ตัววัดสากลในหนึ่งมิติและสองมิติ

นางสาวนิศารัตน์ บัวแดง

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2555

UNIVERSAL METRIC IN ONE – DIMENSION AND TWO – DIMENSION

Ms. Nisarat Buadaeng

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science Program in Mathematics
Department of Mathematics and Computer Science
Faculty of Science
Chulalongkorn University
Academic Year 2012

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ตัววัดสากลในหนึ่งมิติและสองมิติ
โดย	นางสาวนิศารัตน์ บัวแดง
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	อาจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม	อาจารย์ ดร.จิณดิษฐ์ ละออปักษิณ

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

………………………………………….. คณบดีคณะวิทยาศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ หารหนองบัว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

…………………………………………… ประธานกรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ณัฐพันธ์ กิติสิน)

………………………………………….... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
(อาจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ)

…………………………………………… อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม
(อาจารย์ ดร.จิณดิษฐ์ ละออปักษิณ)

…………………………………………….. กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ณัฐกาญจน์ ใจดี)

…………………………………………….. กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย
(อาจารย์ ดร.ศิริรัตน์ สิงหันต์)

นิศารัตน์ บัวแดง : ตัววัดสากลในหนึ่งมิติและสองมิติ. (UNIVERSAL METRIC IN ONE – DIMENSION AND TWO – DIMENSION) อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก : อ.ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ, อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม : อ.ดร.จิณดิษฐ์ ละออปักษิณ, 53 หน้า.

งานวิจัยชิ้นนี้แสดงขั้นตอนวิธีการสร้างเครื่องมือการวัดในหนึ่งมิติและสองมิติ สำหรับหนึ่งมิติได้นำเสนอขั้นตอนวิธีการสร้างไม้บรรทัดยาว k หน่วยที่สามารถวัดความยาว $1,2,3,\ldots,k$ หน่วย และสำหรับสองมิติได้นำเสนอขั้นตอนวิธีการแบ่งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k \times k$ ตารางหน่วยให้มีพื้นที่ $1,2,3,\ldots,k^2$ ตารางหน่วย เมื่อ k เป็นจำนวนนับใดๆ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต..

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก..

ปีการศึกษา 2555 ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม..

5472008723 : MAJOR MATHEMATICS
KEYWORDS : UNIVERSAL METRIC / RULER / AREA

NISARAT BUADAENG : UNIVERSAL METRIC IN ONE-DIMENSION AND TWO-DIMENSION. ADVISOR : RATINAN BOONKLURB, Ph.D., CO-ADVISOR : JINNADIT LAORPAKSIN, Ed.D., 53 pp.

In this research, we present algorithms to generate universal measuring devices in one – dimension and two – dimension. In one – dimension, we give algorithms for making a universal ruler that can measure the length $1, 2, 3, \ldots, k$ units. In two – dimension, we give algorithms for making a square universal area that have the areas of $1, 2, 3, \ldots, k^2$ square units where k is an arbitrary natural number.

Department : Mathematics and Computer Science Student's Signature ....
Field of Study : Mathematics Advisor's Signature ....
Academic Year : 2012 Co-advisor's Signature ....

กิตติกรรมประกาศ

สำหรับการจัดทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ขอขอบคุณอาจารย์ที่ปรึกษาหลัก อ.ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ และอาจารย์ที่ปรึกษาร่วม อ.ดร.จิณดิษฐ์ ละออปักษิณ ในการให้แรงบันดาลใจ แหล่งข้อมูลต่างๆ ในการจัดทำหัวข้อวิทยานิพนธ์และสำหรับการให้ข้อเสนอแนะ คำอธิบาย แนวทาง ประสบการณ์ ตลอดจนความช่วยเหลือต่างๆ ในการจัดทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

ขอขอบคุณคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ผศ.ดร.ณัฐพันธ์ กิติสิน ผศ.ดร.ณัฐกาญจน์ ใจดี และ อ.ดร.ศิริรัตน์ สิงหันต์ สำหรับข้อเสนอแนะต่างๆ ในการจัดทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

ขอขอบคุณอาจารย์ รุ่นพี่ เพื่อนๆ รุ่นน้อง เจ้าหน้าที่ในภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ที่เกี่ยวข้องในการให้ความรู้เพื่อใช้เป็นพื้นฐานซึ่งสามารถนำความรู้ต่างๆ มาประยุกต์ในการจัดทำวิทยานิพนธ์ และสำหรับความช่วยเหลือในการจัดพิมพ์รูปเล่ม แบบฟอร์ม รวมทั้งเอกสารต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับการจัดทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

สุดท้ายนี้ขอขอบคุณกำลังใจที่สำคัญยิ่งของ คุณพ่อ คุณแม่ และญาติพี่น้องทุกคนที่มีให้ตลอดมา

สารบัญ

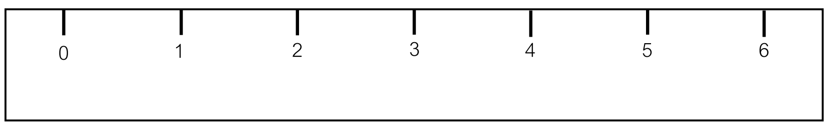
บทที่ 1

บทนำ

1.1 บทนิยามของคำศัพท์ที่เกี่ยวข้อง

ในที่นี้จะให้บทนิยามเบื้องต้นเกี่ยวกับคำศัพท์ที่เกี่ยวข้องในวิทยานิพนธ์เล่มนี้

บทนิยามที่ 1.1.1 ไม้บรรทัดที่มีมาตรวัดแบบปกติ คือ ไม้บรรทัดที่แบ่งความยาวเป็นช่วงละ 1 หน่วยเท่าๆ กัน เช่น



จะพบว่า สามารถใช้ไม้บรรทัด 6 หน่วยดังรูป วัดความยาวได้ตั้งแต่ $1,2,3,\ldots,6$ หน่วย

บทนิยามที่ 1.1.2 ไม้บรรทัดที่มีมาตรวัดแบบไม่ปกติ คือ ไม้บรรทัดที่ไม่ใช่ไม้บรรทัดที่มีมาตรวัดแบบปกติ นั่นคือ จะแบ่งช่วงความยาวเป็นช่วงละเท่าไรก็ได้ และแต่ละช่วงอาจจะมีขนาดไม่เท่ากัน เช่น

จะพบว่า ไม้บรรทัด 6 หน่วยดังรูป ไม่สามารถใช้วัดความยาว 1 หน่วยได้

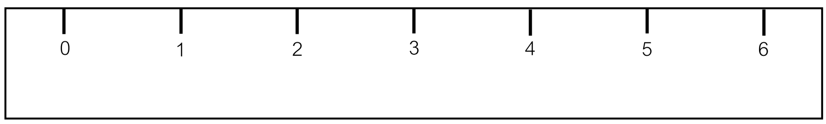
บทนิยามที่ 1.1.3 ให้ n เป็นจำนวนนับ **ไม้บรรทัดที่มี n ช่วงความยาว** คือ ไม้บรรทัดที่แบ่งเป็น n ช่วง

บทนิยามที่ 1.1.4 ให้ n เป็นจำนวนนับ L เป็นไม้บรรทัดที่มี n ช่วงความยาว และให้ความยาวในแต่ละช่วงแทนด้วย $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ หน่วย ตามลำดับ เรียก $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ ว่า **ชุดความยาวของ** L และเขียนแทน L ด้วย $\left(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n\right)$

บทนิยามที่ 1.1.5 การวัดที่ต่อเนื่อง คือ การวัดความยาวที่เกิดจาก 1 ช่วงความยาว หรือ เกิดจากผลรวมของช่วงความยาวที่อยู่ติดกัน นั่นคือ เป็นการวัดความยาวของวัตถุโดยเกิดจากการวัดเพียงครั้งเดียวไม่มีการเคลื่อนที่ไม้บรรทัดในการวัดความยาว

บทนิยามที่ 1.1.6 การวัดที่ไม่ต่อเนื่อง คือ การวัดความยาวของวัตถุที่เกิดจากการรวมของช่วงความยาวที่ไม่ติดกัน นั่นคือ เป็นการวัดความยาวของวัตถุมากกว่าหนึ่งครั้งและมีการเคลื่อนไม้บรรทัดในการวัดความยาว

พิจารณาไม้บรรทัดและวิธีการวัดความยาวต่อไปนี้

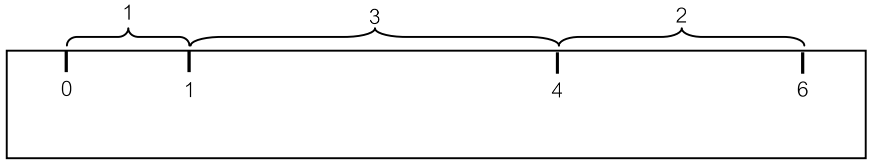


ตัวอย่างความยาวที่ต้องการวัด	ตัวอย่างวิธีการวัด
1 หน่วย	วัดจาก 0 ถึง 1
3 หน่วย	วิธีการวัดที่ต่อเนื่อง วัดจาก 0 ถึง 3 วิธีการวัดที่ไม่ต่อเนื่อง วัดจาก 0 ถึง 1 (ยาว 1 หน่วย) และวัดจาก 2 ถึง 4 (ยาว 2 หน่วย) รวม 2 ครั้ง ได้ความยาว 3 หน่วย

หมายเหตุ สำหรับวิทยานิพนธ์เล่มนี้ การวัดที่กล่าวถึงทั้งหมดจะหมายถึง การวัดที่ได้จากไม้บรรทัดที่มีมาตรวัดแบบไม่ปกติ และเมื่อกล่าวถึงการวัดความยาวของวัตถุจะหมายถึงการวัดที่ต่อเนื่องเท่านั้น และถ้าความยาวใดมีวิธีการวัดได้หลายวิธีผู้เขียนจะขอยกตัวอย่างเพียงแค่ 1 วิธี เพื่อแสดงว่าสามารถใช้ไม้บรรทัดวัดความยาวนั้นได้

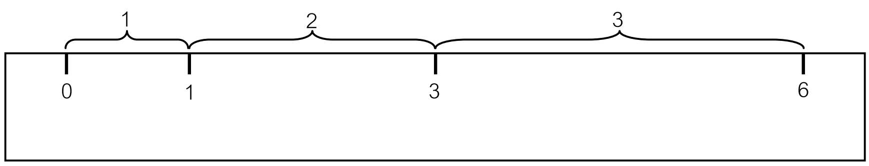
บทนิยามที่ 1.1.7 สำหรับจำนวนนับ k ใดๆ **ไม้บรรทัด k หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด** คือ ไม้บรรทัดที่มีความยาว k หน่วย และสามารถใช้วัดความยาวได้ตั้งแต่ $1,2,3,\ldots,k$ หน่วย โดยในการวัดความยาวต้องเป็นวิธีการวัดที่ต่อเนื่อง

ตัวอย่างที่ 1.1.8 พิจารณาไม้บรรทัด 6 หน่วย ดังรูป



จะเห็นได้ว่า ไม้บรรทัดข้างต้นมี 3 ช่วงความยาว แทนด้วย $\left(a_1, a_2, a_3\right) = \left(1,3,2\right)$
เมื่อพิจารณาวิธีการวัดความยาวพบว่า สามารถใช้ไม้บรรทัดวัดความยาวต่างๆ ได้ดังนี้
$1 = a_1, 2 = a_3,\ 3 = a_2,\ 4 = a_1 + a_2,\ 5 = a_2 + a_3$ และ $6 = a_1 + a_2 + a_3$
จะพบว่าไม้บรรทัด $\left(1,3,2\right)$ สามารถใช้วัดความยาวได้ตั้งแต่ $1,2,3,\ldots,6$ หน่วย
ดังนั้น ไม้บรรทัด $\left(1,3,2\right)$ เป็นไม้บรรทัด 6 หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด

ตัวอย่างที่ 1.1.9 พิจารณาไม้บรรทัด 6 หน่วย ดังรูป



จะเห็นได้ว่า ไม้บรรทัดข้างต้นมี 3 ช่วงความยาว แทนด้วย $\left(a_1, a_2, a_3\right) = \left(1,2,3\right)$
เมื่อพิจารณาวิธีการวัดความยาวจะเห็นได้ว่า ไม่สามารถใช้ไม้บรรทัด $\left(1,2,3\right)$ วัดความยาว 4 หน่วยได้ แม้ว่า $4 = a_1 + a_3$ แต่เป็นวิธีการวัดที่ไม่ต่อเนื่อง
ดังนั้น ไม้บรรทัด $\left(1,2,3\right)$ ไม่เป็นไม้บรรทัด 6 หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด

1.2 ความเป็นมา และความสำคัญของปัญหา

จากตัวอย่างข้างต้น สรุปได้ว่าการจัดเรียงช่วงความยาวของไม้บรรทัด k หน่วย เป็นปัจจัยสำคัญที่มีผลในการทำให้เป็นไม้บรรทัด k หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด นอกจากนี้การตรวจ-สอบว่าไม้บรรทัดนั้นเป็นไม้บรรทัด k หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาดหรือไม่ มีความยุ่งยากและซับซ้อน ต่อมาสุพินดา [1] ได้ศึกษาวิธีในการตรวจสอบการเป็นไม้บรรทัด k หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด ไว้ดังนี้

บทนิยามที่ 1.2.1 กำหนดให้ L เป็นไม้บรรทัด k หน่วย ที่มี n ช่วงความยาว และมีชุดความยาวเป็น $a_1 = d(1,1),\ a_2 = d(1,2),\ a_3 = d(1,3),\ \ldots,\ a_n = d(1,n)$ เมื่อ k และ n เป็นจำนวน

นับใดๆ **รูปสามเหลี่ยมผลต่าง** (difference triangle) **ของ** L ประกอบด้วยชุดของจำนวนนับ n ชุด ซึ่งได้มาจากความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$d(i,j)=d(i-1,j)+d(i-1,j+1)-d(i-2,j+1)$$

เมื่อ i และ j เป็นจำนวนนับ โดยที่ $2\le i\le n$ และ $1\le j\le (n+1)-i$ และ

$$d(0,2)=d(0,3)=\ldots=d(0,n)=0$$

และนำจำนวนนับที่อยู่ในรูป $d(i,j)$ เมื่อ i และ j เป็นจำนวนนับ โดยที่ $1\le i\le n$ และ $1\le j\le (n+1)-i$ มาเขียนเรียงกันในลักษณะดังนี้

$$\begin{array}{ccccccccccc}
d(1,1) & & d(1,2) & & d(1,3) & & d(1,4) & & \ldots & & d(1,n) \\
 & d(2,1) & & d(2,2) & & d(2,3) & & \ldots & & d(2,n-1) & \\
 & & d(3,1) & & d(3,2) & & \ldots & & d(3,n-2) & & \\
 & & & d(4,1) & & \ldots & & d(4,n-3) & & & \\
 & & & & & \downarrow & & & & & \\
 & & & & d(n-1,1) & & d(n-1,2) & & & & \\
 & & & & & d(n,1) & & & & &
\end{array}$$

ตัวอย่างที่ 1.2.2 รูปสามเหลี่ยมผลต่างของไม้บรรทัด 13 หน่วย ที่มีชุดความยาวเป็น $\left(2,1,1,5,1,2,1\right)$ คือ

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
2 & & 1 & & 1 & & 5 & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & 3 & & 2 & & 6 & & 6 & & 3 & & 3 & \\
 & & 4 & & 7 & & 7 & & 8 & & 4 & & \\
 & & & 9 & & 8 & & 9 & & 9 & & & \\
 & & & & 10 & & 10 & & 10 & & & & \\
 & & & & & 12 & & 11 & & & & & \\
 & & & & & & 13 & & & & & &
\end{array}$$

จากตัวอย่างที่ 1.2.2 เมื่อพิจารณารูปสามเหลี่ยมผลต่างสังเกตว่า

$$d(3,2)=7=1+1+5=d(1,2)+d(1,3)+d(1,4)$$

$$d(4,4)=9=5+1+2+1=d(1,4)+d(1,5)+d(1,6)+d(1,7)$$

จากข้อสังเกตนี้สามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทในกรณีทั่วๆ ไปได้ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 1.2.3 [1] กำหนดให้ L เป็นไม้บรรทัด k หน่วย ที่มี n ช่วงความยาว และมีชุดความยาวเป็น $\Big(d(1,1),\, d(1,2),\, d(1,3),\, \ldots,\, d(1,n)\Big)$ จะได้ว่า

$$d(i,j) = d(1,j) + d(1,j+1) + d(1,j+2) + \ldots + d(1,j+i-1)$$

เมื่อ i และ j เป็นจำนวนนับ โดยที่ $1 \le i \le n$ และ $1 \le j \le (n+1)-i$

นั่นคือ $d(i,j)$ เป็นผลรวมของช่วงความยาว i ช่วงต่อเนื่องกันโดยเริ่มจากช่วงความยาวที่ $d(1,j)$ โดยที่ $1 \le i \le n$ และ $1 \le j \le (n+1)-i$

1.3 สมบัติของรูปสามเหลี่ยมผลต่าง

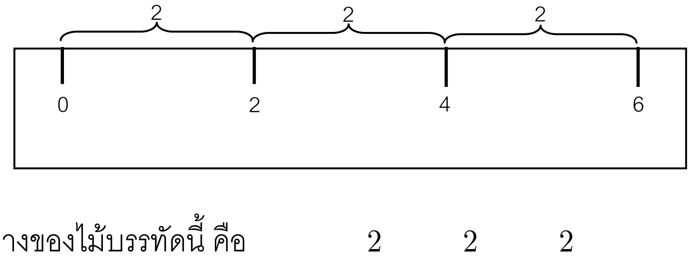
ทฤษฎีบทที่ 1.3.1 [1] $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} d(1,j) = k$

ทฤษฎีบทที่ 1.3.2 [1] $D = \{d(i,j)\,|\, i,j \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $1 \le i \le n$ และ $1 \le j \le (n+1)-i\}$ คือเซตของความยาวทั้งหมดที่สามารถใช้ไม้บรรทัด L วัดได้ และ $\left|D\right| \le \dfrac{n(n+1)}{2}$ เมื่อ $\left|D\right|$ คือจำนวนสมาชิกใน D

ทฤษฎีบทที่ 1.3.3 [1] $d(n,1)$ คือ ความยาวของไม้บรรทัด L

ทฤษฎีบทที่ 1.3.4 [1] กำหนดให้ L เป็นไม้บรรทัด k หน่วย จะได้ว่า L เป็นไม้บรรทัด k หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด ก็ต่อเมื่อ $\left|D\right| = k$ เมื่อ k เป็นจำนวนนับ

ตัวอย่างที่ 1.3.5 พิจารณาไม้บรรทัด $\Big(2,2,2\Big)$ ดังรูป



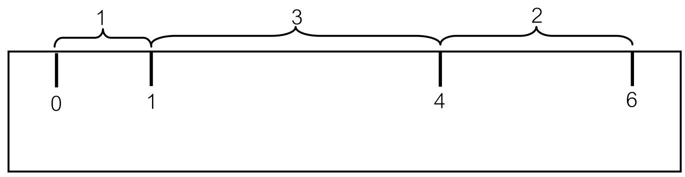
รูปสามเหลี่ยมผลต่างของไม้บรรทัดนี้ คือ

$$\begin{array}{ccccc} 2 & & 2 & & 2 \\ & 4 & & 4 & \\ & & 6 & & \end{array}$$

ดังนั้น $D = \{2,4,6\}$ และ $\left|D\right| = 3 \ne 6 = k$

โดยทฤษฎีบทที่ 1.3.4 จะได้ว่าไม้บรรทัด $\left(2,2,2\right)$ ไม่เป็นไม้บรรทัด 6 หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด

ตัวอย่างที่ 1.3.6 พิจารณาไม้บรรทัด $\left(1,3,2\right)$ ดังรูป



รูปสามเหลี่ยมผลต่างของไม้บรรทัดนี้ คือ

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 3 & & 2 \\ & 4 & & 5 & \\ & & 6 & & \end{array}$$

ดังนั้น $D=\{1,2,3,4,5,6\}$ และ $\left|D\right|=6=k$

โดยทฤษฎีบทที่ 1.3.4 จะได้ว่าไม้บรรทัด $\left(1,3,2\right)$ เป็นไม้บรรทัด 6 หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด

จะเห็นว่าการตรวจสอบว่า L เป็นไม้บรรทัด k หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด โดยใช้ทฤษฎีบทที่ 1.3.4 [1] เป็นวิธีที่มีรูปแบบและขั้นตอนที่แน่นอน อย่างไรก็ดี [1] ไม่ได้นำเสนอขั้นตอนวิธีการแบ่งไม้บรรทัด k หน่วย ให้ได้เป็นไม้บรรทัด k หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด

จากตัวอย่างและแนวคิดข้างต้นผู้วิจัยจึงสนใจจะขยายและปรับปัญหาของ [1] โดยในบทที่ 2 ของงานวิจัยชิ้นนี้ได้ขยาย [1] โดยนำเสนอขั้นตอนวิธีการแบ่งไม้บรรทัด k หน่วย และแสดงว่าขั้นตอนที่นำเสนอไว้ทำให้ได้ไม้บรรทัด k หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด นอกจากนี้ในบทที่ 3 และบทที่ 4 จะปรับมุมมองของ [1] ไปเป็นการวัดพื้นที่ในสองมิติ จึงได้นำเสนอขั้นตอนวิธีการแบ่งของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k \times k$ ตารางหน่วย ให้มีพื้นที่ทุกขนาดเช่นเดียวกัน ทั้งนี้บทนิยามที่เกี่ยวข้องกับการวัดพื้นที่ในสองมิติจะอธิบายโดยละเอียดในบทดังกล่าวต่อไป

บทที่ 2

การสร้างไม้บรรทัดวัดความยาวได้ทุกขนาด

ในบทนี้จะนำเสนอขั้นตอนวิธีการแบ่งไม้บรรทัด k หน่วยออกเป็น n_k ช่วงความยาว นั่นคือ $L=\left(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{n_k}\right)=\left(d(1,1),d(1,2),d(1,3),\ldots,d(1,n_k)\right)$ เพื่อให้ L เป็นไม้บรรทัด k หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด เมื่อ k และ n_k เป็นจำนวนนับ

ขั้นตอนวิธีที่ 2.1 สำหรับ $k\in\{1,2,3,\ldots,10\}$

ถ้า $k=1$ แล้ว $L=\left(1\right)$

ถ้า $k=2$ แล้ว $L=\left(1,1\right)$

ถ้า $k=3$ แล้ว $L=\left(1,2\right)$

ถ้า $k=4$ แล้ว $L=\left(1,1,2\right)$

ถ้า $k=5$ แล้ว $L=\left(1,2,2\right)$

ถ้า $k=6$ แล้ว $L=\left(1,2,1,2\right)$

ถ้า $k=7$ แล้ว $L=\left(1,2,2,2\right)$

ถ้า $k=8$ แล้ว $L=\left(1,2,1,2,2\right)$

ถ้า $k=9$ แล้ว $L=\left(1,2,2,2,2\right)$

ถ้า $k=10$ แล้ว $L=\left(1,2,3,2,2\right)$

เห็นได้ชัดว่าในกรณีที่ $k\in\{1,2,3\}$ ไม้บรรทัด L เป็นไม้บรรทัด k หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด สำหรับกรณีอื่นๆ สามารถแสดงได้ว่าเป็นไม้บรรทัด k หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาดได้ดังนี้

<u>กรณี</u> $k=4$ จะได้ว่า $L=\left(1,1,2\right)$ นั่นคือ $1=a_1, 2=a_3, 3=a_2+a_3$ และ $4=a_1+a_2+a_3$ ดังนั้น ไม้บรรทัด L ที่ได้จากขั้นตอนวิธีที่ 2.1 เป็นไม้บรรทัด 4 หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด

<u>กรณี</u> $k=5$ จะได้ว่า $L=\left(1,2,2\right)$ นั่นคือ $1=a_1, 2=a_3, 3=a_1+a_2, 4=a_2+a_3$ และ $5=a_1+a_2+a_3$ ดังนั้น ไม้บรรทัด L ที่ได้จากขั้นตอนวิธีที่ 2.1 เป็นไม้บรรทัด 5 หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด

<u>กรณี</u> $k = 6$ จะได้ว่า $L = (1,2,1,2)$ นั่นคือ $1 = a_1, 2 = a_4, 3 = a_1 + a_2, 4 = a_1 + a_2 + a_3, 5 = a_2 + a_3 + a_4$ และ $6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ ดังนั้น ไม้บรรทัด L ที่ได้จากขั้นตอนวิธีที่ 2.1 เป็นไม้บรรทัด 6 หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด

<u>กรณี</u> $k = 7$ จะได้ว่า $L = (1,2,2,2)$ นั่นคือ $1 = a_1, 2 = a_4, 3 = a_1 + a_2, 4 = a_3 + a_4, 5 = a_1 + a_2 + a_3, 6 = a_2 + a_3 + a_4$ และ $7 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ ดังนั้น ไม้บรรทัด L ที่ได้จากขั้นตอนวิธีที่ 2.1 เป็นไม้บรรทัด 7 หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด

<u>กรณี</u> $k = 8$ จะได้ว่า $L = (1,2,1,2,2)$ นั่นคือ $1 = a_1, 2 = a_5, 3 = a_1 + a_2, 4 = a_4 + a_5, 5 = a_3 + a_4 + a_5, 6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4,\ 7 = a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ และ $8 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ ดังนั้น ไม้บรรทัด L ที่ได้จากขั้นตอนวิธีที่ 2.1 เป็นไม้บรรทัด 8 หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด

<u>กรณี</u> $k = 9$ จะได้ว่า $L = (1,2,2,2,2)$ นั่นคือ $1 = a_1, 2 = a_5, 3 = a_1 + a_2, 4 = a_4 + a_5, 5 = a_1 + a_2 + a_3, 6 = a_2 + a_3 + a_4, 7 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, 8 = a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ และ $9 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ ดังนั้น ไม้บรรทัด L ที่ได้จากขั้นตอนวิธีที่ 2.1 เป็นไม้บรรทัด 9 หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด

<u>กรณี</u> $k = 10$ จะได้ว่า $L = (1,2,3,2,2)$ นั่นคือ $1 = a_1, 2 = a_2, 3 = a_3, 4 = a_4 + a_5, 5 = a_2 + a_3, 6 = a_1 + a_2 + a_3, 7 = a_3 + a_4 + a_5, 8 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, 9 = a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ และ $10 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ ดังนั้น ไม้บรรทัด L ที่ได้จากขั้นตอนวิธีที่ 2.1 เป็นไม้บรรทัด 10 หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด

ขั้นตอนวิธีที่ 2.2 สำหรับ $k > 10$ และ $k \not\equiv 9 (\operatorname{mod} 10)$

1. หา $t \in \{1,2,3,4,5\}$ ที่ $k \equiv t (\operatorname{mod} 5)$

2. ให้ $s = \dfrac{k - 10 - t}{5}$ เนื่องจาก $k > 10$ และ $k \equiv t (\operatorname{mod} 5)$ ดังนั้น s เป็นจำนวนนับ

   2.1 ถ้า s เป็นจำนวนเต็มคู่ กำหนดให้

      2.1.1 $d(1,1) = 1, d(1,2) = 2$ และ $d(1,3) = 3$

      2.1.2 $d(1,3 + l) = 5$ สำหรับ $l \in \left\{1,2,3,\ldots,\dfrac{s}{2}\right\}$

      2.1.3 $d\left(1,4 + \dfrac{s}{2}\right) = t$

2.1.4 $d(1,5+l)=5$ สำหรับ $l\in\left\{\frac{s}{2},\frac{s}{2}+1,\frac{s}{2}+2,\ldots,s-1\right\}$

2.1.5 $d(1,5+s)=d(1,6+s)=2$

สังเกตว่า จำนวนช่วงความยาวในกรณีนี้จาก 2.1.1 – 2.1.5 เป็น $3,\ \frac{s}{2},\ 1,\ \frac{s}{2}$ และ 2 ตามลำดับ ดังนั้น ไม้บรรทัด L จะมี $n_k=6+s=6+\frac{k-10-t}{5}$ ช่วงความยาว

2.2 ถ้า s เป็นจำนวนเต็มคี่ กำหนดให้

2.2.1 $d(1,1)=1, d(1,2)=2$ และ $d(1,3)=3$

2.2.2 $d(1,3+l)=5$ สำหรับ $l\in\left\{1,2,3,\ldots,\frac{s-1}{2}\right\}$

2.2.3 $d\left(1,4+\frac{s-1}{2}\right)=t$

2.2.4 $d(1,5+l)=5$ สำหรับ $l\in\left\{\frac{s-1}{2},\frac{s-1}{2}+1,\frac{s-1}{2}+2,\ldots,s-1\right\}$

2.2.5 $d(1,5+s)=d(1,6+s)=2$

สังเกตว่า จำนวนช่วงความยาวในกรณีนี้จาก 2.2.1 – 2.2.5 เป็น $3,\ \frac{s-1}{2},\ 1,\ \frac{s+1}{2}$ และ 2 ตามลำดับ ดังนั้น ไม้บรรทัด L จะมี $n_k=6+s=6+\frac{k-10-t}{5}$ ช่วงความยาว

ขั้นตอนวิธีที่ 2.3 สำหรับ $k>10$ และ $k\equiv 9(\mathrm{mod}\,10)$

ให้ $s=\frac{k-9}{5}$ เนื่องจาก $k>10$ และ $k\equiv 9(\mathrm{mod}\,10)$ ดังนั้น s เป็นจำนวนนับ กำหนดให้

1. $d(1,1)=1$ และ $d(1,2)=2$
2. $d(1,2+l)=5$ สำหรับ $l\in\{1,2,3,\ldots,s\}$
3. $d(1,3+s)=d(1,4+s)=d(1,5+s)=2$

สังเกตว่า จำนวนช่วงความยาวในกรณีนี้จาก 1 – 3 เป็น $2, s$ และ 3 ตามลำดับ ดังนั้น ไม้บรรทัด L จะมี $n_k=5+s=5+\frac{k-9}{5}$ ช่วงความยาว

จากการสังเกตเกี่ยวกับจำนวนช่วงความยาวของขั้นตอนวิธีที่ 2.2 และ 2.3 สามารถนำมาสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.4 ให้ k เป็นจำนวนนับใดๆ ที่ $k > 10$ และ L เป็นไม้บรรทัด k หน่วยที่ได้จากขั้นตอนวิธีที่ 2.2 หรือ 2.3 จะได้ว่า L มี n_k ช่วงความยาวโดยที่ $n_k = 5 + \left\lceil \frac{k-10}{5} \right\rceil$ เมื่อ $\lceil a \rceil$ คือจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่มากกว่าหรือเท่ากับจำนวนจริง a

บทพิสูจน์

<u>กรณี</u> $k > 10$ และ $k \not\equiv 9 \pmod{10}$ เนื่องจาก $t \in \{1,2,3,4,5\}$ ดังนั้น $0 < \frac{t}{5} \le 1$

$$n_k = 6 + \frac{k-10-t}{5} = 6 + \frac{k-10}{5} - \frac{t}{5} = 6 + \left\lceil \frac{k-10}{5} \right\rceil - 1 = 5 + \left\lceil \frac{k-10}{5} \right\rceil$$

<u>กรณี</u> $k > 10$ และ $k \equiv 9 \pmod{10}$ จะได้ว่า

$$n_k = 5 + \frac{k-9}{5} = 5 + \left\lceil \frac{k-9}{5} - \frac{1}{5} \right\rceil = 5 + \left\lceil \frac{k-10}{5} \right\rceil$$

□

จากทฤษฎีบทที่ 2.4 เมื่อกำหนดให้ L เป็นไม้บรรทัด k หน่วย ที่แบ่งด้วยขั้นตอนวิธีที่ 2.2 หรือ 2.3 จะสามารถหาช่วงความยาว n_k ได้ ต่อไปจะนำเสนอขั้นตอนวิธีการแบ่งเมื่อทราบจำนวนช่วงความยาว n_k ที่คำนวณได้จากทฤษฎีบทข้างต้น

ขั้นตอนวิธีที่ 2.2ก สำหรับ $k > 10$ และ $k \not\equiv 9 \pmod{10}$

1. ให้ $d(1,1) = 1, d(1,2) = 2, d(1,3) = 3, d(1,n_k - 1) = 2$ และ $d(1,n_k) = 2$
2. หา $t \in \{1,2,3,4,5\}$ ที่ $k \equiv t \pmod 5$

2.1 ถ้า n_k เป็นจำนวนเต็มคู่ ให้ $d\left(1, \frac{n_k}{2} + 1\right) = t$ และ $d(1,i) = 5$ ทุก $i \in \{4,5,6, \ \ldots, \frac{n_k}{2}, \frac{n_k}{2} + 2, \ldots, n_k - 2\}$

2.2 ถ้า n_k เป็นจำนวนเต็มคี่ ให้ $d\left(1, \frac{n_k + 1}{2}\right) = t$ และ $d(1,i) = 5$ ทุก $i \in \{4,5,6, \ \ldots, \frac{n_k + 1}{2} - 1, \frac{n_k + 1}{2} + 1, \ldots, n_k - 2\}$

ขั้นตอนวิธีที่ 2.3ก สำหรับ $k > 10$ และ $k \equiv 9(\mathrm{mod}\, 10)$ กำหนดให้

1. $d(1,1)=1, d(1,2)=2, d(1,n_k-2)=2, d(1,n_k-1)=2$ และ $d(1,n_k)=2$

2. $d(1,i)=5$ ทุก $i \in \{3,4,5,...,n_k-3\}$

เนื่องจากไม้บรรทัด L ที่สร้างจากขั้นตอนวิธีที่ 2.2 หรือ 2.3 (หรือ 2.2ก หรือ 2.3ก) ขึ้นอยู่กับความยาว k หน่วยของไม้บรรทัด และจำนวนช่วงความยาว n_k ดังนั้นหากเป็นที่เข้าใจตรงกันว่าไม้บรรทัดที่กล่าวถึงยาวเท่าใด และมีกี่ช่วงความยาว จะใช้สัญลักษณ์ L แทนไม้บรรทัดนั้น แต่บางครั้งอาจใช้สัญลักษณ์ L_{n_k} เพื่อเน้นว่าเป็นไม้บรรทัด k หน่วยที่มี n_k ช่วงความยาว

ตัวอย่างที่ 2.5 พิจารณาไม้บรรทัด 16 หน่วย โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.2 หรือ 2.2ก จะได้ $n_{16}=7$ และ $L_7=(1,2,3,1,5,2,2)$ จะได้รูปสามเหลี่ยมผลต่างของ L_7 ดังรูป

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 5 & & 2 & & 2 \\
& 3 & & 5 & & 4 & & 6 & & 7 & & 4 & \\
& & 6 & & 6 & & 9 & & 8 & & 9 & & \\
& & & 7 & & 11 & & 11 & & 10 & & & \\
& & & & 12 & & 13 & & 13 & & & & \\
& & & & & 14 & & 15 & & & & & \\
& & & & & & 16 & & & & & &
\end{array}
$$

ตัวอย่างที่ 2.6 พิจารณาไม้บรรทัด 21 หน่วย โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.2 หรือ 2.2ก จะได้ $n_{21}=8$ และ $L_8=(1,2,3,5,1,5,2,2)$ จะได้รูปสามเหลี่ยมผลต่างของ L_8 ดังรูป

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & & 2 & & 3 & & 5 & & 1 & & 5 & & 2 & & 2 \\
& 3 & & 5 & & 8 & & 6 & & 6 & & 7 & & 4 & \\
& & 6 & & 10 & & 9 & & 11 & & 8 & & 9 & & \\
& & & 11 & & 11 & & 14 & & 13 & & 10 & & & \\
& & & & 12 & & 16 & & 16 & & 15 & & & & \\
& & & & & 17 & & 18 & & 18 & & & & & \\
& & & & & & 19 & & 20 & & & & & & \\
& & & & & & & 21 & & & & & & &
\end{array}
$$

ข้อสังเกตที่ 2.7 พิจารณาไม้บรรทัด L_7 จะเห็นว่า $d(2,5)=7, d(2,6)=4$ และ $d(3,5)=9$

พิจารณาไม้บรรทัด L_8 จะเห็นว่า $d(2,6)=7, d(2,7)=4$ และ $d(3,6)=9$

เนื่องจาก L_8 สร้างโดยการเติม 5 ไประหว่างตำแหน่ง $d(1,3)$ และ $d(1,4)$ ของ L_7 ดังนั้น L_8 ยังคงวัดความยาว $7,4$ และ 9 หน่วยได้เช่นเดียวกับ L_7 แต่ตำแหน่งการวัดจะขยับไปทางขวาอีกหนึ่งตำแหน่ง

นั่นคือ โดยทั่วไปสำหรับไม้บรรทัด L_{n_k} ที่สร้างจากขั้นตอนวิธีที่ 2.2 หรือ 2.2ก จะได้ว่า $d(2,n_k-2)=7, d(2,n_k-1)=4$ และ $d(3,n_k-2)=9$

คำถามที่น่าสนใจ คือ ไม้บรรทัด L ที่ได้จากขั้นตอนวิธีที่ 2.2 หรือ 2.3 (หรือ 2.2ก หรือ 2.3 ก) เป็นไม้บรรทัด k หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาดหรือไม่ ทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้จะนำไปสู่ทฤษฎีบทที่ตอบคำถามสำคัญนี้

ทฤษฎีบทประกอบที่ 2.8 สำหรับจำนวนนับ k ที่ $k>10$ และ $k \not\equiv 9 (\mathrm{mod} 10)$ ให้ L_{n_k} เป็นไม้บรรทัดที่แบ่งตามขั้นตอนวิธีที่ 2.2 หรือ 2.2ก จะได้ว่า

1. $d(1,1)=1$	2. $d(1,2)=2$	3. $d(1,3)=3$
4. $d(2,n_k-1)=4$	5. $d(2,2)=5$	6. $d(3,1)=6$
7. $d(n_k,1)=k$	8. $d(n_k-1,2)=k-1$	9. $d(n_k-1,1)=k-2$
10. $d(n_k-2,3)=k-3$	11. $d(n_k-2,1)=k-4$	12. $d(n_k-3,2)=k-5$
13. $d(n_k-3,4)=k-6$	14. $d(n_k-4,3)=k-7$	15. $d(n_k-4,4)=k-8$

บทพิสูจน์ ให้ L_{n_k} เป็นไม้บรรทัดที่แบ่งตามขั้นตอนวิธีที่ 2.2 หรือ 2.2ก จะได้ว่า L_{n_k} มีชุดความยาวเป็น $(1,2,3,\underbrace{5,5,5,\ldots,5,t,5,5,5,\ldots,5}_{n_k-5},2,2)$ เห็นได้ชัดว่า 1 – 3 เป็นจริง ต่อมา

4. โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้ว่า $d(2,n_k-1)=d(1,n_k-1)+d(1,n_k)=2+2=4$

5. โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้ว่า $d(2,2)=d(1,2)+d(1,3)=2+3=5$

6. โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้ว่า $d(3,1)=d(1,1)+d(1,2)+d(1,3)=1+2+3=6$

7. โดยทฤษฎีบทที่ 1.3.3 $d(n_k,1)=k$

8. โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 และทฤษฎีบทที่ 1.3.1 จะได้ว่า

$$d(n_k-1,2)=d(1,2)+d(1,3)+d(1,4)+\ldots+d(1,n_k)$$
$$=\sum_{j=1}^{n_k} d(1,j)-d(1,1)$$
$$=k-1$$

9. โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 และทฤษฎีบทที่ 1.3.1 จะได้ว่า

$$d(n_k-1,1)=d(1,1)+d(1,2)+d(1,3)+\ldots+d(1,n_k-1)$$
$$=\sum_{j=1}^{n_k} d(1,j)-d(1,n_k)$$
$$=k-2$$

10. โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 และทฤษฎีบทที่ 1.3.1 จะได้ว่า

$$d(n_k-2,3)=d(1,3)+d(1,4)+d(1,5)+\ldots+d(1,n_k)$$
$$=\sum_{j=1}^{n_k} d(1,j)-d(1,1)-d(1,2)$$
$$=k-1-2=k-3$$

11. โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 และทฤษฎีบทที่ 1.3.1 จะได้ว่า

$$d(n_k-2,1)=d(1,1)+d(1,2)+d(1,3)+\ldots+d(1,n_k-2)$$
$$=\sum_{j=1}^{n_k} d(1,j)-d(1,n_k-1)-d(1,n_k)$$
$$=k-2-2=k-4$$

12. โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 และทฤษฎีบทที่ 1.3.1 จะได้ว่า

$$d(n_k-3,2)=d(1,2)+d(1,3)+d(1,4)+\ldots+d(1,n_k-2)$$
$$=\sum_{j=1}^{n_k} d(1,j)-d(1,1)-d(1,n_k-1)-d(1,n_k)$$
$$=k-1-2-2=k-5$$

13. โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 และทฤษฎีบทที่ 1.3.1 จะได้ว่า

$$d(n_k-3,4)=d(1,4)+d(1,5)+d(1,6)+\ldots+d(1,n_k)$$
$$=\sum_{j=1}^{n_k} d(1,j)-d(1,1)-d(1,2)-d(1,3)$$
$$=k-1-2-3=k-6$$

14. โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 และทฤษฎีบทที่ 1.3.1 จะได้ว่า

$$d(n_k-4,3)=d(1,3)+d(1,4)+d(1,5)+\ldots+d(1,n_k-2)$$
$$=\sum_{j=1}^{n_k} d(1,j)-d(1,1)-d(1,2)-d(1,n_k-1)-d(1,n_k)$$
$$=k-1-2-2-2=k-7$$

15. โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 และทฤษฎีบทที่ 1.3.1 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
d(n_k-4,4) &= d(1,4)+d(1,5)+d(1,6)+\ldots+d(1,n_k-1) \\
&= \sum_{j=1}^{n_k} d(1,j)-d(1,1)-d(1,2)-d(1,3)-d(1,n_k) \\
&= k-1-2-3-2=k-8
\end{aligned}
$$

□

ข้อสังเกตที่ 2.9 เมื่อ $n_k=6$ และ $k\in\{11,12,13,14,15\}$ จากทฤษฎีบทประกอบที่ 2.8 จะได้ว่าไม้บรรทัด L_6 ที่ได้จากขั้นตอนวิธีที่ 2.2 หรือ 2.2ก เป็นไม้บรรทัด k หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด

ทฤษฎีบทประกอบที่ 2.10 ให้ n_k เป็นจำนวนช่วงความยาวของไม้บรรทัด L_{n_k} ที่ยาว k หน่วย ซึ่งได้จากขั้นตอนวิธีที่ 2.2 หรือ 2.2ก ถ้า n_k เป็นจำนวนเต็มคู่ที่ $n_k=2l+4$ เมื่อ l เป็นจำนวนนับ แล้ว

1. $d(l,3)=5l-2$
2. $d(l+1,2)=5l$
3. $d(l+2,1)=5l+1$
4. $d(n_k-(l+2),l+3)=(k-1)-5l$
5. $d(n_k-(l+3),l+3)=(k-3)-5l$

บทพิสูจน์ ให้ n_k เป็นจำนวนช่วงความยาวของไม้บรรทัด L_{n_k} ที่ได้จากขั้นตอนวิธีที่ 2.2 หรือ 2.2ก สมมติว่า n_k เป็นจำนวนเต็มคู่ที่ $n_k=2l+4$ เมื่อ l เป็นจำนวนนับ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.2ก จะได้ว่า ไม้บรรทัด L_{n_k} มีชุดความยาวเป็น $(1,2,3,\underbrace{5,5,5,\ldots,5}_{l-1},t,\underbrace{5,5,5,\ldots,5}_{l-1},2,2)$

และ $k=t+10l$ โดยที่ $t\in\{1,2,3,4,5\}$

1. โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้ว่า $d(l,3)=d(1,3)+\sum_{i=1}^{l-1} d(1,3+i)=3+5(l-1)=5l-2$

2. โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้

ว่า $d(l+1,2)=d(1,2)+d(1,3)+\sum_{i=1}^{l-1} d(1,3+i)=2+3+5(l-1)=5l$

3. โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d(l+2,1) &= d(1,1)+d(1,2)+d(1,3)+\sum_{i=1}^{l-1} d(1,3+i) \\ &= 1+2+3+5(l-1) \\ &= 5l+1 \end{aligned}$$

4. เนื่องจาก $d(n_k-(l+2),l+3)=d(l+2,l+3)$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d(n_k-(2+l),3+l) &= d(l+2,l+3) \\ &= d(1,l+3)+\sum_{i=4}^{l+2} d(1,l+i)+d(1,2l+3)+d(1,2l+4) \\ &= t+5(l+2-4+1)+d(1,n_k-1)+d(1,n_k) \\ &= t+5(l-1)+2+2 \\ &= t+4+5l-5 \\ &= (t+10l)-1-5l \\ &= (k-1)-5l \end{aligned}$$

5. เนื่องจาก $d(n_k-(l+3),l+3)=d(l+1,l+3)$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d(n_k-(l+3),l+3) &= d(l+1,l+3) \\ &= d(1,l+3)+\sum_{i=4}^{l+2} d(1,l+i)+d(1,2l+3) \\ &= t+5(l+2-4+1)+d(1,n_k-1) \\ &= t+5(l-1)+2 \\ &= t-3+5l \\ &= t+10l-3-5l \\ &= (k-3)-5l \end{aligned}$$

□

ข้อสังเกตที่ 2.11 พิจารณา

กรณี $n_k=6$ นั่นคือ $l=1$ และ $L_6=(1,2,3,t,2,2)$ เมื่อ $t\in\{1,2,3,4,5\}$ จากทฤษฎีบทประกอบที่ 2.10 ข้อ 1 – 3 จะได้ $d(1,3)=3, d(2,2)=5$ และ $d(3,1)=6$

กรณี $n_k=8$ นั่นคือ $l=2$ และ $L_8=(1,2,3,5,t,5,2,2)$ เมื่อ $t\in\{1,2,3,4,5\}$ จากทฤษฎีบทประกอบที่ 2.10 ข้อ 1 – 3 จะได้ $d(2,3)=8$, $d(3,2)=10$ และ $d(4,1)=11$ เพิ่มจากกรณี $n_k=6$ และ L_8 ยังคงวัดความยาว $d(1,3)=3, d(2,2)=5$ และ $d(3,1)=6$ โดยช่วงความยาวเหล่านี้อยู่ในตำแหน่งเดิมเหมือนในกรณี $n_k=6$ กล่าวคือ ทฤษฎีบทประกอบที่ 2.10 ข้อ 1 – 3 ยืนยันว่า L_8 สามารถวัดความยาวเพิ่มขึ้นจาก L_6 ได้อีก 3 แบบที่แตกต่างกัน

ต่อมากรณี $n_k = 6$ นั่นคือ $l = 1$ และ $L_6 = (1,2,3,t,2,2)$ เมื่อ $t \in \{1,2,3,4,5\}$ จากทฤษฎีบทประกอบที่ 2.10 ข้อ 4 และ 5 จะได้ $d(n_k - 3,4) = d(3,4) = k - 6$ และ $d(n_k - 4,4) = d(2,4) = k - 8$

กรณี $n_k = 8$ นั่นคือ $l = 2$ และ $L_8 = (1,2,3,5,t,5,2,2)$ เมื่อ $t \in \{1,2,3,4,5\}$ จากทฤษฎีบทประกอบที่ 2.10 ข้อ 4 และ 5 จะได้ $d(n_k - 4,5) = d(4,5) = k - 11$ และ $d(n_k - 5,5) = d(3,5) = k - 13$ เพิ่มจากกรณี $n_k = 6$ และ L_8 ยังคงวัดความยาว $d(n_k - 3,4) = d(5,4) = k - 6$ และ $d(n_k - 4,4) = d(4,4) = k - 8$ ได้เหมือน L_6 แต่ตำแหน่งมีการเปลี่ยนขึ้นอยู่กับจำนวนช่วงความยาว กล่าวคือ ทฤษฎีบทประกอบที่ 2.10 ข้อ 4 และ 5 ยืนยันว่า L_8 สามารถวัดความยาวเพิ่มขึ้นจาก L_6 ได้อีก 2 แบบที่แตกต่างกัน

ดังนั้น โดยทั่วไปทฤษฎีบทประกอบที่ 2.10 ยืนยันว่า ถ้า n_k เป็นจำนวนเต็มคู่ และ $\overline{n}_{\overline{k}} = n_k + 2$ แล้ว $L_{\overline{n}_{\overline{k}}}$ สามารถวัดความยาวเพิ่มขึ้นจาก L_{n_k} ได้อีก 5 แบบที่แตกต่างกัน

ทฤษฎีบทประกอบที่ 2.12 ให้ n_k เป็นจำนวนช่วงความยาวของไม้บรรทัด L_{n_k} ที่ยาว k หน่วย ซึ่งได้จากขั้นตอนวิธีที่ 2.2 หรือ 2.2ก ถ้า n_k เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n_k = 2l + 5$ เมื่อ l เป็นจำนวนนับ แล้ว

1. $d(l+1, n-(l+1)) = 5l + 2$
2. $d(l+2, n-(l+1)) = 5l + 4$
3. $d(n_k - (l+2), 1) = (k-4) - 5l$
4. $d(n_k - (l+3), 2) = (k-5) - 5l$
5. $d(n_k - (l+4), 3) = (k-7) - 5l$

บทพิสูจน์ ให้ n_k เป็นจำนวนช่วงความยาวของไม้บรรทัดที่ได้จากขั้นตอนวิธีที่ 2.2 หรือ 2.2ก สมมติว่า n_k เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n_k = 2l + 5$ เมื่อ l เป็นจำนวนนับ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.2ก จะได้ว่า ไม้บรรทัด L_n มีชุดความยาวเป็น $(1,2,3,\underbrace{5,5,5,\ldots,5}_{l-1},t,\underbrace{5,5,5,\ldots,5}_{l},2,2)$

และ $k = (t+5) + 10l$ หน่วย โดยที่ $t \in \{1,2,3,4,5\}$

1. เนื่องจาก $d(l+1, n-(l+1)) = d(l+1, (2l+5)-(l+1)) = d(l+1, l+4)$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
d(l+1,n-(l+1)) &= d(l+1,l+4) \\
&= d(1,l+4)+\sum_{i=5}^{l+3} d(1,l+i)+d(1,2l+4) \\
&= 5+5(l-1)+d(1,n-1) \\
&= 5+5(l-1)+2 \\
&= 5l+2
\end{aligned}
$$

2. เนื่องจาก $d(l+2,n-(l+1))=d(l+2,(2l+5)-(l+1))=d(l+2,l+4)$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
d(l+2,n-(l+1)) &= d(l+2,l+4) \\
&= d(1,l+4)+\sum_{i=5}^{l+3} d(1,l+i)+d(1,2l+4)+d(1,2l+5) \\
&= 5+5(l-1)+d(1,n-1)+d(1,n) \\
&= 5+5(l-1)+2+2 \\
&= 5l+4
\end{aligned}
$$

3. เนื่องจาก $d(n-(l+2),1)=d(l+3,1)$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
d(n_k-(l+2),1) &= d(l+3,1) \\
&= d(1,1)+d(1,2)+d(1,3)+\sum_{i=1}^{l-1} d(1,3+i)+d(1,l+3) \\
&= 1+2+3+5(l-1)+t \\
&= 6+5(l-1)+t \\
&= t+1+5l \\
&= (t+5)+10l-4-5l \\
&= (k-4)-5l
\end{aligned}
$$

4. เนื่องจาก $d(n-(l+3),2)=d(l+2,2)$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
d(n_k-(l+3),2) &= d(l+2,2) \\
&= d(1,2)+d(1,3)+\sum_{i=1}^{l-1} d(1,3+i)+d(1,l+3) \\
&= 2+3+5(l-1)+t \\
&= 5l+t \\
&= (t+5)+10l-5-5l \\
&= (k-5)-5l
\end{aligned}
$$

5. เนื่องจาก $d(n_k-(l+4),3)=d(l+1,3)$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
d(n_k-(l+4),3) &= d(l+1,3) \\
&= d(1,3)+\sum_{i=1}^{l-1} d(1,3+i)+d(1,l+3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 3 + 5(l-1) + t \\
&= t - 2 + 5l \\
&= (t+5) + 10l - 7 - 5l \\
&= (k-7) - 5l
\end{aligned}
$$

$\square$

ข้อสังเกตที่ 2.13 พิจารณา

กรณี $n_k = 7$ นั่นคือ $l = 1$ และ $L_7 = (1,2,3,t,5,2,2)$ โดยที่ $t \in \{1,2,3,4,5\}$ จากทฤษฎีบทประกอบที่ 2.12 ข้อ 1 และ 2 จะได้ $d(2,n_k - 2) = d(2,5) = 7$ และ $d(3,n_k - 2) = d(3,5) = 9$

กรณี $n_k = 9$ นั่นคือ $l = 2$ และ $L_9 = (1,2,3,5,t,5,5,2,2)$ โดยที่ $t \in \{1,2,3,4,5\}$ จากทฤษฎีบทประกอบที่ 2.12 ข้อ 1 และ 2 จะได้ $d(3,n_k - 3) = d(3,6) = 12$ และ $d(4,n_k - 3) = d(4,6) = 14$ เพิ่มจากกรณี $n_k = 7$ และ L_9 ยังคงวัดความยาว $d(2,n_k - 2) = d(2,7) = 7$ และ $d(3,n_k - 2) = d(3,7) = 9$ ได้เหมือน L_7 แต่ตำแหน่งมีการเปลี่ยนขึ้นอยู่กับจำนวนช่วงความยาว กล่าวคือ ทฤษฎีบทประกอบที่ 2.12 ข้อ 1 และ 2 ยืนยันว่า L_9 สามารถวัดความยาวเพิ่มขึ้นจาก L_7 ได้อีก 2 แบบที่แตกต่างกัน

ต่อมากรณี $n_k = 7$ นั่นคือ $l = 1$ และ $L_7 = (1,2,3,t,5,2,2)$ โดยที่ $t \in \{1,2,3,4,5\}$ จากทฤษฎีบทประกอบที่ 2.12 ข้อ 3 – 5 จะได้ $d(n_k - 3,1) = d(4,1) = k - 9$, $d(n_k - 4,2) = d(3,2) = k - 10$ และ $d(n_k - 5,3) = d(2,3) = k - 12$

กรณี $n_k = 9$ นั่นคือ $l = 2$ และ $L_9 = (1,2,3,5,t,5,5,2,2)$ โดยที่ $t \in \{1,2,3,4,5\}$ จากทฤษฎีบทประกอบที่ 2.12 ข้อ 3 – 5 จะได้
$d(n_k - 4,1) = d(5,1) = k - 14$, $d(n_k - 5,2) = d(4,2) = k - 15$ และ
$d(n_k - 6,3) = d(3,3) = k - 17$ เพิ่มจากกรณี $n_k = 7$ และ L_9 ยังคงวัดความยาว
$d(n_k - 3,1) = d(6,1) = k - 9, d(n_k - 4,2) = d(5,2) = k - 10$ และ
$d(n_k - 5,3) = d(4,3) = k - 12$ ได้เหมือน L_7 แต่ตำแหน่งมีการเปลี่ยนขึ้นอยู่กับจำนวนช่วงความยาว กล่าวคือ ทฤษฎีบทประกอบที่ 2.12 ข้อ 3 – 5 ยืนยันว่า L_9 สามารถวัดความยาวเพิ่มขึ้นจาก L_7 ได้อีก 3 แบบที่แตกต่างกัน

ดังนั้น โดยทั่วไปทฤษฎีบทประกอบที่ 2.12 ยืนยันว่า ถ้า n_k เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $\overline{n}_{\overline{k}} = n_k + 2$ แล้ว $L_{\overline{n}_{\overline{k}}}$ จะสามารถวัดความยาวเพิ่มขึ้นจาก L_{n_k} ได้อีก 5 แบบที่แตกต่างกัน

ข้อสังเกตที่ 2.14 จากข้อสังเกตที่ 2.11 และ 2.13 จะได้ว่า

กรณี $n_k = 6$ จากทฤษฎีบทประกอบที่ 2.10 จะได้ $d(1,3) = 3, d(2,2) = 5, d(3,1) = 6, d(n_k - 3,4) = d(3,4) = k - 6$ และ $d(n_k - 4,4) = d(2,4) = k - 8$

กรณี $n_k = 7$ จากทฤษฎีบทประกอบที่ 2.12 จะได้ $d(2,n_k - 2) = d(2,5) = 7$, $d(3,n_k - 2) = d(3,5) = 9$, $d(n_k - 3,1) = d(4,1) = k - 9$, $d(n_k - 4,2) = d(3,2) = k - 10$ และ $d(n_k - 5,3) = d(2,3) = k - 12$ เพิ่มจากกรณี $n_k = 6$ และ $L_7 = (1,2,3,t,5,2,2)$ ยังคงวัดความยาว $d(1,3) = 3$, $d(2,2) = 5$, $d(3,1) = 6$, $d(n_k - 3,4) = d(4,4) = k - 6$ และ $d(n_k - 4,4) = d(3,4) = k - 8$ ได้เหมือน L_6 ซึ่งบางความยาวอยู่ในตำแหน่งเดิม และบางความยาวเปลี่ยนตำแหน่งไปขึ้นอยู่กับจำนวนช่วงความยาว

กล่าวคือ โดยทั่วไปทฤษฎีบทประกอบที่ 2.10 และ 2.12 ยืนยันว่า ถ้า $\hat{n}_{\hat{k}} = n_k + 1$ แล้ว $L_{\hat{n}_{\hat{k}}}$ จะสามารถวัดความยาวเพิ่มขึ้นจาก L_{n_k} ได้อีก 5 แบบที่แตกต่างกัน

ทฤษฎีบทที่ 2.15 สำหรับจำนวนนับ k ที่ $k > 10$ และ $k \not\equiv 9 (\mathrm{mod}\,10)$ ถ้า L_{n_k} เป็นไม้บรรทัดที่แบ่งตามขั้นตอนวิธีที่ 2.2 หรือ 2.2ก แล้ว L_{n_k} เป็นไม้บรรทัด k หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด

บทพิสูจน์ <u>กรณี</u> $k \in \{11,12,13,14,15\}$ จากข้อสังเกตที่ 2.9 ของทฤษฎีบทประกอบที่ 2.8 จะได้ว่าทฤษฎีบทที่ 2.15 เป็นจริง

<u>กรณี</u> $k > 15$ และ $k \not\equiv 9 (\mathrm{mod}\,10)$ จะแสดงว่าทฤษฎีบทที่ 2.15 เป็นจริงโดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์อย่างเข้มบนจำนวนช่วงความยาว n_k ของไม้บรรทัด L_{n_k} ที่แบ่งตามขั้นตอนวิธีที่ 2.2 หรือ 2.2ก สำหรับจำนวนนับ $n_k \geq 7$ ให้ $P(n_k)$ แทนข้อความที่ว่า L_{n_k} เป็นไม้บรรทัดที่แบ่งตามขั้นตอนวิธีที่ 2.2 หรือ 2.2ก เป็นไม้บรรทัด k หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด

<u>ขั้นฐาน</u> พิจารณา $n_k = 7$ จะได้ $k \in \{16,17,18,20\}$ โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 2.8 จะได้ว่าไม้บรรทัด $L_7 = \left(1,2,3,t,5,2,2\right)$ วัดความยาว $1,2,3,4,5,6,k-8,k-7,k-6,k-5,k-4$, $k-3$, $k-2,k-1$ และ k หน่วยได้ ต่อมาโดยทฤษฎีบทประกอบที่ 2.12 จะได้ว่าไม้บรรทัด L_7 วัดความยาว $7,9,k-12,k-10$ และ $k-9$ หน่วยได้ ดังนั้น L_7 เป็นไม้บรรทัด k หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด จึงสรุปว่า $P(7)$ เป็นจริง

พิจารณาเมื่อ $n_k = 8$ จะได้ $k \in \{21,22,23,24,25\}$ ข้อสังเกตที่ 2.14 ยืนยันว่า L_8 สามารถวัดความยาวเพิ่มขึ้นจาก L_7 ได้อีก 5 แบบที่แตกต่างกัน นั่นคือ L_8 เป็นไม้บรรทัด k หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด จึงสรุปว่า $P(8)$ เป็นจริง

<u>ขั้นอุปนัย</u> ให้ m_k เป็นจำนวนนับที่ $m_k \geq 7$ สมมติว่า $P(7), P(8), P(9), ..., P(m_k)$ เป็นจริง จะแสดงว่า $P(\hat{m}_{\hat{k}})$ เป็นจริง เมื่อ $\hat{m}_{\hat{k}} = m_k + 1$

<u>กรณี</u> m_k เป็นจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่ามีจำนวนนับ l ที่ $m_k = 2l + 6$

เมื่อ $P(m_k)$ เป็นจริง จะได้ว่า ไม้บรรทัด L_{m_k} อยู่ในรูป

$L_{2l+6} = (1,2,3,\underbrace{5,5,5,\ldots,5}_{l},t,\underbrace{5,5,5,\ldots,5}_{l},2,2)$ เป็นไม้บรรทัด k หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด นั่นคือ สามารถวัดความยาว $1,2,3,\ldots,k$ หน่วย โดยที่ $k = (10+t)+10l$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 1.3.4 ไม้บรรทัด L_{2l+6} มี $\left|D\right| = (10+t)+10l$

ต่อมา พิจารณา $\hat{m}_{\hat{k}}$ เมื่อ $\hat{m}_{\hat{k}} = m_k + 1$ จะได้ว่า $\hat{m}_{\hat{k}} = m_k + 1 = 2l + 7$ นั่นคือ $\hat{m}_{\hat{k}}$ เป็นจำนวนเต็มคี่ และ ไม้บรรทัด $L_{\hat{m}_{\hat{k}}}$ อยู่ในรูป $L_{2l+7} = (1,2,3,\underbrace{5,5,5,\ldots,5}_{l},t,\underbrace{5,5,5,\ldots,5}_{l+1},2,2)$

และ $\hat{k} = (10+t)+5(2l+1) = (10+t)+10l+5 = k+5$ จากข้อสังเกตที่ 2.14 จะได้ว่า ไม้บรรทัด L_{2l+7} สามารถวัดความยาวเพิ่มขึ้นจาก L_{2l+6} ได้อีก 5 แบบที่แตกต่างกัน นั่นคือ ไม้บรรทัด L_{2l+7} มี $\left|D\right| = (10+t)+10l+5 = (15+t)+10l = \hat{k}$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 1.3.4 ไม้บรรทัด $L_{\hat{m}_{\hat{k}}} = L_{2l+7}$ เป็นไม้บรรทัด $\hat{k}$ หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด

จึงสรุปได้ว่า $P(\hat{m}_{\hat{k}})$ เป็นจริง

<u>กรณี</u> m_k เป็นจำนวนเต็มคี่ จะได้ว่ามีจำนวนนับ l ที่ $m_k = 2l + 5$ เมื่อ $P(m_k)$ เป็นจริง จะได้ว่า ไม้บรรทัด L_{m_k} อยู่ในรูป $L_{2l+5} = (1,2,3,\underbrace{5,5,5,\ldots,5}_{l-1},t,\underbrace{5,5,5,\ldots,5}_{l},2,2)$ เป็นไม้บรรทัด k หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด นั่นคือ สามารถวัดความยาว $1,2,3,\ldots,k$ หน่วย โดยที่ $k = 10+t+5(2l-1) = (5+t)+10l$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 1.3.4 ไม้บรรทัด L_{2l+5} มี $\left|D\right| = (5+t)+10l$

ต่อมา พิจารณา $\hat{m}_{\hat{k}}$ เมื่อ $\hat{m}_{\hat{k}} = m_k + 1$ จะได้ว่า $\hat{m}_{\hat{k}} = m_k + 1 = 2l + 6$ นั่นคือ $\hat{m}_{\hat{k}}$ เป็นจำนวนเต็มคู่ และ ไม้บรรทัด $L_{\hat{m}_{\hat{k}}}$ อยู่ในรูป $L_{2l+6} = (1,2,3,\underbrace{5,5,5,\ldots,5}_{l},t,\underbrace{5,5,5,\ldots,5}_{l},2,2)$

และ $\hat{k} = (10+t)+5(2l) = (10+t)+10l = k+5$ จากข้อสังเกตที่ 2.14 จะได้ว่าไม้บรรทัด L_{2l+6} สามารถวัดความยาวเพิ่มขึ้นจาก L_{2l+5} ได้อีก 5 แบบที่แตกต่างกัน นั่นคือ ไม้บรรทัด L_{2l+6}

มี $\left|D\right| = (5+t)+10l+5=(10+t)+10l=\hat{k}$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 1.3.4 ไม้บรรทัด $L_{\hat{m}_{\hat{k}}} = L_{2l+6}$ เป็นไม้บรรทัด $\hat{k}$ หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด จึงสรุปได้ว่า $P(\hat{m}_{\hat{k}})$ เป็นจริง โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่าทฤษฎีบทที่ 2.15 เป็นจริง

$\square$

ต่อไปจะพิจารณาการแบ่งไม้บรรทัดยาว k หน่วย สำหรับกรณี $k \equiv 9(\bmod 10)$ แบ่งโดยขั้นตอนวิธีที่ 2.3 หรือ 2.3ก

ตัวอย่างที่ 2.16 พิจารณาไม้บรรทัด 19 หน่วย โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.3 หรือ 2.3ก จะได้ $n_{19} = 7$ และ $L_7 = (1,2,5,5,2,2,2)$ จะได้รูปสามเหลี่ยมผลต่างของ L_7 ดังรูป

1 2 5 5 2 2 2
3 7 10 7 4 4
8 12 12 9 6
13 14 14 11
15 16 16
17 18
19

สำหรับกรณี $k \equiv 9(\bmod 10)$ จะใช้ทฤษฎีบทประกอบเหล่านี้ในการช่วยนำไปสู่ทฤษฎีบทที่จะตรวจสอบว่าขั้นตอนวิธีที่ 2.3 หรือ 2.3ก ทำให้ได้ไม้บรรทัด k หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาดหรือไม่

ทฤษฎีบทประกอบที่ 2.17 ให้ n_k เป็นจำนวนช่วงความยาวของไม้บรรทัด L_{n_k} ที่ยาว k หน่วย ซึ่งได้จากขั้นตอนวิธีที่ 2.3 หรือ 2.3ก แล้ว

1. $d(1,1)=1$
2. $d(1,2)=2$
3. $d(2,1)=3$
4. $d(2,n_k-1)=4$
5. $d(1,3)=5$
6. $d(3,n_k-2)=6$
7. $d(2,2)=7$
8. $d(3,1)=8$
9. $d(3,n_k-3)=9$
10. $d(2,3)=10$
11. $d(4,n_k-3)=11$
12. $d(3,2)=12$
13. $d(4,1)=13$
14. $d(4,n_k-4)=14$
15. $d(n_k,1)=k$
16. $d(n_k-1,2)=k-1$
17. $d(n_k-1,1)=k-2$
18. $d(n_k-2,3)=k-3$
19. $d(n_k-2,1)=k-4$

บทพิสูจน์ ให้ n_k เป็นจำนวนช่วงความยาวของไม้บรรทัดที่ได้จากขั้นตอนวิธีที่ 2.3 หรือ 2.3ก จะได้ว่า ไม้บรรทัด k หน่วย L_{n_k} มีชุดความยาวเป็น $(1,2,\underbrace{5,5,5,\ldots,5}_{n_k-5},2,2,2)$

เห็นได้ชัดว่า 1, 2 และ 5 เป็นจริง ต่อมา

3. โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้ว่า $d(2,1)=d(1,1)+d(1,2)=1+2=3$

4. โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้ว่า $d(2,n_k-1)=d(1,n_k-1)+d(1,n_k)=2+2=4$

6. โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้ว่า

$$d(3,n_k-2)=d(1,n_k-2)+d(1,n_k-1)+d(1,n_k)$$
$$=2+2+2=6$$

7. โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้ว่า $d(2,2)=d(1,2)+d(1,3)=2+5=7$

8. โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้ว่า

$$d(3,1)=d(1,1)+d(1,2)+d(1,3)=1+2+5=8$$

9. โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้ว่า

$$d(3,n_k-3)=d(1,n_k-3)+d(1,n_k-2)+d(1,n_k-1)$$
$$=5+2+2=9$$

10. โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้ว่า $d(2,3)=d(1,3)+d(1,4)=5+5=10$

11. โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้ว่า

$$d(4,n_k-3)=d(1,n_k-3)+d(1,n_k-2)+d(1,n_k-1)+d(1,n_k)$$
$$=5+2+2+2=11$$

12. โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้ว่า

$$d(3,2)=d(1,2)+d(1,3)+d(1,4)=2+5+5=12$$

13. โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้ว่า

$$d(4,1)=d(1,1)+d(1,2)+d(1,3)+d(1,4)=1+2+5+5=13$$

14. โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้ว่า

$$d(4,n_k-4)=d(1,n_k-4)+d(1,n_k-3)+d(1,n_k-2)+d(1,n_k-1)$$
$$=5+5+2+2=14$$

15. โดยทฤษฎีบทที่ 1.3.3 $d(n_k,1)=k$

16. โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 และ $\sum_{j=1}^{n_k} d(1,j)=k$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d(n_k-1,2) &= d(1,2)+d(1,3)+d(1,4)+\ldots+d(1,n_k) \\ &= \sum_{j=1}^{n_k} d(1,j)-d(1,1) \\ &= k-1 \end{aligned}$$

17. โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 และ $\sum_{j=1}^{n_k} d(1,j)=k$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d(n_k-1,1) &= d(1,1)+d(1,2)+d(1,3)+\ldots+d(1,n_k-1) \\ &= \sum_{j=1}^{n_k} d(1,j)-d(1,n_k) \\ &= k-2 \end{aligned}$$

18. โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 และ $\sum_{j=1}^{n_k} d(1,j)=k$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d(n_k-2,3) &= d(1,3)+d(1,4)+d(1,5)+\ldots+d(1,n_k) \\ &= \sum_{j=1}^{n_k} d(1,j)-d(1,1)-d(1,2) \\ &= k-1-2=k-3 \end{aligned}$$

19. โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 และ $\sum_{j=1}^{n_k} d(1,j)=k$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d(n_k-2,1) &= d(1,1)+d(1,2)+d(1,3)+\ldots+d(1,n_k-2) \\ &= \sum_{j=1}^{n_k} d(1,j)-d(1,n_k-1)-d(1,n_k) \\ &= k-2-2=k-4 \end{aligned}$$

$\square$

ทฤษฎีบทประกอบที่ 2.18 ให้ n_k เป็นจำนวนช่วงความยาวของไม้บรรทัด L_{n_k} ที่ได้จากขั้นตอนวิธีที่ 2.3 หรือ 2.3ก ถ้า n_k เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n_k=2l+5$ เมื่อ l เป็นจำนวนนับ แล้ว

1. $d(1+2(l-1),3)=10l-5$
2. $d(3+2(l-1),n_k-2l)=10l-4$
3. $d(2+2(l-1),2)=10l-3$
4. $d(3+2(l-1),1)=10l-2$
5. $d(3+2(l-1),n_k-(2l+1))=10l-1$
6. $d(2+2(l-1),3)=10l$
7. $d(4+2(l-1),n_k-(2l+1))=10l+1$
8. $d(3+2(l-1),2)=10l+2$
9. $d(4+2(l-1),1)=10l+3$
10. $d(4+2(l-1),n_k-2(l+1))=10l+4$

บทพิสูจน์ ให้ n_k เป็นจำนวนช่วงความยาวของไม้บรรทัดที่ได้จากขั้นตอนวิธีที่ 2.3 หรือ 2.3ก สมมติว่า n_k เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n_k = 2l+5$ เมื่อ l เป็นจำนวนนับ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.3ก จะได้ว่า ไม้บรรทัด L_{n_k} มีชุดความยาวเป็น $(1,2,\underbrace{5,5,5,\ldots,5}_{2l},2,2,2)$

1. เนื่องจาก $d(1+2(l-1),3) = d(2l-1,3)$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d(1+2(l-1),3) &= d(2l-1,3) \\ &= \sum_{i=0}^{2l-2} d(1,3+i) \\ &= 5(2l-1) \\ &= 10l-5 \end{aligned}$$

2. เนื่องจาก $d(3+2(l-1),n_k-2l) = d(2l+1,5)$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d(3+2(l-1),5) &= d(2l+1,5) \\ &= \sum_{i=0}^{2l-3} d(1,5+i) + d(1,2l+3) + d(1,2l+4) + d(1,2l+5) \\ &= 5(2l-2)+2+2+2 \\ &= 6+5(2l-2) \\ &= 10l-4 \end{aligned}$$

3. เนื่องจาก $d(2+2(l-1),2) = d(2l,2)$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d(2+2(l-1),2) &= d(2l,2) \\ &= d(1,2) + \sum_{i=1}^{2l-1} d(1,2+i) \\ &= 2+5(2l-1) \\ &= 10l-3 \end{aligned}$$

4. เนื่องจาก $d(3+2(l-1),1) = d(2l+1,1)$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d(3+2(l-1),1) &= d(2l+1,1) \\ &= d(1,1) + d(1,2) + \sum_{i=1}^{2l-1} d(1,2+i) \\ &= 1+2+5(2l-1) \\ &= 3+5(2l-1) \\ &= 10l-2 \end{aligned}$$

5. เนื่องจาก $d(3+2(l-1),n_k-(2l+1)) = d(2l+1,4)$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3

$$
\begin{aligned}
d(3+2(l-1),4) &= d(2l+1,4) \\
&= d(1,4) + \sum_{i=1}^{2l-2} d(1,4+i) + d(1,2l+3) + d(1,2l+4) \\
&= 5 + 5(2l-2) + 2 + 2 \\
&= 10l - 1
\end{aligned}
$$

6. เนื่องจาก $d(2+2(l-1),3) = d(2l,3)$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
d(2+2(l-1),3) &= d(2l,3) \\
&= d(1,3) + \sum_{i=1}^{2l-1} d(1,3+i) \\
&= 5 + 5(2l-1) \\
&= 10l
\end{aligned}
$$

7. เนื่องจาก $d(4+2(l-1),n_k-(2l+1)) = d(2l+2,4)$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3

$$
\begin{aligned}
d(4+2(l-1),4) &= d(2l+2,4) \\
&= d(1,4) + \sum_{i=1}^{2l-2} d(1,4+i) + d(1,2l+3) + d(1,2l+4) + d(1,2l+5) \\
&= 5 + 5(2l-2) + 2 + 2 + 2 \\
&= 11 + 10(l-1) = 10l + 1
\end{aligned}
$$

8. เนื่องจาก $d(3+2(l-1),2) = d(2l+1,2)$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
d(3+2(l-1),2) &= d(2l+1,2) \\
&= d(1,2) + \sum_{i=1}^{2l} d(1,2+i) \\
&= 2 + 5(2l) \\
&= 10l + 2
\end{aligned}
$$

9. เนื่องจาก $d(4+2(l-1),1) = d(2l+2,1)$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
d(4+2(l-1),1) &= d(2l+2,1) \\
&= d(1,1) + d(1,2) + \sum_{i=1}^{2l} d(1,2+i) \\
&= 1 + 2 + 5(2l) \\
&= 10l + 3
\end{aligned}
$$

10. เนื่องจาก $d(4+2(l-1),n_k-(2l+2)) = d(2l+2,3)$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 1.2.3

$$
\begin{aligned}
d(4+2(l-1),3) &= d(2l+2,3) \\
&= d(1,3) + \sum_{i=1}^{2l-1} d(1,3+i) + d(1,2l+3) + d(1,2l+4) \\
&= 5(2l) + 2 + 2 \\
&= 10l + 4
\end{aligned}
$$

$\square$

ข้อสังเกตที่ 2.19 พิจารณา

กรณี $n_k = 7$ นั่นคือ $l = 1$ และ $L_7 = (1,2,5,5,2,2,2)$ จากทฤษฎีบทประกอบที่ 2.18 จะได้ $d(1,3) = 5, d(3,n_k - 2) = d(3,5) = 6, d(2,2) = 7, d(3,1) = 8, d(3,n_k - 3) = d(3,4) = 9, d(2,3) = 10, d(4,n_k - 3) = d(4,4) = 11, d(3,2) = 12, d(4,1) = 13$ และ $d(4,n_k - 4) = d(4,3) = 14$

กรณี $n_k = 9$ นั่นคือ $l = 2$ และ $L_9 = (1,2,5,5,5,5,2,2,2)$ จากทฤษฎีบทประกอบที่ 2.18 จะได้ $d(3,3) = 15,\ d(5,n_k - 4) = d(5,5) = 16, d(4,2) = 17, d(5,1) = 18, d(5,n_k - 5) = d(5,4) = 19, d(4,3) = 20, d(6,n_k - 5) = d(6,4) = 21, d(5,2) = 22, d(6,1) = 23$ และ $d(6,n_k - 6) = d(6,3) = 24$ เพิ่มจากกรณี $n_k = 7$ และ L_9 ยังคงวัดความยาว $d(1,3) = 5, d(3,n_k - 2) = d(3,7) = 6, d(2,2) = 7, d(3,1) = 8, d(3,n_k - 3) = d(3,6) = 9,\ d(2,3) = 10, d(4,n_k - 3) = d(4,6) = 11, d(3,2) = 12, d(4,1) = 13$ และ $d(4,n_k - 4) = d(4,5) = 14$ โดยความยาวเหล่านี้บางความยาวอยู่ในตำแหน่งเดิมและบางความยาวเปลี่ยนตำแหน่งขึ้นอยู่กับจำนวนช่วงความยาว กล่าวคือ ทฤษฎีบทประกอบที่ 2.18 ยืนยันว่า L_9 ที่ได้จากขั้นตอนวิธีที่ 2.3 หรือ 2.3ก สามารถวัดความยาวเพิ่มขึ้นจาก L_7 ได้อีก 10 แบบที่แตกต่างกัน

ดังนั้น โดยทั่วไปจากทฤษฎีบทประกอบที่ 2.18 ยืนยันว่า ถ้า n_k เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $\bar{n}_{\bar{k}} = n_k + 2$ แล้ว $L_{\bar{n}_{\bar{k}}}$ สามารถวัดความยาวเพิ่มขึ้นจาก L_{n_k} ได้อีก 10 แบบที่แตกต่างกัน

ทฤษฎีบทที่ 2.20 สำหรับจำนวนนับ k ที่ $k > 10$ และ $k \equiv 9 (\mathrm{mod}\, 10)$ ถ้า L_{n_k} เป็นไม้บรรทัดที่แบ่งตามขั้นตอนวิธีการแบ่งที่ 2.3 หรือ 2.3ก จะได้ว่า L_{n_k} เป็นไม้บรรทัดวัด k หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด

บทพิสูจน์ ให้ k เป็นจำนวนนับที่ $k > 10$ และ $k \equiv 9 (\mathrm{mod}\, 10)$ จากขั้นตอนวิธีที่ 2.3 หรือ 2.3ก จะได้ว่า n_k เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n_k = 2l + 5$ เมื่อ l เป็นจำนวนนับ จะแสดงว่าทฤษฎีบทที่ 2.20 เป็นจริงโดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บนจำนวนนับ l ดังกล่าว
สำหรับจำนวนนับ l ใดๆ ให้ $P(l)$ แทนข้อความที่ว่า ไม้บรรทัด L_{n_k} ที่มีจำนวนช่วงความยาว $n_k = 2l + 5$ แบ่งตามขั้นตอนวิธีที่ 2.3 หรือ 2.3ก เป็นไม้บรรทัด k หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด

ขั้นฐาน พิจารณา $l=1$ จะได้ว่า $n_{19}=7$ และ $k=19$ โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 2.17 จะได้ว่าไม้บรรทัด $L_7=\left(1,2,5,5,2,2,2\right)$ วัดความยาว $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,k-4,\ k-3,\ k-2,k-1$ และ k หน่วยได้ ดังนั้น L_7 เป็นไม้บรรทัด 19 หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด จึงสรุปว่า $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย ให้ m เป็นจำนวนนับ สมมติว่า $P(m)$ เป็นจริง จะได้ว่า $n_k=2m+5$ และไม้บรรทัด L_{n_k} อยู่ในรูป $L_{2m+5}=(1,2,\underbrace{5,5,5,\ldots,5}_{2m},2,2,2)$ เป็นไม้บรรทัด k หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด นั่นคือ สามารถวัดความยาว $1,2,3,\ldots,k$ หน่วย โดยที่ $k=9+5(2m)=9+10m$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 1.3.4 ไม้บรรทัด L_{2m+5} มี $\left|D\right|=9+10m$

จะแสดงว่า $P(m+1)$ เป็นจริง

โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.3 หรือ 2.3ก จะได้ว่าเมื่อ $l=m+1$ แล้วจำนวนช่วงความยาวจะเป็น $\overline{n}_{\overline{k}}=2(m+1)+5=2m+7$ ช่วง และไม้บรรทัด $L_{\overline{n}_{\overline{k}}}$ อยู่ในรูป $L_{2m+7}=(1,2,\underbrace{5,5,5,\ldots,5}_{2m+2},2,2,2)$ และ $\overline{k}=9+5(2m+2)=19+10m=k+10$ โดยข้อสังเกตที่ 2.19 จะได้ว่าไม้บรรทัด L_{2m+7} สามารถวัดความยาวเพิ่มขึ้นจาก L_{2m+5} ได้อีก 10 แบบที่แตกต่างกัน นั่นคือ ไม้บรรทัด L_{2m+7} มี $\left|D\right|=9+10m+10=19+10m=\hat{k}$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 1.3.4 ไม้บรรทัด $L_{\overline{n}_{\overline{k}}}=L_{2m+7}$ เป็นไม้บรรทัด $\overline{k}$ หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด จึงได้ว่า $P(m+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่าทฤษฎีบทที่ 2.20 เป็นจริง

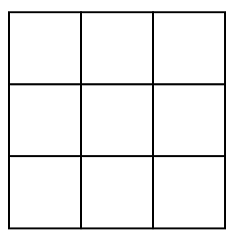
$\square$

บทที่ 3

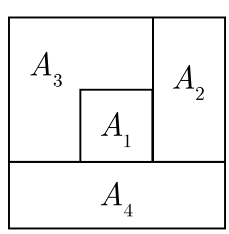
รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีพื้นที่ทุกขนาด

ในบทนี้จะขยายแนวคิดของไม้บรรทัด k หน่วยวัดได้ทุกขนาดในบทที่ 2 ซึ่งเป็นการวัดในหนึ่งมิติมาเป็นการวัดพื้นที่ให้ได้ทุกขนาดซึ่งเป็นการวัดในสองมิติ โดยพื้นที่ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไปนี้จะเป็นพื้นที่ทั้งหมดของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $k \times k$ ตารางหน่วย หรือเป็นพื้นที่ย่อยที่มีขนาดเป็นจำนวนนับและเป็นส่วนหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $k \times k$ ตารางหน่วย

บทนิยามที่ 3.1 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $k \times k$ ตารางหน่วยที่แบ่งแบบปกติ คือ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k \times k$ ตารางหน่วยที่แบ่งออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสย่อยที่มีพื้นที่รูปละหนึ่งตารางหน่วย เช่น รูปต่อไปนี้ คือ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 3×3 ตารางหน่วยที่แบ่งแบบปกติ

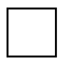


บทนิยามที่ 3.2 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $k \times k$ ตารางหน่วยที่แบ่งแบบไม่ปกติ คือ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k \times k$ ตารางหน่วยที่ไม่ใช่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $k \times k$ ตารางหน่วยที่แบ่งแบบปกติ แต่เกิดจากการแบ่งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k \times k$ ตารางหน่วยออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมที่มีด้านแต่ละด้านมีความยาวเป็นจำนวนนับและขนานกับด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสดังกล่าว นั่นคือ รูปหลายเหลี่ยมที่เกิดจากการแบ่งอาจมีพื้นที่กี่ตารางหน่วยก็ได้ และรูปหลายเหลี่ยมแต่ละชิ้นอาจจะมีพื้นที่เท่ากันหรือไม่ก็ได้ เช่น รูปต่อไปนี้ คือ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 3×3 ตารางหน่วยที่แบ่งแบบไม่ปกติที่ประกอบด้วยรูปหลายเหลี่ยม 4 รูป

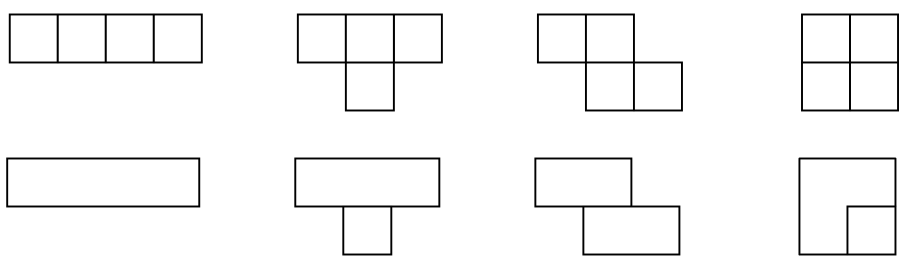


บทนิยามที่ 3.3 **พื้นที่แบบต่อเนื่อง** คือ พื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมในบทนิยามที่ 3.2 จำนวน 1 ชิ้น หรือพื้นที่ซึ่งเกิดจากผลรวมของพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมบางรูปจากรูปหลายเหลี่ยม $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ ที่เกิดจากการแบ่งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k \times k$ ตารางหน่วย โดยรูปหลายเหลี่ยมทั้งหลายที่จะนำมารวมกันได้นั้นต้องมีเงื่อนไขว่า สำหรับรูปหลายเหลี่ยม A_i จะมีรูปหลายเหลี่ยม A_j ที่ด้านใดด้านหนึ่งอย่างน้อยหนึ่งด้านของรูปหลายเหลี่ยม A_i เชื่อมติดกันกับรูปหลายเหลี่ยม A_j และความยาวของด้านที่เชื่อมติดกันนั้นเป็นจำนวนนับ

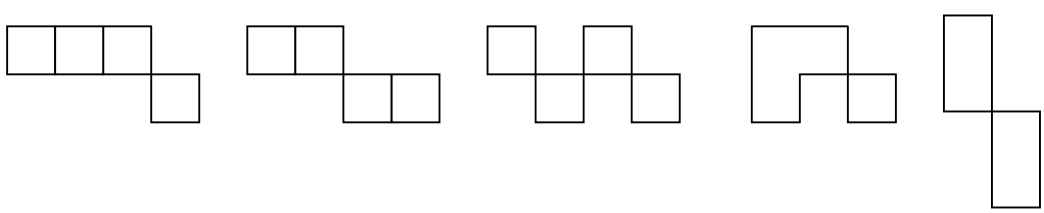
สำหรับพื้นที่ที่ไม่ใช่พื้นที่แบบต่อเนื่องจะเรียกว่า**พื้นที่แบบไม่ต่อเนื่อง**

ต่อไปนี้กำหนดให้  แทนพื้นที่ขนาด 1 ตารางหน่วย

ตัวอย่างที่ 3.4 พื้นที่แบบต่อเนื่อง 4 ตารางหน่วย เช่น



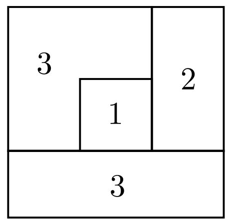
ตัวอย่างที่ 3.5 พื้นที่แบบไม่ต่อเนื่อง 4 ตารางหน่วย เช่น



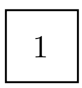
หมายเหตุ สำหรับวิทยานิพนธ์เล่มนี้ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $k \times k$ ตารางหน่วย จะหมายถึง รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $k \times k$ ตารางหน่วยที่แบ่งแบบไม่ปกติ และเมื่อกล่าวถึงขนาดของพื้นที่ จะหมายถึงพื้นที่แบบต่อเนื่องเท่านั้น และถ้าขนาดพื้นที่ใดเกิดจากพื้นที่แบบต่อเนื่องได้หลายวิธี ผู้เขียนจะขอยกตัวอย่างเพียง 1 วิธีเท่านั้น

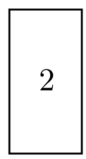
บทนิยามที่ 3.6 สำหรับจำนวนนับ k ใดๆ **รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส** $k \times k$ **ตารางหน่วยที่มีพื้นที่ทุกขนาด** คือ สี่เหลี่ยมจัตุรัส $k \times k$ ตารางหน่วยที่แบ่งแบบไม่ปกติ และมีพื้นที่แบบต่อเนื่องขนาดตั้งแต่ $1, 2, 3, \ldots,\ k \times k$ ตารางหน่วย

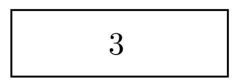
ตัวอย่างที่ 3.7 พิจารณารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 3×3 ตารางหน่วย



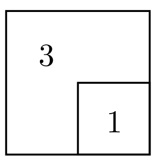
จะได้ว่ารูปดังกล่าวจะมีพื้นที่ขนาดต่างๆ ดังต่อไปนี้

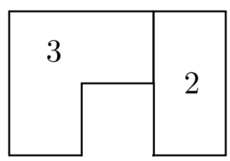
1 ตารางหน่วย คือ 

, 2 ตารางหน่วย คือ 

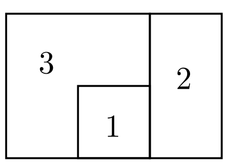
, 3 ตารางหน่วย คือ 

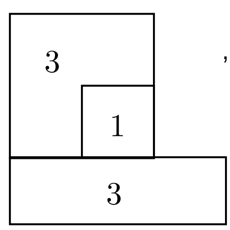
,

4 ตารางหน่วย คือ 

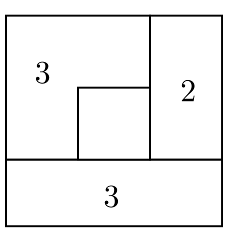
, 5 ตารางหน่วย คือ 

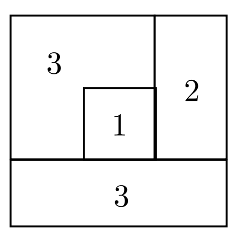
,

6 ตารางหน่วย คือ 

, 7 ตารางหน่วย คือ 

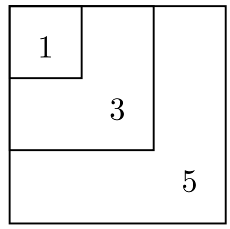
,

8 ตารางหน่วย คือ 

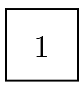
, 9 ตารางหน่วย คือ 

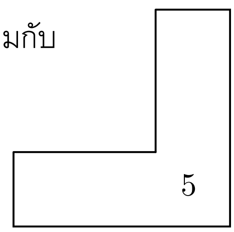
นั่นคือรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 3×3 ตารางหน่วยที่กำหนดให้นี้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 3×3 ตารางหน่วยที่มีพื้นที่ทุกขนาด

ตัวอย่างที่ 3.8 พิจารณารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 3×3 ตารางหน่วย



จะได้ว่ารูปดังกล่าวจะไม่มีพื้นที่ขนาด 2,6 และ 7 ตารางหน่วย

แม้ว่า 

รวมกับ 

จะเท่ากับ 6 ตารางหน่วย แต่เป็นพื้นที่แบบไม่ต่อเนื่อง

นั่นคือรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 3×3 ตารางหน่วยที่กำหนดให้นี้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 3×3 ตารางหน่วยที่ไม่มีพื้นที่ทุกขนาด

จากตัวอย่างข้างต้น สรุปได้ว่าวิธีการแบ่งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k\times k$ ตารางหน่วยออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมย่อยๆ เป็นปัจจัยที่มีผลในการได้พื้นที่แต่ละขนาด เช่นเดียวกับการแบ่งช่วงความยาวของไม้บรรทัดเพื่อให้ได้เป็นไม้บรรทัดที่วัดความยาวได้ทุกขนาด ผู้วิจัยจึงสนใจจะนำเสนอวิธีการแบ่งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k\times k$ ตารางหน่วย เพื่อให้ได้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $k\times k$ ตารางหน่วยที่มีพื้นที่ทุกขนาด

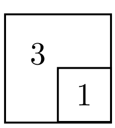
บทที่ 4

การแบ่งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสให้มีพื้นที่ทุกขนาด

พิจารณารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k \times k$ ตารางหน่วย กำหนดให้ $\boxed{}$ แทนพื้นที่ขนาด 1 ตารางหน่วย และ s_{ij} เป็นสัญลักษณ์แทนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1 ตารางหน่วยในแถวที่ i และหลักที่ j ดังนั้นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k \times k$ ตารางหน่วย สามารถพิจารณาได้ว่าประกอบมาจาก s_{ij} เมื่อ $i, j \in \{1,2,3,...,k\}$ ดังรูป

s_{11}	s_{12}	s_{13}	$\cdots$	s_{1k}
s_{21}	s_{22}	s_{23}	$\cdots$	s_{2k}
s_{31}	s_{32}	s_{33}	$\cdots$	s_{3k}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
s_{k1}	s_{k2}	s_{k3}	$\cdots$	s_{kk}

เพื่อความสะดวกในการกำหนดสัญลักษณ์จะพิจารณาการแบ่งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k \times k$ ตารางหน่วยเป็นการหลอมรวม s_{ij} บางชิ้นที่มีด้านอย่างน้อย 1 ด้านอยู่ติดกันให้เป็นรูปหลายเหลี่ยมที่มีพื้นที่ใหญ่ขึ้น ทั้งนี้จะใช้สัญลักษณ์ $+$ หรือ Σ แสดงการหลอมรวม s_{ij} บางชิ้นที่อยู่ติดกัน เช่น $s_{ij} + s_{i,j+1}$ จะหมายถึงการหลอมรวม $\boxed{s_{ij}}$ กับ $\boxed{s_{i,j+1}}$ เป็น $\boxed{s_{ij} \,\vdots\, s_{i,j+1}}$ ที่มีขนาด 2 ตารางหน่วย โดยจะเขียนตัวเลขกำกับขนาดพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมที่เป็นผลจากการหลอมรวมไว้ภายในดังนี้ $\boxed{\quad 2 \quad}$ และเมื่อทราบขนาดพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม

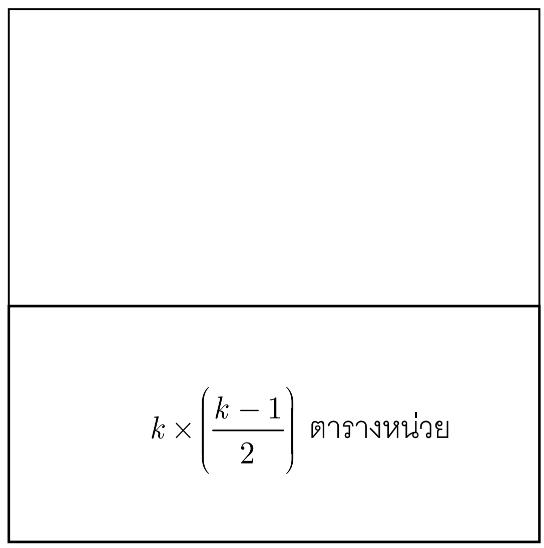
เช่น 

จะใช้สัญลักษณ์ $1+3=4$ แทนการหลอมรวมพื้นที่ขนาด 1 กับ 3 เป็น 4 ตารางหน่วย

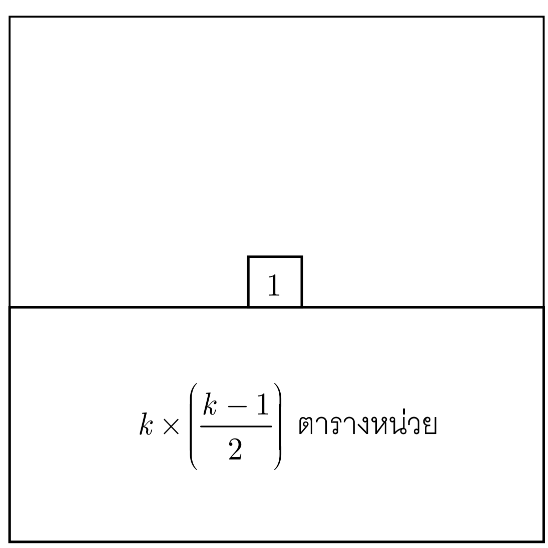
ต่อไปจะได้นำเสนอขั้นตอนวิธีการแบ่งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k \times k$ ตารางหน่วยโดยแบ่งเป็นขั้นตอนวิธีสำหรับ k ที่เป็นจำนวนเต็มคี่ และ จำนวนเต็มคู่ตามลำดับ และจากนั้นจะนำเสนอบทพิสูจน์ที่จะยืนยันว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k \times k$ ตารางหน่วย ที่ได้จากการแบ่งดังกล่าวเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $k \times k$ ตารางหน่วยที่มีพื้นที่ทุกขนาด

ขั้นตอนวิธีที่ 4.1 ให้ k เป็นจำนวนเต็มคี่ในรูป $k = 2m - 1$ เมื่อ m เป็นจำนวนนับ

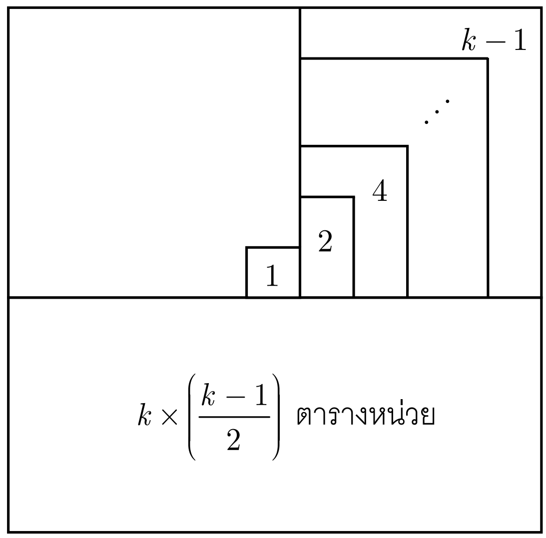
4.1.1 แบ่งโดยพิจารณาการหลอมรวมพื้นที่ขนาด 1 ตารางหน่วยในรูป $\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{k} s_{m+i,j}$ นั่นคือ แบ่งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k \times k$ ตารางหน่วยออกเป็นสองส่วน โดยส่วนล่างมีพื้นที่เป็น $k \times \left(\dfrac{k-1}{2}\right)$ ตารางหน่วย ดังรูป



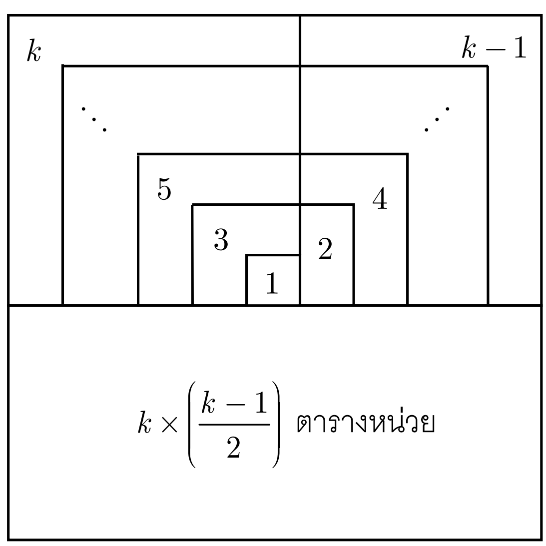
4.1.2 แบ่งโดยใช้ s_{mm} จะได้พื้นที่ 1 ตารางหน่วย ดังรูป



4.1.3 สำหรับแต่ละ $i \in \{m-1, m-2, m-3, \ldots, m-\frac{k-1}{2}\}$ แบ่งโดยพิจารณาการหลอมรวมพื้นที่ขนาด 1 ตารางหน่วยในรูป $\sum_{j=1}^{m-i} s_{i+j,2m-i} + \sum_{j=0}^{m-i-1} s_{i,m+j+1}$ จะได้พื้นที่ $2, 4, 6, \ldots, k-1$ ตารางหน่วย ดังรูป

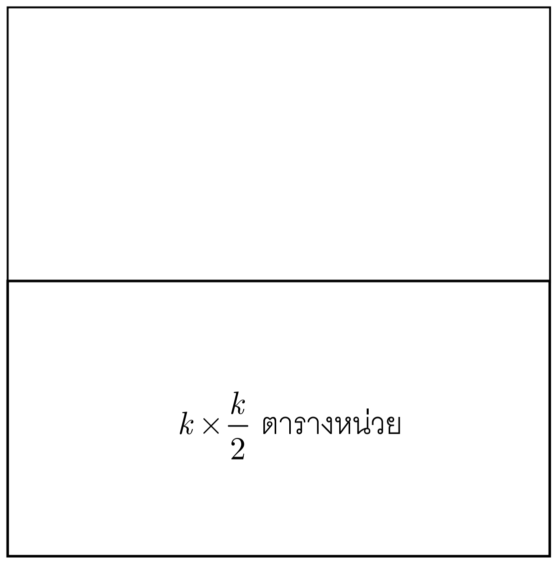


4.1.4 สำหรับแต่ละ $i \in \{m-1, m-2, m-3, \ldots, m-\frac{k-1}{2}\}$ แบ่งโดยพิจารณาการหลอมรวมพื้นที่ขนาด 1 ตารางหน่วยในรูป $\sum_{j=1}^{m-i} s_{i+j,i} + s_{ii} + \sum_{j=1}^{m-i} s_{i,i+j}$ จะได้พื้นที่ $3, 5, 7, \ldots, k$ ตารางหน่วย ดังรูป

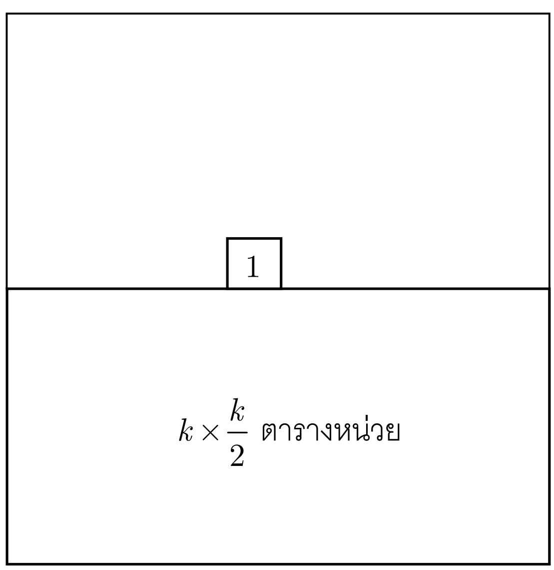


ขั้นตอนวิธีที่ 4.2 ให้ k เป็นจำนวนเต็มคู่ในรูป $k = 2m$ เมื่อ m เป็นจำนวนนับ

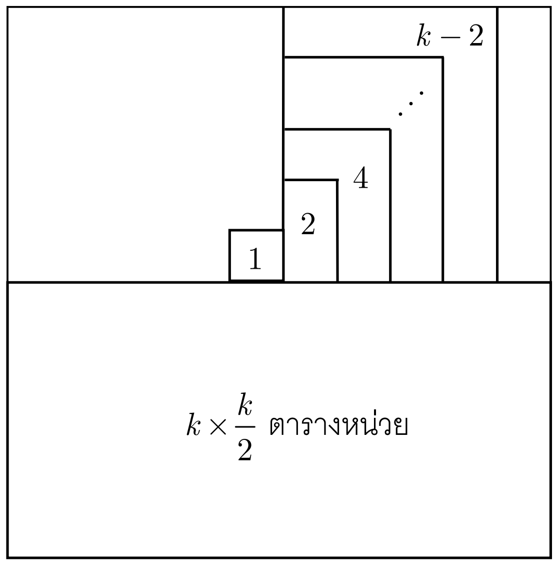
4.2.1 แบ่งโดยพิจารณาการหลอมรวมพื้นที่ขนาด 1 ตารางหน่วยในรูป $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} s_{m+i,j}$ นั่นคือ แบ่งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k \times k$ ตารางหน่วยออกเป็นสองส่วนเท่าๆ กันและแต่ละส่วนมีพื้นที่เป็น $k \times \frac{k}{2}$ ตารางหน่วย ดังรูป



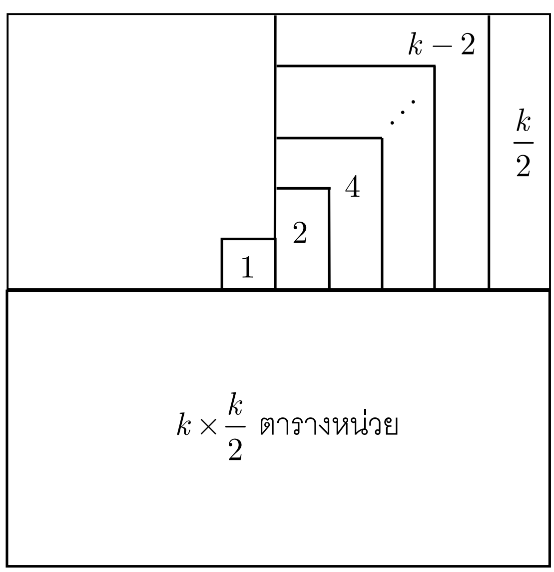
4.2.2 แบ่งโดยใช้ s_{mm} จะได้พื้นที่ 1 ตารางหน่วย ดังรูป



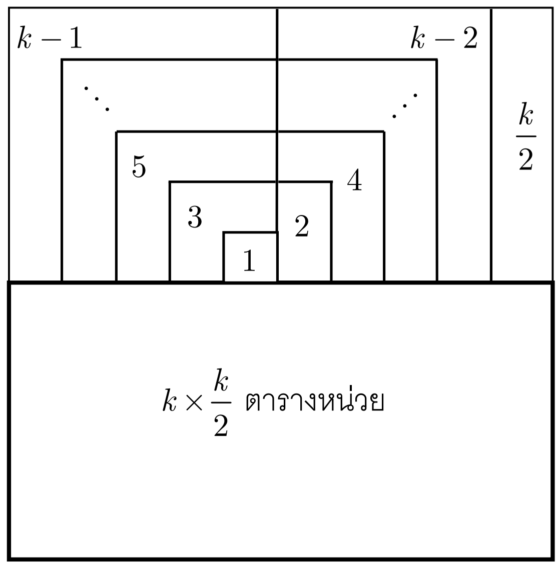
4.2.3 สำหรับแต่ละ $i \in \{m-1, m-2, m-3, \ldots, m-\frac{k-2}{2}\}$ แบ่งโดยพิจารณาการหลอมรวมพื้นที่ขนาด 1 ตารางหน่วยในรูป $\sum_{j=1}^{m-i} s_{i+j,2m-i} + \sum_{j=0}^{m-i-1} s_{i,m+j+1}$ จะได้พื้นที่ $2, 4, 6, \ldots, k-2$ ตารางหน่วย ดังรูป



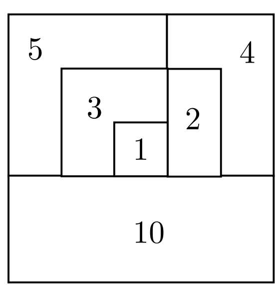
4.2.4 แบ่งโดยพิจารณาการหลอมรวมพื้นที่ขนาด 1 ตารางหน่วยในรูป $\sum_{i=1}^{m} s_{ik}$ จะได้พื้นที่ $m = \frac{k}{2}$ ตารางหน่วย ดังรูป



4.2.5 สำหรับแต่ละ $i \in \{m-1, m-2, m-3, \ldots, m-\frac{k-2}{2}\}$ แบ่งโดยพิจารณาการหลอมรวมพื้นที่ขนาด 1 ตารางหน่วยในรูป $\sum_{j=1}^{m-i} s_{i+j,i} + s_{ii} + \sum_{j=1}^{m-i} s_{i,i+j}$ จะได้พื้นที่ $3, 5, 7, \ldots,$ $k-1$ ตารางหน่วย ดังรูป



ตัวอย่างที่ 4.3 รูปต่อไปนี้ คือ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 5×5 ตารางหน่วย ที่แบ่งตามขั้นตอนวิธีที่ 4.1

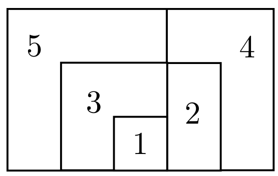


จากรูป เห็นได้ชัดว่ามีพื้นที่ขนาด $1, 2, 3, 4$ และ 5 ตารางหน่วย ต่อมาจากรูปจะเห็นว่าสามารถหลอมรวมรูปหลายเหลี่ยมเป็นพื้นที่แบบต่อเนื่องขนาดต่างๆ ดังนี้ $1+2+3 = 6$,$1+2+4 = 7$, $3+5 = 8$, $1+3+5 = 9$, 10, $1+10 = 11$, $2+10 = 12$, $3+10 = 13$, $4+10 = 14$, $5+10 = 15$,$1+2+3+10 = 16$, $1+2+4+10 = 17$, $3+5+10 = 18$, $1+3+5+10 = 19$, $1+2+3+4+10 = 20$, $1+2+3+5+10 = 21$, $1+2+4+5+10 = 22$,$1+3+4+5+10 = 23$, $2+3+4+5+10 = 24$ และ $1+2+$

$3+4+5+10=25$ ตารางหน่วย ทำให้ได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 5×5 ตารางหน่วย ที่แบ่งตามขั้นตอนวิธีที่ 4.1 เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 5×5 ตารางหน่วยที่มีพื้นที่ทุกขนาด

บทนิยามที่ 4.4 ให้ R_k' แทนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่เป็นครึ่งล่างของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k\times k$ ตารางหน่วยที่แบ่งโดยขั้นตอนวิธีที่ 4.1 ข้อ 4.1.1 หรือ 4.2 ข้อ 4.2.1 และ R_k แทนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่เป็นครึ่งบนของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k\times k$ ตารางหน่วยที่แบ่งโดยขั้นตอนวิธีที่ 4.1 หรือ 4.2

ข้อสังเกตที่ 4.5 จากตัวอย่างที่ 4.3 จะเห็นว่า รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 5×5 ตารางหน่วยที่มีพื้นที่ทุกขนาดจะมีพื้นที่ขนาด $1-9$ ตารางหน่วย มาจาก R_5 ดังรูป

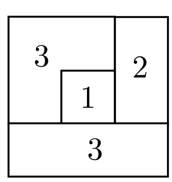


จากข้อสังเกตดังกล่าวสามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทประกอบเกี่ยวกับพื้นที่ขนาดต่างๆ ที่ได้มาจากรูป R_k เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มคี่ โดยที่ $k\geq 3$ ได้ดังนี้

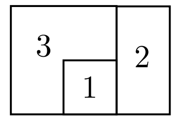
ทฤษฎีบทประกอบที่ 4.6 สำหรับจำนวนเต็มคี่ k โดยที่ $k\geq 3$ จะได้ว่า R_k ที่แบ่งตามขั้นตอนวิธีที่ 4.1 มีพื้นที่ขนาด 1 ถึง $\dfrac{k^2-k}{2}-1$ ตารางหน่วย

บทพิสูจน์ สำหรับจำนวนนับ l ใดๆ ให้ $P(l)$ แทนข้อความ รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก R_k ที่เป็นครึ่งบนของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k\times k$ ตารางหน่วยที่แบ่งตามขั้นตอนวิธีที่ 4.1 มีพื้นที่ขนาด 1 ถึง $\dfrac{k^2-k}{2}-1$ ตารางหน่วย โดย $k=2l+1$

<u>ขั้นฐาน</u> พิจารณา $l=1$ นั่นคือ $k=3$ จากขั้นตอนวิธีที่ 4.1 จะแบ่งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 3×3 ตารางหน่วย ได้ดังรูป

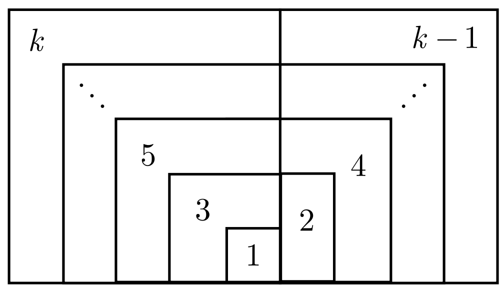


พิจารณา R_3 ดังรูป



เห็นได้ชัดว่ามีพื้นที่ขนาด 1 และ 2 ตารางหน่วย นั่นคือ R_3 มีพื้นที่ขนาด 1 ถึง $\frac{3^2-3}{2}-1=2$ ตารางหน่วย โดย $3=2(1)+1$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

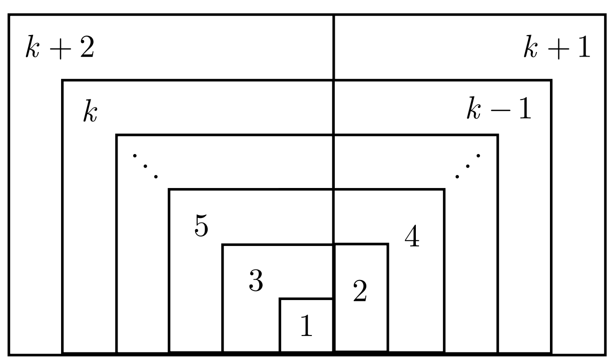
<u>ขั้นอุปนัย</u> ให้ m เป็นจำนวนนับ สมมติว่า $P(m)$ เป็นจริง นั่นคือ R_k ดังรูป



มีพื้นที่ตั้งแต่ $1,2,3,\ldots,\frac{k^2-k}{2}-1$ ตารางหน่วย

จะแสดงว่า $P(m+1)$ เป็นจริง

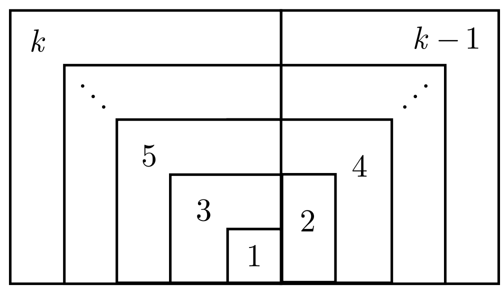
ให้ $k'=2(m+1)+1=2m+3=k+2$ ซึ่งโดยขั้นตอนวิธีที่ 4.1 จะได้ $R_{k'}$ ดังรูป



จะแสดงว่า $R_{k'}$ มีพื้นที่ตั้งแต่ $1,2,3,\ldots,\frac{(k+2)^2-(k+2)}{2}-1$ ตารางหน่วย หรือนั่นคือ $R_{k'}$ มีพื้นที่ตั้งแต่ $1,2,3,\ldots,\frac{k^2+k}{2}+k$ ตารางหน่วย

จาก $P(m)$ เป็นจริง เห็นได้ว่า R_k เป็นส่วนหนึ่งของ $R_{k'}$ ดังนั้น $R_{k'}$ จะมีพื้นที่ตั้งแต่ $1,2,3,\ldots,\dfrac{k^2-k}{2}-1$ ตารางหน่วย หรือนั่นคือ $R_{k'}$ จะมีพื้นที่ตั้งแต่ $1,2,3,\ldots,\dfrac{k^2+k}{2}-k-1$ ตารางหน่วย ต่อมาจะแสดงว่า $R_{k'}$ มีพื้นที่ขนาด $\dfrac{k^2+k}{2}-k,\ \dfrac{k^2+k}{2}-k+1,\ \dfrac{k^2+k}{2}-k+2,\ \ldots,\ \dfrac{k^2+k}{2}+k$ ตารางหน่วย โดยจะแบ่งเป็น 3 กรณี ดังต่อไปนี้

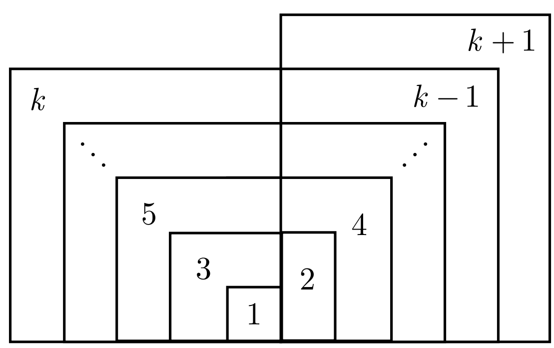
<u>กรณี 1</u> พิจารณา R_k



R_k มีพื้นที่ $\dfrac{k^2+k}{2}$ ตารางหน่วย เมื่อนำรูปหลายเหลี่ยมที่มีพื้นที่ขนาด $1,2,3,\ldots,k$ ตารางหน่วยออกจาก R_k จะได้รูปหลายเหลี่ยมที่มีพื้นที่แบบต่อเนื่องขนาด

$\dfrac{k^2+k}{2}-k,\ \dfrac{k^2+k}{2}-k+1,\ \dfrac{k^2+k}{2}-k+2,\ldots,\ \dfrac{k^2+k}{2}-1$ ตารางหน่วย

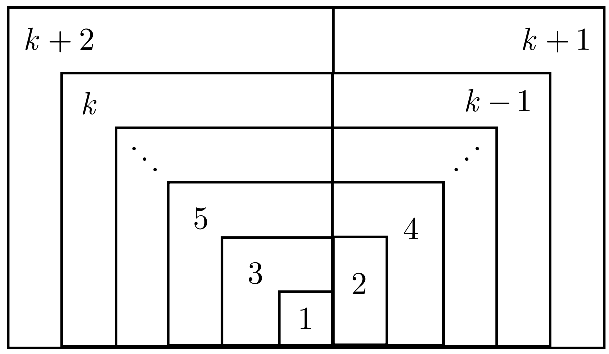
<u>กรณี 2</u> พิจารณารูปหลายเหลี่ยมต่อไปนี้



รูปหลายเหลี่ยมนี้มีพื้นที่ $\dfrac{k^2+k}{2}+(k+1)$ ตารางหน่วย เมื่อนำรูปหลายเหลี่ยมที่มีพื้นที่ขนาด $1,2,3,\ldots,k-2$ ตารางหน่วย และ k ตารางหน่วยออกจากรูปหลายเหลี่ยมนี้ จะได้รูปหลาย

เหลี่ยมที่มีพื้นที่แบบต่อเนื่องขนาด $\frac{k^2+k}{2}+1$ ตารางหน่วย และ $\frac{k^2+k}{2}+3, \frac{k^2+k}{2}+4,$ $\frac{k^2+k}{2}+5, \ldots, \frac{k^2+k}{2}+k$ ตารางหน่วย ตามลำดับ

<u>กรณี 3</u> พิจารณา $R_{k'}$ ดังรูป



มีพื้นที่ $\frac{k^2+k}{2}+2k+3$ ตารางหน่วย เมื่อนำรูปหลายเหลี่ยมที่มีพื้นที่ขนาด $k+1$, $k-1$ และ 1 ตารางหน่วยออกจากรูปหลายเหลี่ยมนี้ จะได้รูปหลายเหลี่ยมที่มีพื้นที่แบบต่อเนื่องขนาด $\frac{k^2+k}{2}+2$ ตารางหน่วย

จากกรณี 1 – 3 จะได้ว่า $R_{k'}$ มีพื้นที่ $1, 2, 3, \ldots, \frac{k^2+k}{2}+k$ ตารางหน่วย

จึงได้ว่า $P(m+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จึงสรุปได้ว่าทฤษฎีบทประกอบที่ 4.6 เป็นจริง

$\square$

ต่อมาจะพิจารณาว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k \times k$ ตารางหน่วย ที่แบ่งตามขั้นตอนวิธีที่ 4.1 มีพื้นที่ขนาด $\frac{k^2-k}{2}$ ถึง k^2 โดยอาศัยข้อสังเกตต่อไปนี้

ข้อสังเกตที่ 4.7 จากตัวอย่างที่ 4.3 จะเห็นว่า รูปหลายเหลี่ยมขนาด 1, 2, 3, 4 และ 5 ตารางหน่วยที่ประกอบกันเป็น R_5 มีด้าน 1 ด้านเชื่อมติดกับพื้นที่ขนาด 10 ตารางหน่วยของ R_5' ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 5×5 ตารางหน่วยที่มีพื้นที่ทุกขนาด จะมีพื้นที่ขนาด $10-19$ ตารางหน่วย มาจากพื้นที่ขนาด 10 ตารางหน่วยของ R_5' และการหลอมรวมพื้นที่ขนาด 10 ตารางหน่วยของ R_5' กับพื้นที่ $1-9$ ตารางหน่วยที่ได้จากข้อสังเกตที่ 4.5

ดังนั้น ในกรณีทั่วๆ ไป ขั้นตอนวิธีที่ 4.1 สำหรับจำนวนเต็มคี่ k โดยที่ $k \geq 3$ จะทำให้ได้รูปหลายเหลี่ยมขนาด $1, 2, 3, \ldots, k$ ตารางหน่วยประกอบกันเป็น R_k ที่รูปหลายเหลี่ยมแต่ละรูปมีด้าน 1 ด้านเชื่อมติดกับพื้นที่ขนาด $\dfrac{k^2-k}{2}$ ตารางหน่วยของ R_k' โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 4.6 จะได้ว่า R_k มีพื้นที่ขนาด 1 ถึง $\dfrac{k^2-k}{2}-1$ ตารางหน่วย ในขณะที่พื้นที่ขนาด $\dfrac{k^2-k}{2}$ ถึง k^2-k-1 ตารางหน่วย มาจากพื้นที่ขนาด $\dfrac{k^2-k}{2}$ ตารางหน่วยของ R_k' และการหลอมรวมพื้นที่ขนาด $\dfrac{k^2-k}{2}$ ตารางหน่วยของ R_k' กับพื้นที่ขนาด 1 ถึง $\dfrac{k^2-k}{2}-1$ ตารางหน่วยที่ได้มาจาก R_k ตามลำดับ

ข้อสังเกตที่ 4.8 จากตัวอย่างที่ 4.3 จะเห็นได้ว่า รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 5×5 ตารางหน่วยที่มีพื้นที่ทุกขนาด จะมีพื้นที่ขนาด $20-24$ ตารางหน่วย ได้มาจากการหักพื้นที่ขนาด $1-5$ ตารางหน่วยออกจากรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 5×5 ตารางหน่วย

ดังนั้นในกรณีทั่วไป สำหรับจำนวนเต็มคี่ k โดยที่ $k \geq 3$ การหักพื้นที่ขนาด 1 ถึง k ตารางหน่วยของ R_k ออกจากรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k \times k$ ตารางหน่วยที่ได้จากขั้นตอนวิธีที่ 4.1 จะทำให้ได้พื้นที่แบบต่อเนื่องขนาด k^2-k ถึง k^2-1 ตารางหน่วยเสมอ

ข้อสังเกตที่ 4.9 จากข้อสังเกตที่ 4.7 – 4.8 จะได้ว่า การพิจารณาว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 5×5 ตารางหน่วยที่ได้จากขั้นตอนวิธีที่ 4.1 มีพื้นที่ทุกขนาดหรือไม่ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาว่า R_5 มีพื้นที่ขนาด $1-9$ ตารางหน่วยหรือไม่

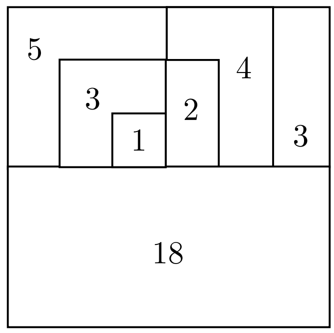
ดังนั้นในกรณีทั่วไป สำหรับจำนวนเต็มคี่ k โดยที่ $k \geq 3$ การพิจารณาว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k \times k$ ตารางหน่วยที่ได้จากขั้นตอนวิธีที่ 4.1 มีพื้นที่ทุกขนาดหรือไม่ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาว่า R_k มีพื้นที่ขนาด 1 ถึง $\dfrac{k^2-k}{2}-1$ ตารางหน่วยหรือไม่

ทฤษฎีบทที่ 4.10 สำหรับจำนวนเต็มคี่ k โดยที่ $k \geq 3$ จะได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k \times k$ ตารางหน่วย ที่แบ่งตามขั้นตอนวิธีที่ 4.1 เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k \times k$ ตารางหน่วย มีพื้นที่ทุกขนาด

บทพิสูจน์ พิสูจน์ได้โดยตรงจากทฤษฎีบทประกอบที่ 4.6 และข้อสังเกตที่ 4.9 □

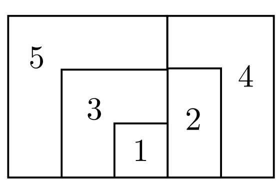
บทนิยามที่ 4.11 ให้ T_k แทนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ได้มาจากการหักพื้นที่ขนาด $\dfrac{k}{2}$ ตารางหน่วย ที่ได้มาจากขั้นตอนวิธีที่ 4.2 ข้อ 4.2.4 ออกจาก R_k

ตัวอย่างที่ 4.12 รูปต่อไปนี้ คือ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 6×6 ตารางหน่วย ที่แบ่งตามขั้นตอนวิธีที่ 4.2



จากรูป เห็นได้ชัดว่ามีพื้นที่ขนาด $1, 2, 3, 4$ และ 5 ตารางหน่วย ต่อมาจากรูปจะเห็นว่าสามารถหลอมรวมรูปหลายเหลี่ยมเป็นพื้นที่แบบต่อเนื่องขนาดต่างๆ ดังนี้ $1+2+3=6, 1+2+4=7$, $3+5=8$,$1+3+5=9$, $1+2+3+4=10$, $1+2+3+5=11$, $1+2+4+5=12$, $1+3+4+5=13$, $2+3+4+5=14$, $1+2+3+4+5=15$,$1+3+4+3+5=16$, $2+3+4+3+5=17$, 18 ตารางหน่วย ในทำนองเดียวกันกับข้อสังเกตที่ 4.7 พื้นที่ขนาด $19-36$ ตารางหน่วย มาจากการหลอมรวมพื้นที่ขนาด 18 ตารางหน่วยกับพื้นที่ $1-18$ ตารางหน่วยที่ได้จากข้างต้น ทำให้ได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 6×6 ตารางหน่วย ที่แบ่งตามขั้นตอนวิธีที่ 4.2 เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 6×6 ตารางหน่วยที่มีพื้นที่ทุกขนาด

ข้อสังเกตที่ 4.13 จากตัวอย่างที่ 4.12 จะเห็นว่า รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 6×6 ตารางหน่วยที่มีพื้นที่ทุกขนาดจะมีพื้นที่ขนาด $1-15$ ตารางหน่วย ได้มาจาก T_6 ดังรูป

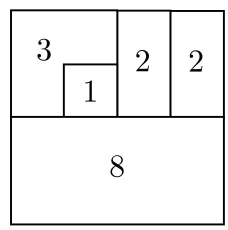


จากข้อสังเกตดังกล่าวสามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทประกอบเกี่ยวกับพื้นที่ขนาดต่างๆ ที่ได้มาจาก T_k เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มคู่ โดยที่ $k \geq 4$ ได้ดังนี้

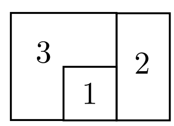
ทฤษฎีบทประกอบที่ 4.14 สำหรับจำนวนเต็มคู่ k โดยที่ $k \geq 4$ จะได้ว่า T_k ที่แบ่งตามขั้นตอนวิธีที่ 4.2 มีพื้นที่ขนาด 1 ถึง $\frac{k^2-k}{2}$ ตารางหน่วย

บทพิสูจน์ สำหรับจำนวนนับ l ใดๆ ให้ $P(l)$ แทนข้อความที่ว่า T_k ที่แบ่งตามขั้นตอนวิธีที่ 4.2 มีพื้นที่ขนาด 1 ถึง $\frac{k^2-k}{2}$ ตารางหน่วย โดย $k = 2l+2$

<u>ขั้นฐาน</u> พิจารณา $l = 1$ นั่นคือ $k = 4$ จากขั้นตอนวิธีที่ 4.2 จะแบ่งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 4×4 ตารางหน่วย ได้ดังรูป

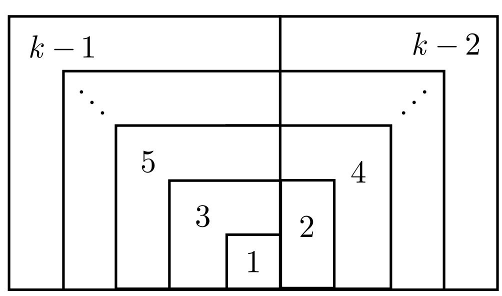


พิจารณา T_4 ดังรูป



เห็นได้ชัดว่ามีพื้นที่ขนาด $1, 2$ และ 3 ตารางหน่วย ต่อมาจากรูปจะเห็นว่าสามารถหลอมรวมรูปหลายเหลี่ยมเป็นพื้นที่แบบต่อเนื่องขนาดต่างๆ ดังนี้ $1+3=4, 2+3=5$ และ $1+2+3=6$ ตารางหน่วย นั่นคือ T_4 ที่แบ่งตามขั้นตอนวิธีที่ 4.2 มีพื้นที่ขนาด 1 ถึง $\frac{4^2-4}{2} = 6$ ตารางหน่วย โดย $4 = 2(1)+2$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

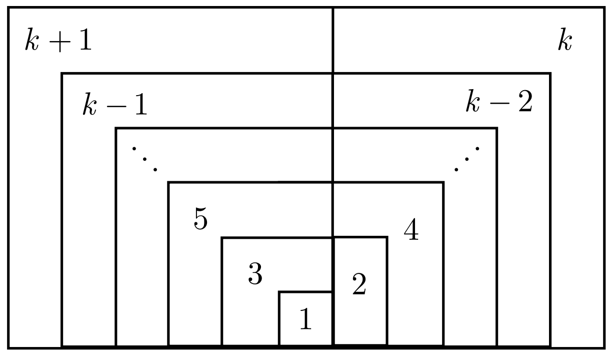
<u>ขั้นอุปนัย</u> ให้ m เป็นจำนวนนับ สมมติว่า $P(m)$ เป็นจริง นั่นคือ T_k ที่แบ่งตามขั้นตอนวิธีที่ 4.2 ดังรูป



มีพื้นที่ตั้งแต่ $1, 2, 3, \ldots, \frac{k^2-k}{2}$ ตารางหน่วย

จะแสดงว่า $P(m+1)$ เป็นจริง

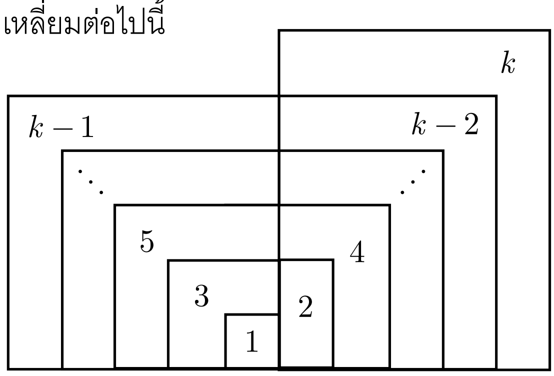
ให้ $k' = 2(m+1)+2 = 2m+4 = k+2$ ซึ่งโดยขั้นตอนวิธีที่ 4.2 จะได้ $T_{k'}$ ดังรูป



จะแสดงว่า $T_{k'}$ มีพื้นที่ตั้งแต่ $1,2,3,\ldots,\dfrac{(k+2)^2-(k+2)}{2}$ ตารางหน่วย หรือนั่นคือ $T_{k'}$ มีพื้นที่ตั้งแต่ $1,2,3,\ldots,\dfrac{k^2+3k}{2}+1$ ตารางหน่วย

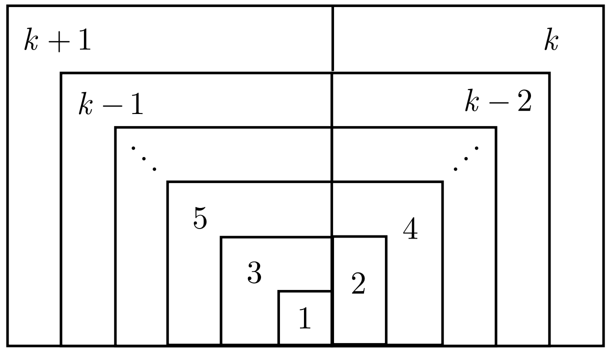
จาก $P(m)$ เป็นจริง จะเห็นว่า T_k เป็นส่วนหนึ่งของ $T_{k'}$ ดังนั้น $T_{k'}$ จะมีพื้นที่ตั้งแต่ $1,2,3,\ldots,$ $\dfrac{k^2-k}{2}$ ตารางหน่วย ต่อมาจะแสดงว่า $T_{k'}$ มีพื้นที่ขนาด $\dfrac{k^2-k}{2}+1,\ \dfrac{k^2-k}{2}+2,$ $\dfrac{k^2-k}{2}+3,\ldots,\dfrac{k^2+3k}{2}+1$ ตารางหน่วย โดยจะแบ่งเป็น 2 กรณี ดังต่อไปนี้

<u>กรณี 1</u> พิจารณารูปหลายเหลี่ยมต่อไปนี้



รูปหลายเหลี่ยมนี้มีพื้นที่ $\dfrac{k^2+k}{2}$ ตารางหน่วย เมื่อนำรูปหลายเหลี่ยมที่มีพื้นที่ขนาด $1,2,3,\ldots,$ $k-3$ และ $k-1,\, k$ ตารางหน่วยออกจากรูปหลายเหลี่ยมนี้ จะได้พื้นที่แบบต่อเนื่องขนาด $\dfrac{k^2-k}{2},\ \dfrac{k^2-k}{2}+1$ และ $\dfrac{k^2-k}{2}+3,\ \ldots,\dfrac{k^2+k}{2}-1$ ตารางหน่วย

กรณี 2 พิจารณา $T_{k'}$ ดังรูป



มีพื้นที่ $\dfrac{k^2+3k}{2}+1$ ตารางหน่วย เมื่อนำรูปหลายเหลี่ยมที่มีพื้นที่ขนาด $k, k-2$ และ 1 ตารางหน่วยออกจาก $T_{k'}$ จะได้พื้นที่แบบต่อเนื่องขนาด $\dfrac{k^2-k}{2}+2$ ตารางหน่วย และเมื่อนำรูปหลายเหลี่ยมที่มีพื้นที่ขนาด $1,2,3,\ldots,k+1$ ตารางหน่วยออกจาก $T_{k'}$ จะได้พื้นที่แบบต่อเนื่องขนาด $\dfrac{k^2+k}{2}, \dfrac{k^2+k}{2}+1, \dfrac{k^2+k}{2}+2, \ldots, \dfrac{k^2+3k}{2}$ ตารางหน่วย

จากกรณี 1 และ 2 จะได้ว่า $T_{k'}$ มีพื้นที่ $1,2,3,\ldots,\dfrac{(k+2)^2-(k+2)}{2}$ ตารางหน่วย หรือนั่นคือ $T_{k'}$ มีพื้นที่ $1,2,3,\ldots,\dfrac{k^2+3k}{2}+1$ ตารางหน่วย จึงได้ว่า $P(m+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จึงสรุปได้ว่าทฤษฎีบทประกอบที่ 4.14 เป็นจริง

$\square$

ต่อมาจะพิจารณาว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k \times k$ ตารางหน่วย ที่แบ่งตามขั้นตอนวิธีที่ 4.2 มีพื้นที่ขนาด $\dfrac{k^2-k}{2}+1$ ถึง k^2 โดยอาศัยข้อสังเกตต่อไปนี้

ข้อสังเกตที่ 4.15 จากตัวอย่างที่ 4.12 จะเห็นว่า รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 6×6 ตารางหน่วยที่มีพื้นที่ทุกขนาด มีพื้นที่ขนาด 16 และ 17 ตารางหน่วย ได้มาจากการหักพื้นที่ขนาด 1 และ 2 ตารางหน่วยออกจาก R_6

ดังนั้น ในกรณีทั่วๆ ไป ขั้นตอนวิธีที่ 4.2 สำหรับจำนวนเต็มคู่ k โดยที่ $k \geq 4$ การหักพื้นที่ขนาด 1 ถึง $\dfrac{k}{2}-1$ ตารางหน่วยของ R_k จะทำให้ได้พื้นที่แบบต่อเนื่องขนาด $\dfrac{k^2-k}{2}+1$ ถึง $\dfrac{k^2}{2}-1$ ตารางหน่วยเสมอ

ข้อสังเกตที่ 4.16 จากตัวอย่างที่ 4.12 จะเห็นว่า รูปหลายเหลี่ยมขนาด $1, 2, 3, 4, 5$ และ $\frac{6}{2}$ ตารางหน่วยที่ประกอบกันเป็น R_6 มีด้าน 1 ด้านเชื่อมติดกับพื้นที่ขนาด 18 ตารางหน่วยของ R_6' ดังนั้นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 6×6 ตารางหน่วยที่มีพื้นที่ทุกขนาด จะมีพื้นที่ขนาด $18 - 36$ ตาราง หน่วย มาจากพื้นที่ขนาด 18 ตารางหน่วยของ R_6' และการหลอมรวมพื้นที่ขนาด 18 ตาราง หน่วยนี้กับพื้นที่ $1 - 18$ ตารางหน่วยที่ได้จากข้อสังเกตที่ 4.13 และ 4.15

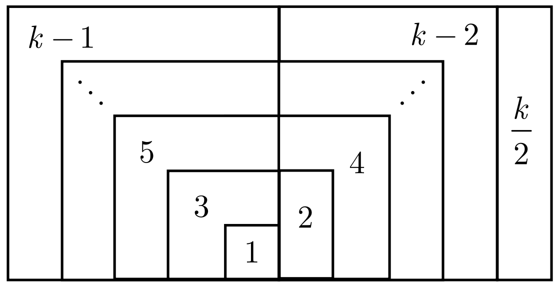
ดังนั้น ในกรณีทั่วๆ ไป ขั้นตอนวิธีที่ 4.2 สำหรับจำนวนเต็มคู่ k โดยที่ $k \geq 4$ จะทำให้ได้ รูปหลายเหลี่ยมขนาด $1, 2, 3, \ldots, k-1$ และ $\frac{k}{2}$ ตารางหน่วยประกอบกันเป็น R_k ที่รูปหลาย เหลี่ยมแต่ละรูปมีด้าน 1 ด้านเชื่อมติดกับพื้นที่ขนาด $\frac{k^2}{2}$ ตารางหน่วยของ R_k' จากทฤษฎีบท ประกอบที่ 4.14 และข้อสังเกตที่ 4.15 จะได้ว่า R_k จะมีพื้นที่ขนาด 1 ถึง $\frac{k^2}{2} - 1$ ตารางหน่วย ในขณะที่พื้นที่ขนาด $\frac{k^2}{2}$ ถึง k^2 ตารางหน่วย มาจากพื้นที่ขนาด $\frac{k^2}{2}$ ตารางหน่วยของ R_k' และ การหลอมรวมพื้นที่ขนาด $\frac{k^2}{2}$ ตารางหน่วยของ R_k' กับพื้นที่ขนาด 1 ถึง $\frac{k^2}{2}$ ตารางหน่วยที่ได้มา จาก R_k

ข้อสังเกตที่ 4.17 จากข้อสังเกตที่ 4.16 จะได้ว่าการพิจารณาว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 6×6 ตารางหน่วยที่ได้จากขั้นตอนวิธีที่ 4.2 มีพื้นที่ทุกขนาดหรือไม่ จึงเพียงพอที่จะพิจารณาว่า R_6 มี พื้นที่ขนาด $1 - 17$ ตารางหน่วยหรือไม่

ดังนั้นในกรณีทั่วไปสำหรับจำนวนเต็มคู่ k โดยที่ $k \geq 4$ การพิจารณาว่ารูปสี่เหลี่ยม จัตุรัสขนาด $k \times k$ ตารางหน่วยที่ได้จากขั้นตอนวิธีที่ 4.2 มีพื้นที่ทุกขนาดหรือไม่ จึงเพียงพอที่จะ พิจารณาว่า R_k มีพื้นที่ขนาด 1 ถึง $\frac{k^2}{2} - 1$ ตารางหน่วยหรือไม่

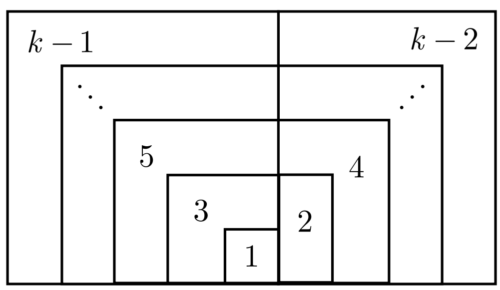
ทฤษฎีบทที่ 4.18 สำหรับจำนวนเต็มคู่ k โดยที่ $k \geq 4$ จะได้ว่า รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k \times k$ ตารางหน่วย ที่แบ่งตามขั้นตอนวิธีที่ 4.2 เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $k \times k$ ตารางหน่วยที่มีพื้นที่ทุก ขนาด

บทพิสูจน์ จากข้อสังเกตที่ 4.17 การพิจารณาว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k \times k$ ตารางหน่วยที่แบ่งตามขั้นตอนวิธีที่ 4.2 มีพื้นที่ทุกขนาดหรือไม่ จึงเพียงพอที่จะพิสูจน์ว่า R_k ดังรูป



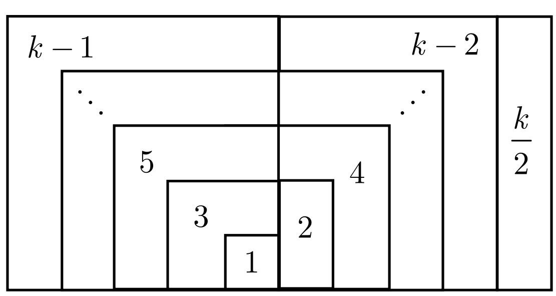
มีพื้นที่ตั้งแต่ $1, 2, 3, \ldots, \dfrac{k^2}{2} - 1$ ตารางหน่วย โดยจะแบ่งพิจารณาเป็น 2 กรณี ดังต่อไปนี้

<u>กรณี 1</u> พิจารณา T_k โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 4.14 จะได้ว่า T_k ที่แบ่งตามขั้นตอนวิธีที่ 4.2 ดังรูป



มีพื้นที่ตั้งแต่ $1, 2, 3, \ldots, \dfrac{k^2 - k}{2}$ ตารางหน่วย หรือนั่นคือ มีพื้นที่ตั้งแต่ $1, 2, 3, \ldots, \dfrac{k^2}{2} - k + \dfrac{k}{2}$ ตารางหน่วย

<u>กรณี 2</u> พิจารณา R_k ดังรูป



มีพื้นที่ $\frac{k^2}{2}$ ตารางหน่วย เมื่อนำรูปหลายเหลี่ยมที่มีพื้นที่ขนาด $1,2,3,\ldots,k-1$ ตารางหน่วยออก จาก R_k จะได้พื้นที่แบบต่อเนื่องขนาด $\frac{k^2}{2}-k+1,\ \frac{k^2}{2}-k+2,\ \frac{k^2}{2}-k+3,\ \ldots,\ \frac{k^2}{2}-1$ ตารางหน่วย

จากกรณี 1 – 2 จะได้ว่า R_k มีพื้นที่ $1,2,3,\ldots,\frac{k^2}{2}-k$ และ $\frac{k^2}{2}-k+1,\frac{k^2}{2}-k+2,\ldots,$ $\frac{k^2}{2}-1$ ตารางหน่วย จากข้อสังเกตที่ 4.17 จึงสรุปได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k\times k$ ตารางหน่วยมีพื้นที่ทุกขนาด

$\square$

บทที่ 5

ข้อสรุป และข้อเสนอแนะ

5.1 ข้อสรุป

5.1.1 วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ให้ขั้นตอนวิธีการสร้างไม้บรรทัด k หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด โดยขั้นตอนวิธีที่ได้จะเกี่ยวเนื่องกันเมื่อความยาวไม้บรรทัดเพิ่มขึ้น 1 หน่วย ทำให้การพิสูจน์ว่าไม้บรรทัด k หน่วยที่สร้างเป็นไม้บรรทัด k หน่วยวัดได้ทุกขนาดสามารถใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้

5.1.2 วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ให้ขั้นตอนวิธีการแบ่งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k \times k$ ตารางหน่วยให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $k \times k$ ตารางหน่วยที่มีพื้นที่ทุกขนาด โดยขั้นตอนวิธีที่ได้จะเกี่ยวเนื่องกันเมื่อความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเพิ่มขึ้น 2 หน่วย ทำให้การพิสูจน์ว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k \times k$ ตารางหน่วยที่สร้างมีพื้นที่ทุกขนาดสามารถใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้

5.1.3 จำนวนช่วงความยาวที่ได้จากขั้นตอนวิธีการสร้างไม้บรรทัด k หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด ยังไม่ได้รับการยืนยันว่าเป็นจำนวนช่วงความยาวที่น้อยที่สุด แต่ได้แบ่งให้ช่วงความยาวที่มีขนาดสั้นมีจำนวนน้อย กล่าวคือ มีช่วงความยาว 1 หน่วยไม่เกิน 2 ช่วง ช่วงความยาว 2 หน่วยไม่เกิน 4 ช่วง ช่วงความยาว 3 หน่วยไม่เกิน 2 ช่วง และช่วงความยาว 4 หน่วยไม่เกิน 1 ช่วง นอกจากนั้นจะเป็นช่วงความยาว 5 หน่วยทั้งสิ้น

5.1.4 จำนวนชิ้นของรูปหลายเหลี่ยมที่ได้จากขั้นตอนวิธีการแบ่งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k \times k$ ตารางหน่วยให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $k \times k$ ตารางหน่วยที่มีพื้นที่ทุกขนาด ยังไม่ได้รับการยืนยันว่าเป็นจำนวนชิ้นที่น้อยที่สุด แต่ได้แบ่งให้มีจำนวนรูปหลายเหลี่ยมจำนวน $k+1$ ชิ้น

5.2 ข้อเสนอแนะ

5.2.1 เนื่องจากขั้นตอนวิธีการสร้างไม้บรรทัด k หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด ที่ได้นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นเพียงวิธีหนึ่งในการสร้างไม้บรรทัดเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่ต้องการ อย่างไรก็ดีผลที่ได้ยังไม่ได้รับการยืนยันว่าจะได้จำนวนช่วงความยาวที่น้อยที่สุด ผู้วิจัยจึงเสนอว่าควรหาขั้นตอนวิธีที่ทำให้ได้ไม้บรรทัด k หน่วยวัดความยาวได้ทุกขนาด และบทพิสูจน์ที่ยืนยันว่าขั้นตอนวิธีดังกล่าวทำให้ได้จำนวนช่วงความยาวที่น้อยที่สุด

5.2.2 เนื่องจากขั้นตอนวิธีในการแบ่งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k \times k$ ตารางหน่วยให้มีพื้นที่ทุกขนาด ที่ได้นำเสนอไว้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นเพียงวิธีหนึ่งในการแบ่งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด

$k \times k$ ตารางหน่วยเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่ต้องการ อย่างไรก็ดีผลที่ได้ยังไม่ได้รับการยืนยันว่าจะได้จำนวนชิ้นที่น้อยที่สุด ผู้วิจัยจึงเสนอว่าควรหาขั้นตอนวิธีที่ทำให้ได้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $k \times k$ ตารางหน่วยที่มีพื้นที่ทุกขนาด และบทพิสูจน์ที่ยืนยันว่าขั้นตอนวิธีดังกล่าวทำให้ได้จำนวนชิ้นที่น้อยที่สุด

5.2.3 เนื่องจากขั้นตอนวิธีในการแบ่งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k \times k$ ตารางหน่วยให้มีพื้นที่ทุกขนาด ที่ได้นำเสนอไว้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ไม่สามารถแบ่งได้ในรูปสี่เหลี่ยมลักษณะอื่นๆ ได้ ผู้วิจัยจึงเสนอว่าควรจะมีการหาขั้นตอนวิธีในการแบ่งรูปสี่เหลี่ยมลักษณะอื่นๆ เช่น รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า เพื่อให้มีพื้นที่ทุกขนาด

5.2.4 เนื่องจากขั้นตอนวิธีในการแบ่งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k \times k$ ตารางหน่วยให้มีพื้นที่ทุกขนาด จะแบ่งได้รูปหลายเหลี่ยมในลักษณะแตกต่างกันไป เช่น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และรูปหกเหลี่ยม (รูปตัว L) ผู้วิจัยจึงเสนอว่าควรจะมีการหาขั้นตอนวิธีในการแบ่งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $k \times k$ ตารางหน่วยให้มีพื้นที่ทุกขนาด ให้ได้รูปหลายเหลี่ยมในลักษณะเหมือนกันหมด

รายการอ้างอิง

[1] สุพินดา รักสันติชาติ. (2550). ความสัมพันธ์ระหว่างไม้บรรทัดวัดความยาวได้ทุกขนาดและกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด. โครงงานคณิตศาสตร์, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาวนิศารัตน์ บัวแดง เกิดวันอังคารที่ 22 มกราคม พ.ศ. 2528 ที่จังหวัดสุราษฎร์ธานี สำเร็จการศึกษาปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์) จากคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัย-สงขลานครินทร์ ในปีการศึกษา 2549 และสำเร็จการศึกษาประกาศนียบัตรบัณฑิต สาขาวิชาชีพครู จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร ในปีการศึกษา 2550 ด้วยทุนการศึกษาโครงการส่งเสริมการผลิตครูที่มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ (สควค.) ต่อมาในปี พ.ศ.2551 ได้บรรจุเข้ารับราชการครูที่โรงเรียนสุราษฎร์พิทยา จังหวัดสุราษฎร์ธานี และต่อมาในปี พ.ศ. 2554 ได้ศึกษาต่อระดับปริญญามหาบัณฑิตที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิว-เตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ซึ่งในขณะที่ศึกษาระดับชั้นปีที่ 1 ได้รับทุนการ-ศึกษาจากศูนย์ความเป็นเลิศทางคณิตศาสตร์ (CEM)

สำหรับผลงานทางวิชาการในระหว่างการจัดทำวิทยานิพนธ์ ได้มีการนำเสนอผลงานทางวิชาการในงาน Thailand-Japan Joint Conference on Computational Geometry and Graphs (TJJCCGG 2012) ระหว่างวันที่ 6 – 8 ธันวาคม 2555 ณ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ และได้มีการนำเสนอผลงานและเผยแพร่ในงานการประชุมวิชาการทางคณิตศาสตร์ประจำปี 2556 ครั้งที่ 18 (18th Annual Meeting in Mathematics) ระหว่างวันที่ 14 – 16 มีนาคม 2556 ณ โรงแรมอ่าวนาง อโยธยา บีช รีสอร์ท แอนด์ สปา จ.กระบี่ จัดโดยคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ