เซตจูเลียของฟังก์ชันต่อเนื่องบนทรงกลมรีมันน์

นางสาวพัชรี วงษาสนธิ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา2547

ISBN 974-53-1732-2

JULIA SET OF A CONTINUOUS MAP ON THE RIEMANN SPHERE

Miss Patcharee Wongsason

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science in Mathematics
Department of Mathematics
Faculty of Science
Chulalongkorn University
Academic Year 2004
ISBN 974-53-1732-2

หัวข้อวิทยานิพนธ์	เซตจูเลียของฟังก์ชันต่อเนื่องบนทรงกลมรีมันน์
โดย	นางสาวพัชรี วงษาสนธิ์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พิเชฐ ชาวหา

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิทยาศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.เปี่ยมศักดิ์ เมนะเศวต)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ
(อาจารย์ ดร.ณัฐพันธ์ กิติสิน)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พิเชฐ ชาวหา)

.... กรรมการ
(อาจารย์ ดร.ทรงเกียรติ สุเมธกิจการ)

พัชรี วงษาสนธิ์: เซตจูเลียของฟังก์ชันต่อเนื่องบนทรงกลมรีมันน์(JULIA SETS OF CONTINUOUS MAPS ON THE RIEMANN SPHERE)
อ.ที่ปรึกษา: ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พิเชฐ ชาวหา; 26 หน้า,
ISBN 974-53-1732-2.

สำหรับฟังก์ชันต่อเนื่อง $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ ให้ $\overline{f}$ และ h เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย $\overline{f}(z) = \overline{f(z)}$ และ $h(z) = f(|z|)$ ทุก $z \in \mathbb{C}_\infty$ จะได้ว่า

1. ถ้า f เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับขั้นอย่างน้อย 2 แล้วเซตจูเลียของ f เป็นเซตย่อยของ $K_{\overline{f}}$ เมื่อ $K_{\overline{f}} = \{z \mid \overline{f}^n(z) \not\to \infty\}$
2. ถ้า f มีสมบัติว่า $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ ทุก $z \in \mathbb{C}_\infty$ แล้วเซตจูเลียของ f และ $\overline{f}$ เหมือนกัน
3. ถ้า f เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับขั้นอย่างน้อย 2 ซึ่งสัมประสิทธิ์ทั้งหมดของ f เป็นจำนวนจริงซึ่งมากกว่าหรือเท่ากับ 1 แล้วเซตจูเลียของ h เป็นเซตว่าง
4. ถ้า $f(z) = z^2 + c$ เมื่อ c เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงมากกว่าหรือเท่ากับ 0 และ $h^n(0) \to \infty$ แล้วเซตจูเลียของ h เป็นเซตว่าง

ภาควิชา**คณิตศาสตร์** ลายมือชื่อนิสิต..............................
สาขาวิชา**คณิตศาสตร์** ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.................
ปีการศึกษา **2547**

##4572411723: MAJOR MATHEMATICS
KEY WORD: EQUICONTINUITY/NORMAL FAMILY/FATOU SET/JULIA SET : PATCHAREE WONGSASON: THESIS TITLE: JULIA SET OF A CONTINUOUS MAP ON THE RIEMANN SPHERE: THESIS ADVISOR : ASSIST. PROF. PHICHET CHAOHA, PH.D., 26pp. ISBN 974-53-1732-2

For a continuous map $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, let $\overline{f}$ and h be defined by $\overline{f}(z) = \overline{f(z)}$ and $h(z) = f(|z|)$ for all $z \in \mathbb{C}_\infty$. Then we have the followings:

1. if f is a polynomial with degree at least 2, then the Julia set of f is a subset of $K_{\overline{f}}$, where $K_{\overline{f}} = \{z \mid \overline{f}^n(z) \not\to \infty\}$,
2. if f satisfies $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ for all $z \in \mathbb{C}_\infty$, then Julia sets of f and $\overline{f}$ are the same,
3. if f is a polynomial with degree at least 2 and all coefficients are real numbers with absolute values greater than or equal 1, then $J(h)$ is empty,
4. if $f(z) = z^2 + c$ when c is a complex number whose real part greater than or equal 0 and $h^n(0) \to \infty$, then $J(h)$ is empty.

Department **Mathematics**	Student's signature....................
Field of study **Mathematics**	Advisor's signature....................
Academic year **2004**	

กิตติกรรมประกาศ

ขอกราบขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พิเชฐ ชาวหา อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ของข้าพเจ้าสำหรับคำแนะของอาจารย์ที่ทำให้มีแนวคิดในการทำวิทยานิพนธ์และจนถึงขั้นเสร็จเป็นรูปเล่ม และกราบขอบพระคุณอาจารย์ ดร.ณัฐพันธ์ กิติสิน ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ และ อาจารย์ ดร.ทรงเกียรติ สุเมธกิจการ กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ สำหรับคำแนะนำที่ทำให้การสอบวิทยานิพนธ์สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณพ่อและแม่ผู้ซึ่งเป็นกำลังใจให้ข้าพเจ้าผ่านอุปสรรคต่าง ๆ ไปได้และ ท่านอาจารย์ทุก ๆ ท่านที่ได้ให้ความรู้แก่ข้าพเจ้า และขอขอบคุณเพื่อน ๆ ทุกคนที่ได้ให้คำแนะนำในการใช้ชีวิตระหว่างเรียน

สารบัญ

บทที่ 1
บทนำ

เซตจูเลียและเซตฟาร์ทูของฟังก์ชันต่อเนื่อง f บน $\mathbb{C}_\infty$ เกิดจากการจัดประเภทของจุด z ใน $\mathbb{C}_\infty$ ตามพฤติกรรมของการทำซ้ำของ f บนย่านใกล้เคียงของ z โดย ถ้ามีย่านใกล้เคียงของ z ซึ่งพฤติกรรมการทำซ้ำของ f ของทุกจุดในย่านใกล้เคียงนั้นเหมือนกัน จะให้จุด z อยู่ในเซตฟาร์ทู แต่ถ้าทุก ๆ ย่านใกล้เคียงของ z พฤติกรรมการทำซ้ำของ f บนย่านใกล้เคียงนั้นมีทั้งเหมือนและแตกต่างกัน จะให้จุด z นั้นอยู่ในเซตจูเลีย ซึ่งในการศึกษาเซตจูเลียที่ผ่านมาจะศึกษาฟังก์ชันตรรกยะ (rational function) และฟังก์ชันทั่ว (entire function) โดยเฉพาะอย่างยิ่งฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับขั้นอย่างน้อย 2 เป็นฟังก์ชันที่สะดวกในการศึกษาลักษณะ และสมบัติของเซตจูเลียได้ชัดเจนกว่าฟังก์ชันอื่น ๆ โดยอาศัยสมบัติบางอย่างของฟังก์ชันพหุนาม และการหาอนุพันธ์ได้ของฟังก์ชันพหุนาม

ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงสนใจศึกษาเซตจูเลียของฟังก์ชันต่อเนื่องบางชนิดซึ่งคล้ายฟังก์ชันพหุนาม ทั้งที่หาอนุพันธ์ได้และหาอนุพันธ์ไม่ได้ ซึ่งมีลำดับขั้นตอนดังนี้

ในส่วนแรกก็คือบทที่ 2 จะกล่าวถึงนิยามของเซตจูเลียและเซตฟาร์ทูของฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\mathbb{C}_\infty$ และหลังจากนั้นเป็นทฤษฎีบทของฟังก์ชันบน $\mathbb{C}$ และ $\mathbb{C}_\infty$ ซึ่งจะนำไปใช้ในการพิจารณาสมบัติต่าง ๆ ของเซตจูเลียและเซตฟาร์ทูของฟังก์ชันพหุนาม

ในบทที่ 3 จะกล่าวถึงสมบัติของเซตจูเลียของฟังก์ชันพหุนามซึ่งมีระดับขั้นอย่างน้อย 2 ซึ่งจะเป็นแนวทางในการพิจารณาเซตจูเลียของฟังก์ชันต่อเนื่องที่มีลักษณะคล้ายฟังก์ชันพหุนาม ในบทที่ 4 ซึ่งจะศึกษาเซตจูเลียของฟังก์ชันต่อเนื่อง f บน $\mathbb{C}_\infty$ ซึ่ง f มีสมบัติว่า $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ ทุก $z \in \mathbb{C}_\infty$ ซึ่งตัวอย่างของ g ที่เห็นได้ชัดคือฟังก์ชันพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์ทั้งหมดเป็นจำนวนจริง รวมทั้งฟังก์ชันเอกโปเนลเชียล (exponential function) และฟังก์ชัน cos(z) และในบทที่ 4 ยังศึกษาถึงเซตจูเลียของฟังก์ชัน $h(z) = f(|z|)$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันพุนามที่มีระดับขั้นอย่างน้อย 2 ที่มีสัมประสิทธิ์ทั้งหมดเป็นจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ 1 หรือ f อยู่ในรูป $z^2 + c$ เมื่อส่วนจริงของ c มากกว่าหรือเท่ากับ 0

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐาน

ข้อตกลง ให้ A เป็นเซตใด ๆ จะแทนส่วนปิดคลุม (closure of A) ด้วย $Cl(A)$ และ $card(A)$ จะแทนจำนวนเชิงการนับของ A และ int(A) แทนเซตภายใน (interior set) ของ A

นิยาม 2.1 ให้ (X, d) และ (Y, ρ) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง (metric space) จะเรียก $\mathcal{F}$ ซึ่งเป็นวงศ์ (family) ของฟังก์ชัน จาก (X, d) ไปยัง (Y, ρ) ว่า *equicontinuous* ที่จุด x_0 เมื่อแต่ละจำนวนจริงบวก ϵ มีจำนวนจริงบวก δ ซึ่งสำหรับแต่ละ $x \in X$ และ $f \in \mathcal{F}$ จะได้ว่า

$$\text{ถ้า } d(x, x_0) < \delta \text{ แล้ว } \rho(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

และจะกล่าวว่า $\mathcal{F}$ equicontinuous บน X ถ้า $\mathcal{F}$ equicontinuous ที่ทุกจุดใน X

ข้อสังเกต 2.2 ถ้า $\mathcal{F}$ equicontinuous บนแต่ละเซตย่อย (subset) D_α ของ X จะเห็นได้ชัดว่า $\mathcal{F}$ equicontinuous บน $\bigcup D_\alpha$

ทฤษฎีบท 2.3 ให้ $\mathcal{F}$ เป็นวงศ์ของฟังก์ชันจากปริภูมิอิงระยะทาง (X, d) ไปยังปริภูมิอิงระยะทาง (Y, ρ) จะได้ว่ามีเซตย่อยเปิดที่ใหญ่ที่สุดเฉพาะกลุ่ม (maximal open subset) ของ X เพียงเซตเดียวเท่านั้นที่ทำให้ซึ่งทำให้ $\mathcal{F}$ equicontinuous

โดยเฉพาะถ้า $\mathcal{F}$ เป็นวงศ์ของฟังก์ชันจากปริภูมิอิงระยะทาง (X, d) ไปยังตัวมันเอง จะได้ว่ามีเซตย่อยเปิดที่ใหญ่ที่สุดเฉพาะกลุ่มของ X เพียงเซตเดียวเท่านั้นที่ทำให้วงศ์ของการทำซ้ำ (iterate) $\{f^n\}$ equicontinuous

พิสูจน์ ให้ $\mathcal{A}$ เป็นวงศ์ของเซตย่อยทั้งหมดของ X ซึ่งทำให้ $\mathcal{F}$ equicontinuous บนเซตนั้น ถ้า $\mathcal{A} = \varnothing$ จะได้ว่า $\varnothing$ เป็นเซตย่อยเปิดที่ใหญ่ที่สุดเฉพาะกลุ่มของ X ที่ทำให้ $\mathcal{F}$ equicontinuous

ต่อไปสมมุติว่า $\mathcal{A} \neq \varnothing$ และให้ $\mathcal{C}$ เป็นโซ่ (chain) ใด ๆ ใน $\mathcal{A}$ โดยข้อสังเกต 2.2 จะได้ว่า $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ เป็นขอบเขตบน (upper bounded) ของ $\mathcal{C}$ ใน $\mathcal{A}$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทประกอบของซอร์น (Zorn's Lemma) จะได้ว่า $\mathcal{A}$ มีสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดเฉพาะกลุ่ม ให้เป็นเซต B ดังนั้น int(B) เป็นเซตย่อยเปิดที่ใหญ่ที่สุดเฉพาะกลุ่มของ X ที่ทำให้ $\mathcal{F}$ equicontinuous

ต่อไปจะแสดงว่ามีเซตดังกล่าวเพียงเซตเดียวเท่านั้น โดยสมมุติ A_1 และ A_2 เป็นเซตเปิดที่ใหญ่ที่สุดเฉพาะกลุ่มของ X ที่ทำให้ $\mathcal{F}$ equicontinuous และ โดยข้อสังเกต 2.2 จะได้

ว่า $A_1 \cup A_2$ เป็นเซตเปิดที่ทำให้ $\mathcal{F}$ equicontinuous และเนื่องจาก $A_1, A_2 \subseteq A_1 \cup A_2$ และทั้ง A_1, A_2 เป็นเซตเปิดที่ใหญ่ที่สุดเฉพาะกลุ่มของ X ที่ทำให้ $\mathcal{F}$ equicontinuous จะได้ว่า $A_1 = A_1 \cup A_2 = A_2$

นิยาม 2.4 ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ $f : (X, d) \to (X, d)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง กำหนดให้เซตฟาร์ทู ของ f ซึ่งเขียนแทนด้วย $Fatou(f)$ เป็นเซตเปิดที่ใหญ่ที่สุดเฉพาะกลุ่มของ X ที่ทำให้ $\{f^n\}$ equicontinuous และ ให้เซตจูเลีย ของ f เป็นส่วนเติมเต็ม (complement) ของ $Fatou(f)$ เขียนแทนด้วย $J(f)$

นิยาม 2.5 ให้ (X, d) และ (Y, ρ) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง เราจะเรียก $\mathcal{F}$ ซึ่งเป็นวงศ์ของฟังก์ชันต่อเนื่องจาก (X, d) ไปยัง (Y, ρ) ว่าปกติ (*normal*) บนเซตย่อยเปิด U ของ X ถ้า ทุก ๆ ลำดับอนันต์ (infinite sequence) ของฟังก์ชันใน $\mathcal{F}$ มีลำดับย่อยซึ่งลู่เข้าอย่างเอกรูป (converge uniformly) สู่ฟังก์ชันต่อเนื่อง บนทุกเซตย่อยที่กระชับ (compact) ของ U

และจะกล่าวว่า $\mathcal{F}$ เป็นวงศ์ปกติที่จุด $x \in X$ ถ้ามีย่านใกล้เคียง V ของ x ซึ่งทำให้ $\mathcal{F}$ เป็นวงศ์ปกติบน V

ซึ่งในที่นี้ในการพิจารณาเซตจูเลียและเซตฟาร์ทูเราจะสนใจพิจารณาบนปริภูมิอิงระยะทาง $\mathbb{C}_\infty$ เมื่อ $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ซึ่ง $\mathbb{C}$ คือระนาบเชิงซ้อน (complex plane)

เพื่อที่จะหาเมตริกบน $\mathbb{C}_\infty$ เราจะใช้การฉายสเตอริโอกราฟิก (stereographic projection) จาก $\mathbb{C}_\infty$ ไปยังทรงกลมหนึ่งหน่วย (unit sphere) เปลี่ยนเมตริกยูคลีเดียน d (euclidean metric) บนทรงกลมหนึ่งหน่วยไปยังเมตริก σ บน $\mathbb{C}_\infty$

โดย[4] หน้า 8-9 จะได้ว่า $\sigma(z, w)$ สามารถเขียนในรูป z และ w ได้ดังนี้
สำหรับ $z, w \in \mathbb{C}$

$$\sigma(z, w) = \frac{2|z - w|}{(1 + |z|^2)^{\frac{1}{2}}(1 + |w|^2)^{\frac{1}{2}}}$$

และ

$$\sigma(z, \infty) = \frac{2}{(1 + |z|^2)^{\frac{1}{2}}}$$

และยังได้ด้วยว่า สำหรับลำดับ (z_n) ใน $\mathbb{C}$ และ $z \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า $\sigma(z_n, z) \to 0$ ก็ต่อเมื่อ $d(z_n, z) \to 0$

และสังเกตว่า สำหรับ $z,\ w \in \mathbb{C}_\infty$ ใด ๆ $\sigma(z, w) \leq 2$ และจะกำหนดให้ $|\infty| = \infty$ และสำหรับ $r > 0$ จะกำหนดให้ $\mathcal{V}_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\} \cup \{\infty\} = \{z \in \mathbb{C}_\infty \mid |z| > r\}$

โดย [4] หน้า 156 จะได้ว่าเมตริก σ เมื่อพิจารณาบน $\mathbb{C}$ จะสมมูลกับเมตริกยูคลีเดียน ดังนั้น U เป็นเซตเปิดใน $\mathbb{C}_\infty$ ซึ่ง $\infty \notin U$ ก็ต่อเมื่อ U เป็นเซตเปิดใน $\mathbb{C}$ ด้วย และยังได้ด้วยว่า U จะเป็นเซตเปิดใด ๆ ใน $\mathbb{C}_\infty$ ซึ่ง $\infty \in U$ ก็ต่อเมื่อ $U \cap \mathbb{C}$ เป็นเซตเปิดใน $\mathbb{C}$ และมี $R > 0$ ซึ่งทำให้ $\mathcal{V}_R \subseteq U$

เนื่องจาก $\mathbb{C}_\infty$ เป็นปริภูมิเชื่อมโยงเฉพาะที่ (locally connected) จะได้ว่าทุกย่านใกล้

เคียง (neighborhood) ของ $z \in \mathbb{C}_\infty$ สามารถเลือกให้เป็นเซตเชื่อมโยง (conected) ได้ ดังนั้นต่อไปเมื่อกล่าวถึงย่านใกล้เคียงของจุดใด ๆ ใน $\mathbb{C}_\infty$ จะหมายถึงย่านใกล้เคียงที่เป็นเซตเชื่อมโยง

นิยาม 2.6 ให้ U เป็นเซตเปิดใน $\mathbb{C}$ และให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f : U \to \mathbb{C}$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ (analytic function) บน U ถ้าทุก $z \in U$ มีย่านใกล้เคียง V ของ z ซึ่ง f หาอนุพันธ์ได้ที่ทุกจุดใน V

นิยาม 2.7 ให้ U เป็นเซตเปิดใน $\mathbb{C}_\infty$ และให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f : U \to \mathbb{C}_\infty$ จะกล่าวว่า f นิยามบนบางย่านใกล้เคียงของ ∞ ถ้า f นิยามบน $\mathcal{V}_R$ สำหรับบาง $R > 0$

นิยาม 2.8 ให้ U เป็นเซตเปิดใน $\mathbb{C}_\infty$ ที่มี ∞ อยู่และให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f : U \to \mathbb{C}_\infty$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ ∞ ถ้าฟังก์ชัน g ซึ่ง $g(z) = f(\dfrac{1}{z})$ ถ้า $z \neq 0$ และ $g(z) = f(\infty)$ ถ้า $z = 0$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนบางย่านใกล้เคียงของ 0

นิยาม 2.9 ให้ U เป็นเซตเปิดใน $\mathbb{C}_\infty$ และให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f : U \to \mathbb{C}_\infty$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน U ถ้าทุก $z \in U$ มีย่านใกล้เคียง V ของ z ซึ่ง f หรือ $\dfrac{1}{f}$ หาอนุพันธ์ได้ที่ทุกจุดใน V

ทฤษฎีบท 2.10 (**Open Mapping Theorem**) ให้ U เป็นเซตย่อยเชื่อมโยงเปิด (open connected set) ของ $\mathbb{C}$ และ $f : U \to \mathbb{C}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ไม่ใช่ฟังก์ชันค่าคงตัว จะได้ว่า $f(U)$ เป็นเซตเปิดใน $\mathbb{C}$ นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันเปิด (open map)
พิสูจน์ การพิสูจน์ดูได้จาก [4] หน้า 162

ทฤษฎีบท 2.11 สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้ f_n เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนเซตเชื่อมโยงเปิด $D \subseteq \mathbb{C}_\infty$ และ (f_n) ลู่เข้าอย่างเอกรูปสู่ f บน D เมื่อเทียบกับเมตริก σ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน D
พิสูจน์ การพิสูจน์ดูได้จาก [1]

ข้อตกลง ฟังก์ชันพหุนามบน $\mathbb{C}_\infty$ จะหมายถึง ∞ หรือ ฟังก์ชัน f ที่อยู่ในรูป $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ โดยที่ $n \in \mathbb{N}$ และ $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$

ทฤษฎีบท 2.12 f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน $\mathbb{C}_\infty$ ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันตรรกยะ (rational function) นั่นคือ $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ โดยที่ $p(z)$ และ $q(z)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม และ $p(z)$ และ $q(z)$ ไม่มีตัวประกอบ (factor) ร่วมกัน
พิสูจน์ การพิสูจน์ดูได้จาก [7]

ทฤษฎีบท 2.13 (**Montel's Theorem**) ให้ $\mathcal{F}$ เป็นวงศ์ของฟังก์ชันวิเคราะห์บนเซตย่อยเปิด D ของ $\mathbb{C}_\infty$ จะได้ว่าถ้ามีจุดใน $\mathbb{C}_\infty$ 3 จุดซึ่งทุก $f \in \mathcal{F}$ 3 จุดนี้ไม่อยู่ใน $f(D)$ พร้อมกัน จะได้ว่า $\mathcal{F}$ เป็นวงศ์ปกติบน D หรือนั่นคือถ้า $card(\mathbb{C}_\infty - \bigcup_{f\in\mathcal{F}} f(D)) \geq 3$ จะได้ว่า $\mathcal{F}$ เป็นวงศ์ปกติบน D

ดังนั้นถ้า $\mathcal{F}$ ไม่เป็นวงศ์ปกติบน D จะได้ว่ามีจุดใน $\mathbb{C}_\infty$ ได้อย่างมาก 2 จุดเท่านั้นซึ่งทุก $f \in \mathcal{F}$ 2 จุดนี้ไม่อยู่ใน $f(D)$ พร้อมกัน

โดยเฉพาะอย่างยิ่งสำหรับวงศ์ของฟังก์ชันวิเคราะห์ $\{f^n\}$ ไม่เป็นวงศ์ปกติจะได้ว่า
$card(\mathbb{C}_\infty - \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(D)) \leq 2$
พิสูจน์ การพิสูจน์ดูได้จาก [6]

ทฤษฎีบท 2.14 (**Ascoli-Arzela theorem**) ให้ D เป็นเซตย่อยเปิดของ $\mathbb{C}_\infty$ และให้ $\mathcal{F}$ เป็นวงศ์ ของฟังก์ชันต่อเนื่องจาก D ไปยัง $\mathbb{C}_\infty$ จะได้ ว่า $\mathcal{F}$ equicontinuous บน D ก็ต่อเมื่อ $\mathcal{F}$ เป็นวงศ์ปกติบน D
พิสูจน์ การพิสูจน์ดูได้จาก [1]

บทที่ 3
สมบัติพื้นฐานของเซตจูเลีย

ในบทนี้จะกล่าวถึงสมบัติพื้นฐานของเซตจูเลียและเซตฟาร์ทูของฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับขั้นอย่างน้อย 2

นิยาม 3.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับขั้นอย่างน้อย 2 จะเรียก $w \in \mathbb{C}_\infty$ ซึ่ง $f^p(w) = w$ สำหรับบางจำนวนนับ p ว่าเป็น *periodic point* ของ f และจะเรียกจำนวนนับ p ที่มีค่าน้อยที่สุดที่มีสมบัติดังกล่าวว่าคาบ (period) ของ w

ให้ w เป็น *periodic point* ของ f ซึ่งมีคาบเป็น p สำหรับบาง $p \in \mathbb{N}$ และ $(f^p)'(w) = \lambda$ โดยที่ $(f^p)'$ แทนอนุพันธ์ (derivative) อันดับที่หนึ่งของ f^p จะเรียก w ว่า

$$\begin{aligned} \text{superattractive} \quad &\text{ถ้า} \quad \lambda = 0 \\ \text{attractive} \quad &\text{ถ้า} \quad 0 \le |\lambda| < 1 \\ \text{indifferent} \quad &\text{ถ้า} \quad |\lambda| = 1 \\ \text{repelling} \quad &\text{ถ้า} \quad |\lambda| > 1 \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 3.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับขั้นอย่างน้อย 2 จะได้ว่า

$$J(f) = Cl(\{z \mid z \text{ เป็น } \textit{repelling periodic point} \text{ ของ } f\})$$

พิสูจน์ การพิสูจน์ดูได้จาก [2]

ทฤษฎีบท 3.3 ให้ f เป็นฟังก์ชันพหุนามซึ่งมีระดับขั้นอย่างน้อย 2 จะได้ว่ามี $r > 0$ ซึ่งถ้า $|z| > r$ แล้ว $|f(z)| > 2|z|$ นั่นคือ $f(\mathcal{V}_r) \subseteq \mathcal{V}_r$

พิสูจน์ ให้ $r = max\left\{\frac{2n|a_0|}{|a_n|}, \frac{2n|a_1|}{|a_n|}, \cdots, \frac{2n|a_{n-1}|}{|a_n|}, 1, \left(\frac{4}{|a_n|}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right\}$ และให้ $|z| > r$

ต่อไปจะแสดงว่า

$$\left|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z}\right| < \frac{|a_n|}{2}$$

จะเห็นว่า

$$\left|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z}\right| \le \frac{|a_0|}{|z^n|} + \frac{|a_1|}{|z^{n-1}|} + \cdots + \frac{|a_{n-1}|}{|z|}$$

เนื่องจาก $|z| > r$ จะได้ว่า

$$\left|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z}\right| < \frac{|a_0|}{r^n} + \frac{|a_1|}{r^{n-1}} + \cdots + \frac{|a_{n-1}|}{r}$$

และเนื่องจาก $r, r^2, \cdots, r^{n-1} \geq 1$ ดังนั้น $\frac{1}{r}, \frac{1}{r^2}, \cdots, \frac{1}{r^{n-1}} \leq 1$ ทำให้ได้ว่า

$$\frac{|a_i|}{r^{n-i}} \leq \frac{|a_n|}{2n}$$

ทุก $i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$

โดยถ้า $|a_i| = 0$ จะเห็นได้ชัด และถ้า $|a_i| \neq 0$ จะได้ว่า

$$\frac{|a_i|}{r^{n-i}} = \frac{|a_i|}{r^{n-i-1}r} \leq \frac{|a_i||a_n|}{r^{n-i-1}2n|a_i|} \leq \frac{|a_n|}{2n}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z}\right| &< \overbrace{\frac{|a_n|}{2n} + \frac{|a_n|}{2n} + \cdots + \frac{|a_n|}{2n}}^{n\ terms} \\ &= \frac{n|a_n|}{2n} \\ &= \frac{|a_n|}{2}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\left|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z}\right| < \frac{|a_n|}{2}$$

นั่นคือ $|a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1}| < \frac{|a_n||z^n|}{2}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}|f(z)| &\geq |a_n z^n| - |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \\ &> |a_n||z|^n - \frac{|a_n||z|^n}{2} \\ &= \frac{|a_n||z|^n}{2} \\ &= \frac{|a_n||z||z|^{n-1}}{2} \\ &\geq \frac{|a_n||z|}{2}\left(\frac{4}{|a_n|}\right)^{\frac{n-1}{n-1}} \\ &= 2|z|\end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้า $|z| > r$ แล้ว $|f(z)| > 2|z| > |z| > r$ นั่นคือ $f(\mathcal{V}_r) \subseteq \mathcal{V}_r$

บทแทรก 3.4 ให้ f เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับขั้นอย่างน้อย 2 จะได้ว่ามี $r > 0$

ซึ่งสำหรับ $\epsilon > 0$ ใด ๆ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทุก $n \geq N$ และทุก $z \in \mathcal{V}_r$ จะได้ $|f^n(z)| > \epsilon$

พิสูจน์ ให้ r คือ r ในทฤษฎีบท 3.3 ดังนั้นถ้า $|z| > r$ แล้ว $|f(z)| > 2|z|$ ดังนั้น สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$|f^{n+1}(z)| > 2|f^n(z)|$$

และ

$$|f^n(z)| > 2^n|z| > 2^n r$$

เนื่องจาก $2^n r \to \infty$ จะได้ว่าสำหรับ $\epsilon > 0$ ใด ๆ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งสำหรับแต่ละ $n \geq N$ จะได้ว่า $2^n r > \epsilon$ ดังนั้นสำหรับแต่ละ $n \geq N$ และ z ซึ่ง $z \in \mathcal{V}_r$ จะได้

$$|f^n(z)| > 2^n|z| > 2^n r > \epsilon$$

บทแทรก 3.5 ให้ f เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับขั้นอย่างน้อย 2 และให้ r คือ r ในทฤษฎีบทที่ 3.3 จะได้ว่า (f^n) ลู่เข้าอย่างเอกรูปสู่ ∞ บน $\mathcal{V}_r$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $\epsilon > 0$ ใด ๆ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทุก $n \geq N$ และ ทุก $z \in \mathcal{V}_r$ จะได้ $|f^n(z)| > \epsilon$

พิสูจน์ สมมุติให้ (f^n) ลู่เข้าอย่างเอกรูปสู่ ∞ บน $\mathcal{V}_r$ และให้ $\epsilon > 0$ จะได้ว่า มี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n \geq N$ และ ทุก $z \in \mathcal{V}_r$ จะได้

$$\sigma(f^n(z), \infty) < \frac{2}{\sqrt{1+\epsilon^2}}$$

ดังนั้น

$$\frac{2}{\sqrt{1+|f^n(z)|^2}} = \sigma(f^n(z), \infty) < \frac{2}{\sqrt{1+\epsilon^2}}$$

จะได้ว่า $|f^n(z)| > \epsilon$

ในทางกลับกัน สมมุติให้ ทุก $\epsilon > 0$ มี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทุก $n \geq N$ และ ทุก $z \in \mathcal{V}_r$ จะได้ว่า $|f^n(z)| > \epsilon$ จะแสดงว่า (f^n) ลู่เข้าอย่างเอกรูปสู่ ∞ บน $\mathcal{V}_r$

ให้ $\epsilon > 0$ เนื่องจาก $\sigma(z, w) \leq 2$ ทุก $z, w \in \mathbb{C}_\infty$ ดังนั้น $\sigma(f^n(z), \infty) \leq 2$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ และทุก $z \in \mathcal{V}_r$ ดังนั้นเห็นได้ชัดว่าถ้า $\epsilon > 2$ จะได้ว่า $\sigma(f^n(z), \infty) < \epsilon$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ และทุก $z \in \mathcal{V}_r$

จากในส่วนการพิสูจน์บทแทรก 3.4 จะได้ว่า $|f^n(z)| > r$ ทุก $z \in \mathcal{V}_r$ และทุก $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้น $f^n(z) \neq 0$ ทุก $z \in \mathcal{V}_r$ และทุก $n \in \mathbb{N}$ นั่นคือ

$$\sigma(f^n(z), \infty) < 2 \quad \text{ทุก} \quad z \in \mathcal{V}_r \quad \text{และทุก} \quad n \in \mathbb{N}$$

ดังนั้นสำหรับ $\epsilon = 2$ จะได้ว่า $\sigma(f^n(z), \infty) < \epsilon$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ และทุก $z \in \mathcal{V}_r$

สำหรับ $0 < \epsilon < 2$ จะได้ว่า $\sqrt{\dfrac{4}{\epsilon^2} - 1} > 0$

จากสมมุติฐานจะได้ว่า มี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n \geq N$ และ ทุก $z \in \mathcal{V}_r$ จะได้ $|f^n(z)| > \sqrt{\frac{4}{\epsilon^2} - 1}$ ดังนั้น สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n \geq N$ จะได้

$$
\begin{aligned}
|f^n(z)|^2 &> \frac{4}{\epsilon^2} - 1 \\
1 + |f^n(z)|^2 &> \frac{4}{\epsilon^2} \\
\frac{1}{1 + |f^n(z)|^2} &< \frac{\epsilon^2}{4} \\
\frac{2}{\sqrt{1 + |f^n(z)|^2}} &< \epsilon
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$\sigma(f^n(z), \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |f^n(z)|^2}} < \epsilon$$

ดังนั้นจากทั้ง 3 กรณี จะได้ว่า ทุก $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n \geq N$ และ ทุก $z \in \mathcal{V}_r$ จะได้ว่า $\sigma(f^n(z), \infty) < \epsilon$ นั่นคือ (f^n) ลู่เข้าอย่างเอกรูปสู่ ∞ บน $\mathcal{V}_r$

บทแทรก 3.6 ให้ f เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับขั้นอย่างน้อย 2 จะได้ว่ามี $r > 0$ ซึ่งทำให้ (f^n) ลู่เข้าอย่างเอกรูปสู่ ∞ บน $\mathcal{V}_r$
พิสูจน์ ได้โดยตรงจาก บทแทรก 3.4 และ 3.5

ข้อสังเกต 3.7 จากบทแทรก 3.6 จะได้ว่า $\{f^n\}$ เป็นวงศ์ปกติบน $\mathcal{V}_r$ และเนื่องจาก $Fatou(f)$ เป็นเซตเปิดที่ใหญ่ที่ทำให้ $\{f^n\}$ เป็นวงศ์ปกติ และ $\mathcal{V}_r$ เป็นเซตเปิด ดังนั้น $\mathcal{V}_r \subseteq Fatou(f)$ ดังนั้น $J(f) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$

บทแทรก 3.8 ให้ $f(z) = z^2 + c$ เมื่อ $c \in \mathbb{C}$ และ $r = max\{|4c|, 4\}$ จะได้ว่า (f^n) ลู่เข้าอย่างเอกรูปสู่ ∞ บน $\mathcal{V}_r$
พิสูจน์ ได้โดยตรงจากทฤษฎีบท 3.3

ทฤษฎีบท 3.9 ให้ f เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับขั้นอย่างน้อย 2 จะได้ว่า เซต $\{z \in \mathbb{C}_\infty \mid f^n(z) \to \infty\}$ เป็นเซตเปิด
พิสูจน์ จากบทแทรก 3.6 จะได้ว่ามีย่านใกล้เคียง $\mathcal{V}_r$ ของ ∞ ซึ่ง (f^n) ลู่เข้าอย่างเอกรูปสู่ ∞ บน $\mathcal{V}_r$ ดังนั้นจะได้ด้วยว่า ทุก $z \in \mathcal{V}_r$ จะได้ $f^n(z) \to \infty$

จะแสดงก่อนว่า

$$\{z \mid f^n(z) \to \infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(\mathcal{V}_r)$$

ให้ $z \in \mathbb{C}_\infty$ โดยที่ $f^n(z) \to \infty$ ดังนั้นจากบทแทรก 3.5 จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $|f^N(z)| > r$

ดังนั้น $f^N(z) \in \mathcal{V}_r$ ดังนั้น $z \in f^{-N}(\mathcal{V}_r) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(\mathcal{V}_r)$ ดังนั้น

$$\{z \mid f^n(z) \to \infty\} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(\mathcal{V}_r)$$

ในทางกลับกันสมมุติให้ $z \in f^{-k}(\mathcal{V}_r)$ สำหรับบาง $k \in \mathbb{N}$ ดังนั้น $f^k(z) \in \mathcal{V}_r$ ดังนั้น $|f^k(z)| > r$ ดังนั้น $f^n(f^k(z)) \to \infty$ ทำให้ได้ว่า $f^n(z) \to \infty$ ดังนั้น

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(\mathcal{V}_r) \subseteq \{z \mid f^n(z) \to \infty\}$$

ดังนั้น

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(\mathcal{V}_r) = \{z \mid f^n(z) \to \infty\}$$

และเนื่องจาก f^n เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ทุก $n \in \mathbb{N}$ และ $\mathcal{V}_r$ เป็นเซตเปิดใน $\mathbb{C}_\infty$ ทำให้ได้ว่า $f^{-n}(\mathcal{V}_r)$ เป็นเซตเปิดทุก $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้น $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(\mathcal{V}_r)$ เป็นเซตเปิด ดังนั้น $\{z \in \mathbb{C}_\infty \mid f^n(z) \to \infty\}$ เป็นเซตเปิด

ทฤษฎีบท 3.10 ให้ f เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับขั้นอย่างน้อย 2 จะได้ว่า $J(f) \neq \varnothing$
พิสูจน์ การพิสูจน์ดูได้จาก [1]

จากลักษณะของเซตเปิดใน $\mathbb{C}_\infty$ ดังที่กล่าวไว้ในบทที่ 2 จะได้ว่าสำหรับฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับขั้นอย่างน้อย 2 จะได้ว่า Open Mapping Theorem จะเป็นจริงบน $\mathbb{C}_\infty$ ด้วย นั่นคือสำหรับเซตเปิด U ใด ๆ ใน $\mathbb{C}_\infty$ จะได้ว่า $f(U)$ เป็นเซตเปิดใน $\mathbb{C}_\infty$ ซึ่งจะเห็นได้ดังนี้

สำหรับ U เป็นเซตเปิดของ $\mathbb{C}_\infty$ ซึ่ง $\infty \notin U$ จะได้ว่า U ก็คือเซตเปิดใน $\mathbb{C}$ ดังนั้นโดย Open Mapping Theorem ใน $\mathbb{C}$ จะได้ว่า $f(U)$ เป็นเซตเปิดใน $\mathbb{C}$ ซึ่งก็เป็นเซตเปิดใน $\mathbb{C}_\infty$ ด้วย

สำหรับ U เป็นเซตเปิดของ $\mathbb{C}_\infty$ ซึ่ง $\infty \in U$ ดังนั้นจากนิยามของ U จะได้ว่า $U \cap \mathbb{C}$ เป็นเซตเปิดใน $\mathbb{C}$ และมี $R > 0$ ซึ่ง $\mathcal{V}_R \subseteq U$

จะแสดงว่า $f(U)$ เป็นเซตเปิดใน $\mathbb{C}_\infty$ จะต้องแสดงว่า ทุกจุด z ใน $f(U)$ จะต้องมีเซตเปิด W บน $\mathbb{C}_\infty$ ซึ่ง $z \in W \subseteq f(U)$ ดังนั้นถ้า $z \in f(U)$ และ $z \neq \infty$ จะได้ว่ามี $u \in U$ ที่ทำให้ $z = f(u)$ และเนื่องจาก $z \neq \infty$ จะได้ว่า $u \neq \infty$ เนื่องจาก ∞ เป็นจุดตรึงของ f

เนื่องจาก $U \cap \mathbb{C}$ เป็นเซตเปิดใน $\mathbb{C}$ และ $u \in U \cap \mathbb{C}$ ดังนั้นจะมีเซตเปิด V ซึ่ง $u \in V \subseteq U \cap \mathbb{C}$ นั่นคือ V เป็นเซตเปิดใน $\mathbb{C}$ ดังนั้นโดย Open Mapping Theorem บน $\mathbb{C}$ จะได้ว่า $f(V)$ เป็นเซตเปิด ดังนั้น

$$z = f(u) \in f(V) \subseteq f(U \cap \mathbb{C}) \subseteq f(U)$$

นั่นคือสำหรับทุก $z \in f(U)$ ซึ่ง $z \neq \infty$ จะได้ว่ามีเซตเปิด $f(V)$ บน $\mathbb{C}_\infty$ ซึ่ง $z \in f(V) \subseteq f(U)$ เมื่อ V เป็นเซตเปิดใน $\mathbb{C}$ ซึ่ง $z \in f(V)$ ดังนั้นเหลือเพียงแสดงว่า

สำหรับ ∞ จะต้องหาเซตเปิด W บน $\mathbb{C}_\infty$ ซึ่ง $\infty \in W \subseteq f(U)$ ดังนี้

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับขั้นอย่างน้อย 2 จากทฤษฎีบท 3.3 จะได้ว่า มี $r > 0$ ซึ่งทำให้ $f(\mathcal{V}_r) \subseteq \mathcal{V}_r$ ดังนั้นถ้า $r_1 = max\{r, R\}$ จะได้ว่า $f(\mathcal{V}_{r_1}) \subseteq \mathcal{V}_{r_1}$ และ $\mathcal{V}_{r_1} \subseteq \mathcal{V}_R$

เนื่องจาก $f(\mathcal{V}_{r_1}) - \{\infty\} \subseteq \mathcal{V}_{r_1}$ ดังนั้นจะมี $r_2 > 0$ ซึ่ง

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r_2\} \subseteq f(\mathcal{V}_{r_1}) - \{\infty\} \subseteq f(U) - \{\infty\}$$

ดังนั้น

$$\mathcal{V}_{r_2} \subseteq f(\mathcal{V}_{r_1}) \subseteq f(U)$$

นั่นคือมีเซตเปิด $\mathcal{V}_{r_2}$ บน $\mathbb{C}_\infty$ ซึ่ง $\infty \in \mathcal{V}_{r_2} \subseteq f(U)$ ดังนั้น $f(U)$ เป็นเซตเปิดบน $\mathbb{C}_\infty$

ทฤษฎีบท 3.11 ให้ $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับขั้นอย่างน้อย 2 จะได้ว่า

1. f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง
2. f เป็นฟังก์ชันเปิด

พิสูจน์

1. สำหรับ w ใด ๆ ใน $\mathbb{C}$ โดยทฤษฎีบทหลักมูลทางพีชคณิต (Fundamental Theorem of Algebra) จะสามารถหาคำตอบของสมการ $f(z) = w$ ได้ และเนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันพหุนาม ดังนั้น ∞ เป็นจุดตรึง (fixed point) ของ f นั่นคือ $f(\infty) = \infty$ นั่นคือ สำหรับ w ใด ๆ ใน $\mathbb{C}_\infty$ จะมี $v \in \mathbb{C}_\infty$ ซึ่งทำให้ $f(v) = w$ นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

2. เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน $\mathbb{C}_\infty$ และจากที่กล่าวข้างต้นก่อนทฤษฎี จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเปิด

ทฤษฎีบท 3.12 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและเป็นฟังก์ชันเปิดบน $\mathbb{C}_\infty$ จะได้ว่า $J(f) = f^{-1}(J(f))$

พิสูจน์

จะแสดง $Fatou(f) = f(Fatou(f)) = f^{-1}(Fatou(f))$ แทนเพราะถ้าแสดงได้ดังกล่าว จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_\infty - Fatou(f) &= \mathbb{C}_\infty - f^{-1}(Fatou(f)) \\ J(f) &= f^{-1}(\mathbb{C}_\infty) - f^{-1}(Fatou(f)) \\ &= f^{-1}(\mathbb{C}_\infty - (Fatou(f))) \\ &= f^{-1}(J(f)) \end{aligned}$$

และเราจะแสดงเพียง $Fatou(f) = f^{-1}(Fatou(f))$ ให้ $z_0 \in Fatou(f)$ และ $w_0 = f(z_0)$ จะแสดงว่า $w_0 \in Fatou(f)$ นั่นคือต้องหาย่านใกล้เคียง U ของ w_0 ซึ่ง $\{f^n\}$ equicontinuous บน U

เนื่องจาก $z_0 \in Fatou(f)$ จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง $\{f^n\}$ equicontinuous บน $B_\sigma(z_0, \delta_1)$ และเนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันเปิด ดังนั้น $f(B_\sigma(z_0, \delta_1))$ เป็นเซตเปิด และ $w_0 = f(z_0) \in f(B_\sigma(z_0, \delta_1))$ นั่นคือ $f(B_\sigma(z_0, \delta_1))$ เป็นย่านใกล้เคียงของ w_0

จะแสดงว่า $\{f^n\}$ equicontinuous บน $f(B_\sigma(z_0, \delta_1))$ ให้ $u \in f(B_\sigma(z_0, \delta_1))$ และ $\epsilon > 0$ ดังนั้นจะมี $v \in B_\sigma(z_0, \delta_1)$ ซึ่ง $u = f(v)$ และเนื่องจาก $\{f^n\}$ equicontinuous ที่ v ดังนั้นเราสามารถเลือก $\delta_2 > 0$ ซึ่งทำให้ $B_\sigma(v, \delta_2) \subseteq B_\sigma(z_0, \delta_1)$ ซึ่งสำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ และ $w \in \mathbb{C}_\infty$

$$\text{ถ้า} \quad \sigma(v, w) < \delta_2 \quad \text{แล้ว} \quad \sigma(f^{n+1}(v), f^{n+1}(w)) < \epsilon \tag{1}$$

สังเกตว่า $f(B_\sigma(v, \delta_2))$ เป็นเซตเปิด ดังนั้นจะมี $\delta_3 > 0$ ซึ่งทำให้

$$B_\sigma(u, \delta_3) = B_\sigma(f(v), \delta_3) \subseteq f(B_\sigma(v, \delta_2))$$

ดังนั้นสำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ และ $u' \in \mathbb{C}_\infty$ ถ้า $\sigma(u, u') < \delta_3$ จะได้ว่ามี $v' \in B_\sigma(v, \delta_2)$ ซึ่ง $u' = f(v')$ ดังนั้นจาก (1) จะได้ว่า

$$\sigma(f^n(u), f^n(u')) = \sigma(f^{n+1}(v), f^{n+1}(v')) < \epsilon$$

นั่นคือ สำหรับแต่ละ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta_3 > 0$ ซึ่ง สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ และ $u' \in \mathbb{C}_\infty$ จะได้ว่า

$$\text{ถ้า} \quad \sigma(u, u') < \delta_3 \quad \text{แล้ว} \quad \sigma(f^n(u), f^n(u')) < \epsilon$$

นั่นคือ $\{f^n\}$ equicontinuous ที่ u และจาก u เป็นจุดใด ๆ ใน $f(B_\sigma(z_0, \delta_1))$ ซึ่งเป็นย่านใกล้เคียง w_0 นั่นคือ $w_0 \in Fatou(f)$ และจาก $w_0 = f(z_0)$ จะได้ว่า $z_0 \in f^{-1}(Fatou(f))$ ดังนั้น $Fatou(f) \subseteq f^{-1}(Fatou(f))$

ต่อไปจะแสดงว่า $f^{-1}(Fatou(f)) \subseteq Fatou(f)$ สมมุติให้ $z_0 \in f^{-1}(Fatou(f))$ ดังนั้นจะมี $u_0 \in Fatou(f)$ ซึ่ง $f(z_0) = u_0$ ดังนั้น $\{f^n\}$ equicontinuous ที่ u_0

ให้ $\epsilon > 0$ ดังนั้นจะมี $\delta_1' > 0$ ซึ่งทุก $n \in \mathbb{N}$ และ $w \in \mathbb{C}_\infty$ จะได้ว่า

$$\text{ถ้า} \quad \sigma(w, u_0) < \delta_1' \quad \text{แล้ว} \quad \sigma(f^n(w), f^n(u_0)) < \epsilon \tag{2}$$

และจาก f ต่อเนื่องที่จุด z_0 ดังนั้นจะมี $\delta_2' > 0$

$$\text{ถ้า} \quad \sigma(z, z_0) < \delta_2' \quad \text{แล้ว} \quad \sigma(f(z), f(z_0)) < \delta_1' \tag{3}$$

ดังนั้นจาก (2) และ (3) จะได้ว่า ทุก $n \in \mathbb{N}$ และ $z \in \mathbb{C}_\infty$ จะได้ว่า

$$\text{ถ้า} \quad \sigma(z, z_0) < \delta_2' \quad \text{แล้ว} \quad \sigma(f^{n+1}(z), f^{n+1}(z_0)) < \epsilon$$

นั่นคือ $\{f^{n+1}\}$ equicontinuous ที่จุด z_0 ดังนั้น $\{f^n\}$ equicontinuous ที่จุด z_0 ด้วย และเนื่องจาก z_0 เป็นจุดใด ๆ ใน $f^{-1}(Fatou(f))$ จะได้ว่า $\{f^n\}$ equicontinuous

บน $f^{-1}(Fatou(f))$ และเนื่องจาก $Fatou(f)$ เป็นเซตเปิด และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จะได้ว่า $f^{-1}(Fatou(f))$ เป็นเซตเปิด และเนื่องจาก $Fatou(f)$ เป็นเซตเปิดที่ใหญ่ที่สุดเฉพาะกลุ่มที่ทำให้ $\{f^n\}$ equicontinuous จะได้ว่า $f^{-1}(Fatou(f)) \subseteq Fatou(f)$ ดังนั้น $f^{-1}(Fatou(f)) = Fatou(f)$

ทฤษฎีบท 3.13 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ฟังก์ชันเปิด และเป็นฟังก์ชันทั่วถึงบน $\mathbb{C}_\infty$ จะได้ว่า $J(f) = f^{-1}(J(f)) = f(J(f))$

พิสูจน์ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง จะได้ว่า $J(f) = f(f^{-1}(J(f)))$ และจากทฤษฎีบท 3.12 จะได้ว่า $J(f) = f^{-1}(J(f))$ ดังนั้น $J(f) = f(J(f))$

ตัวอย่าง 3.14 เนื่องจากฟังก์ชันพหุนาม f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และจากทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึงและเป็นฟังก์ชันเปิด ดังนั้น โดย ทฤษฎีบท 3.13 จะได้ว่า $J(f) = f^{-1}(J(f)) = f(J(f))$

ทฤษฎีบท 3.15 เซตภายในของ $J(f)$ เป็นเซตว่าง

พิสูจน์ สมมุติให้เซตภายในของ $J(f)$ ไม่เป็นเซตว่าง ให้เป็นเซต U ดังนั้น $\{f^n\}$ ไม่เป็นวงศ์ปกติบน U ดังนั้นโดย Montel's theorem (ทฤษฎีบท 2.13) จะได้ว่า

$$card(\mathbb{C}_\infty - \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U)) \leq 2$$

นั่นคือ $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U))$ เป็นเซตที่ไม่มีขอบเขตและจากตัวอย่าง 3.14 และข้อสังเกต 3.7 จะได้ว่า $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U) \subseteq J(f) \subseteq \{z \mid |z| \leq r\}$ ดังนั้น $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U)$ เป็นเซตที่มีขอบเขต ดังนั้นเกิดการขัดแย้ง นั่นคือที่สมมุติไว้ไม่จริง ดังนั้นเซตภายในของ $J(f)$ เป็นเซตว่าง

ทฤษฎีบท 3.16 ให้ $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับขั้นอย่างน้อย 2 จะได้ว่า

1. ถ้า $f^n(0) \to \infty$ แล้ว $J(f)$ จะเป็นเซตไม่เชื่อมโยงทุกส่วน (totally disconnected set)
2. ถ้า $f^n(0) \not\to \infty$ แล้ว $J(f)$ จะเป็นเซตเชื่อมโยง (connected set)

พิสูจน์ การพิสูจน์ดูได้จาก [2]

ทฤษฎีบท 3.17 ให้ $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับขั้นอย่างน้อย 2 และ $K_f = \{z \in \mathbb{C}_\infty \mid f^n(z) \not\to \infty\}$ จะได้ว่า $J(f) = \partial K_f$

พิสูจน์ จากบทแทรก 3.7 จะได้ว่ามี $r > 0$ ซึ่ง $J(f) \subseteq \{z \mid |z| \leq r\}$

ถ้า $z \in J(f)$ ดังนั้นจากตัวอย่าง 3.14 จะได้ว่า $f^n(z) \in J(f)$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้น

$f^n(z) \not\to \infty$ เพราะถ้า $f^n(z) \to \infty$ จากบทแทรก 3.5 จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทุก $n \geq N$ จะได้ $|f^n(z)| > r$ ซึ่งขัดแย้งกับ $J(f) \subseteq \{z \mid |z| \leq r\}$ ดังนั้น $z \in K_f \subseteq \overline{K_f}$ นั่นคือ $J(f) \subseteq \overline{K_f}$

ให้ $z \in J(f)$ จะแสดงว่า $z \in \overline{K_f^c}$ โดยให้ U เป็นย่านใกล้เคียงของ z จะได้ $\{f^n\}$ ไม่ equicontinuous บน U ดังนั้น $\{f^n\}$ ไม่เป็นวงศ์ปกติบน U ดังนั้นโดยทฤษฎีของ Montel (2.13) จะได้ว่า

$$card(\mathbb{C}_\infty - \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U)) \leq 2$$

แต่จากบทแทรก 3.6 จะได้ว่า มี $r > 0$ ซึ่ง $f^n(z) \to \infty$ บน $\mathcal{V}_r$ และเห็นได้ชัดว่ามี $R > r$ ซึ่ง $\mathcal{V}_R - \{\infty\} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U)$ ดังนั้นจะมี $w \in \mathbb{C}_\infty$ ซึ่ง $|w| > R$ และ $w \in f^k(U)$ สำหรับบางจำนวนนับ k และ เนื่องจาก $|w| > R > r$ ดังนั้น $f^n(w) \to \infty$ และ เนื่องจาก $w \in f^k(U)$ จะมี $v \in U$ ซึ่ง $f^k(v) = w$ ดังนั้น $f^n(v) \to \infty$ ดังนั้น $v \in K_f^c$ นั่นคือ สำหรับทุกจุดใน $z \in J(f)$ และทุกย่านใกล้เคียง U ของ z จะมี $v \in U \cap K_f^c$ นั่นคือ $z \in \overline{K_f^c}$ นั่นคือ $J(f) \subseteq \overline{K_f^c}$ ดังนั้น $J(f) \subseteq \overline{K_f} \cap \overline{K_f^c} = \partial K_f$

สำหรับการพิสูจน์บทกลับดูได้จาก [2]

บทที่ 4
เซตจูเลียของฟังก์ชันต่อเนื่องบางชนิด

4.1 เซตจูเลียของ $\overline{f}$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

4.1.1 เซตจูเลียของ $\overline{f}$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับขั้นอย่างน้อย 2

ทฤษฎีบท 4.1.1.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับขั้นอย่างน้อย 2 จะได้ว่ามี $r > 0$ ซึ่งถ้า $|z| > r$ แล้ว $|\overline{f}(z)| > 2|z|$ และ $\overline{f}(\mathcal{V}_r) \subseteq \mathcal{V}_r$
พิสูจน์ ให้ r คือ r ในทฤษฎีบท 3.3 ดังนั้นจากในการพิสูจน์ของทฤษฎีบท 3.3 จะได้ว่า

$$\left|\frac{\overline{a_0}}{\overline{z^n}} + \frac{\overline{a_1}}{\overline{z^{n-1}}} + \cdots + \frac{\overline{a_{n-1}}}{\overline{z}}\right| < \frac{|a_n|}{2}$$

ดังนั้น $|\overline{a_0} + \overline{a_1}\ \overline{z} + \cdots + \overline{a_{n-1}}\ \overline{z}^{n-1}| < \dfrac{|a_n||z|^n}{2}$
ดังนั้นในทำนองเดียวกับการพิสูจน์ส่วนสุดท้ายในทฤษฎีบท 3.3 ทำให้ได้ว่า ถ้า $|z| > r$ แล้ว $|\overline{f}(z)| > 2|z|$

ทฤษฎีบท 4.1.1.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับขั้นอย่างน้อย 2 จะได้ว่ามี $r > 0$ ซึ่งสำหรับ $\epsilon > 0$ ใด ๆ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทุก $n \geq N$ และทุก $z \in \mathcal{V}_r$ จะได้ $|\overline{f}^n(z)| > \epsilon$
พิสูจน์ เนื่องจากบทแทรก 3.4 เป็นจริงสำหรับฟังก์ชัน g ใด ๆ ซึ่งมีสมบัติว่าถ้า $|z| > r$ แล้ว $|g(z)| > 2|z|$ เมื่อ r คือ r ในทฤษฎีบท 3.3 ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.1.1.1 จะได้ว่าบทแทรก 3.4 เป็นจริงสำหรับ $\overline{f}$

ทฤษฎีบท 4.1.1.3 ให้ f เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับขั้นอย่างน้อย 2 และ r คือ r ในทฤษฎีบท 3.3 จะได้ว่า $(\overline{f}^n)$ ลู่เข้าอย่างเอกรูปสู่ ∞ ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $\epsilon > 0$ ใด ๆ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทุก $n \geq N$ และทุก $z \in \mathcal{V}_r$ จะได้ $|\overline{f}^n(z)| > \epsilon$
พิสูจน์ พิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับบทแทรก 3.5

ทฤษฎีบท 4.1.1.4 ให้ f เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับขั้นอย่างน้อย 2 จะได้ว่า มี $r > 0$ ซึ่งทำให้ $(\overline{f}^n)$ ลู่เข้าอย่างเอกรูปสู่ ∞ บน $\mathcal{V}_r$
พิสูจน์ ได้โดยตรงจากทฤษฎีบท 4.1.1.2 และ 4.1.1.3

บทแทรก 4.1.1.5 ให้ $f(z) = z^2 + c$ เมื่อ $c \in \mathbb{C}$ และ $r = max\{|4c|, 4\}$ จะได้ว่า

$(\overline{f}^n)$ ลู่เข้าอย่างเอกรูปสู่ ∞ บน $\mathcal{V}_r$
พิสูจน์ ได้โดยตรงจากทฤษฎีบท 4.1.1.4

ทฤษฎีบท 4.1.1.6 ให้ f เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับขั้นอย่างน้อย 2 จะได้ว่า $\{z \in \mathbb{C}_\infty \mid \overline{f}^n(z) \to \infty\}$ เป็นเซตเปิด
พิสูจน์ พิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 3.9 โดยใช้ความจริงที่ว่า $\overline{f}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ทฤษฎีบท 4.1.1.7 ให้ f เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับขั้นอย่างน้อย 2 จะได้ว่า

1. $\overline{f}$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง
2. $\overline{f}$ เป็นฟังก์ชันเปิด

พิสูจน์

ให้ c เป็นฟังก์ชันบน $\mathbb{C}_\infty$ โดย $c(z) = \overline{z}$ ทุก $z \in \mathbb{C}_\infty$ และเนื่องจาก สำหรับ $z, w \in \mathbb{C}_\infty$

$$\begin{aligned}\sigma(c(z), c(w)) &= \sigma(\overline{z}, \overline{w}) \\ &= \frac{2|\overline{z} - \overline{w}|}{\sqrt{1+|\overline{z}|^2}\sqrt{1+|\overline{w}|^2}} \\ &= \frac{2|z - w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}} \\ &= \sigma(z, w)\end{aligned}$$

นั่นคือ c เป็นสมมิติ (isometry) ดังนั้น c^{-1} เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องดังนั้น c เป็นฟังก์ชันเปิด
1.เนื่องจาก f และ c เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ดังนั้น $\overline{f} = c \circ f$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง
2.เนื่องจาก f และ c เป็นฟังก์ชันเปิด และเห็นได้ชัดว่าการประกอบกันระหว่างฟังก์ชันเปิดสอง ฟังก์ชันจะเป็นฟังก์ชันเปิด ดังนั้น $\overline{f} = c \circ f$ เป็นฟังก์ชันเปิด

ทฤษฎีบท 4.1.1.8 ให้ f เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับขั้นอย่างน้อย 2 จะได้ว่า $J(\overline{f}) = \overline{f}(J(\overline{f})) = \overline{f}^{-1}J(\overline{f})$
พิสูจน์ ได้โดยตรงจากทฤษฎีบท 4.1.1.7 และ 3.13

ทฤษฎีบท 4.1.1.9 ให้ f เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับขั้นอย่างน้อย 2 และให้ $K_{\overline{f}} = \{z \in \mathbb{C}_\infty \mid \overline{f}^n(z) \not\to \infty\}$ จะได้ว่า $J(\overline{f}) \subseteq K_{\overline{f}}$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 4.1.1.4 จะได้ว่า มี $r > 0$ ซึ่งทำให้ $(\overline{f}^n)$ ลู่เข้าอย่างเอกรูปสู่ ∞ บน $\mathcal{V}_r$ ดังนั้นโดยเหตุผลเดียวกันกับข้อสังเกต 3.7 จะได้ว่า $\mathcal{V}_r \subseteq Fatou(\overline{f})$ ดังนั้น $J(\overline{f}) \subseteq \{z \mid |z| \leq r\}$

ถ้า $z \in J(\overline{f})$ ดังนั้นจากทฤษฎีบท 4.1.1.8 จะได้ว่า $\overline{f}^k(z) \in J(\overline{f})$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ ดังนั้น

$\overline{f}^k(z) \not\to \infty$ เพราะถ้า $\overline{f}^k(z) \to \infty$ โดยทฤษฎีบท 4.1.1.3 จะได้ว่ามี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่ง ทุก $n \geq N$ จะได้ $|\overline{f}^n(z)| > r$ ซึ่งขัดแย้งกับ $J(\overline{f}) \subseteq \{z \mid |z| \leq r\}$ นั่นคือ $z \in K_{\overline{f}}$ ดังนั้น $J(\overline{f}) \subseteq K_{\overline{f}}$

4.1.2 เซตจูเลียของฟังก์ชันต่อเนื่อง $\overline{f}$ ซึ่ง f มีสมบัติว่า $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ ทุก $z \in \mathbb{C}_\infty$

ทฤษฎีบทประกอบ 4.1.2.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\mathbb{C}_\infty$ ซึ่งมีสมบัติว่า $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ ทุก $z \in \mathbb{C}_\infty$ จะได้ว่า

$$\overline{f}^n(z) = \begin{cases} f^n(z) & \text{เมื่อ} \quad n \quad \text{เป็นจำนวนคู่} \\ \overline{f^n(z)} & \text{เมื่อ} \quad n \quad \text{เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

พิสูจน์ ให้ $z \in \mathbb{C}_\infty$ จะพิสูจน์โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ดังนี้

ให้ $p(n)$ แทนข้อความ

$$\overline{f}^n(z) = \begin{cases} f^n(z) & \text{เมื่อ} \quad n \quad \text{เป็นจำนวนคู่} \\ \overline{f^n(z)} & \text{เมื่อ} \quad n \quad \text{เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

จากนิยามของ f จะได้ว่า $\overline{f}(z) = \overline{f(z)}$ ดังนั้น $p(1)$ เป็นจริง

สมมุติให้ $p(n)$ จะแสดงว่า $p(n+1)$ เป็นจริงจะพิจารณา ดังนี้

กรณี 1 $n+1$ เป็นจำนวนคู่

ดังนั้น n เป็นจำนวนคี่ ดังนั้นเนื่องจาก $p(n)$ เป็นจริงจะได้ว่า $\overline{f}^n(z) = \overline{f^n(z)}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \overline{f}^{n+1}(z) &= \overline{f}(\overline{f}^n(z)) \\ &= \overline{f}(\overline{f^n(z)}) \\ &= \overline{f(\overline{f^n(z)})} \\ &= f(f^n(z)) \qquad (\text{เนื่องจาก} \quad \overline{f(\overline{z})} = \overline{\overline{f(z)}} = f(z) \ \text{ ทุก } \ z \in \mathbb{C}_\infty) \\ &= f^{n+1}(z) \end{aligned}$$

กรณี 2 $n+1$ เป็นจำนวนคี่

ดังนั้น n เป็นจำนวนคู่ ดังนั้นเนื่องจาก $p(n)$ เป็นจริงจะได้ว่า $\overline{f}^n(z) = f^n(z)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \overline{f}^{n+1}(z) &= \overline{f}(\overline{f}^n(z)) \\ &= \overline{f}(f^n(z)) \\ &= \overline{f(f^n(z))} \\ &= \overline{f^{n+1}(z)} \end{aligned}$$

จากทั้ง 2 กรณีจะได้ว่า $p(n+1)$ เป็นจริง ดังนั้นทุก $z \in \mathbb{C}_\infty$ จะได้ว่า

$$\overline{f}^n(z) = \begin{cases} f^n(z) & \text{เมื่อ} \quad n \quad \text{เป็นจำนวนคู่} \\ \overline{f^n(z)} & \text{เมื่อ} \quad n \quad \text{เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 4.1.2.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\mathbb{C}_\infty$ ซึ่งมีสมบัติว่า $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ ทุก $z \in \mathbb{C}_\infty$ จะได้ว่า $J(f) = J(\overline{f})$

พิสูจน์ เป็นการเพียงพอที่จะแสดงว่า $Fatou(f) = Fatou(\overline{f})$ จากทฤษฎีบทประกอบ 4.1.2.1 จะได้ว่า สำหรับ $z, w \in \mathbb{C}_\infty$ ถ้า n เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า

$$\sigma(\overline{f}^n(z), \overline{f}^n(w)) = \sigma(f^n(z), f^n(w))$$

และถ้า n เป็นจำนวนคี่และจากนิยามของ σ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sigma(\overline{f}^n(z), \overline{f}^n(w)) &= \sigma(\overline{f^n(z)}, \overline{f^n(w)}) \\ &= \sigma(f^n(z), f^n(w))\end{aligned}$$

ดังนั้นทุก $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า $\sigma(\overline{f}^n(z), \overline{f}^n(w)) = \sigma(f^n(z), f^n(w))$ ทุก $z, w \in \mathbb{C}_\infty$ ดังนั้นจะได้ว่า $\{f^n\}$ equicontinuous ที่จุด $z \in \mathbb{C}_\infty$ ก็ต่อเมื่อ $\{\overline{f}^n\}$ equicontinuous ที่จุด $z \in \mathbb{C}_\infty$ ดังนั้น $Fatou(f) = Fatou(\overline{f})$ ทำให้ได้ว่า $J(f) = J(\overline{f})$

ตัวอย่างของฟังก์ชัน f ซึ่ง $J(f) = J(\overline{f})$

1. ฟังก์ชันพหุนาม f บน $\mathbb{C}_\infty$ ซึ่งมีสัมประสิทธิ์ทั้งหมดเป็นจำนวนจริง ดังนั้น $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ ดังนั้นโดย ทฤษฎีบท 4.1.2.2 จะได้ว่า $J(\overline{f}) = J(f)$
2. ฟังก์ชัน $f(z) = e^z$ เนื่องจาก $\overline{f(z)} = \overline{e^z} = e^{\overline{z}} = f(\overline{z})$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.1.2.2 จะได้ว่า $J(\overline{f}) = J(f)$
3. ฟังก์ชัน $f(z) = \cos(z)$ จะเห็นว่า $\overline{f(z)} = \overline{\cos(z)} = \cos(\overline{z}) = f(\overline{z})$ ดังนั้น จากทฤษฎีบท 4.1.2.2 จะได้ว่า $J(f) = J(\overline{f})$

ตัวอย่างของฟังก์ชัน f ซึ่ง $J(f) \neq J(\overline{f})$

ให้ $f(z) = z^2 - i$ ดังนั้น $\overline{f}(z) = \overline{f(z)} = \overline{z}^2 + i$ จะพิสูจน์ว่า $J(f) \neq J(\overline{f})$
เนื่องจาก

$$f^n(0) = \begin{cases} -i & \text{เมื่อ} \quad n = 1 \\ -1 - i & \text{เมื่อ} \quad n \quad \text{เป็นจำนวนคู่ และ} \quad n \geq 2 \\ i & \text{เมื่อ} \quad n \quad \text{เป็นจำนวนคี่ และ} \quad n \geq 3 \end{cases}$$

จะเห็นว่า $f^2(-1-i) = f(f(-1-i)) = f(i) = -1-i$ ดังนั้น $-1-i$ เป็น periodic point ของ f ซึ่งมีคาบ 2 และจะเห็นว่า $f^2(z) = z^4 - 2iz^2 - 1 - i$ ดังนั้น $(f^2)'(z) = 4z^3 - 4iz$ และ $|(f^2)'(-1-i)| = |36i - 4| > 1$ นั่นคือ $-1-i$ เป็น repelling periodic point ของ f ดังนั้นจากทฤษฎีบท 3.2 จะได้ว่า $-1-i \in J(f)$

เนื่องจาก $f^2(0) = -1-i$ ดังนั้น $0 \in f^{-2}(\{-1-i\})$ ดังนั้นจากตัวอย่าง 3.14 จะได้ว่า $0 \in J(f)$

และสังเกตว่า $\overline{f}(0) = i$ และ $\overline{f}^2(0) = -1-i$ และ $\overline{f}^3(0) = 3i$ และ $\overline{f}^4(0) = -9-i$ ดังนั้น $|\overline{f}^4(0)| > 4$ และจะเห็นว่า $|\overline{f}^n(0)| > |\overline{f}^4(0)|$ ทุก $n \geq 5$ และ 4 ก็คือค่า r ในบทแทรก 4.1.1.5 จะได้ว่า $\overline{f}^n(0) \to \infty$ นั่นคือ $0 \in K^c_{\overline{f}}$ และโดยทฤษฎีบท 4.1.1.9 จะได้ว่า $0 \notin J(\overline{f})$ ดังนั้น $J(f) \neq J(\overline{f})$

4.2 เซตจูเลียของฟังก์ชัน $f(|z|)$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับขั้นอย่างน้อย 2

เพื่อความสะดวกจะกำหนดให้ $h(z) = f(|z|)$ ทุก $z \in \mathbb{C}_\infty$

4.2.1 เซตจูเลียของฟังก์ชัน $h(z) = f(|z|)$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับขั้นอย่างน้อย 2 ซึ่งสัมประสิทธิ์ทั้งหมดของ f เป็นจำนวนจริงบวกซึ่งมากกว่าหรือเท่ากับ 1

ซึ่งต่อไปจะเห็นว่าเซตจูเลียของ h จะเป็นเซตว่างซึ่งต้องอาศัยทฤษฎีบทประกอบดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 4.2.1.1 ให้ $f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ โดย $n \geq 2$ และ $a_n \neq 0$ และ a_i เป็นจำนวนจริงบวกซึ่งมากกว่าหรือเท่ากับ 1 ทุก $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ จะได้ว่า

1. ทุก $m \in \mathbb{N}$ และ $z \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า $|h^{m+1}(z)| > |h^m(z)|$

2. ทุก $m \in \mathbb{N}$ และ $z \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า $|h^m(z)| \geq m$

พิสูจน์

1. จะเห็นได้ว่าสำหรับ $z \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า $|h(z)| = |f(|z|)| = f(|z|) \geq a_0 \geq 1$ ดังนั้นถ้า $|z| < 1$ จะได้ว่า $|h(z)| \geq 1 > |z|$ และถ้า $|z| \geq 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
|h(z)| &= f(|z|) \\
&\geq \overbrace{|z| + |z| + \cdots + |z|}^{n\ terms} + a_0 \quad (\text{เนื่องจาก } \ |z| \geq 1) \\
&= n|z| + a_0 \\
&\geq |z| + 1 \\
&> |z|
\end{aligned}$$

ดังนั้น $|h(z)| > |z|$ ทุก $z \in \mathbb{C}$ และต่อไปจะแสดงว่า $|h^{n+1}(z)| > |h^n(z)|$ ทุก $m \in \mathbb{N}$ และทุก $z \in \mathbb{C}$ โดยการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ให้ $p(m)$ แทนข้อความ ทุก $z \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า $|h^{m+1}(z)| > |h^m(z)|$
เนื่องจากทุก $z \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า $|h(z)| > |z|$ ดังนั้น $|h^2(z)| = |h(h(z))| > |h(z)|$ ดังนั้น $p(1)$ เป็นจริง

ต่อไปสมมุติให้ $p(m)$ เป็นจริง นั่นคือทุก $z \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า $|h^{m+1}(z)| > |h^m(z)|$ ดังนั้นสำหรับ $z \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า

$$|h^{m+2}(z)| = |h^{m+1}(h(z))| > |h^m(h(z))| = |h^{m+1}(z)|$$

ดังนั้น $p(m+1)$ เป็นจริง

2. จะเห็นว่าทุก $m \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า $m^2 \geq m$ ดังนั้น $m^2 - m \geq 0$ ดังนั้นจะได้ว่า $m^2 + m + 2 \geq 2m + 2$ ดังนั้นทุก $m \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า $\dfrac{m^2+m+2}{2} \geq m+1$

ต่อไปจะแสดงว่า ทุก $m \in \mathbb{N}$ และ $z \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า $|h^m(z)| \geq m$ โดยใช้การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ให้ $p(m)$ แทนข้อความ ทุก $z \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า $|h^m(z)| \geq m$
จากตอนต้นของการพิสูจน์ข้อ 1 จะเห็นได้ว่า ทุก $z \in \mathbb{C}_\infty$ จะได้ว่า $|h(z)| \geq 1$ ดังนั้น $p(1)$ เป็นจริง

สมมุติให้ $p(m)$ เป็นจริง นั่นคือ ทุก $z \in \mathbb{C}$ จะได้ $|h^m(z)| \geq m$ ดังนั้น สำหรับ $z \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
|h^{m+1}(z)| &= h^{m+1}(z) \\
&= h(h^m(z)) \\
&= f(|h^m(z)|) \\
&= a_n|h^m(z)|^n + a_{n-1}|h^m(z)|^{n-1} + \cdots + a_1|h^m(z)| + a_0 \\
&\geq |h^m(z)|^n + |h^m(z)|^{n-1} + \cdots + |h^m(z)| + |a_0| \\
&\geq m^n + m^{n-1} + m^{(n-2)} + \cdots + m^{(n-(n-1))} + 1 \\
&\geq m + (m-1) + (m-2) + \cdots + (m-(m-1)) + 1 \\
&= m^2 - (1 + 2 + \cdots + (m-1)) + 1 \\
&= m^2 + 1 - \frac{(m-1)m}{2} \\
&= \frac{m^2+m+2}{2} \\
&\geq m+1
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $p(m+1)$ เป็นจริง ดังนั้น ทุก $m \in \mathbb{N}$ และทุก $z \in \mathbb{C}_\infty$ จะได้ว่า $|h^m(z)| \geq m$

ทฤษฎีบทประกอบ 4.2.1.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับขั้นอย่างน้อย 2 และสัมประสิทธิ์ของ f เป็นจำนวนจริงบวกที่มากกว่าหรือเท่ากับ 1 จะได้ว่า $J(h) = \varnothing$

พิสูจน์ เป็นการเพียงพอที่จะแสดงว่า $Fatou(h) = \mathbb{C}_\infty$ โดยการแสดงว่า (h^n) ลู่เข้าอย่างเอกรูปสู่ ∞ บน $\mathbb{C}_\infty$
ให้ $\epsilon > 0$ โดย Archemedean Property จะได้ว่ามี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $N > \epsilon$

จากทฤษฎีบทประกอบ 4.2.1.1 (1) จะได้ว่าทุก $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n \geq N+1$ และทุก $z \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า

$$|h^n(z)| > |h^N(z)|$$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 4.2.1.1 (2) จะได้ว่าทุก $z \in \mathbb{C}$

$$|h^N(z)| \geq N$$

ดังนั้น ทุก $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n \geq N+1$ และทุก $z \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า

$$|h^n(z)| > |h^N(z)| \geq N > \epsilon$$

และจะเห็นได้ชัดว่าทุก $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n \geq N+1$ จะได้ว่า

$$|h^n(\infty)| = |\infty| = \infty > \epsilon$$

ดังนั้นจะได้ว่า ทุก $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n \geq N+1$ และทุก $z \in \mathbb{C}_\infty$ จะได้ว่า

$$|h^n(z)| > \epsilon$$

เนื่องจากในทฤษฎีบท 3.3 เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\left|\frac{a_0}{|z|^n} + \frac{a_1}{|z|^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{|z|}\right| < \frac{|a_n|}{2}$$

ดังนั้น ในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ว่า ทฤษฎีบท 3.3 บทแทรก 3.4 และบทแทรก 3.5 เป็นจริงสำหรับ $\overline{f}$ ทำให้เราได้ว่า ทฤษฎีบท 3.3 บทแทรก 3.4 และบทแทรก 3.5 เป็นจริงสำหรับ $h(z) = f(|z|)$ ด้วย ดังนั้น (h^n) ลู่เข้าอย่างเอกรูปสู่ ∞ บน $\mathbb{C}_\infty$ ดังนั้น $\mathbb{C}_\infty \subseteq Fatou(h)$ ดังนั้น $Fatou(h) = \mathbb{C}_\infty$ นั่นคือ $J(h) = \varnothing$

4.2.2 เซตจูเลียของฟังก์ชัน $h(z) = f(|z|)$ เมื่อ $f(z) = z^2 + c$ เมื่อ $c = a + bi$ และ $a \geq 0$

ทฤษฎีบทประกอบ 4.2.2.1 ทุก $z \in \mathbb{C}_\infty$ จะได้ว่า $|h^n(z)| \geq |h^n(0)|$ ทุก $n \in \mathbb{N}$

พิสูจน์ จะเห็นว่าถ้า $z = 0$ เห็นได้ชัดว่า $|h^n(z)| \geq |h^n(0)|$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ และถ้า $z = \infty$ จะได้ว่า $|h^n(\infty)| = |\infty| \geq |h^n(0)|$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้นเหลือเพียงกรณี $|z| > 0$

จะแสดงว่าถ้า $|z| > 0$ แล้ว $|h^n(z)| > |h^n(0)|$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ดังนี้

ให้ $z \in \mathbb{C}_\infty$ ซึ่ง $|z| > 0$ และให้ $p(n)$ แทนข้อความ $|h^n(z)| > |h^n(0)|$

จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}
|h^n(z)| &= ||z|^2 + c| \\
&= \sqrt{(|z|^2 + a)^2 + b^2} \\
&> \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{เนื่องจาก } \ a \geq 0 \ \text{ และ } \ |z|^2 > 0) \\
&= |c| \\
&= |h(0)|
\end{aligned}$$

ดังนั้น $p(1)$ เป็นจริง และสมมุติให้ $p(n)$ เป็นจริง นั่นคือ $|h^n(z)| > |h^n(0)|$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
|h^{n+1}(z)| &= |h(h^n(z))| \\
&= |f(|h^n(z)|)| \\
&= ||h^n(z)|^2 + c| \\
&> ||h^n(0)|^2 + c| \quad (\text{เนื่องจาก } \ p(n) \ \text{ เป็นจริง และ } \ a \geq 0) \\
&= |h(h^n(0))| \\
&= |h^{n+1}(0)|
\end{aligned}$$

ดังนั้น $p(n+1)$ เป็นจริง นั่นคือถ้า $|z| > 0$ จะได้ว่า $|h^n(z)| > |h^n(0)|$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้น ทุก $z \in \mathbb{C}_\infty$ และทุก $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า $|h^n(z)| \geq |h^n(0)|$

ทฤษฎีบทประกอบ 4.2.2.2 สำหรับทุก $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ และทุก $z \in \mathbb{C}_\infty$ ซึ่ง $|z| \geq 1$จะได้ $|h^{n+1}(z)| \geq |h^n(z)|$

พิสูจน์ จะแสดงโดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ดังนี้

ให้ $p(n)$ แทนข้อความทุก $z \in \mathbb{C}_\infty$ ซึ่ง $|z| \geq 1$ จะได้ว่า $|h^{n+1}(z)| \geq |h^n(z)|$ และให้ $z \in \mathbb{C}_\infty$ ซึ่ง $|z| \geq 1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
|h(z)| &= ||z|^2 + c| \\
&= \sqrt{(|z|^2 + a)^2 + b^2} \\
&\geq \sqrt{(|z|^2 + a)^2} \\
&\geq \sqrt{(|z|^2)^2} \quad (\text{เนื่องจาก } \ a \geq 0) \\
&= |z|^2 \\
&\geq |z| \quad (\text{เนื่องจาก } \ |z| \geq 1)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $p(0)$ เป็นจริง

สมมุติให้ $p(n)$ เป็นจริง นั่นคือทุก $z \in \mathbb{C}_\infty$ ซึ่ง $|z| \geq 1$ จะได้ว่า $|h^{n+1}(z)| \geq |h^n(z)|$ ให้ $z \in \mathbb{C}_\infty$ ซึ่ง $|z| \geq 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
|h^{n+2}(z)| &= |h(h^{n+1}(z))| \\
&= ||h^{n+1}(z)|^2 + c| \\
&\geq ||h^n(z)|^2 + c| \quad (\text{เนื่องจาก } \ p(n) \ \text{ เป็นจริง และ } \ a \geq 0) \\
&= |h(h^n(z))| \\
&= |h^{n+1}(z)|
\end{aligned}$$

ดังนั้น $p(n+1)$ เป็นจริง ดังนั้น ทุก $z \in \mathbb{C}_\infty$ ซึ่ง $|z| \geq 1$ และทุก $n \in \mathbb{N}$ จะได้ $|h^{n+1}(z)| \geq |h^n(z)|$

ทฤษฎีบทประกอบ 4.2.2.3 ถ้า $h^n(0) \to \infty$ แล้ว $J(h) = \varnothing$
พิสูจน์ ให้ $h^n(0) \to \infty$ เป็นการเพียงพอที่จะแสดงว่า (h^n) ลู่เข้าอย่างเอกรูปสู่ ∞ บน $\mathbb{C}_\infty$ ซึ่งนั่นก็คือ $\mathbb{C}_\infty \subseteq Fatou(h)$ ดังนั้น $Fatou(h) = \mathbb{C}_\infty$ ดังนั้นทำให้ $J(h) = \varnothing$

ให้ $\epsilon > 0$ โดย Archemedean Property จะได้ว่า มี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $N > \epsilon$ และเนื่องจาก $h^n(0) \to \infty$ จะได้ว่ามี $N_1 \in \mathbb{N}$ ซึ่ง ทุก $n \geq N_1$ จะได้

$$|h^n(0)| > N > \epsilon$$

จากทฤษฎีบทประกอบ 4.2.2.1 จะได้ว่า ทุก $z \in \mathbb{C}_\infty$ จะได้

$$|h^{N_1}(z)| \geq |h^{N_1}(0)| > N > \epsilon$$

และเนื่องจาก $|h^{N_1}(z)| > 1$ ทุก $z \in \mathbb{C}_\infty$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทประกอบ 4.4.2.2 จะได้ว่า ทุก $n \geq N_1 + 1$ ทุก $z \in \mathbb{C}_\infty$ จะได้ $|h^n(z)| \geq |h^{N_1}(z)|$ ดังนั้น ทุก $n \geq N_1 + 1$ และทุก $z \in \mathbb{C}_\infty$ จะได้ว่า

$$|h^n(z)| > \epsilon$$

และเนื่องจาก ทฤษฎีบทประกอบ 3.3 บทแทรก 3.4 และบทแทรก 3.5 เป็นจริงสำหรับ h ด้วย ดังนั้น (h^n) ลู่เข้าอย่างเอกรูปสู่ ∞ บน $\mathbb{C}_\infty$

ตัวอย่าง ให้ $h(z) = |z|^2 - i$ จะเห็นได้ว่า $h^n(0) \to \infty$ ดังนั้นจากทฤษฎีบท 4.2.2.3 จะได้ว่า $J(h) = \varnothing$

ตัวอย่าง ถ้า $c \in \mathbb{C}$ ซึ่งมีสมบัติว่ามี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้ $|h^N(0)| > 4|c|$ จะได้ว่า $J(h) = \varnothing$
พิสูจน์ เนื่องจากทฤษฎีบทประกอบ 3.3 เป็นจริงสำหรับ h นั่นคือ ถ้า $|z| > r$ แล้ว $|h(z)| > 2|z|$ นั่นคือ ถ้า $|z| > r$ แล้ว $h^n(z) \to \infty$ ซึ่ง r ในที่นี้ก็คือค่า r ในทฤษฎีบทที่ 3.3 ซึ่งถ้า $f(z) = z^2 + c$ จะได้ว่า r ก็คือ $4|c|$ นั่นเอง

ดังนั้นถ้า มี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $|h^N(0)| > 4|c|$ ดังนั้น $h^n(h^N(0)) \to \infty$ ดังนั้น $h^n(0) \to \infty$ ดังนั้นจากทฤษฎีบท 4.2.2.3 จะได้ว่า $J(h) = \varnothing$

รายการอ้างอิง

[1] Beardon Alan F. Beardon, *Iteration of Rational Functions*, University of Cambrige, New York, Springer-Verlag, 1991.

[2] Kenneth Falconer, *Fractal Geometry Mathematical Foundations and Applications*, University of Bristal, England, John Willey & Sons Ltd, 1990.

[3] Systems Complex dynamical Systems, Proceeding of Symposia in Applied Mathematics, v.49, American Mathematic Society, 1994.

[4] Conway John B. Conway, *Function of One Complex Variable*, University of Tennessee, New York, Springer-Verlag, 1978.

[5] Ahlfors L. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3rd ed., New York, McGraw-Hill, 1979.

[6] Gamelin Lennart Carleson and Theodore W Gamelin, *Complex Dynamics*, New York, Springer-Verlag, 1993.

[7] Krantz Robert E. Green and Steven G. Krantz, *Function Theory of One Complex Variable*, American Mathematic Society, 2002.

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาวพัชรี วงษาสนธิ์ เกิดเมื่อวันที่ 31 ตุลาคม 2523 ที่จังหวัดกาฬสินธุ์ สำเร็จการศึกษาปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น เมื่อปีการศึกษา 2543 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยปีการศึกษา 2545 โดยได้รับทุนพัฒนาอาจารย์จากมหาวิทยาลัยอุบลราชธานีในการศึกษาต่อ