บทที่ 5
การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ในบทนี้จะนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมาใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบต่างๆ ที่มีผลเฉลยแม่นตรงเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม โดยจะทำการวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงทั้งหมด 4 ปัญหา ซึ่งได้แก่

1. ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2 เท่าตกกระทบพื้นราบ
2. ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°
3. ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.6 เท่าผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย
4. ปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อคบนพื้นราบ

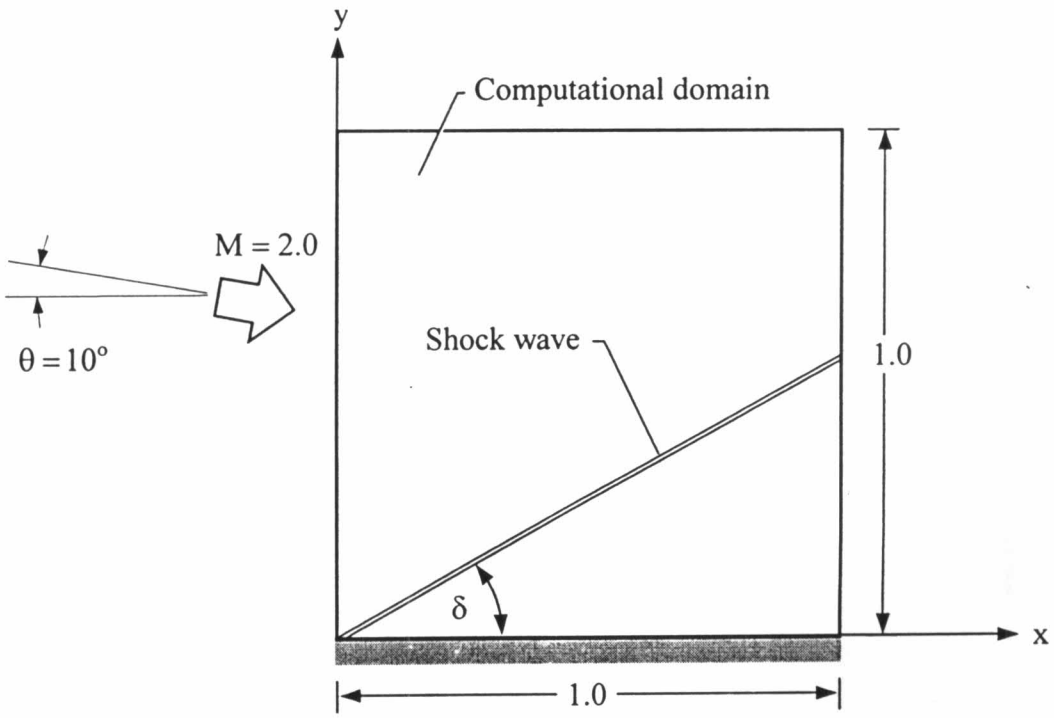
5.1 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2 เท่าตกกระทบพื้นราบ

ปัญหาการไหลความเร็วสูงตกกระทบพื้นราบเป็นปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นตรงจึงนิยมที่จะใช้เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม โดยรูปที่ 5.1 แสดงรูปแบบของปัญหา โดยมีของไหลที่มีค่ามัคนัมเบอร์เท่ากับ 2 ซึ่งไหลทำมุม 10° ตกกระทบพื้นราบก่อให้เกิดคลื่นช็อคเอียง (oblique shock wave) สำหรับเงื่อนไขขอบเขตของการไหลเข้าที่ขอบด้านบนและขอบด้านซ้ายเป็นดังนี้ ค่าความหนาแน่น $\rho = 1.0$, ความเร็ว $u = 1.0$, $v = 0.0$, พลังงานรวม $\varepsilon = 0.946429$ และอัตราส่วนความร้อนจำเพาะ $\gamma = 1.4$

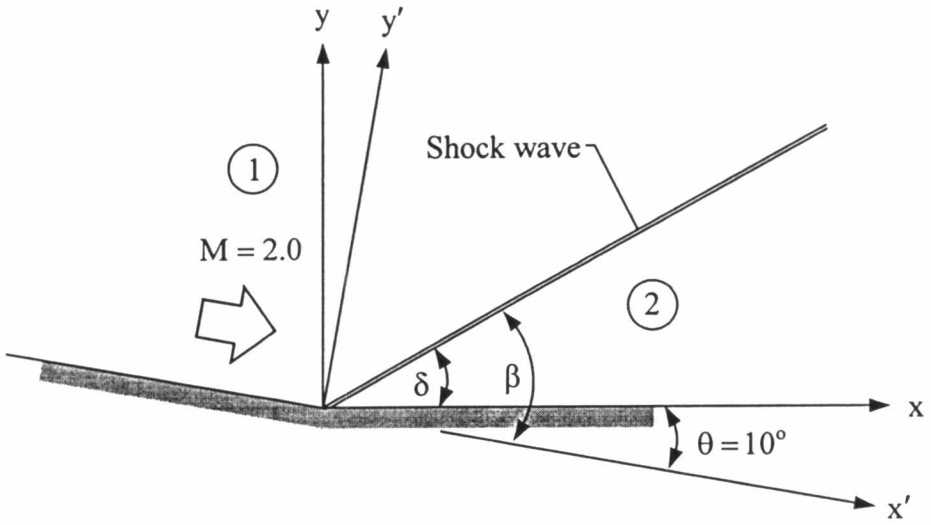
ผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาการไหลความเร็วสูงตกกระทบพื้นราบ เริ่มจากการพิจารณามุมของคลื่นช็อคเอียงดังแสดงในรูปที่ 5.2 โดยมุมของคลื่นช็อคเอียงสามารถคำนวณได้โดยตรงจากสมการของฟังก์ชันอดิศัย (transcendental function) [32] ดังสมการ (5.1)

$$\tan\theta = 2\cot\beta\left[\frac{M^2\sin^2\beta - 1}{M^2(\gamma + \cos 2\beta) + 2}\right] \tag{5.1}$$

โดยที่ M คือ ค่ามัคนัมเบอร์
γ คือ อัตราส่วนความร้อนจำเพาะของของไหล
θ คือ ค่ามุมของของไหลที่กระทบพื้น
β คือ ค่ามุมคลื่นช็อคเอียงกับทิศทางของการไหล



รูปที่ 5.1 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2 เท่าตกกระทบพื้นราบ



รูปที่ 5.2 ลักษณะของการไหลตกกระทบพื้นราบ

ดังนั้นเมื่อแทนค่า $M = 2.0$, $\theta = 10°$ และ $\gamma = 1.4$ ลงในสมการ (5.1) จะได้ผลลัพธ์คือ ค่ามุม $\beta = 39.3°$ ทำให้มุมของคลื่นช็อคที่ทำกับพื้นราบ δ มีค่าเท่ากับ 29.3° สำหรับความสัมพันธ์ของค่าความหนาแน่น ค่าความดันและค่ามัคนัมเบอร์ ซึ่งเกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างกระทันหันผ่านแนวคลื่นช็อคสามารถคำนวณได้จากสมการ (5.2)-(5.4) ตามลำดับโดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

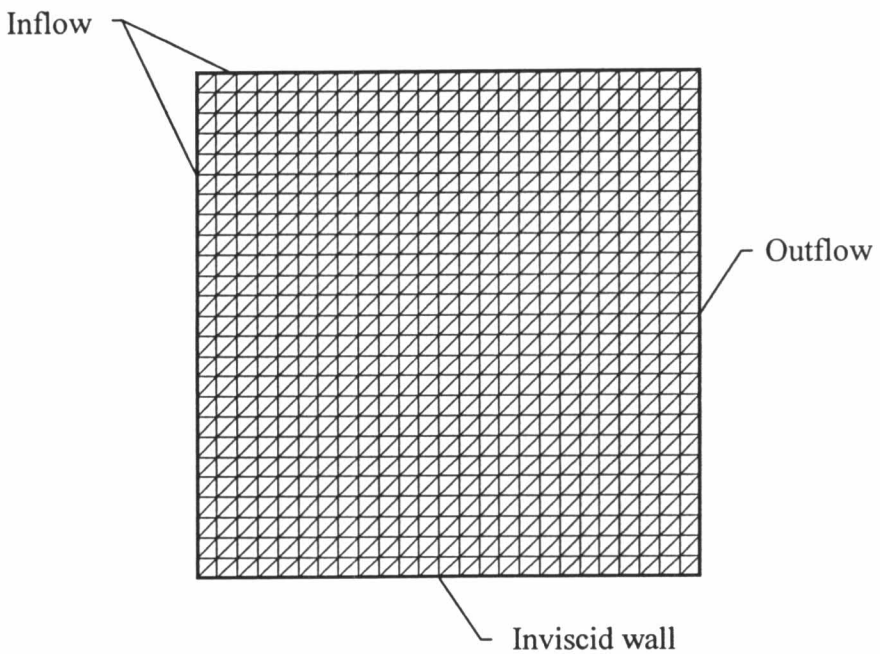
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)M_1^2 \sin^2\beta}{(\gamma-1)M_1^2 \sin^2\beta + 2} \tag{5.2}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_1^2 \sin^2\beta - 1\right) \tag{5.3}$$

$$M_2^2 \sin^2(\beta-\theta) = \frac{(\gamma-1)M_1^2 \sin^2\beta + 2}{2\gamma M_1^2 \sin^2\beta - (\gamma-1)} \tag{5.4}$$

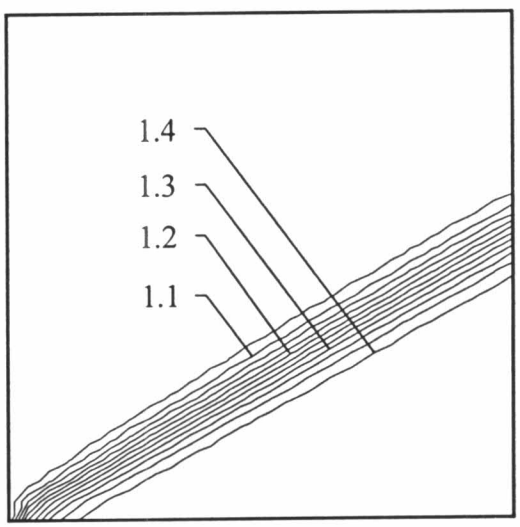
ตัวห้อย 1 และ 2 แสดงถึงค่าก่อนและหลังแนวคลื่นช็อคตามลำดับ เมื่อแทนค่า $\beta = 39.3°$, $\theta = 10°$, $M_1 = 2.0$ และ $\gamma = 1.4$ ลงในสมการ (5.2)-(5.4) จะได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้ อัตราส่วนของความหนาแน่น $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1.4585$ อัตราส่วนของความดัน $\frac{p_2}{p_1} = 1.7066$ และค่ามัคนัมเบอร์หลังแนวคลื่นช็อค $M_2 = 1.64$

สำหรับการคำนวณปัญหาการไหลนี้ด้วยโปรแกรม CBSHIFLOW เริ่มต้นจากการแบ่งโดเมนของปัญหาด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมซึ่งวางตัวอย่างเป็นระเบียบจำนวน 1,250 เอลิเมนต์ และจำนวนจุดต่อเท่ากับ 676 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 5.3

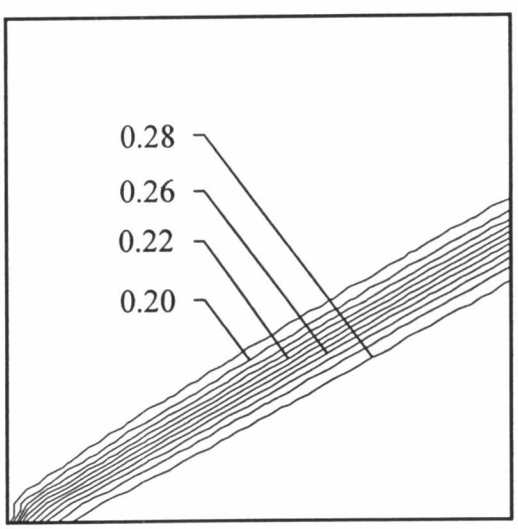


รูปที่ 5.3 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2 เท่าตกกระทบพื้นราบ

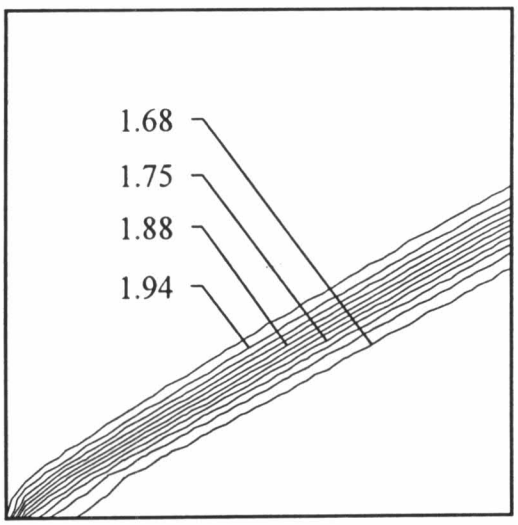
ในรูปที่ 5.4 (ก)-(ค) แสดงเส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ค่าความดัน และค่ามัคนัมเบอร์ ที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ CBSHIFLOW ตามลำดับ เพื่อตรวจความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ จึงได้ทำการเปรียบเทียบค่าความหนาแน่น ค่าความดัน และ ค่ามัคนัมเบอร์ที่คำนวณได้กับผลเฉลยแม่นตรงที่ตำแหน่ง x = 0.5 บนโดเมนดังแสดงในรูปที่ 5.7 ถึง 5.9 ผลลัพธ์ที่คำนวณได้มีความสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรง แต่แนวคลื่นช็อคที่ได้มีขนาดกว้างอยู่ทั้งนี้เนื่องจากขนาดเอลิเมนต์ที่ใช้ในบริเวณแนวของคลื่นช็อคมีขนาดใหญ่ ซึ่งสามารถแก้ไขได้โดยการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ



(ก) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น

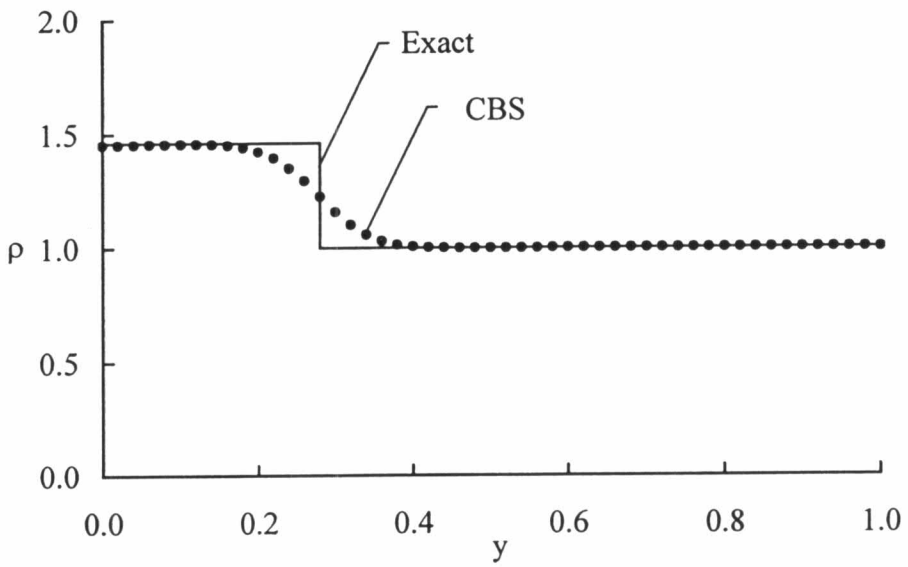


(ข) เส้นชั้นของค่าความดัน

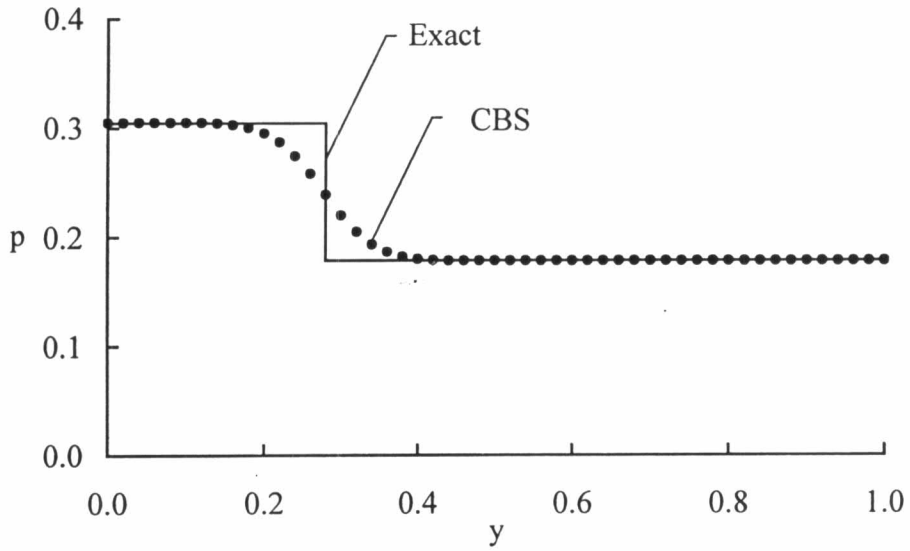


(ค) เส้นชั้นของค่ามัคนัมเบอร์

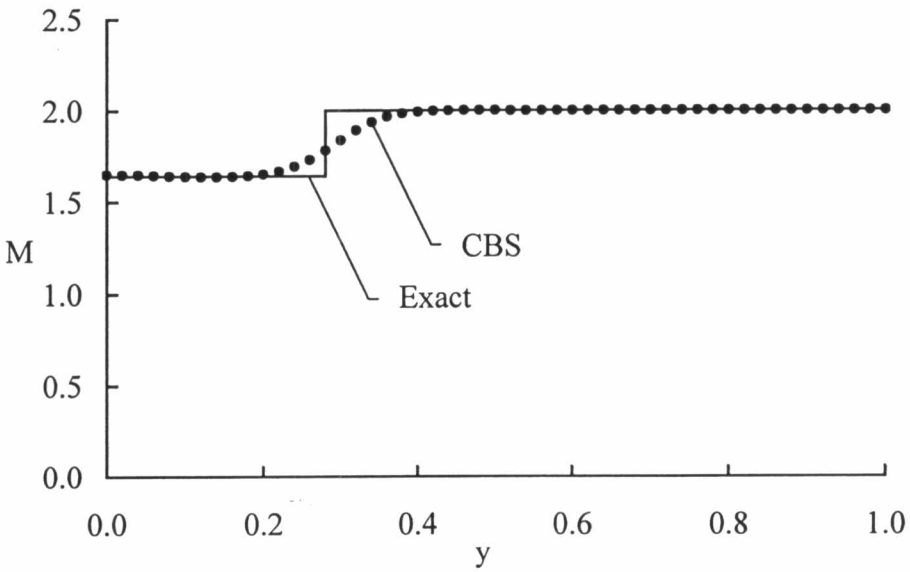
รูปที่ 5.4 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และมัคนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2 เท่าตกกระทบพื้นราบ



รูปที่ 5.5 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่นสำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2 เท่า ตกกระทบพื้นราบ ที่ตำแหน่ง x = 0.5



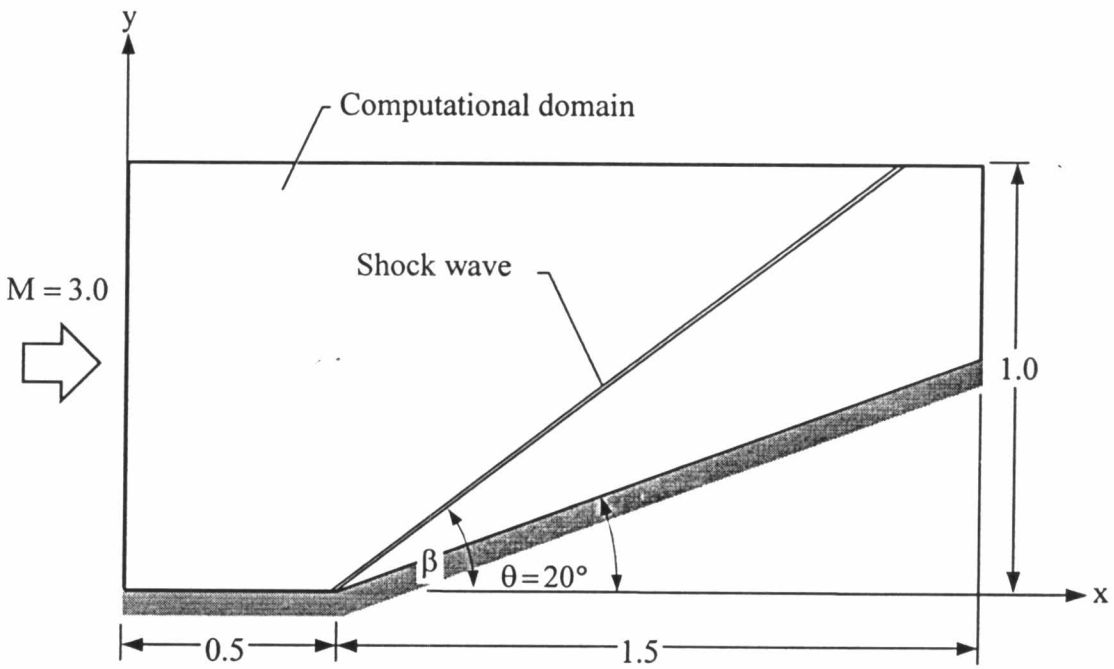
รูปที่ 5.6 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความดันสำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2 เท่า ตกกระทบพื้นราบ ที่ตำแหน่ง x = 0.5



รูปที่ 5.7 การเปรียบเทียบการกระจายของค่ามัคนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2 เท่า ตกกระทบพื้นราบ ที่ตำแหน่ง x = 0.5

5.2 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°

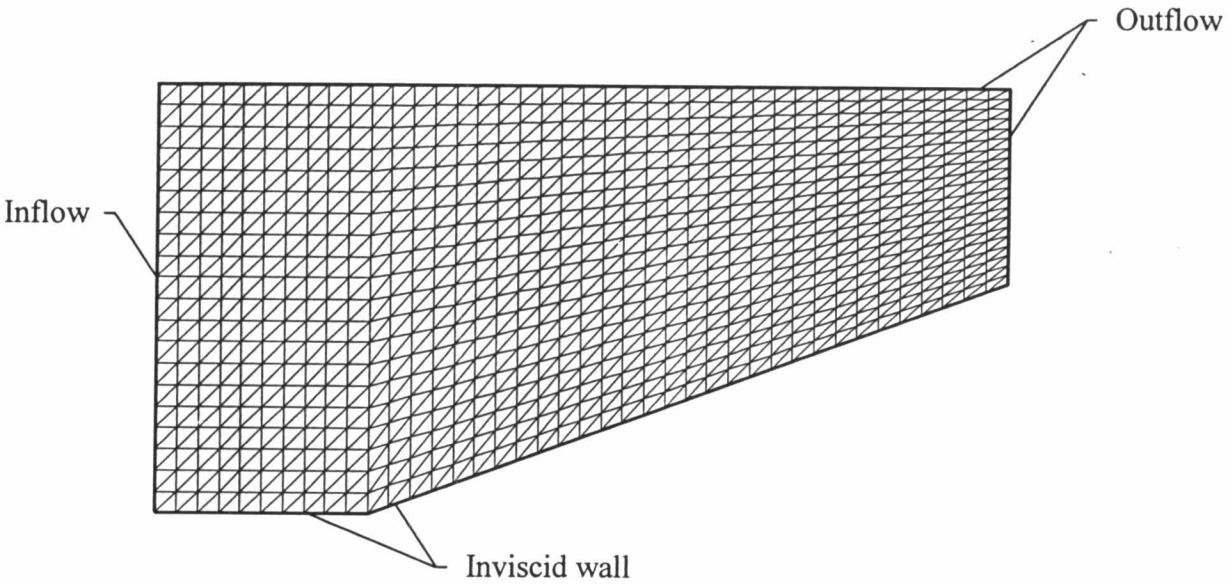
การไหลความเร็วสูงผ่านพื้นเอียงดังรูปที่ 5.8 เป็นปัญหาพื้นฐานอีกปัญหาหนึ่งที่ใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ในปัญหานี้จะมีของไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่า ผ่านเข้าทางขอบด้านซ้ายของปัญหาแล้วผ่านมากระทบพื้นเอียงที่ทำมุม $\theta = 20°$ ก่อให้เกิดคลื่นช็อคเอียงเกิดขึ้น สำหรับเงื่อนไขขอบเขตของการไหลเข้าที่ขอบด้านซ้ายเป็นดังนี้ ค่าความหนาแน่น $\rho = 1.0$, ความเร็ว $u = 1.0$, $v = 0.0$, พลังงานรวม $\varepsilon = 0.698412$ และอัตราส่วนความร้อนจำเพาะ $\gamma = 1.4$



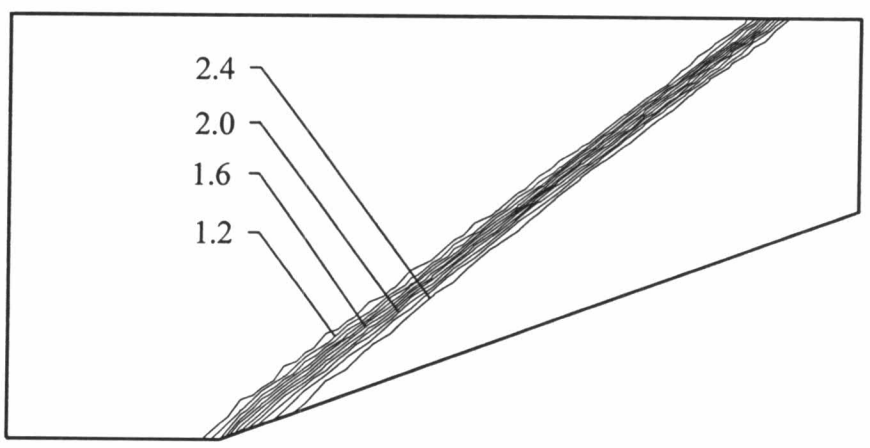
รูปที่ 5.8 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงทำมุม 20°

การคำนวณหาค่าผลเฉลยแม่นตรงของการไหลนี้ทำได้เช่นเดียวกับปัญหาในหัวข้อที่ 5.1 โดยการแทนค่า $M = 3.0$, $\theta = 20°$ และ $\gamma = 1.4$ ลงในสมการ (5.1) จะได้ผลลัพธ์คือค่ามุมของคลื่นช็อคเอียง β ซึ่งมีค่าเท่ากับ $37.76°$ และเมื่อแทนค่า $\beta = 37.76°$, $\theta = 20°$, $M_1 = 3.0$ และ $\gamma = 1.4$ ลงในสมการ (5.2)-(5.4) จะได้ผลลัพธ์คือ อัตราส่วนของความหนาแน่น $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 2.4182$ อัตราส่วนของความดัน $\frac{p_2}{p_1} = 3.7717$ และค่ามัคนัมเบอร์หลังแนวคลื่นช็อค $M_2 = 1.9940$

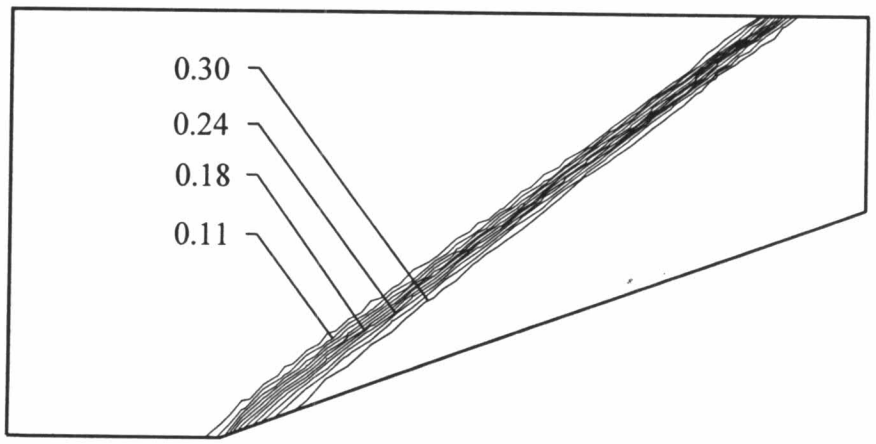
การคำนวณปัญหาการไหลความเร็วสูงนี้ด้วยโปรแกรม CBSHIFLOW เริ่มโดยการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมซึ่งวางตัวอย่างเป็นระเบียบจำนวน 1,600 เอลิเมนต์ และจำนวนจุดต่อ 861 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 5.9 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ค่าความดัน และค่ามัคนัมเบอร์ ที่คำนวณได้ แสดงในรูปที่ 5.10 (ก)-(ค) ตามลำดับ



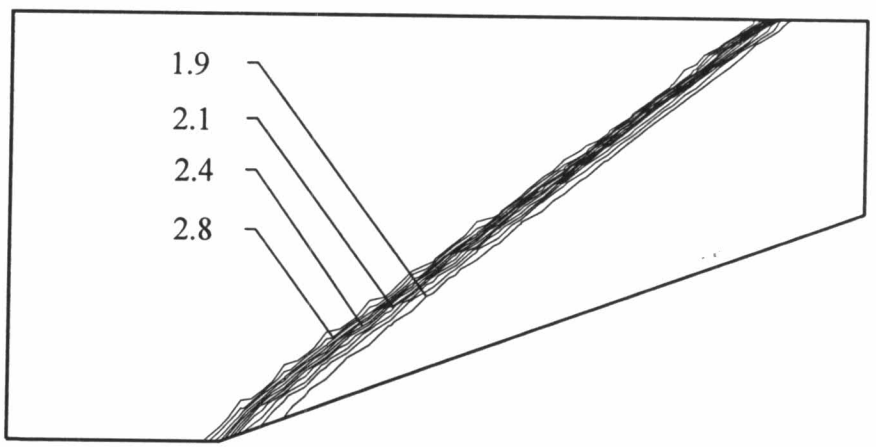
รูปที่ 5.9 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงทำมุม 20°



(ก) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น



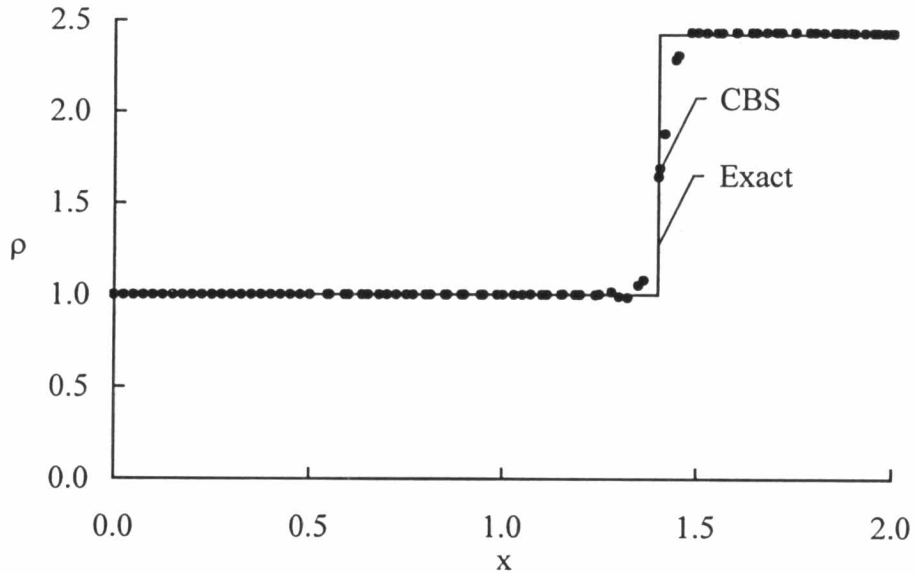
(ข) เส้นชั้นของค่าความดัน



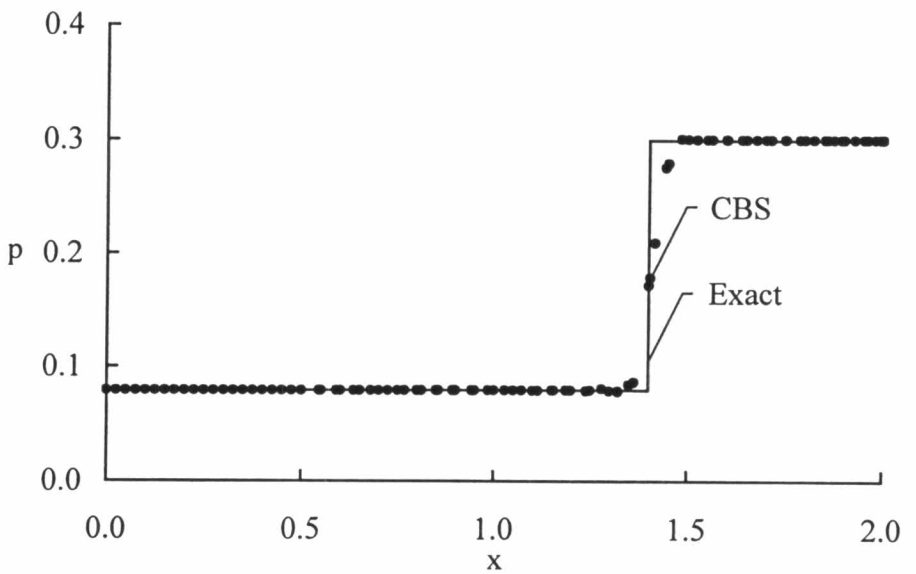
(ค) เส้นชั้นของค่ามัคนัมเบอร์

รูปที่ 5.10 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และมัคนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงทำมุม 20°

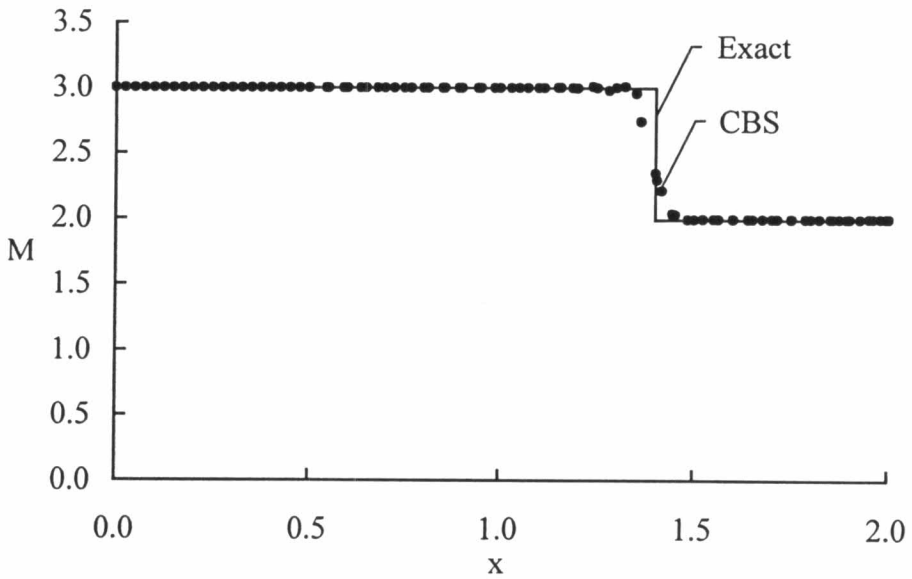
เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม CBSHIFLOW ในรูปที่ 5.11 ถึง 5.13 เป็นการเปรียบเทียบค่าความหนาแน่น ความดัน และมัคนัมเบอร์ ที่คำนวณได้กับผลเฉลยแม่นตรงที่ตำแหน่งความสูง $y = 0.7$ จากผลลัพธ์ที่คำนวณได้พบว่ามีความสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรงแต่คลื่นช็อคยังมีความกว้างอยู่ ทั้งนี้เนื่องจากเอลิเมนต์ที่ใช้ในบริเวณแนวคลื่นช็อคมีขนาดใหญ่



รูปที่ 5.11 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่นสำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่า ผ่านพื้นเอียงทำมุม 20° ที่ตำแหน่ง y = 0.7



รูปที่ 5.12 การเปรียบเทียบการกระจายค่าความดันสำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่า ผ่านพื้นเอียงทำมุม 20° ที่ตำแหน่ง y = 0.7



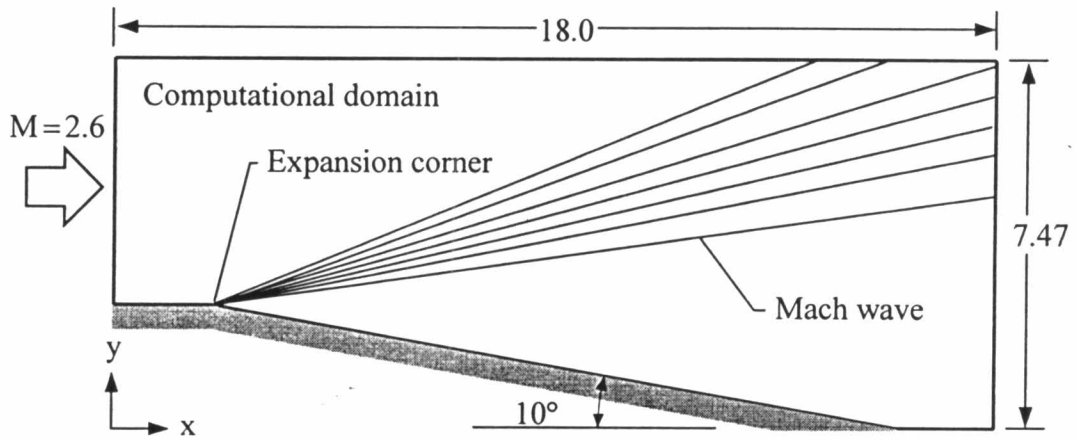
รูปที่ 5.13 การเปรียบเทียบการกระจายค่ามัคนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่า ผ่านพื้นเอียงทำมุม 20° ที่ตำแหน่ง y = 0.7

5.3 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.6 เท่าผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย

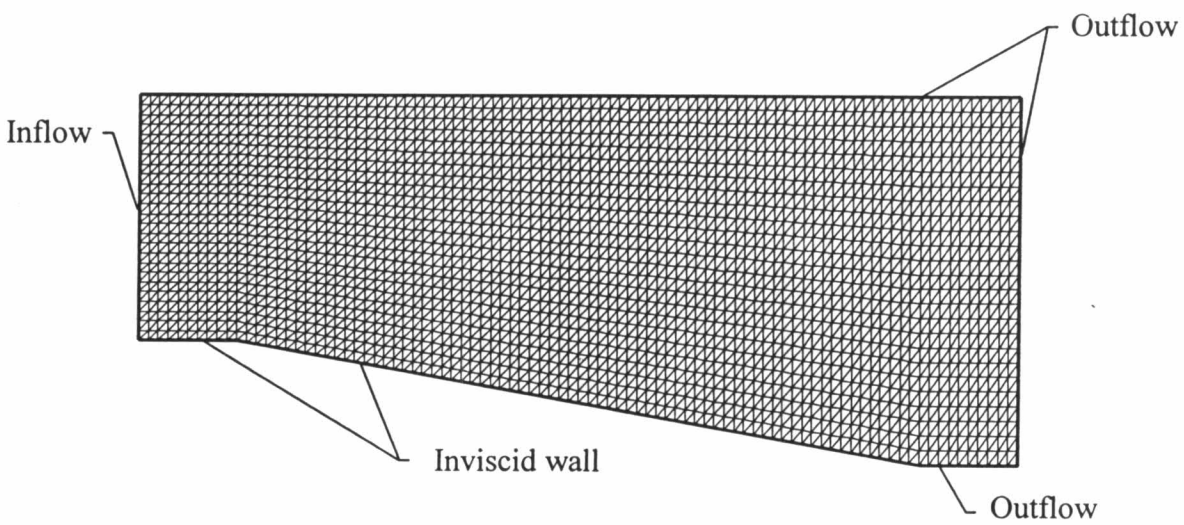
ลักษณะของปัญหาเป็นการไหลของของไหลที่มีความเร็วสูงกว่าเสียง 2.6 เท่า ผ่านเข้าทางด้านซ้ายมือของโดเมนจากนั้นจึงไหลผ่านหน้าตัดที่ขยายกว้างออกมากขึ้นโดยทำมุม 10° กับพื้นราบ ดังแสดงในรูปที่ 5.14 ส่งผลให้คุณสมบัติของของไหลคือ ค่าความหนาแน่น ค่าความดัน และอุณหภูมิมีค่าลดลง ขณะที่ค่าความเร็วจะมีค่าสูงขึ้นเนื่องมาจากการขยายตัวของพื้นที่การไหลและเกิดคลื่นช็อคตรงจุดมุม (expansion corner) เพราะเป็นบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงขนาดพื้นที่หน้าตัดอย่างฉับพลัน สำหรับเงื่อนไขขอบเขตของการไหลเข้าที่ขอบด้านซ้ายเป็นดังนี้ ค่าความหนาแน่น $\rho = 1.0$, ความเร็ว $u = 1.0$, $v = 0.0$, พลังงานรวม $\varepsilon = 0.764159$ และอัตราส่วนความร้อนจำเพาะ $\gamma = 1.4$

ในรูปที่ 5.15 เป็นการแสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่วางตัวอย่างเป็นระเบียบจำนวน 4,500 เอลิเมนต์ และจำนวนจุดต่อ 2,366 จุดต่อ เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ค่าความดันที่คำนวณโดยใช้โปรแกรม CBSHIFLOW แสดงในรูปที่ 5.16 (ก)-(ข) การเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณกับผลเฉลยแม่นตรงตามแนวผนังสำหรับค่าความหนาแน่น ค่าความดัน โดยแสดงในรูปที่ 5.17 และ 5.18 ตามลำดับ

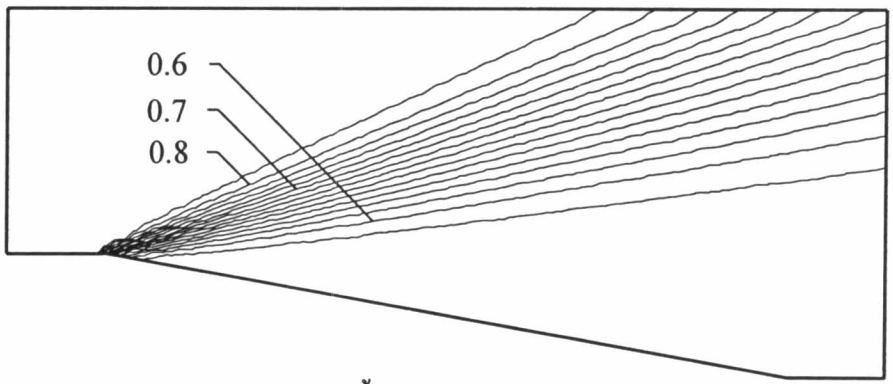
จากผลลัพธ์ที่ได้พบว่าในบริเวณก่อนและหลังจุดหักมุม ค่าของความหนาแน่นและความดันมีความสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรง แต่จะเกิดความผิดพลาดค่อนข้างมากในบริเวณจุดหักมุม ซึ่งคุณสมบัติของของไหลเกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างกระทันหัน ทั้งนี้เนื่องจากเอลิเมนต์ที่ใช้ในบริเวณนั้นมีขนาดใหญ่ หากต้องการผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงขึ้นจำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กในบริเวณดังกล่าวและในบริเวณอื่นซึ่งการเปลี่ยนแปลงของค่อนข้างน้อยก็ใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่ได้



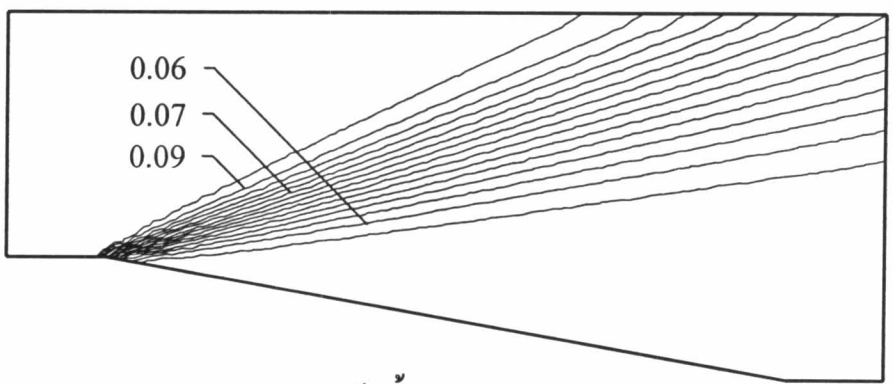
รูปที่ 5.14 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.6 เท่าผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย



รูปที่ 5.15 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.6 เท่าผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย

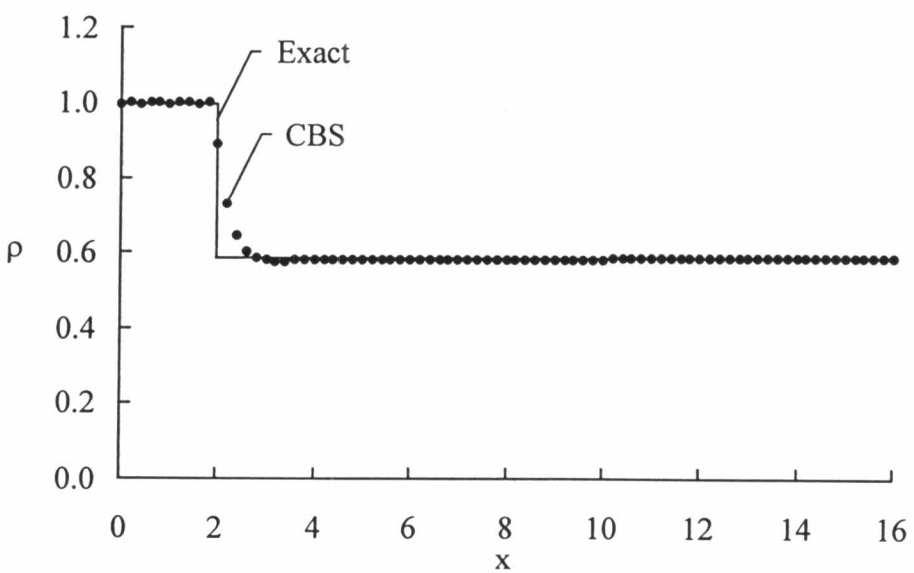


(ก) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น

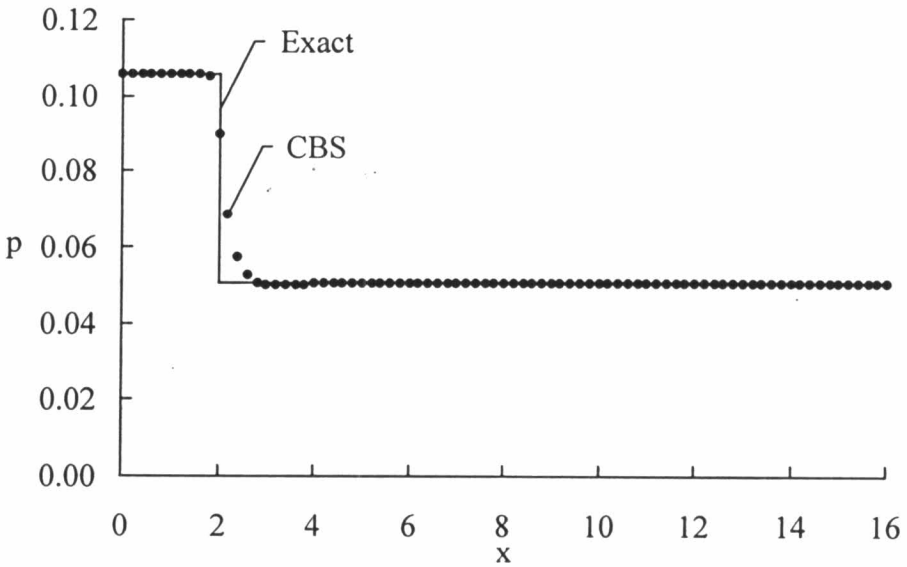


(ข) เส้นชั้นของค่าความดัน

รูปที่ 5.16 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.6 เท่า ผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย



รูปที่ 5.17 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่นตามผนังของปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.6 เท่า ผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย

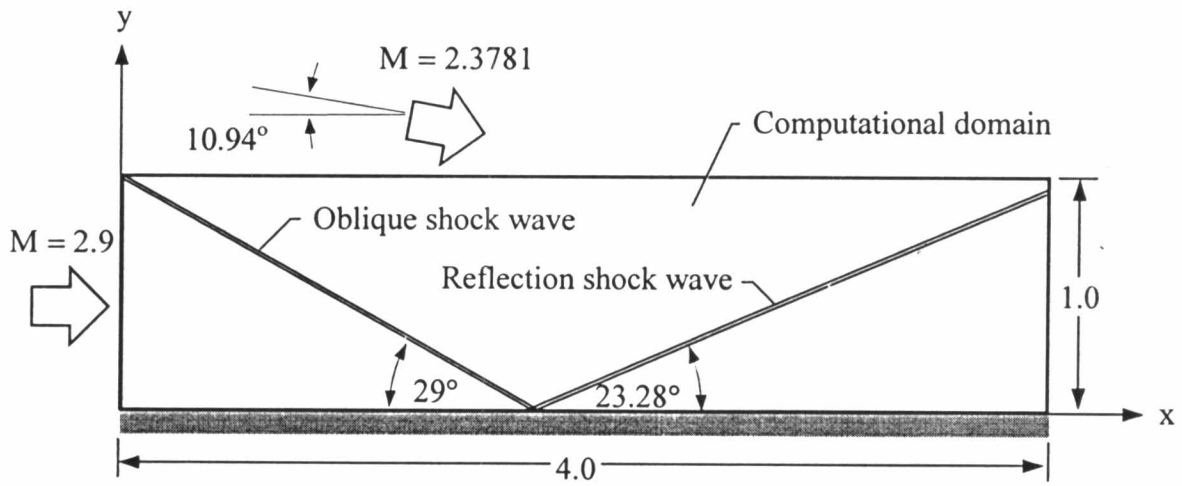


รูปที่ 5.18 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความดันตามผนังของปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.6 เท่า ผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย

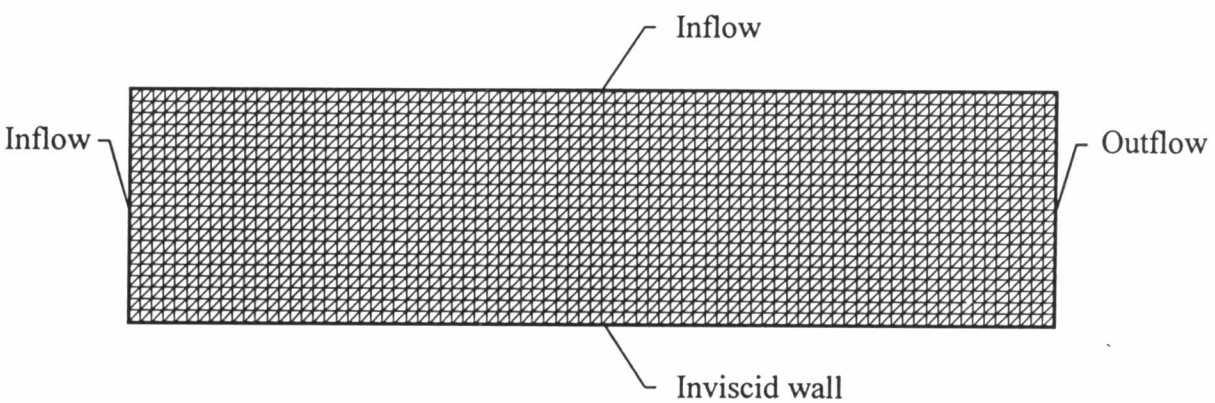
5.4 ปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อคบนพื้นราบ

ปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อคบนพื้นราบ จัดเป็นอีกหนึ่งปัญหาพื้นฐานที่ใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ รูปแบบของปัญหาคือ มีของไหลที่มีความเร็วสูงกว่าเสียง 2.9 เท่า ไหลเข้าทางขอบด้านซ้ายของปัญหาและมีของไหลที่มีความเร็วสูงกว่าเสียง 2.3781 เท่า ไหลเข้าที่ขอบด้านบนของปัญหาในทิศทางทำมุม 10.94° กับพื้นราบ ดังแสดงในรูปที่ 5.19 การกระทบกันของคลื่นช็อคทั้งสองก่อให้เกิดคลื่นช็อคเอียง (oblique shock wave) เกิดขึ้นทำมุมตกกระทบ 29° กับพื้นราบ และการกระทบพื้นของของไหลที่ไหลเข้าจากทางด้านบน ก่อให้คลื่นช็อคสะท้อน (reflection shock wave) เกิดขึ้นทำมุม 23.28° กับพื้นราบ สำหรับเงื่อนไขขอบเขตของการไหลเข้าของปัญหานี้คือ ตลอดขอบด้านบนกำหนด ค่าความหนาแน่น $\rho = 1.0$, ความเร็ว $u = 2.9$, $v = 0.0$, พลังงานรวม $\varepsilon = 5.990714$ และตลอดขอบด้านบนกำหนดให้ ค่าความหนาแน่น $\rho = 1.7$, ความเร็ว $u = 2.619334$, $v = -0.506320$, พลังงานรวม $\varepsilon = 5.805957$ และอัตราส่วนความร้อนจำเพาะของของไหล $\gamma = 1.4$

การวิเคราะห์ปัญหาการไหลนี้ด้วยโปรแกรม CBSHIFLOW เริ่มต้นด้วยการแบ่งโดเมนการคำนวณออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่วางตัวอย่างเป็นระเบียบจำนวน 3,200 เอลิเมนต์ และ 1,701 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 5.20

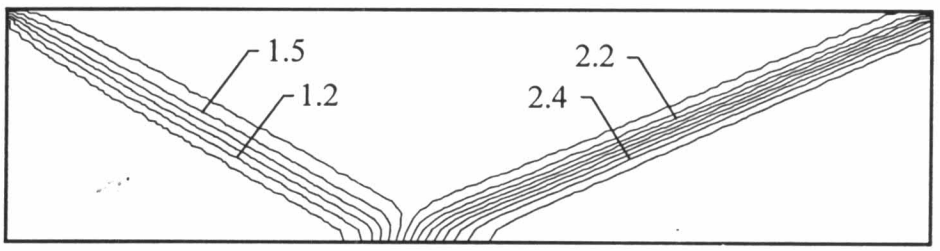


รูปที่ 5.19 ปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อคบนพื้นราบ

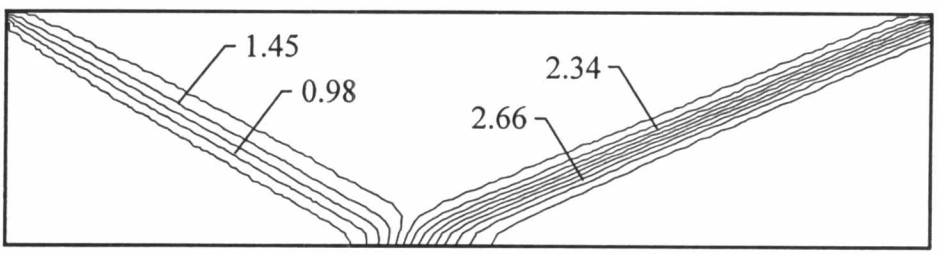


รูปที่ 5.20 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อคบนพื้นราบ

จากผลลัพธ์ที่คำนวณได้โดยใช้โปรแกรม CBSHIFLOW ยังมีความถูกต้องค่อนข้างน้อย ทั้งนี้เนื่องจากลักษณะของคลื่นช็อคที่เกิดจากการตกกระทบกันของของไหลและคลื่นช็อคสะท้อนจากพื้นราบยังคงเป็นเส้นที่มีความหนาอยู่มาก เส้นชั้นของความหนาแน่นและความดันแสดงในรูปที่ 5.21(ก)-(ข) ตามลำดับ การตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ที่คำนวณได้กับผลเฉลยแม่นตรงได้ทำการเปรียบเทียบที่ตำแหน่ง y = 0.25 พบว่าในบริเวณการเปลี่ยนแปลงของคุณสมบัติของของไหลค่อนข้างน้อยผลลัพธ์มีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี ส่วนในบริเวณแนวคลื่นช็อคผลลัพธ์มีความผิดพลาดอยู่ ทั้งนี้เนื่องจากเอลิเมนต์ที่ใช้ในบริเวณแนวคลื่นช็อคมีขนาดใหญ่ดังในรูปที่ 5.22 และ 5.23 เป็นการเปรียบเทียบของค่าความหนาแน่นและความดัน ตามลำดับ

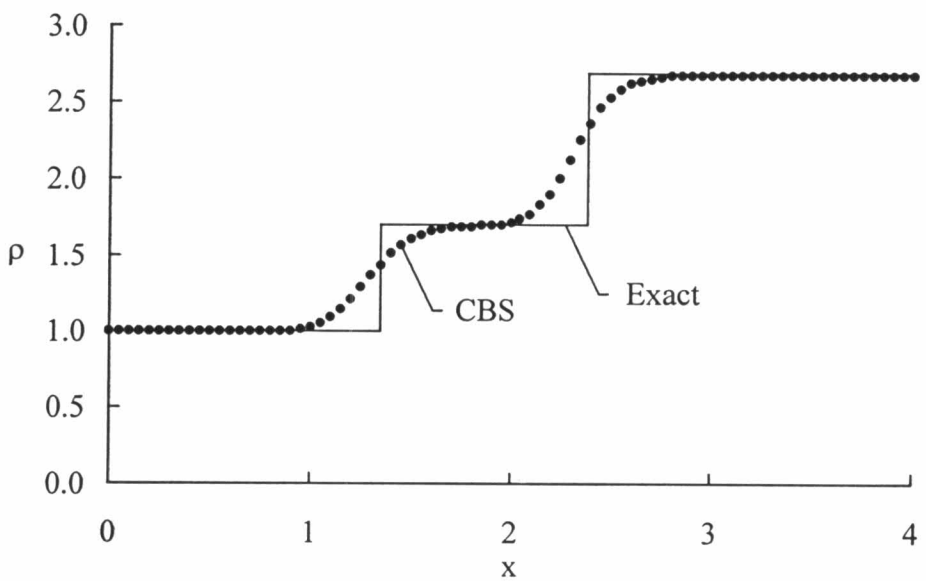


(ก) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น

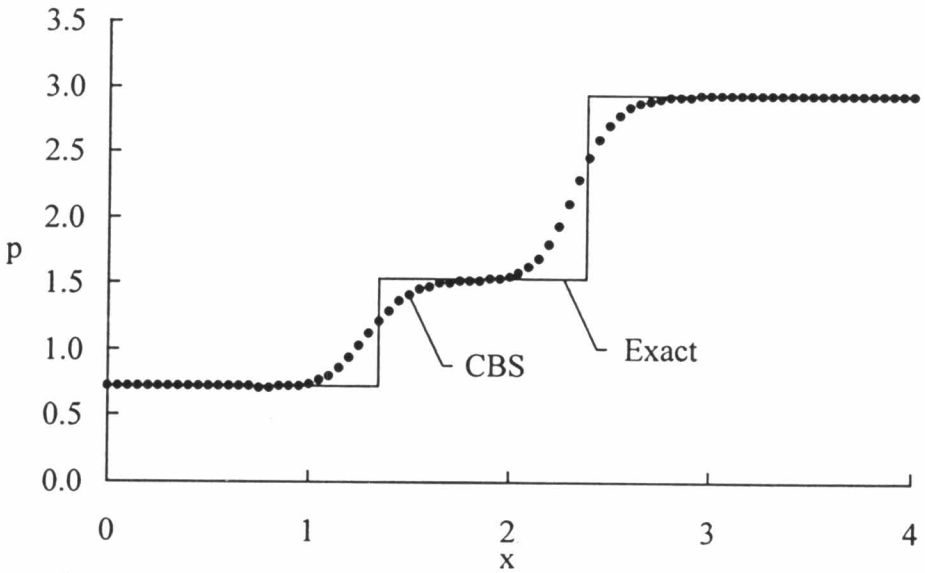


(ข) เส้นชั้นของค่าความดัน

รูปที่ 5.21 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน สำหรับปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อคบนพื้นราบ



รูปที่ 5.22 การเปรียบเทียบการกระจายค่าความหนาแน่นสำหรับปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อคบนพื้นราบที่ตำแหน่ง y = 0.25



รูปที่ 5.23 การเปรียบเทียบการกระจายค่าความดันสำหรับปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อคบนพื้นราบที่ตำแหน่ง y = 0.25