$

$2 + a = 8$

$a = 6$

$\therefore a^2 = 36$ } 2 คะแนน

จากจุดโฟกัส F(2, -2) จะได้ว่า

$k - c = -2$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$2 - c = -2$

$-c = -4$ } 2 คะแนน

$c = 4$

$\therefore c^2 = 16$

เนื่องจาก $a^2 = b^2 + c^2$

$36 = b^2 + 16$ } 1 คะแนน

$\therefore b^2 = 20$

จากสมการรูปมาตรฐานของวงรี คือ $\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$

ดังนั้นสมการวงรี คือ $\frac{(x - 2)^2}{20} + \frac{(y - 2)^2}{36} = 1$ } 1 คะแนน

หรือ $36x^2 + 20y^2 - 144x - 80y - 496 = 0$

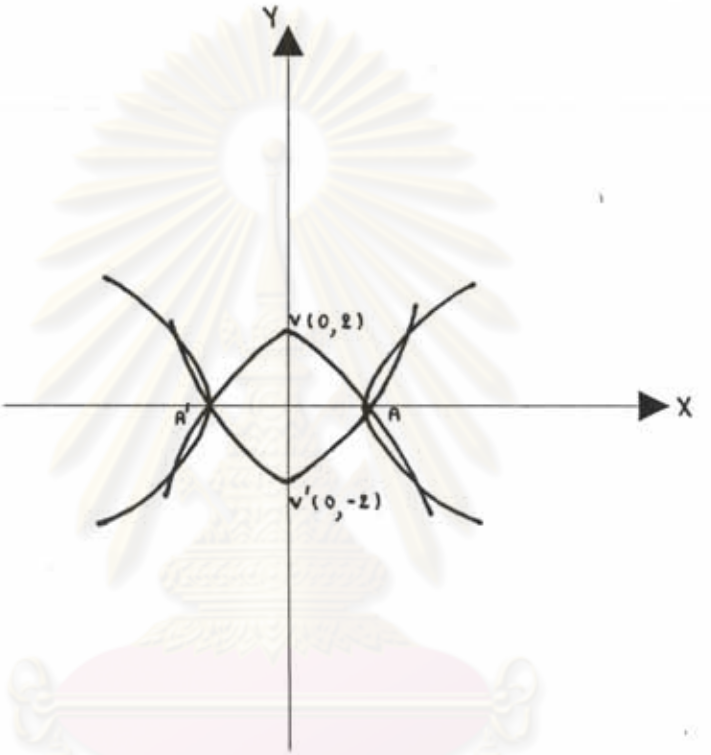
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

8. กำหนดให้ $x^2 = 8(y+2)$ และ $x^2 = -8(y-2)$ เป็นสมการของรูปพาราโบลาสองรูป จงหาสมการของไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดตัดกันของพาราโบลาทั้งสอง และแกนสังยุคคือเส้นตรงที่เชื่อมจุดยอดของพาราโบลาทั้งสอง

8.1 จงเขียนรูปแสดงความสัมพันธ์ของสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

8.2 จงเขียนสมการรูปมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาที่ใช้สำหรับสร้างสมการของไฮเพอร์โบลาในข้อนี้

8.3 จงแสดงวิธีทำและหาคำตอบที่ถูกต้อง

เฉลย	การให้คะแนน
8.1 	2 คะแนน
8.2 $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	1 คะแนน
8.3 สมการพาราโบลา $x^2 = 8(y+2)$ มีจุดยอดที่ $(0,-2)$ เป็นรูปหงาย สมการพาราโบลา $x^2 = -8(y-2)$ มีจุดยอดที่ $(0,2)$ เป็นรูปคว่ำ	
ให้ $x^2 = 8(y+2)$ ——— ①	
$x^2 = -8(y-2)$ ——— ②	2 คะแนน
จะได้ว่า $8(y+2) = -8(y-2)$	
$y+2 = -y+2$	
$2y = 0$	
$\therefore y = 0$	

แทนค่า $y = 0$ ลงใน ① จะได้

$$x^2 = 8(0 + 2)$$
$$x^2 = 16$$
$$\therefore x = \pm 4$$

} 2 คะแนน

จะได้จุดตัดกันของพาราโบลาทั้งสองคือ $(4, 0)$ และ $(-4, 0)$
ดังนั้นจุดยอดของไฮเพอร์โบลา คือ $A(4, 0)$ กับ $A'(-4, 0)$ และจะได้จุดศูนย์กลาง คือ $C(0, 0)$

เนื่องจากระยะระหว่าง จุด $A(4, 0)$ กับ $A'(-4, 0)$ เท่ากับ 8 หน่วย ซึ่งเป็นแกนตามขวาง
ดังนั้น จะได้ว่า

$$2a = 8$$
$$a = 4$$
$$\therefore a^2 = 16$$

} 1 คะแนน

และระยะระหว่างจุด $V(0, 2)$ กับ $V'(0, -2)$ เท่ากับ 4 หน่วย ซึ่งเป็นแกนสังยุค
ดังนั้น จะได้ว่า

$$2b = 4$$
$$b = 2$$
$$\therefore b^2 = 4$$

} 1 คะแนน

จากสมการรูปมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$

ดังนั้น สมการไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{(x - 0)^2}{16} - \frac{(y - 0)^2}{4} = 1$

นั่นคือ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$

} 1 คะแนน

หรือ $x^2 - 4y^2 - 16 = 0$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

1. กำหนดให้ $f(8x-7) = 2x-5$ และ $(f^{-1}+g)(x) = x^2+3x-2$ จงหาค่าของ $g(x)$

1.1 จากบทนิยามของพีชคณิตของฟังก์ชันนั้น ค่าของ $(f^{-1}+g)(x)$ จะเท่ากับอะไร

1.2 สิ่งที่ต้องหาเพื่อนำไปสู่การหาค่าของ $g(x)$ คืออะไร

1.3 จงแสดงวิธีทำและหาคำตอบที่ถูกต้อง

เฉลย

การให้คะแนน

1.1 $f^{-1}(x) + g(x)$ — 1 คะแนน

1.2 $f^{-1}(x)$ — 2 คะแนน

วิธีที่ 1

1.3 จาก $f(8x-7) = 2x-5$ — 2 คะแนน

ดังนั้น $f^{-1}(2x-5) = 8x-7$

ให้ $2x-5 = t$

$x = \frac{t+5}{2}$

$8x-7 = 8\left(\frac{t+5}{2}\right)-7$ — 2 คะแนน

$= 4t+20-7$

$= 4t+13$

จะได้ $f^{-1}(t) = 4t+13$ — 1 คะแนน

$\therefore f^{-1}(x) = 4x+13$

จาก $(f^{-1}+g)(x) = x^2+3x-2$ — 1 คะแนน

$f^{-1}(x)+g(x) = x^2+3x-2$

$4x+13+g(x) = x^2+3x-2$ — 1 คะแนน

$\therefore g(x) = x^2-x-15$

วิธีที่ 2

การให้คะแนน

1.3 จาก $f(8x-7) = 2x-5$

ให้ $8x-7 = t$

$x = \frac{t+7}{8}$

$2x-5 = 2\left(\frac{t+7}{8}\right)-5$

$= \frac{t+7}{4} - 5$

$= \frac{t-13}{4}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จะได้ $f(t) = \frac{t - 13}{4}$ 3 คะแนน

$\therefore f(x) = \frac{x - 13}{4}$

หรือ $y = \frac{x - 13}{4}$

หาอินเวอร์สของฟังก์ชัน f จะได้

$x = \frac{y - 13}{4}$ 2 คะแนน

$\therefore y = 4x + 13$

นั่นคือ $f^{-1}(x) = 4x + 13$

จาก $(f^{-1}+g)(x) = x^2 + 3x - 2$ 1 คะแนน

$f^{-1}(x) + g(x) = x^2 + 3x - 2$

$4x + 13 + g(x) = x^2 + 3x - 2$ 1 คะแนน

$\therefore g(x) = x^2 - x - 15$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. กำหนดให้ $(f+g)(x) = 6x+1$ และ $(f-g)(x) = 3-4x$ จงหาค่าของ $(g-f)^{-1}(x)$

2.1 จาก $(f+g)(x)$ และ $(f-g)(x)$ ที่กำหนดให้ทำให้สามารถหาค่าของอะไรได้บ้าง

2.2 ในการหา $(g-f)^{-1}(x)$ ต้องหาอินเวอร์สของสิ่งใด

2.3 จงแสดงวิธีทำและหาคำตอบที่ถูกต้อง

<u>เฉลย</u> <u>การให้คะแนน</u>

2.1 $f(x)$ และ $g(x)$ — 1 คะแนน

2.2 $(g - f)(x)$ หรือ $g(x) - f(x)$ — 1 คะแนน

2.3 จาก $(f + g)(x) = 6x + 1$

จะได้ $f(x) + g(x) = 6x + 1$ ——— ① — 1 คะแนน

จาก $(f - g)(x) = 3 - 4x$

จะได้ $f(x) - g(x) = -4x + 3$ ——— ② — 1 คะแนน

แก้ระบบสมการ ① กับ ②

$f(x) + g(x) = 6x + 1$ ——— ①

$f(x) - g(x) = -4x + 3$ ——— ② — 1 คะแนน

① + ② $2f(x) = 2x + 4$

$\therefore f(x) = x + 2$

แทนค่า $f(x) = x + 2$ ลงใน ①

$x + 2 + g(x) = 6x + 1$ — 1 คะแนน

$\therefore g(x) = 5x - 1$

เนื่องจาก $(g - f)(x) = g(x) - f(x)$

$(g - f)(x) = (5x - 1) - (x + 2)$ — 2 คะแนน

$(g - f)(x) = 5x - 1 - x - 2$

$(g - f)(x) = 4x - 3$

หรือ $y = 4x - 3$

หาอินเวอร์สของฟังก์ชัน $g - f$ จะได้

$x = 4y - 3$

$\therefore y = \frac{x + 3}{4}$ — 2 คะแนน

นั่นคือ $(g - f)^{-1}(x) = \frac{x + 3}{4}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3. กำหนดให้ $f^{-1}og^{-1} = \{(x,y) \in RxR \mid y = 2x-6\}$ และ $g(x) = x+3$ จงหาค่า $f^{-1}(x)$

3.1 จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ $(f^{-1}og^{-1})(x)$ มีค่าเท่ากับเท่าไร

3.2 ในการหา $f^{-1}(x)$ ของโจทย์ข้อนี้ นักเรียนต้องหาอินเวอร์สของฟังก์ชันใดก่อน

3.3 จงแสดงวิธีทำและหาคำตอบที่ถูกต้อง

<u>เฉลย</u>

<u>การให้คะแนน</u>

3.1 $(f^{-1}og^{-1})(x) = 2x - 6$ — 2 คะแนน

3.2 g — 1 คะแนน

3.3 จาก $g(x) = x + 3$

หรือ $y = x + 3$

หาอินเวอร์สของฟังก์ชัน g จะได้ — 2 คะแนน

$x = y + 3$

$\therefore y = x - 3$

นั่นคือ $g^{-1}(x) = x - 3$

จาก $(f^{-1}og^{-1})(x) = 2x - 6$ — 2 คะแนน

จะได้ $f^{-1}(g^{-1}(x)) = 2x - 6$

$f^{-1}(x - 3) = 2x - 6$

ให้ $x - 3 = t$

$x = t + 3$

และ $2x - 6 = 2(t + 3) - 6$ — 2 คะแนน

$= 2t + 6 - 6$

$= 2t$

จะได้ $f^{-1}(t) = 2t$ — 1 คะแนน

$\therefore f^{-1}(x) = 2x$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันกำหนดโดย

f = {(x,y)∈ RxRI 3x-y-2 = 0} และ

g = {(x,y)∈ RxRI 2x-y+7 = 0} จงหา $f^{-1}og$

4.1 f(x) และ g(x) มีค่าเท่ากับเท่าไร

4.2 ในการหา $f^{-1}og$ นักเรียนต้องหาค่าของฟังก์ชันใดบ้าง

4.3 จงแสดงวิธีทำและหาคำตอบที่ถูกต้อง

<u>เฉลย</u>

<u>การให้คะแนน</u>

4.1 $f(x) = 3x - 2$

$g(x) = 2x + 7$ — 2 คะแนน

4.2 f^{-1} และ $f^{-1}og$ — 2 คะแนน

4.3 จาก $f = \{(x, y) \in Rx\ RI\ 3x - y - 2 = 0\}$

จะได้ $f(x) = 3x - 2$

$y = 3x - 2$

หาอินเวอร์สของฟังก์ชัน f จะได้

$x = 3y - 2$

$\therefore y = \frac{x + 2}{3}$

นั่นคือ $f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{3}$ — 2 คะแนน

จาก $g = \{(x, y) \in Rx\ RI\ 2x - y + 7 = 0\}$

จะได้ $g(x) = 2x + 7$ — 1 คะแนน

เนื่องจาก $(f^{-1}og)(x) = f^{-1}(g(x))$

$= f^{-1}(2x + 7)$

$= \frac{(2x + 7) + 2}{3}$

$= \frac{2x + 9}{3}$ — 2 คะแนน

$\therefore f^{-1}og = \{(x, y) \in Rx\ RI\ y = \frac{2x + 9}{3}\}$ — 1 คะแนน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

5. กำหนดให้ $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ และ $g(x) = \begin{cases} x+1 & ; x > 0 \\ x-2 & ; x \leq 0 \end{cases}$ จงหาค่าของ $(f+g^{-1})(3)$

5.1 ในการหาค่าของ $(f+g^{-1})(3)$ นักเรียนจะต้องทราบค่าของอะไร

5.2 ในการหาค่าของ $(f+g^{-1})(3)$ นักเรียนจะต้องหาอินเวอร์สของฟังก์ชันใด

5.3 จงแสดงวิธีทำและหาคำตอบที่ถูกต้อง

<u>เฉลย</u>

<u>การให้คะแนน</u>

5.1 $f(3)$ และ $g^{-1}(3)$ — 2 คะแนน

5.2 g — 1 คะแนน

5.3 จาก $g(x) = \begin{cases} x+1 & ; x > 0 \\ x-2 & ; x \leq 0 \end{cases}$

<u>กรณีที่ 1</u> $g(x) = x + 1 \quad ; x > 0$

$y = x + 1 \quad ; x > 0$ แล้ว $y > 1$

หาอินเวอร์สของฟังก์ชัน g จะได้ — 2 คะแนน

$x = y + 1$

$\therefore y = x - 1$

นั่นคือ $g^{-1}(x) = x - 1 \quad ; x > 1$

<u>กรณีที่ 2</u> $g(x) = x - 2 \quad ; x \leq 0$

$y = x - 2 \quad ; x \leq 0$ แล้ว $y \leq -2$

หาอินเวอร์สของฟังก์ชัน g จะได้ — 2 คะแนน

$x = y - 2$

$\therefore y = x + 2$

นั่นคือ $g^{-1}(x) = x + 2 \quad ; x \leq -2$

<u>สรุป</u> $g^{-1}(x) = \begin{cases} x - 1 & ; x > 1 \\ x + 2 & ; x \leq -2 \end{cases}$ — 1 คะแนน

จาก $(f + g^{-1})(3) = f(3) + g^{-1}(3)$

$= \left(\frac{3 + 1}{3 - 1}\right) + (3 - 1)$ — 2 คะแนน

$= 2 + 2$

$= 4$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

6. กำหนดให้ $f(x) = x^2+3x-1$ และ g เป็นฟังก์ชันโดยที่ $g(x) = f(2x)$ และ $h(x) = 3x$ แล้ว $\left(\frac{g-f}{h}\right)^{-1}(x)$ มีค่าเท่ากับเท่าไร

6.1 ในการหาค่าของ $\left(\frac{g-f}{h}\right)^{-1}(x)$ หาอินเวอร์สของสิ่งใด

6.2 ฟังก์ชันใดนำไปสู่การหาค่าของ $g(x)$

6.3 จงแสดงวิธีทำและหาคำตอบที่ถูกต้อง

<u>เฉลย</u> <u>การให้คะแนน</u>

6.1 $\left(\frac{g-f}{h}\right)(x)$ 1 คะแนน

6.2 f 1 คะแนน

6.3 จาก $f(x) = x^2+3x-1$

และ $g(x) = f(2x)$ 2 คะแนน

$g(x) = (2x)^2+3(2x)-1$

$g(x) = 4x^2+6x-1$

เนื่องจาก $\left(\frac{g-f}{h}\right)(x) = \frac{g(x)-f(x)}{h(x)}$; $h(x) \neq 0$ 1 คะแนน

$= \frac{(4x^2+6x-1)-(x^2+3x-1)}{3x}$

$= \frac{4x^2+6x-1-x^2-3x+1}{3x}$

$= \frac{3x^2+3x}{3x}$ 2 คะแนน

$= \frac{3x(x+1)}{3x}$

$= x+1$

หรือ $y = x+1$

หาอินเวอร์สของฟังก์ชัน $\frac{g-f}{h}$ จะได้

$x = y+1$ 2 คะแนน

$\therefore y = x-1$

นั่นคือ $\left(\frac{g-f}{h}\right)^{-1}(x) = x-1$ 1 คะแนน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

7. ถ้า $f^{-1}(x) = \frac{x}{x-2}$ และ $(fog)(x) = x+3$ แล้วจงหาค่าของ $g(x)$

7.1 จากบทนิยามของฟังก์ชันคอมโพสิทนั้น ค่าของ $(fog)(x)$ จะเท่ากับอะไร

7.2 สิ่งที่ต้องหาเพื่อนำไปสู่การหาค่าของ $g(x)$ คืออะไร

7.3 จงแสดงวิธีทำและหาคำตอบที่ถูกต้อง

เฉลย		การให้คะแนน
7.1 $f(g(x))$		1 คะแนน
7.2 $f(x)$		1 คะแนน
วิธีที่ 1 7.3 จาก $f^{-1}(x)$	$= \frac{x}{x-2}$	
ดังนั้น $f(\frac{x}{x-2})$	$= x$	1 คะแนน
ให้ $\frac{x}{x-2}$	$= t$	
x	$= t(x-2)$	
x	$= xt - 2t$	2 คะแนน
$x - xt$	$= -2t$	
$x(1-t)$	$= -2t$	
x	$= \frac{-2t}{1-t}$	
จะได้ $f(t)$	$= \frac{-2t}{1-t}$	
$\therefore f(x)$	$= \frac{-2x}{1-x}$	1 คะแนน
จาก $(f\,og)(x)$	$= x+3$	
$f(g(x))$	$= x+3$	1 คะแนน
$\frac{-2g(x)}{1-g(x)}$	$= x+3$	
$-2g(x)$	$= (x+3)(1-g(x))$	
$-2g(x)$	$= x - xg(x) + 3 - 3g(x)$	2 คะแนน
$xg(x) + g(x)$	$= x+3$	
$(x+1)\,g(x)$	$= x+3$	
$\therefore g(x)$	$= \frac{x+3}{x+1}$	1 คะแนน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การให้คะแนน

วิธีที่ 2 7.3 จาก $f^{-1}(x) = \frac{x}{x-2}$

หรือ $y = \frac{x}{x-2}$ — 1 คะแนน

หาอินเวอร์สของฟังก์ชัน f^{-1} จะได้

$$x = \frac{y}{y-2}$$

$$x(y-2) = y$$

$$xy - y = 2x$$ — 2 คะแนน

$$y(x-1) = 2x$$

$$\therefore y = \frac{2x}{x-1}$$

นั่นคือ $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ — 1 คะแนน

จาก $(f \circ g)(x) = x + 3$

$$f(g(x)) = x + 3$$ — 1 คะแนน

$$\frac{-2g(x)}{1-g(x)} = x + 3$$

$$-2g(x) = (x+3)(1-g(x))$$

$$-2g(x) = x - xg(x) + 3 - 3g(x)$$ — 2 คะแนน

$$xg(x) + g(x) = x + 3$$

$$(x+1)\,g(x) = x + 3$$

$$\therefore g(x) = \frac{x+3}{x+1}$$ — 1 คะแนน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

8. ถ้า $f(x) = ax^2 + b$ กำหนดให้ $f(-1) = 2$ และ $f(3) = 26$ และ g เป็นฟังก์ชันที่ทำให้ $(fog)(x) = 3(g(x))^2 - 2g(x) + 1$ จงหาค่าของ $g(x)$

8.1 จากสิ่งที่กำหนดให้เกี่ยวกับฟังก์ชัน f นักเรียนจะสามารถหาค่าสิ่งใดจาก $f(x)$ ได้

8.2 สิ่งที่ต้องหาเพื่อนำไปสู่การหาค่าของ $g(x)$ คืออะไร

8.3 จงแสดงวิธีทำและหาคำตอบที่ถูกต้อง

<u>เฉลย</u> <u>การให้คะแนน</u>

8.1 a และ b — 2 คะแนน

8.2 f(x) — 1 คะแนน

8.3 จาก $f(x) = ax^2 + b$

$f(-1) = 2$ จะได้ $2 = a(-1)^2 + b$

$2 = a + b$ ——— ① } 1 คะแนน

$f(3) = 26$ จะได้ $26 = a(3)^2 + b$

$26 = 9a + b$ ——— ②

แก้ระบบสมการ ① กับ ②

$2 = a + b$ ——— ①

$26 = 9a + b$ ——— ② } 1 คะแนน

② - ① $24 = 8a$

$\therefore a = 3$

แทนค่า $a = 3$ ลงใน ①

$2 = 3 + b$ } 1 คะแนน

$\therefore b = -1$

นั่นคือ $f(x) = 3x^2 - 1$ — 1 คะแนน

จาก $(fog)(x) = 3(g(x))^2 - 2g(x) + 1$

$f(g(x)) = 3(g(x))^2 - 2g(x) + 1$ } 2 คะแนน

$3(g(x))^2 - 1 = 3(g(x))^2 - 2g(x) + 1$

$2g(x) = 2$ } 1 คะแนน

$\therefore g(x) = 1$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ช

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบทดสอบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

คำชี้แจง 1. แบบทดสอบฉบับนี้มีทั้งหมด 8 ข้อ เรื่องภาคตัดกรวย 4 ข้อ และฟังก์ชัน 4 ข้อ

2. ให้นักเรียนแสดงวิธีทำทุกข้อ

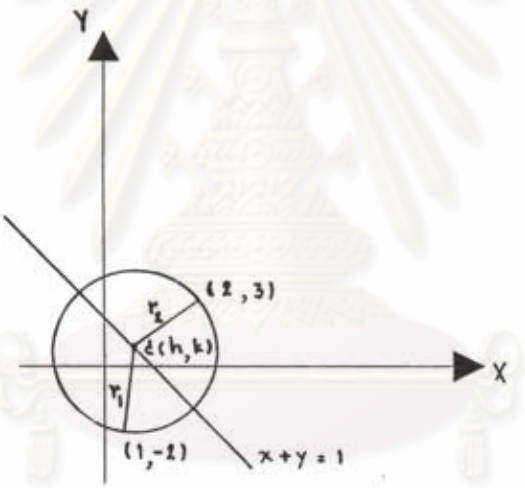
3. แต่ละข้อคะแนนเต็ม 10 คะแนน

1. กำหนดวงกลมวงหนึ่งผ่านจุด(2,3) กับ (1,-2) และมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง x+y = 1 จงหาสมการวงกลม โดยที่

1.1 ให้เขียนรูปแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้

1.2 จากรูปมีความสัมพันธ์ใดที่นักเรียนสามารถนำไปใช้ในการแก้โจทย์ข้อนี้ได้ ถ้ากำหนดจุดศูนย์กลางคือ C(h,k)

1.3 จงแสดงวิธีทำและหาคำตอบที่ถูกต้อง

เฉลย	การให้คะแนน
1.1 	1 คะแนน
1.2 ความยาวของรัศมีที่ลากจากจุดศูนย์กลางไปยังจุด (1, -2) เท่ากับความยาวของรัศมีที่ลากจากจุดศูนย์กลางไปยังจุด (2,3) นั่นคือ $r_1 = r_2$ ดังรูป และ C(h,k) อยู่บนเส้นตรง $x + y = 1$ จะได้ $h + k = 1$	2 คะแนน
1.3 ให้ C(h, k) เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และ (h, k) อยู่บนเส้นตรง $x + y = 1$	
ดังนั้น $h + k = 1$ ——— ①	1 คะแนน
จากรูป $r_1 = r_2$	
$\sqrt{(h-1)^2 + (k+2)^2} = \sqrt{(h-2)^2 + (k-3)^2}$	
$\left(\sqrt{(h-1)^2 + (k+2)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(h-2)^2 + (k-3)^2}\right)^2$	2 คะแนน

$(h-1)^2 + (k+2)^2 = (h-2)^2 + (k-3)^2$

$h^2 - 2h + 1 + k^2 + 4k + 4 = h^2 - 4h + 4 + k^2 - 6k + 9$

$2h + 10k = 8$

$h + 5k = 4$ ——————— ②

แก้ระบบสมการ ① กับ ②

$h + k = 1$ ——————— ①

$h + 5k = 4$ ——————— ② } 1 คะแนน

② - ① $4k = 3$

$\therefore k = \frac{3}{4}$

แทนค่า $k = \frac{3}{4}$ ลงใน ①

$h + \frac{3}{4} = 1$

$h = 1 - \frac{3}{4}$ } 1 คะแนน

$\therefore h = \frac{1}{4}$

ดังนั้น C(h, k) ได้เป็น $C\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

หารัศมีจาก $r_1 = \sqrt{(h-1)^2 + (k+2)^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{1}{4} - 1\right)^2 + \left(\frac{3}{4} + 2\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{121}{16}}$ } 1 คะแนน

$= \sqrt{\frac{130}{16}}$

$= \sqrt{\frac{65}{8}}$

จากบทนิยามของวงกลม $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

ดังนั้นจะได้สมการวงกลมคือ $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{65}{8}$ } 1 คะแนน

หรือ $2x^2 + 2y^2 - x - 3y - 15 = 0$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. จงหาสมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่บนเส้นตรง $2x+y-7 = 0$ และกราฟของพาราโบลารูปนี้ผ่านจุด $(6,-1)$ โดยแกนของพาราโบลามีสมการ $y-3 = 0$

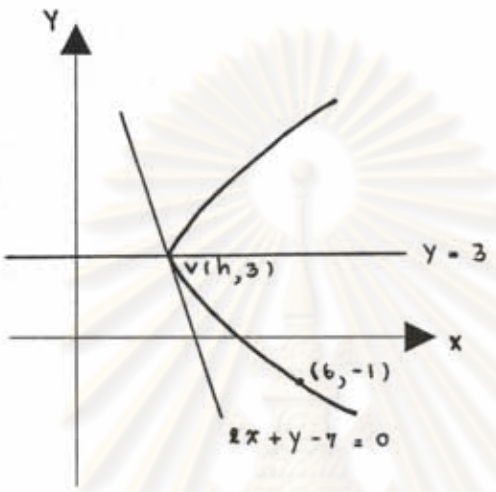
2.1 จงเขียนรูปแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้

2.2 จงเขียนสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาที่ใช้สำหรับสร้างสมการของพาราโบลาในข้อนี้

2.3 จงแสดงวิธีทำและหาคำตอบที่ถูกต้อง

<u>เฉลย</u> <u>การให้คะแนน</u>

2.1



2 คะแนน

2.2 $(y-k)^2 = 4c(x-h)$ 2 คะแนน

2.3 จากรูปจุดยอดของพาราโบลา คือ $V(h, 3)$ อยู่บนเส้นตรง $2x+y-7 = 0$ 1 คะแนน

จะได้ $2h + 3 - 7 = 0$

$2h = 4$ 2 คะแนน

$\therefore h = 2$

ดังนั้นจุดยอดของพาราโบลา คือ $V(2, 3)$

จากสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลา คือ $(y-k)^2 = 4c(x-h)$

และเนื่องจากพาราโบลาผ่านจุด $(6, -1)$ และมีจุดยอดคือ $V(2, 3)$ จะได้

$(-1-3)^2 = 4c(6-2)$ 2 คะแนน

$16 = 16c$

$\therefore c = 1$

ดังนั้นสมการพาราโบลาคือ $(y-3)^2 = 4(1)(x-2)$

$(y-3)^2 = 4(x-2)$ 1 คะแนน

หรือ $y^2 - 4x - 6y + 17 = 0$

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3. จงหาสมการของวงรีที่มีจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (2,8) จุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่จุด (2,-2) และมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $2x+3y-10 = 0$

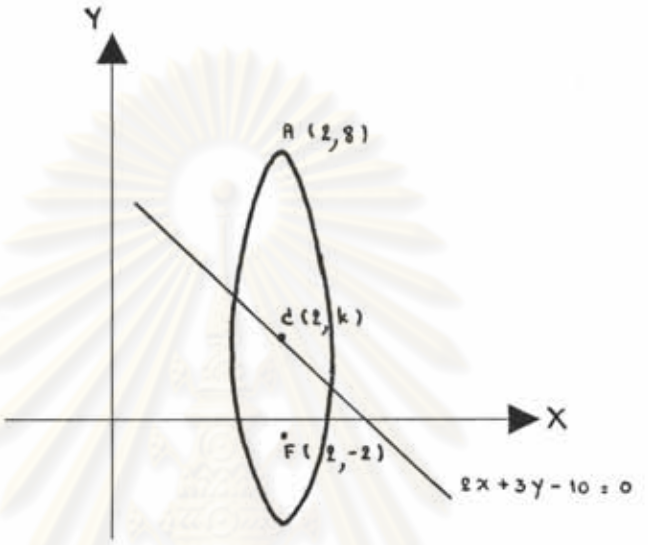
3.1 จงเขียนรูปแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้

3.2 จงเขียนสมการรูปมาตรฐานของวงรีที่ใช้สำหรับสร้างสมการของวงรีในข้อนี้

3.3 จงแสดงวิธีทำและหาคำตอบที่ถูกต้อง

เฉลย	การให้คะแนน

3.1



2 คะแนน

3.2 $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ — 1 คะแนน

3.3 เนื่องจากจุดศูนย์กลางของวงรีอยู่บนเส้นตรง $2x + 3y - 10 = 0$ จะได้

$2(2) + 3k - 10 = 0$

$4 + 3k - 10 = 0$

$3k = 6$

$\therefore k = 2$ — 1 คะแนน

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $C(2, 2)$

จากจุดยอด $A(2, 8)$ จะได้ว่า

$k + a = 8$

$2 + a = 8$

$a = 6$

$\therefore a^2 = 36$ — 2 คะแนน

จากจุดโฟกัส $F(2, -2)$ จะได้ว่า

$k - c = -2$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$2 - c = -2$

$-c = -4$ — 2 คะแนน

$c = 4$

$\therefore c^2 = 16$

เนื่องจาก $a^2 = b^2 + c^2$

$36 = b^2 + 16$ — 1 คะแนน

$\therefore b^2 = 20$

จากสมการรูปมาตรฐานของวงรี คือ $\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$

ดังนั้นสมการวงรี คือ $\frac{(x - 2)^2}{20} + \frac{(y - 2)^2}{36} = 1$ — 1 คะแนน

หรือ $36x^2 + 20y^2 - 144x - 80y - 496 = 0$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4. กำหนดให้ $x^2 = 8(y+2)$ และ $x^2 = -8(y-2)$ เป็นสมการของรูปพาราโบลาสองรูป จงหาสมการของไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดตัดกันของพาราโบลาทั้งสอง และแกนสังยุคคือเส้นตรงที่เชื่อมจุดยอดของพาราโบลาทั้งสอง

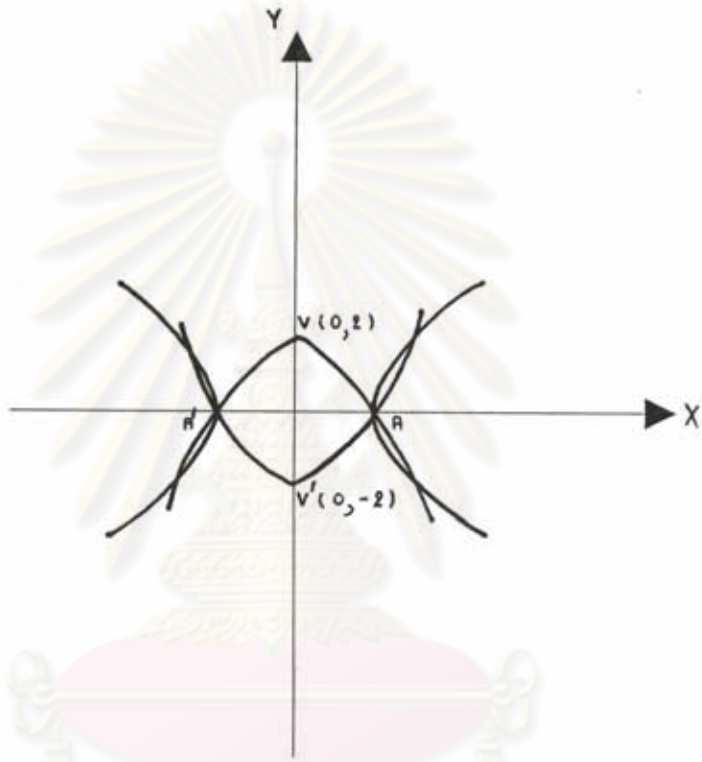
4.1 จงเขียนรูปแสดงความสัมพันธ์ของสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

4.2 จงเขียนสมการรูปมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาที่ใช้สำหรับสร้างสมการของไฮเพอร์โบลาในข้อนี้

4.3 จงแสดงวิธีทำและหาคำตอบที่ถูกต้อง

<u>เฉลย</u> <u>การให้คะแนน</u>

4.1



2 คะแนน

4.2 $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ 1 คะแนน

4.3 สมการพาราโบลา $x^2 = 8(y+2)$ มีจุดยอดที่ $(0, -2)$ เป็นรูปหงาย

สมการพาราโบลา $x^2 = -8(y-2)$ มีจุดยอดที่ $(0, 2)$ เป็นรูปคว่ำ

ให้ $x^2 = 8(y+2)$ ——— ①

$x^2 = -8(y-2)$ ——— ② 2 คะแนน

จะได้ว่า $8(y+2) = -8(y-2)$

$y + 2 = -y + 2$

$2y = 0$

$\therefore y = 0$

แทนค่า $y = 0$ ลงใน ① จะได้

$$x^2 = 8(0 + 2)$$
$$x^2 = 16$$
$$\therefore x = \pm 4$$

} 2 คะแนน

จะได้จุดตัดกันของพาราโบลาทั้งสองคือ $(4, 0)$ และ $(-4, 0)$
ดังนั้นจุดยอดของไฮเพอร์โบลา คือ $A(4, 0)$ กับ $A'(-4, 0)$ และจะได้จุดศูนย์กลาง คือ $C(0, 0)$

เนื่องจากระยะระหว่าง จุด $A(4, 0)$ กับ $A'(-4, 0)$ เท่ากับ 8 หน่วย ซึ่งเป็นแกนตามขวาง
ดังนั้น จะได้ว่า

$$2a = 8$$
$$a = 4$$
$$\therefore a^2 = 16$$

} 1 คะแนน

และระยะระหว่างจุด $V(0, 2)$ กับ $V'(0, -2)$ เท่ากับ 4 หน่วย ซึ่งเป็นแกนสังยุค
ดังนั้น จะได้ว่า

$$2b = 4$$
$$b = 2$$
$$\therefore b^2 = 4$$

} 1 คะแนน

จากสมการรูปมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$

ดังนั้น สมการไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{(x - 0)^2}{16} - \frac{(y - 0)^2}{4} = 1$

นั่นคือ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$

} 1 คะแนน

หรือ $x^2 - 4y^2 - 16 = 0$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

1. กำหนดให้ $f(8x-7) = 2x-5$ และ $(f^{-1}+g)(x) = x^2+3x-2$ จงหาค่าของ $g(x)$

1.1 จากบทนิยามของพีชคณิตของฟังก์ชันนั้น ค่าของ $(f^{-1}+g)(x)$ จะเท่ากับอะไร

1.2 สิ่งที่ต้องหาเพื่อนำไปสู่การหาค่าของ $g(x)$ คืออะไร

1.3 จงแสดงวิธีทำและหาคำตอบที่ถูกต้อง

เฉลย		การให้คะแนน
1.1 $f^{-1}(x) + g(x)$		1 คะแนน
1.2 $f^{-1}(x)$		2 คะแนน
วิธีที่ 1 1.3 จาก $f(8x-7)$	$= 2x-5$	2 คะแนน
ดังนั้น $f^{-1}(2x-5)$	$= 8x-7$	
ให้ $2x-5$	$= t$	
x	$= \frac{t+5}{2}$	
$8x-7$	$= 8\left(\frac{t+5}{2}\right)-7$	2 คะแนน
	$= 4t+20-7$	
	$= 4t+13$	
จะได้ $f^{-1}(t)$	$= 4t+13$	1 คะแนน
$\therefore f^{-1}(x)$	$= 4x+13$	
จาก $(f^{-1}+g)(x)$	$= x^2+3x-2$	1 คะแนน
$f^{-1}(x)+g(x)$	$= x^2+3x-2$	
$4x+13+g(x)$	$= x^2+3x-2$	1 คะแนน
$\therefore g(x)$	$= x^2-x-15$	
วิธีที่ 2 1.3 จาก $f(8x-7)$	$= 2x-5$	การให้คะแนน
ให้ $8x-7$	$= t$	
x	$= \frac{t+7}{8}$	
$2x-5$	$= 2\left(\frac{t+7}{8}\right)-5$	
	$= \frac{t+7}{4}-5$	
	$= \frac{t-13}{4}$	

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จะได้ $f(t) = \frac{t - 13}{4}$ } 3 คะแนน

$\therefore f(x) = \frac{x - 13}{4}$

หรือ $y = \frac{x - 13}{4}$

หาอินเวอร์สของฟังก์ชัน f จะได้

$x = \frac{y - 13}{4}$ } 2 คะแนน

$\therefore y = 4x + 13$

นั่นคือ $f^{-1}(x) = 4x + 13$

จาก $(f^{-1}+g)(x) = x^2 + 3x - 2$ } 1 คะแนน

$f^{-1}(x) + g(x) = x^2 + 3x - 2$

$4x + 13 + g(x) = x^2 + 3x - 2$ } 1 คะแนน

$\therefore g(x) = x^2 - x - 15$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. กำหนดให้ $(f+g)(x) = 6x+1$ และ $(f-g)(x) = 3-4x$ จงหาค่าของ $(g-f)^{-1}(x)$

2.1 จาก $(f+g)(x)$ และ $(f-g)(x)$ ที่กำหนดให้ทำให้สามารถหาค่าของอะไรได้บ้าง

2.2 ในการหา $(g-f)^{-1}(x)$ ต้องหาอินเวอร์สของสิ่งใด

2.3 จงแสดงวิธีทำและหาคำตอบที่ถูกต้อง

เฉลย			การให้คะแนน
2.1 $f(x)$ และ $g(x)$			1 คะแนน
2.2 $(g-f)(x)$ หรือ $g(x) - f(x)$			1 คะแนน
2.3 จาก $(f+g)(x)$	$=$	$6x + 1$	
จะได้ $f(x) + g(x)$	$=$	$6x + 1$ ——— ①	1 คะแนน
จาก $(f-g)(x)$	$=$	$3 - 4x$	
จะได้ $f(x) - g(x)$	$=$	$-4x + 3$ ——— ②	1 คะแนน
แก้ระบบสมการ ① กับ ②			
$f(x) + g(x)$	$=$	$6x + 1$ ——— ①	
$f(x) - g(x)$	$=$	$-4x + 3$ ——— ②	1 คะแนน
① + ② $2f(x)$	$=$	$2x + 4$	
$\therefore f(x)$	$=$	$x + 2$	
แทนค่า $f(x) = x + 2$ ลงใน ①			
$x + 2 + g(x)$	$=$	$6x + 1$	1 คะแนน
$\therefore g(x)$	$=$	$5x - 1$	
เนื่องจาก $(g-f)(x)$	$=$	$g(x) - f(x)$	
$(g-f)(x)$	$=$	$(5x - 1) - (x + 2)$	2 คะแนน
$(g-f)(x)$	$=$	$5x - 1 - x - 2$	
$(g-f)(x)$	$=$	$4x - 3$	
หรือ y	$=$	$4x - 3$	
หาอินเวอร์สของฟังก์ชัน $g-f$ จะได้			
x	$=$	$4y - 3$	
$\therefore y$	$=$	$\frac{x+3}{4}$	2 คะแนน
นั่นคือ $(g-f)^{-1}(x)$	$=$	$\frac{x+3}{4}$	

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3. กำหนดให้ $f^{-1}og^{-1} = \{(x,y) \in RxR \mid y = 2x-6\}$ และ $g(x) = x+3$ จงหาค่า $f^{-1}(x)$

3.1 จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ $(f^{-1}og^{-1})(x)$ มีค่าเท่ากับเท่าไร

3.2 ในการหา $f^{-1}(x)$ ของโจทย์ข้อนี้ นักเรียนต้องหาอินเวอร์สของฟังก์ชันใดก่อน

3.3 จงแสดงวิธีทำและหาคำตอบที่ถูกต้อง

เฉลย		การให้คะแนน
3.1 $(f^{-1}og^{-1})(x)$	$= 2x - 6$	2 คะแนน
3.2 g		1 คะแนน
3.3 จาก $g(x)$	$= x + 3$	
หรือ y	$= x + 3$	
หาอินเวอร์สของฟังก์ชัน g จะได้		2 คะแนน
x	$= y + 3$	
$\therefore y$	$= x - 3$	
นั่นคือ $g^{-1}(x)$	$= x - 3$	
จาก $(f^{-1}og^{-1})(x)$	$= 2x - 6$	2 คะแนน
จะได้ $f^{-1}(g^{-1}(x))$	$= 2x - 6$	
$f^{-1}(x - 3)$	$= 2x - 6$	
ให้ $x - 3$	$= t$	
x	$= t + 3$	
และ $2x - 6$	$= 2(t + 3) - 6$	2 คะแนน
	$= 2t + 6 - 6$	
	$= 2t$	
จะได้ $f^{-1}(t)$	$= 2t$	1 คะแนน
$\therefore f^{-1}(x)$	$= 2x$	

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4. ถ้า $f(x) = ax^2 + b$ กำหนดให้ $f(-1) = 2$ และ $f(3) = 26$ และ g เป็นฟังก์ชันที่ทำให้ $(fog)(x) = 3(g(x))^2 - 2g(x) + 1$ จงหาค่าของ $g(x)$

4.1 จากสิ่งที่กำหนดให้เกี่ยวกับฟังก์ชัน f นักเรียนจะสามารถหาค่าสิ่งใดจาก f(x) ได้

4.2 สิ่งที่ต้องหาเพื่อนำไปสู่การหาค่าของ g(x) คืออะไร

4.3 จงแสดงวิธีทำและหาคำตอบที่ถูกต้อง

<u>เฉลย</u> <u>การให้คะแนน</u>

4.1 a และ b — 2 คะแนน

4.2 f(x) — 1 คะแนน

4.3 จาก $f(x) = ax^2 + b$

$f(-1) = 2$ จะได้ $2 = a(-1)^2 + b$

$2 = a + b$ ——— ① } 1 คะแนน

$f(3) = 26$ จะได้ $26 = a(3)^2 + b$

$26 = 9a + b$ ——— ②

แก้ระบบสมการ ① กับ ②

$2 = a + b$ ——— ①

$26 = 9a + b$ ——— ② } 1 คะแนน

② - ① $24 = 8a$

$\therefore a = 3$

แทนค่า $a = 3$ ลงใน ①

$2 = 3 + b$ } 1 คะแนน

$\therefore b = -1$

นั่นคือ $f(x) = 3x^2 - 1$ — 1 คะแนน

จาก $(fog)(x) = 3(g(x))^2 - 2g(x) + 1$

$f(g(x)) = 3(g(x))^2 - 2g(x) + 1$ } 2 คะแนน

$3(g(x))^2 - 1 = 3(g(x))^2 - 2g(x) + 1$

$2g(x) = 2$ } 1 คะแนน

$\therefore g(x) = 1$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบสอบถามพฤติกรรมการสอนของครูตามการรับรู้ของนักเรียน

คำชี้แจง แบบสอบถามนี้มี 36 ข้อ ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องว่างที่ตรงกับความเป็นจริงมากที่สุดเกี่ยวกับพฤติกรรมต่าง ๆ ที่ครูคณิตศาสตร์ของท่านปฏิบัติมากน้อยเพียงข้อละหนึ่งระดับ โดยที่

ปฏิบัติมากที่สุด	หมายถึง ประมาณ	75-100%	ของเวลาสอนทั้งหมด
ปฏิบัติมาก	หมายถึง ประมาณ	50-74%	ของเวลาสอนทั้งหมด
ปฏิบัติน้อย	หมายถึง ประมาณ	25-49%	ของเวลาสอนทั้งหมด
ปฏิบัติน้อยที่สุด	หมายถึง ประมาณ	น้อยกว่า 25%	ของเวลาสอนทั้งหมด

ข้อที่	ข้อความ	ระดับของการปฏิบัติ			
		มากที่สุด	มาก	น้อย	น้อยที่สุด
1.	ทบทวนเนื้อหาที่เรียนไปแล้วซึ่งจำเป็นต้องใช้ในเรื่องนั้น ๆ ให้ก่อน				
2.	สอนเนื้อหาคณิตศาสตร์อย่างมีลำดับขั้นตอนจากง่ายไปหายาก				
3.	อธิบายให้เหตุผลอย่างชัดเจนในแต่ละขั้นตอนที่สำคัญซึ่งใช้ในการสอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์				
4.	เชื่อมโยงเนื้อหาใหม่เข้ากับเนื้อหาที่เรียนไปแล้วเพื่อให้มองเห็นความต่อเนื่อง				
5.	นำโจทย์มายกเป็นตัวอย่างในการสอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์				
6.	เขียนกระดานดำประกอบการสอนเป็นลำดับก่อนหลังไม่สับสน				
7.	อธิบายความหมายของสิ่งต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาในเรื่องนั้น ๆ				
8.	ให้นักเรียนพยายามหาความสัมพันธ์ของสิ่งที่โจทย์ถามกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้				
9.	ให้มีการวาดรูปช่วยในการคิดเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่โจทย์กำหนดมาให้ในบางข้อที่จำเป็น				
10.	ให้มีการแยกปัญหานั้น ๆ ออกเป็นปัญหาย่อย ๆ สำหรับการแก้โจทย์ปัญหาที่ยาก				

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ข้อที่	ข้อความ	ระดับของการปฏิบัติ			
		มากที่สุด	มาก	น้อย	น้อยที่สุด
11.	ให้มีการแปลงโจทย์ปัญหาไปเป็นประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในบางข้อที่จำเป็น				
12.	อธิบายความหมายของสัญลักษณ์ต่าง ๆ ในสูตรและการนำไปใช้ให้ก่อนที่จะให้จำสูตรไปใช้				
13.	ชี้ให้เห็นถึงข้อแตกต่างระหว่างโจทย์ปัญหาที่เคยทำไปแล้วกับโจทย์ปัญหาที่กำลังทำอยู่				
14.	ให้โอกาสแก่นักเรียนในการแสดงความคิดเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์				
15.	ให้นักเรียนร่วมกับเพื่อนคิดหาแนวทางในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นกลุ่มย่อย ๆ				
16.	ให้นักเรียนคาดคะเนคำตอบโดยการประมาณก่อนที่จะคิดคำนวณเพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้อง				
17.	กระตุ้นให้มีการแข่งขันกันตอบคำถามในระหว่างที่สอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์				
18.	ให้นักเรียนพยายามคิดหาคำตอบโดยใช้ความรู้ที่เรียนมาแล้วเป็นเครื่องมือในการคิดหาคำตอบ				
19.	ให้นักเรียนลงมือแก้ปัญหาด้วยตนเองตามแนวคิดที่วางไว้				
20.	ให้การยอมรับในการใช้วิธีการที่ถูกต้องมากกว่าดูที่คำตอบ				
21.	มีการเรียกให้นักเรียนตอบคำถามหรือตรวจสอบดูว่านักเรียนเข้าใจหรือไม่				
22.	มีการถามคำถามที่นักเรียนต้องอธิบายเหตุผลประกอบคำตอบในขณะสอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์				
23.	ชมเชยเมื่อนักเรียนตอบได้ถูกต้องในขณะที่สอนแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์				
24.	ให้มีการอภิปรายแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับการแก้ปัญหาข้อนั้น ๆ เมื่อแต่ละคนมีแนวทางในการแก้ปัญหาที่แตกต่างกัน				

ข้อที่	ข้อความ	ระดับของการปฏิบัติ			
		มากที่สุด	มาก	น้อย	น้อยที่สุด
25.	ยอมรับในความคิดหรือข้อเสนอที่นักเรียนบอกในขณะที่ครูกำลังสอนแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์				
26.	ให้โอกาสนักเรียนค้นพบข้อสรุปได้ด้วยตนเอง				
27.	กระตุ้นให้นักเรียนเห็นความสำคัญของการตรวจคำตอบ				
28.	กระตุ้นให้นักเรียนรู้จักแปลความหมายของคำตอบที่ได้ว่าเหมาะสมหรือสอดคล้องกับปัญหาเพียงใด				
29.	ให้นักเรียนคิดหาวิธีการอื่น ๆ ที่สามารถนำมาใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์แต่ละข้อ				
30.	สรุปรวบรวมเรื่องต่าง ๆ เข้าเป็นหมวดหมู่เพื่อง่ายต่อการเข้าใจและการนำไปใช้แก้ปัญหา				
31.	มีการสรุปเนื้อหาในตอนท้ายของแต่ละคาบเรียน				
32.	ให้แบบฝึกหัดที่มีทั้งข้อยาก ปานกลาง และง่าย				
33.	ชี้แจงข้อผิดพลาดหรือข้อบกพร่องจากแบบฝึกหัดเมื่อครูตรวจไปแล้ว				
34.	ให้แบบฝึกหัดที่เป็นปัญหา ซึ่งต้องใช้ความคิดมากกว่าการให้แบบฝึกหัดที่มีแบบการแก้ปัญหาที่ซ้ำ ๆ กัน				
35.	ให้นักเรียนหัดสร้างโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเนื้อหาที่เรียนขึ้นมาด้วยตนเอง				
36.	เฉลยข้อสอบเพื่อให้นักเรียนรู้ข้อบกพร่องของตนเองเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์				

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบวัดความตระหนักในเมตาคอคนิชัน

คำชี้แจง แบบวัดนี้มี 38 ข้อ ขอให้นักเรียนพิจารณาข้อความแต่ละข้อ และเลือกตอบตามความเป็นจริงว่าได้กระทำสิ่งเหล่านี้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หรือไม่ โดยทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องว่างเพียงข้อละหนึ่งระดับ ซึ่ง

ปฏิบัติบ่อยมากที่สุด หมายถึง ประมาณ 75-100% ของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
ปฏิบัติบ่อยมาก หมายถึง ประมาณ 50-74% ของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
ปฏิบัติน้อย หมายถึง ประมาณ 25-49% ของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
ปฏิบัติน้อยที่สุด หมายถึง ประมาณ น้อยกว่า 25% ของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ข้อที่	ข้อความ	ระดับของการปฏิบัติ			
		บ่อยมากที่สุด	บ่อยมาก	น้อย	น้อยที่สุด
1.	อ่านทบทวนดูว่าโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ถามอะไร				
2.	ดูว่าคำถามในโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ข้อนั้น ๆ มีกี่คำถาม				
3.	ขีดเส้นใต้ข้อมูลที่สำคัญที่โจทย์กำหนดมาให้				
4.	เขียนข้อมูลที่สำคัญที่โจทย์กำหนดมาให้ออกมาอย่างย่อ ๆ				
5.	วาดรูปหรือเขียนแผนภาพอย่างคร่าว ๆ เพื่อดูความสัมพันธ์ของข้อมูลที่โจทย์กำหนดมาให้				
6.	เปรียบเทียบโจทย์ปัญหาข้อนั้น ๆ กับปัญหาที่เคยทำมาก่อนว่าเหมือนกันหรือต่างกันอย่างไร				
7.	แปลงโจทย์ปัญหาไปเป็นประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์				
8.	พิจารณาข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ว่ามีข้อมูลใดที่จำเป็นต้องใช้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์				
9.	พิจารณาดูความสัมพันธ์ของสิ่งที่โจทย์ถามกับสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้				
10.	แตกปัญหานั้นเป็นปัญหาย่อย ๆ ในกรณีที่เป็นปัญหาสลับซับซ้อน				
11.	คิดดูว่ามีกฎหรือทฤษฎีที่เกี่ยวข้องใดบ้างที่สามารถนำมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในข้อนั้น ๆ				
12.	เลือกดูว่ามีสูตรใดที่จะใช้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในข้อนั้น ๆ ได้				

ข้อที่	ข้อความ	ระดับของการปฏิบัติ			
		บ่อยมากที่สุด	บ่อยมาก	น้อย	น้อยที่สุ
13.	กำหนดเวลาที่จะใช้ทำโจทย์ข้อนั้น ๆ อย่างคร่าว ๆ เมื่อมีเวลาทำจำกัด				
14.	คาดคะเนคำตอบอย่างคร่าว ๆ เอาไว้				
15.	ย้อนกลับไปคิดทบทวนความเหมาะสมของสูตรหรือวิธีการที่ได้เลือกใช้ในขณะที่กำลังแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์				
16.	ตรวจสอบข้อจำกัดของสูตรหรือข้อจำกัดของวิธีการที่ใช้ในขณะทำการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์				
17.	ตรวจสอบหน่วยการวัดที่ใช้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในขณะที่กำลังแก้ปัญหา				
18.	ตรวจสอบว่าเวลาที่ใช้แก้ปัญหาข้อนั้น ๆ ยังอยู่ในเวลาที่กำหนดไว้อย่างคร่าว ๆ หรือไม่ในขณะที่ทำการแก้ปัญหา				
19.	ตรวจสอบขั้นตอนย่อย ๆ ในขณะที่ทำการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์				
20.	ใช้เครื่องช่วยคิดคำนวณ เช่น เครื่องคิดเลข ตรวจสอบคำตอบย่อย ๆ ที่ได้ขณะดำเนินการแก้ปัญหา				
21.	ทำเครื่องหมายสรุปคำตอบย่อย ๆ ที่ได้ในแต่ละขั้นตอนไว้ในขณะที่แก้ปัญหา				
22.	ทำเครื่องหมายให้ทราบว่าข้อมูลใดใช้ในการแก้ปัญหาไปแล้วเพื่อจะได้ทราบว่ายังเหลือข้อมูลใดที่ยังไม่ได้ใช้ในขณะแก้ปัญหา				
23.	คำนึงถึงนิยามของคำต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาในขณะทำการแก้ปัญหาข้อนั้น ๆ				
24.	ย้อนกลับไปอ่านสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ซ้ำอีก เมื่อท่านไม่สามารถดำเนินการแก้ปัญหาต่อไปได้				
25.	ตรวจสอบว่าจะต้องดัดแปลงสูตรที่ใช้ให้เหมาะสมก่อนหรือไม่ในขณะแก้ปัญหา				
26.	ตรวจสอบดูว่ามีความรู้เดิมใดที่จะโยงเข้ามาช่วยแก้ปัญหาในขั้นตอนนั้น ๆ ได้ขณะที่แก้ปัญหา				

ข้อที่	ข้อความ	ระดับของการปฏิบัติ			
		บ่อยมากที่สุด	บ่อยมาก	น้อย	น้อยที่สุด
27.	ใช้กระดาษทดอย่างเป็นระเบียบเพื่อง่าย ต่อการย้อนกลับมาดูใหม่เมื่อติดขัดในขณะที่แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์				
28.	ย้อนกลับไปดูว่าคำตอบที่ได้ตรงกับที่โจทย์ต้องการหรือไม่เมื่อแก้ปัญหาเสร็จ				
29.	ย้อนกลับไปพิจารณาความถูกต้องของกระบวนการหรือวิธีการทั้งหมดที่ใช้เมื่อแก้ปัญหาเสร็จ				
30.	ย้อนกลับไปดูว่ามองข้ามข้อมูลบางอย่างหรือสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ที่จำเป็นต้องใช้ในการแก้ปัญหาไปหรือไม่				
31.	พิจารณาดูว่าคำตอบที่คาดคะเนไว้กับคำตอบที่คิดคำนวณได้ตรงกันหรือไม่				
32.	แทนค่าคำตอบลงในโจทย์เพื่อดูว่าคำตอบใดถูกต้องเมื่อได้คำตอบมากกว่าหนึ่งคำตอบ				
33.	ดูว่าโจทย์คณิตศาสตร์ข้อนั้นยากง่ายอยู่ในระดับใดเมื่อแก้ปัญหาเสร็จ				
34.	คิดหาวิธีการอื่น ๆ ที่สามารถจะนำมาใช้ในการแก้ปัญหาในข้อนั้น ๆ เมื่อแก้ปัญหาเสร็จ				
35.	ตรวจสอบดูว่าได้ใช้เวลาในการแก้ปัญหาโจทย์ข้อนั้นเกินเวลาที่กำหนดไว้หรือไม่ เมื่อแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ข้อนั้นเสร็จ				
36.	เขียนสรุปวิธีการและข้อควรคำนึงถึงสำหรับการทำโจทย์ที่มีลักษณะพิเศษนั้น ๆ ไว้				
37.	สรุปความสัมพันธ์ของความรู้เก่าว่าเชื่อมโยงกับความรู้ใหม่ที่ได้ในข้อนั้น ๆ อย่างไร				
38.	คาดเดาว่าโจทย์ในข้อนั้นจะสามารถพลิกแพลงคำถามเป็นอย่างอื่นได้อย่างไร				

ภาคผนวก ซ

ตัวอย่างการคำนวณทางสถิติ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตัวอย่างการคำนวณทางสถิติ

1. การคำนวณหาค่าความเที่ยงของแบบสอบถามพฤติกรรมการสอนของครูตามการรับรู้ของนักเรียน แบบวัดความตระหนักในเมตาคอคนิชัน และแบบทดสอบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยใช้สูตรสัมประสิทธิ์แอลฟา (Alpha Coefficient) ของครอนบาค ดังนี้

1.1 การคำนวณหาค่าความเที่ยงของแบบสอบถามพฤติกรรมการสอนของครูตามการรับรู้ของนักเรียน

$$\alpha = \frac{n}{n-1}\left[1 - \frac{\Sigma S_i^2}{S_t^2}\right]$$

เมื่อ $n = 36$ $\Sigma S_i^2 = 21.07$ $S_t^2 = 135.42$

$$\alpha = \frac{36}{36-1}\left[1 - \frac{21.07}{135.42}\right]$$

$$= 0.87$$

1.2 การคำนวณหาค่าความเที่ยงของแบบวัดความตระหนักในเมตาคอคนิชัน

$$\alpha = \frac{n}{n-1}\left[1 - \frac{\Sigma S_i^2}{S_t^2}\right]$$

เมื่อ $n = 38$ $\Sigma S_i^2 = 27.8$ $S_t^2 = 192.25$

$$\alpha = \frac{38}{38-1}\left[1 - \frac{27.8}{192.25}\right]$$

$$= 0.88$$

1.3 การคำนวณหาค่าความเที่ยงของแบบทดสอบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

$$\alpha = \frac{n}{n-1}\left[1 - \frac{\Sigma S_i^2}{S_t^2}\right]$$

เมื่อ $n = 8$ $\Sigma S_i^2 = 102.64$ $S_t^2 = 485.88$

$$\alpha = \frac{8}{8-1}\left[1 - \frac{102.64}{485.88}\right]$$

$$= 0.90$$

2. การคำนวณค่าความยากของแบบทดสอบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นแบบอัตนัย (Index of Difficulty) และค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบแบบอัตนัย (Index of Discrimination) ได้แก่

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2.1 การคำนวณค่าความยากและค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบเรื่อง ภาคตัดกรวยข้อที่ 1

$$\text{Index of Difficulty} = \frac{S_h + S_l - (n_t)(X_{min})}{n_t (X_{max} - X_{min})}$$

เมื่อ $S_h = 54.5$ $S_l = 0.5$ $n_t = 18$ $X_{max} = 10$ $X_{min} = 0$

$$\text{Index of Difficulty} = \frac{54.5 + 0.5 - (18)(0)}{18(10-0)}$$

$$= 0.31$$

$$\text{Index of Discrimination} = \frac{S_h - S_l}{n_h (X_{max} - X_{min})}$$

เมื่อ $S_h = 54.5$ $S_l = 0.5$ $n_h = 9$ $X_{max} = 10$ $X_{min} = 0$

$$\text{Index of Discrimination} = \frac{54.5 - 0.5}{9(10-0)}$$

$$= 0.60$$

2.2 การคำนวณค่าความยากและค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบเรื่อง ภาคตัดกรวยข้อที่ 2

$$\text{Index of Difficulty} = \frac{S_h + S_l - (n_t)(X_{min})}{n_t (X_{max} - X_{min})}$$

เมื่อ $S_h = 49.5$ $S_l = 0$ $n_t = 18$ $X_{max} = 10$ $X_{min} = 0$

$$\text{Index of Difficulty} = \frac{49.5 + 0 - (18)(0)}{18(10-0)}$$

$$= 0.28$$

$$\text{Index of Discrimination} = \frac{S_h - S_l}{n_h (X_{max} - X_{min})}$$

เมื่อ $S_h = 49.5$ $S_l = 0$ $n_h = 9$ $X_{max} = 10$ $X_{min} = 0$

$$\text{Index of Discrimination} = \frac{49.5 - 0}{9(10-0)}$$

$$= 0.55$$

2.3 การคำนวณค่าความยากและค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบเรื่อง ภาคตัดกรวยข้อที่ 3

$$\text{Index of Difficulty} = \frac{S_h + S_l - (n_t)(X_{min})}{n_t (X_{max} - X_{min})}$$

เมื่อ $S_h = 82.5$ $S_l = 1$ $n_t = 18$ $X_{max} = 10$ $X_{min} = 0$

$$\text{Index of Difficulty} = \frac{82.5 + 1 - (18)(0)}{18(10-0)}$$

$$= 0.46$$

$$\text{Index of Discrimination} = \frac{S_h - S_l}{n_h (X_{max} - X_{min})}$$

เมื่อ $S_h = 82.5$ $S_l = 1$ $n_h = 9$ $X_{max} = 10$ $X_{min} = 0$

$$\text{Index of Discrimination} = \frac{82.5 - 1}{9(10-0)}$$

$$= 0.91$$

2.4 การคำนวณค่าความยากและค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบเรื่องภาคตัดกรวยข้อที่ 4

$$\text{Index of Difficulty} = \frac{S_h + S_l - (n_t)(X_{min})}{n_t (X_{max} - X_{min})}$$

เมื่อ $S_h = 56$ $S_l = 0$ $n_t = 18$ $X_{max} = 10$ $X_{min} = 0$

$$\text{Index of Difficulty} = \frac{56 + 0 - (18)(0)}{18(10-0)}$$

$$= 0.31$$

$$\text{Index of Discrimination} = \frac{S_h - S_l}{n_h (X_{max} - X_{min})}$$

เมื่อ $S_h = 56$ $S_l = 0$ $n_h = 9$ $X_{max} = 10$ $X_{min} = 0$

$$\text{Index of Discrimination} = \frac{56 - 0}{9(10-0)}$$

$$= 0.62$$

2.5 การคำนวณค่าความยากและค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบเรื่องฟังก์ชันข้อที่ 1

$$\text{Index of Difficulty} = \frac{S_h + S_l - (n_t)(X_{min})}{n_t (X_{max} - X_{min})}$$

เมื่อ $S_h = 89.5$ $S_l = 0$ $n_t = 18$ $X_{max} = 10$ $X_{min} = 0$

$$\text{Index of Difficulty} = \frac{89.5 + 0 - (18)(0)}{18(10-0)}$$

$$= 0.50$$

$$\text{Index of Discrimination} = \frac{S_h - S_l}{n_h (X_{max} - X_{min})}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เมื่อ $S_h = 89.5$ $S_l = 0$ $n_h = 9$ $X_{max} = 10$ $X_{min} = 0$

$$\text{Index of Discrimination} = \frac{89.5 - 0}{9(10-0)}$$

$$= 0.99$$

2.6 การคำนวณค่าความยากและค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบเรื่องฟังก์ชัน ข้อที่ 2

$$\text{Index of Difficulty} = \frac{S_h + S_l - (n_t)(X_{min})}{n_t (X_{max} - X_{min})}$$

เมื่อ $S_h = 81$ $S_l = 0$ $n_t = 18$ $X_{max} = 10$ $X_{min} = 0$

$$\text{Index of Difficulty} = \frac{81 + 0 - (18)(0)}{18(10-0)}$$

$$= 0.45$$

$$\text{Index of Discrimination} = \frac{S_h - S_l}{n_h (X_{max} - X_{min})}$$

เมื่อ $S_h = 81$ $S_l = 0$ $n_h = 9$ $X_{max} = 10$ $X_{min} = 0$

$$\text{Index of Discrimination} = \frac{81 - 0}{9(10-0)}$$

$$= 0.90$$

2.7 การคำนวณค่าความยากและค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบเรื่องฟังก์ชัน ข้อที่ 3

$$\text{Index of Difficulty} = \frac{S_h + S_l - (n_t)(X_{min})}{n_t (X_{max} - X_{min})}$$

เมื่อ $S_h = 85$ $S_l = 0$ $n_t = 18$ $X_{max} = 10$ $X_{min} = 0$

$$\text{Index of Difficulty} = \frac{85 + 0 - (18)(0)}{18(10-0)}$$

$$= 0.47$$

$$\text{Index of Discrimination} = \frac{S_h - S_l}{n_h (X_{max} - X_{min})}$$

เมื่อ $S_h = 85$ $S_l = 0$ $n_h = 9$ $X_{max} = 10$ $X_{min} = 0$

$$\text{Index of Discrimination} = \frac{85 - 0}{9(10-0)}$$

$$= 0.94$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2.8 การคำนวณค่าความยากและค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบเรื่องฟังก์ชัน ข้อที่ 4

$$\text{Index of Difficulty} = \frac{S_h + S_l - (n_t)(X_{min})}{n_t (X_{max} - X_{min})}$$

เมื่อ $S_h = 75$ $S_l = 0$ $n_t = 18$ $X_{max} = 10$ $X_{min} = 0$

$$\text{Index of Difficulty} = \frac{75 + 0 - (18)(0)}{18(10-0)}$$

$$= 0.42$$

$$\text{Index of Discrimination} = \frac{S_h - S_l}{n_h (X_{max} - X_{min})}$$

เมื่อ $S_h = 75$ $S_l = 0$ $n_h = 9$ $X_{max} = 10$ $X_{min} = 0$

$$\text{Index of Discrimination} = \frac{75 - 0}{9(10-0)}$$

$$= 0.83$$

3. การหาค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{X}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) ของแบบทดสอบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีคะแนนเต็ม 80 คะแนน

$$\bar{X} = \frac{\Sigma x}{n}$$

3.1 การหาค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{X}$) และร้อยละของมัชฌิมเลขคณิตของนักเรียนชาย

เมื่อ $\Sigma X = 11,721$ $n = 276$

$$\bar{X} = \frac{11,721}{276}$$

$$= 42.47$$

ร้อยละของมัชฌิมเลขคณิต $= \frac{42.47}{80} \times 100$

$$= 53.09$$

3.2 การหาค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{X}$) และร้อยละของมัชฌิมเลขคณิตของนักเรียนหญิง

เมื่อ $\Sigma X = 17,085$ $n = 364$

$$\bar{X} = \frac{17,085}{364}$$

$$= 46.94$$

ร้อยละของมัชฌิมเลขคณิต $= \frac{46.94}{80} \times 100$

$= 58.68$

3.3 การหาค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{X}$) และร้อยละของมัชฌิมเลขคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เมื่อ $\Sigma X = 28,806$ $n = 640$

$\bar{X} = \frac{28,806}{640}$

$= 45.01$

ร้อยละของมัชฌิมเลขคณิต $= \frac{45.01}{80} \times 100$

$= 56.26$

$$S.D. = \sqrt{\frac{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n}}{n-1}}$$

3.4 การหาค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) ของนักเรียนชาย

เมื่อ $\Sigma X^2 = 669,294.25$ $(\Sigma X)^2 = (11,721)^2$ $n = 276$

$$S.D. = \sqrt{\frac{669,294.25 - \frac{(11,721)^2}{276}}{276-1}}$$

$= 24.98$

3.5 การหาค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) ของนักเรียนหญิง

เมื่อ $\Sigma X^2 = 848,295.75$ $(\Sigma X)^2 = (17,085)^2$ $n = 364$

$$S.D. = \sqrt{\frac{848,295.75 - \frac{(17,085)^2}{364}}{364-1}}$$

$= 11.30$

3.6 การหาค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เมื่อ $\Sigma X^2 = 1,517,590$ $(\Sigma X)^2 = (28,806)^2$ $n = 640$

$$S.D. = \sqrt{\frac{1,517,590 - \frac{(28,806)^2}{640}}{640-1}}$$

$= 18.60$

4. การคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ภายในทีละคู่โดยการหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบเพียร์สัน (Pearson's product moment coefficient correlation) ระหว่างคะแนนแต่ละชุดดังนี้

4.1 ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของพฤติกรรมการสอนของครูตามการรับรู้ของนักเรียน (X_1) กับ ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (Y)

$$r_{X_1Y} = \frac{N\Sigma X_1Y - \Sigma X_1\Sigma Y}{\sqrt{[N\Sigma X_1^2 - (\Sigma X_1)^2][N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}}$$

เมื่อ $N = 640$ $\Sigma X_1Y = 3,011,923.50$ $\Sigma X_1 = 65,329$

$\Sigma Y = 28,805.50$ $\Sigma X_1^2 = 6,745,146$ $\Sigma Y^2 = 1,517,590$

$$r_{X_1Y} = \frac{640(3,011,923.50) - (65,329)(28,805.50)}{\sqrt{[640(6,745,146) - (65,329)^2][640(1,517,590) - (28,805.50)^2]}}$$

$= 0.55$

4.2 ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของความตระหนักในเมตาคอคนิชัน (X_2) กับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (Y)

$$r_{X_2Y} = \frac{N\Sigma X_2Y - \Sigma X_2\Sigma Y}{\sqrt{[N\Sigma X_2^2 - (\Sigma X_2)^2][N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}}$$

เมื่อ $N = 640$ $\Sigma X_2Y = 2,811,051.75$ $\Sigma X_2 = 61,999$

$\Sigma Y = 28,805.50$ $\Sigma X_2^2 = 6,110,166$ $\Sigma Y^2 = 1,517,590$

$$r_{X_2Y} = \frac{640(2,881,051.75) - (61,999)(28,805.50)}{\sqrt{[640(6,110,166) - (61,999)^2][640(1,517,590) - (28,805.50)^2]}}$$

$= 0.60$

4.3 ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของพฤติกรรมการสอนของครูตามการรับรู้ของนักเรียน (X_1) กับความตระหนักในเมตาคอคนิชัน (X_2)

$$r_{X_1X_2} = \frac{N\Sigma X_1X_2 - \Sigma X_1\Sigma X_2}{\sqrt{[N\Sigma X_1^2 - (\Sigma X_1)^2][N\Sigma X_2^2 - (\Sigma X_2)^2]}}$$

เมื่อ $N = 640$ $\Sigma X_1X_2 = 6,353,965$ $\Sigma X_1 = 65,329$

$\Sigma X_2 = 61,999$ $\Sigma X_1^2 = 6,745,146$ $\Sigma X_2^2 = 6,110,166$

$$r_{X_1X_2} = \frac{640(6,353,965) - (65,329)(61,999)}{\sqrt{[640(6,745,146) - (65,329)^2][640(6,110,166) - (61,999)^2]}}$$

$= 0.28$

5. การทดสอบความมีนัยสำคัญของค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ที่คำนวณได้ด้วยการทดสอบค่าที (t-test) ที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ 0.01

สมมติฐาน $H_0 : p = 0$

$H_1 : p \neq 0$

ค่าสถิติ : $t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$

กฎการตัดสินใจ : จะปฏิเสธ H_0 ถ้า $t > (t_{638}(0.995) = 2.576)$

หรือ $t < (t_{638}(0.995) = -2.576)$

5.1 การทดสอบความมีนัยสำคัญของค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของพฤติกรรมการสอนของครูตามการรับรู้ของนักเรียนกับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (r_{x_1Y})

เนื่องจาก $r_{x_1Y} = 0.55 \quad n = 640$

$$t = \frac{0.55\sqrt{640-2}}{\sqrt{1-(0.55)^2}}$$

$$= 16.54$$

5.2 การทดสอบความมีนัยสำคัญของค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของความตระหนักในเมตาคอคนิชัน กับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (r_{x_2Y})

เนื่องจาก $r_{x_2Y} = 0.60 \quad n = 640$

$$t = \frac{0.60\sqrt{640-2}}{\sqrt{1-(0.60)^2}}$$

$$= 18.95$$

5.3 การทดสอบความมีนัยสำคัญของค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของพฤติกรรมการสอนของครูตามการรับรู้ของนักเรียนกับความตระหนักในเมตาคอคนิชัน ($r_{x_1x_2}$)

เนื่องจาก $r_{x_1x_2} = 0.28 \quad n = 640$

$$t = \frac{0.28\sqrt{640-2}}{\sqrt{1-(0.28)^2}}$$

$$= 7.36$$

<u>สรุป</u> ค่า t ที่ได้จากการคำนวณมากกว่า 2.576 ดังนั้น ปฏิเสธ H_0 แสดงว่าค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของกลุ่มประชากรระหว่างคะแนนแต่ละชุดมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ นั่นคือคะแนนแต่ละชุดมีความสัมพันธ์กันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

6. การคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์พหุคูณ (Multiple Correlation) ระหว่างพฤติกรรมการสอนของครูตามการรับรู้ของนักเรียน (X_1) และความตระหนักในเมตาคอคนิชัน (X_2) กับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (Y)

$$R_{Y.x_1x_2} = \sqrt{\frac{r^2_{x_1Y} + r^2_{x_2Y} - 2r_{x_1Y}\, r_{x_2Y}\, r_{x_1x_2}}{1 - r^2_{x_1x_2}}}$$

เมื่อ $r_{x_1Y} = 0.55 \quad r_{x_2Y} = 0.60 \quad r_{x_1x_2} = 0.28$

$$R_{Y.x_1x_2} = \sqrt{\frac{(0.55)^2 + (0.60)^2 - 2(0.55)(0.60)(0.28)}{1 - (0.28)^2}}$$

$$= 0.72$$

7. การทดสอบความมีนัยสำคัญของค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์พหุคูณที่คำนวณได้ด้วยการทดสอบค่าเอฟ (F-test) ที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ 0.01

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{N-K-1}{K} \quad ; df_1 = K, \quad df_2 = N-K-1$$

เมื่อ $R = 0.72 \quad N = 640 \quad K = 2$

$$F = \frac{(0.72)^2}{1-(0.72)^2} \cdot \frac{640-2-1}{2} \quad ; df_1 = 2, \quad df_2 = 640-2-1$$

$$= 343.98$$

ดังนั้นค่า F ที่คำนวณได้เท่ากับ 343.98

ส่วนค่า F ที่ $\alpha = 0.01$ ที่ $df_1 = 2, \ df_2 = 637$ มีค่าเท่ากับ 4.62

แสดงว่าค่า F ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าค่า F ที่เปิดตาราง ดังนั้น คะแนน X_1 และ X_2 มีความสัมพันธ์กับคะแนนเกณฑ์ Y ที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ 0.01

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประวัติผู้เขียน

นางสาวณัฏฐี เจริญเกียรติบวร เกิดเมื่อวันที่ 27 พฤศจิกายน พ.ศ. 2511 สำเร็จการศึกษาปริญญาครุศาสตรบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์-วิทยาศาสตร์ทั่วไป จากคณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2533 และเข้าศึกษาต่อในระดับปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2537 ปัจจุบันทำงานอยู่ที่ โรงเรียนอัสสัมชัญ กรุงเทพฯ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย