

บทที่ 5

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม

ในบทนี้จะเป็นการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้น โดยนำโปรแกรม RHBFE มาวิเคราะห์ปัญหาการซึมของความชื้นในตัวกลางพรุนสองมิติ ปัญหาที่จะทำการวิเคราะห์ประกอบด้วย (1) ปัญหาการกระจายตัวของหัวน้ำในสองมิติ (2) ปัญหาการให้เกรเดียนท์ของหัวน้ำปริมาณสูงในสองมิติ (3) ปัญหาการซึมภายใต้สถานะไม่คงตัว (4) ปัญหาฟลักซ์เคลื่อนที่ภายใต้สถานะไม่คงตัว (5) ปัญหาการซึมหนึ่งมิติในแนวระดับแบบไม่เชิงเส้นภายใต้สถานะไม่คงตัว (6) ปัญหาการซึมหนึ่งมิติในแนวตั้งแบบกำหนดเงื่อนไขขอบเขตด้วยหัวน้ำ (7) ปัญหาการซึมหนึ่งมิติในแนวตั้งแบบกำหนดเงื่อนไขด้วยฟลักซ์ (8) ปัญหาการซึมสองมิติแบบไม่เชิงเส้นภายใต้สถานะไม่คงตัว (9) ปัญหาการซึมแบบที่มีความสมมาตรรอบแกน และ (10) กรณีศึกษาการซึมในพระสถูปเจดีย์วัดพันสมิต โดยปัญหาที่ (1), (2), (3), (4) และ (9) มีจุดประสงค์เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นกับผลเฉลยแม่นยำตรง หรือผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ ดังนั้นปัญหาดังกล่าวจึงมุ่งเน้นไปในเชิงคณิตศาสตร์ซึ่งพิจารณาเฉพาะตัวเลขโดยมิได้คำนึงถึงความหมายทางกายภาพ

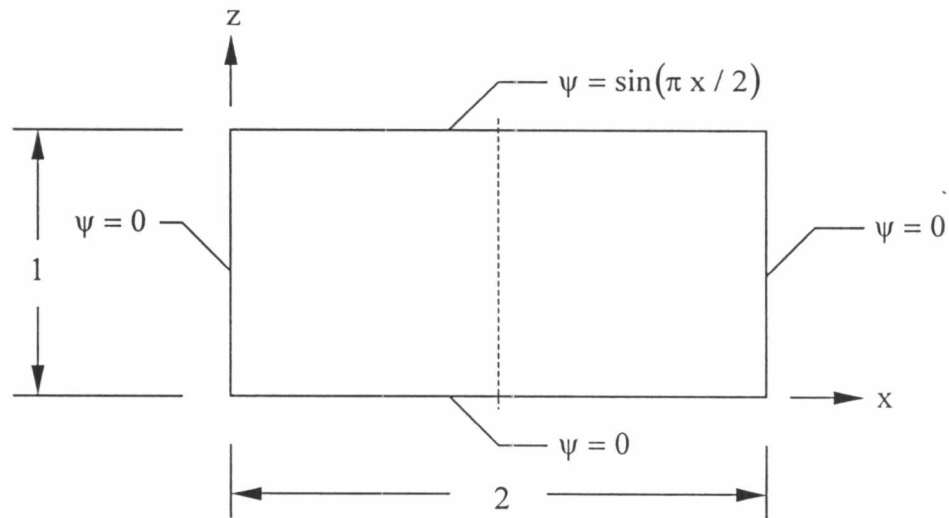
5.1 ปัญหาการกระจายตัวของหัวน้ำสองมิติ

สำหรับปัญหาสถานะอยู่ตัว [17] (steady state) โดยไม่พิจารณาหัวน้ำเนื่องจากแรงโน้มถ่วงและเป็นการซึมผ่านใน โชนอิมตัวซึ่งค่าสัมประสิทธิ์การซึมผ่าน K จะมีค่าคงที่ สมการที่ (2.22) จะลดรูปเหลือเพียง

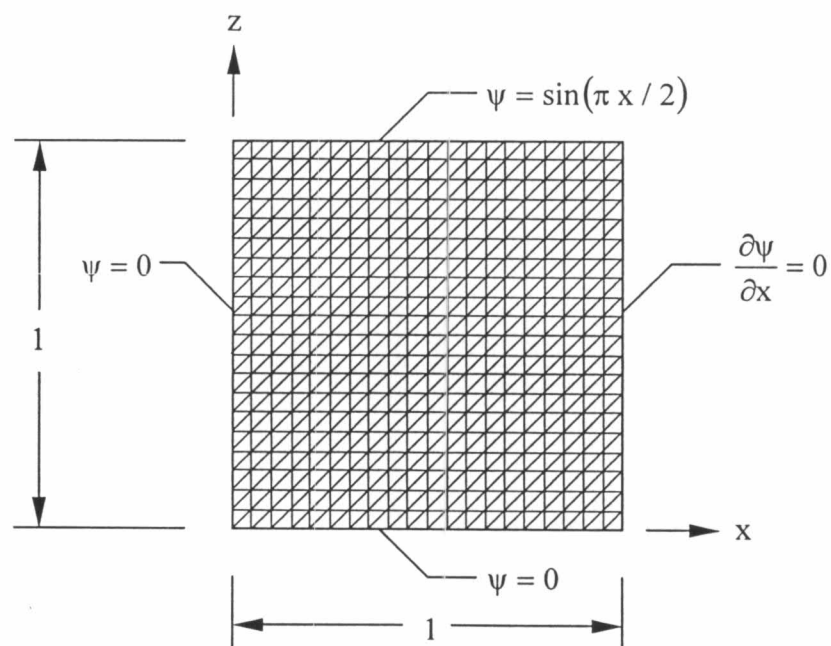
$$K \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (5.1)$$

วัสดุพรุนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 2×1 หน่วย ถูกกำหนดหัวน้ำให้มีค่าเท่ากับศูนย์ตลอดขอบด้านซ้าย ด้านขวา และด้านล่าง ในขณะที่ตลอดขอบด้านบนถูกกำหนดหัวน้ำในรูปแบบของฟังก์ชันไซน์ และกำหนดสัมประสิทธิ์การซึมผ่านอิมตัวเท่ากับ 1 หน่วย/วินาที ดังแสดงไว้ในรูปที่ 5.1 แต่เนื่องจากความสมมาตรของรูปทรงจึงสามารถพิจารณาให้วัสดุพรุนเหลือขนาดครึ่งหนึ่ง และแบ่งขอบเขตรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ซึ่งประกอบด้วย 441 จุดต่อและ 800 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 5.2

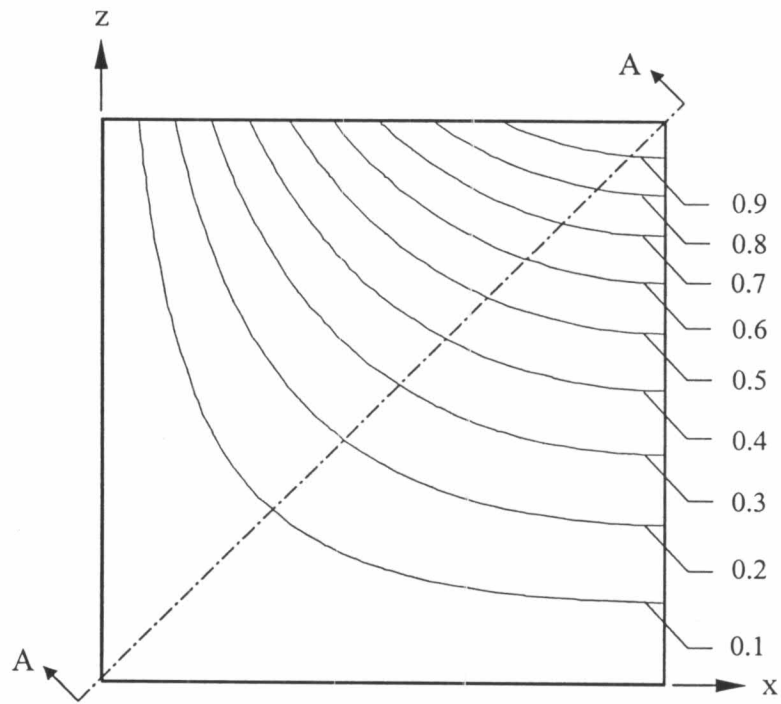
รูปที่ 5.3 แสดงเส้นชั้นของหัวน้ำของปัญหาที่ 5.1 ที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรม RHBFE ส่วนรูปที่ 5.4 แสดงการเปรียบเทียบค่าหัวน้ำที่ได้จากการคำนวณกับผลเฉลยแม่นยำตรงของสมการ (5.1) ซึ่งเป็นสมการลาปลาซที่หน้าตัด AA จะเห็นว่าได้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องแม่นยำ รวมทั้งทดสอบความเป็น Grid independent โดยเพิ่มเป็น 961 จุดต่อและ 1,800 เอลิเมนต์ ซึ่งพบว่าผลที่ได้มีความใกล้เคียงกันมากจึงเลือกใช้แบบ 441 จุดต่อ



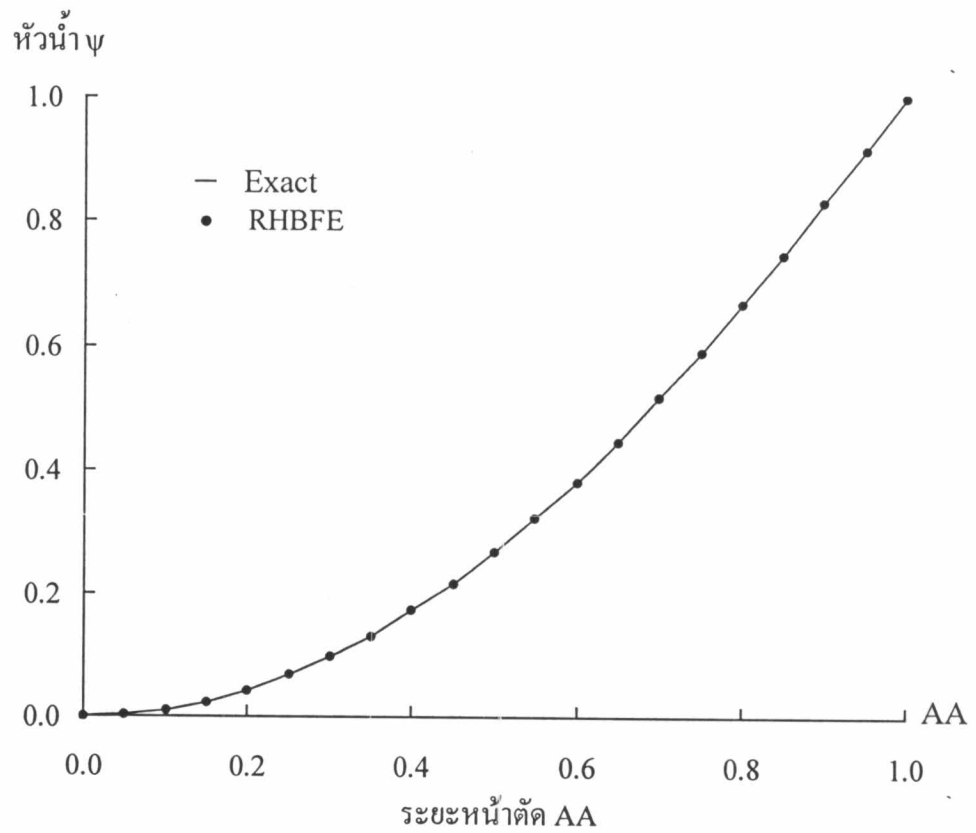
รูปที่ 5.1 รูปทรง มิติ และเงื่อนไขขอบเขตของวัสดุพูนของปัญหาที่ 5.1



รูปที่ 5.2 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาที่ 5.1



รูปที่ 5.3 เส้นชั้นของหัวน้ำของปัญหาที่ 5.1



รูปที่ 5.4 เปรียบเทียบหัวน้ำในหน้าตัด AA ที่ได้จากโปรแกรม RHBFE กับผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหาที่ 5.1

5.2 ปัญหาการให้เกรเดียนท์ของหัวน้ำปริมาณสูงในสองมิติ

ปัญหาการให้เกรเดียนท์ของหัวน้ำปริมาณสูงในสองมิตินั้นเกรเดียนท์ของหัวน้ำ q หมายถึง การเคลื่อนที่ของน้ำในทิศทางตั้งฉากกับหน้าตัด xz ซึ่งปัญหานี้เป็นปัญหาสถานะอยู่ตัว (steady state) โดยไม่พิจารณาหัวน้ำเนื่องจากแรงโน้มถ่วงและเป็นการซึมผ่านใน โชนอิมตัวซึ่งค่าสัมประสิทธิ์การซึมผ่าน K จะมีค่าคงที่ สมการที่ (2.22) จะลดรูปลงจนอยู่ในรูปของสมการปัวร์ซง ดังแสดงในสมการ (5.2)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\frac{q}{K} \quad (5.2)$$

โดยการกำหนดเกรเดียนท์ของหัวน้ำ q ตลอดทั่วทั้งโดเมนตามสมการ (5.3)

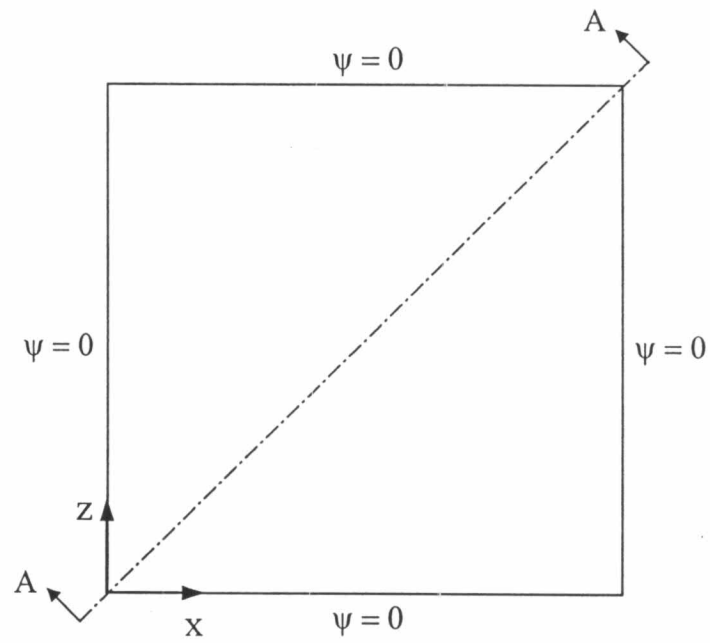
$$q = 2z(1-z) \left[\tan^{-1} \beta - \frac{\alpha(1-2x)}{\sqrt{2}(1+\beta^2)} + \frac{\alpha^2 \beta x(1-x)}{2(1+\beta^2)^2} \right] + 2x(1-x) \left[\tan^{-1} \beta - \frac{\alpha(1-2z)}{\sqrt{2}(1+\beta^2)} + \frac{\alpha^2 \beta z(1-z)}{2(1+\beta^2)^2} \right] \quad (5.3)$$

$$\text{โดย } \beta = \alpha \left(\frac{x+z}{\sqrt{2}} - 0.8 \right) \quad (5.4)$$

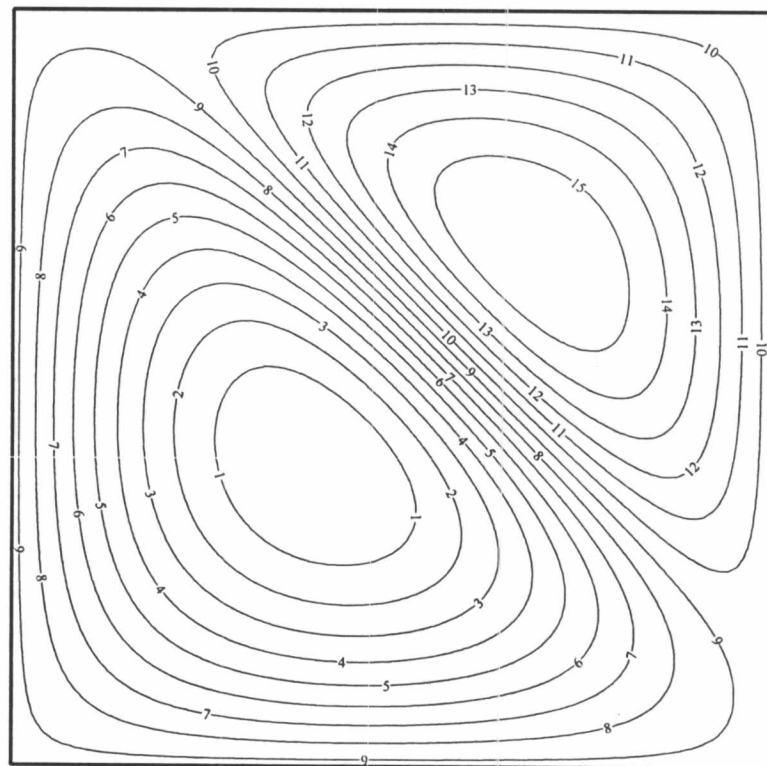
วัสดุพูนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1×1 หน่วย ถูกกำหนดหัวน้ำให้มีค่าเท่ากับศูนย์ตลอดขอบทั้งสี่ ด้านและกำหนดสัมประสิทธิ์การซึมผ่านอิมตัวเท่ากับ 1 หน่วย/วินาที การแบ่งขอบเขตรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ซึ่งประกอบด้วย 10,201 จุดต่อและ 20,000 เอลิเมนต์ดังแสดงไว้ในรูปที่ 5.5

ผลเฉลยแม่นยำตรงของสมการปัวร์ซงสำหรับ โดเมนและเงื่อนไขขอบเขตข้างต้นอ้างอิง [18] อยู่ในรูป

$$\psi(x, z) = x(1-x) z(1-z) \tan^{-1} \beta \quad (5.5)$$



รูปที่ 5.5 รูปทรง มิติ และเงื่อนไขขอบเขตสำหรับวัสดุพรุนของปัญหาที่ 5.2

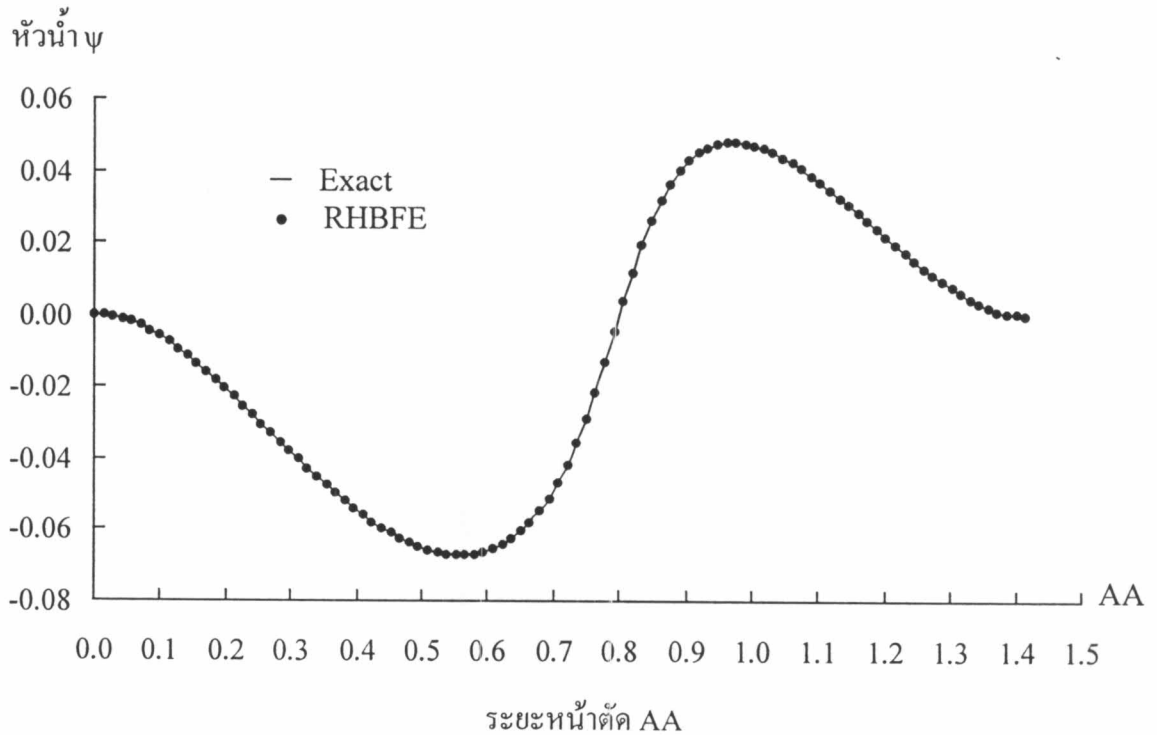


หัวน้ำ

15	0.040990
14	0.033775
13	0.026559
12	0.019344
11	0.012128
10	0.004912
9	-0.002303
8	-0.009519
7	-0.016734
6	-0.023950
5	-0.031166
4	-0.038381
3	-0.045597
2	-0.052812
1	-0.060028

รูปที่ 5.6 เส้นชั้นของหัวน้ำของปัญหาที่ 5.2

รูปที่ 5.6 แสดงเส้นชั้นของหัวน้ำของปัญหาที่ 5.2 ที่ได้จากการคำนวณ สำหรับการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม RHBFE กับผลเฉลยแม่นยำตรงได้แสดงในรูปที่ 5.7 โดยในรูปที่ 5.7 เป็นการเปรียบเทียบการกระจายหัวน้ำที่หน้าตัด AA ซึ่งพบว่าได้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องแม่นยำในทุกตำแหน่ง



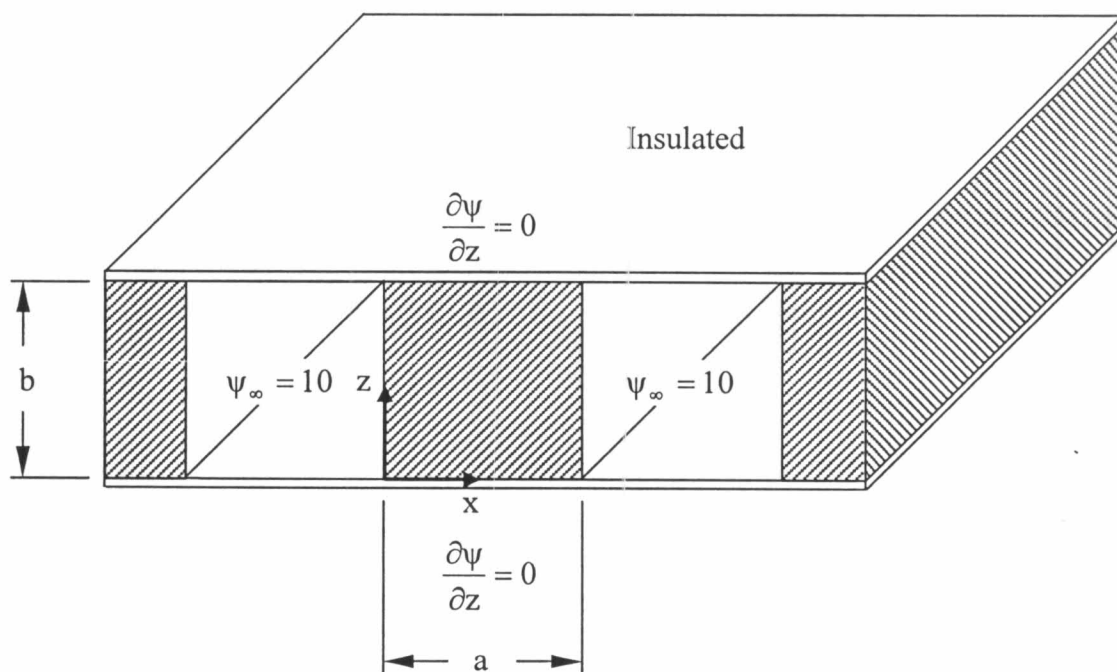
รูปที่ 5.7 เปรียบเทียบหัวน้ำในหน้าตัด AA ที่ได้จากโปรแกรม RHBFE กับผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหาที่ 5.2

5.3 ปัญหาการซึมภายใต้สถานะไม่คงตัว

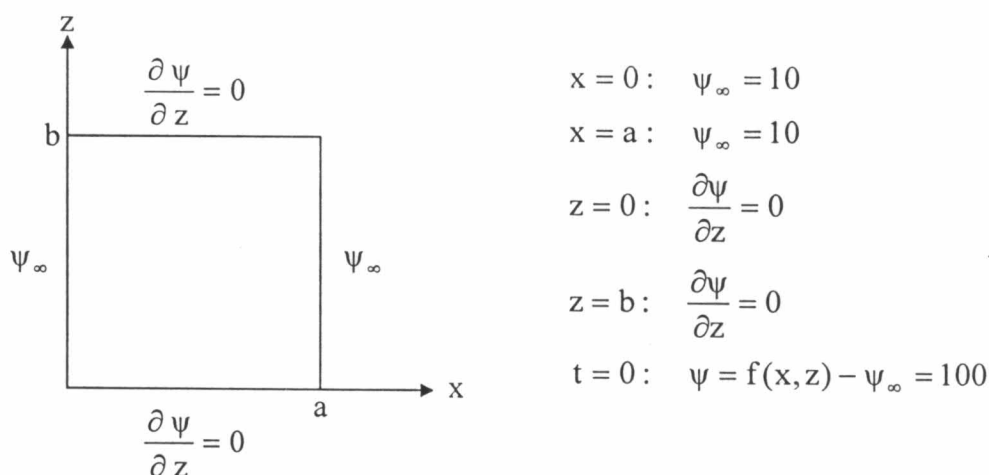
สำหรับปัญหาสถานะไม่คงตัวโดยไม่รวมหัวน้ำเนื่องจากแรงโน้มถ่วงและเป็นการซึมผ่านในโซนอิ่มตัวซึ่งค่าสัมประสิทธิ์การซึมผ่านอิ่มตัวจะมีค่าคงที่และถูกกำหนดให้เท่ากับ 1 หน่วย/วินาที สมการของริชาร์ดจะอยู่ในรูป

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (5.6)$$

รูปที่ 5.8 แสดงรูปแบบของวัสดุพอร์นถูกประกบด้วยฉนวนกันความชื้นที่ด้านบนและด้านล่างทำให้ไม่มีการถ่ายเทความชื้น ซึ่งบริเวณด้านซ้ายและด้านขวาจะเปิดสู่อากาศแห้ง เงื่อนไขเริ่มต้นกำหนดให้วัสดุพอร์นมีความชื้นมากกว่าอากาศด้านข้าง ทำให้มีการถ่ายเทความชื้นจากวัสดุพอร์นสู่อากาศแห้ง โดยมีลักษณะปัญหาดังแสดงในรูป



รูปที่ 5.8 ลักษณะปัญหาการซึมภายใต้สถานะไม่คงตัว



รูปที่ 5.9 รูปทรง มิติ เงื่อนไขขอบเขต และเงื่อนไขเริ่มต้นของปัญหาที่ 5.3

ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์สำหรับ โดเมนและเงื่อนไขขอบเขตข้างต้นอ้างอิง [19] อยู่ในรูป

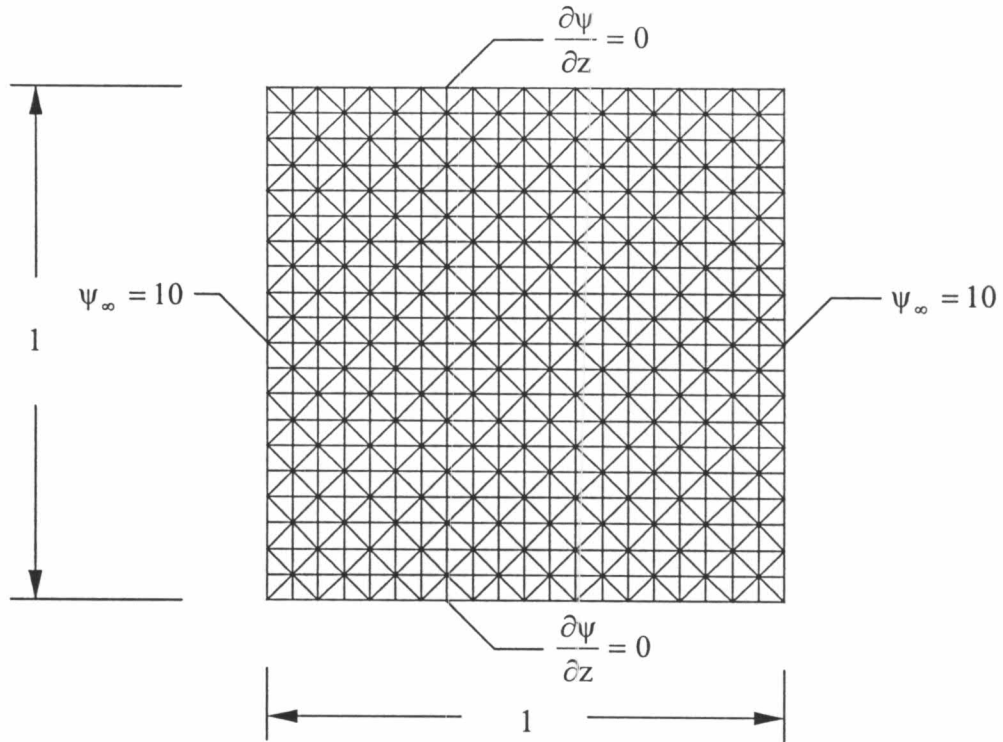
$$\psi = \psi_{\infty} + \frac{4}{ab} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_0^a \left[\int_0^b (f(x,z) - \psi_{\infty}) \cos\left(\frac{m\pi}{b}z\right) dz \right] \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \right\} \\ * \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}z\right) \exp\left[-\pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)t\right] \quad (5.7)$$

ในกรณีเฉพาะเมื่อ $f(x,z) = \psi_0 = \text{const.}$ ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์จะสามารถลดรูปเป็น

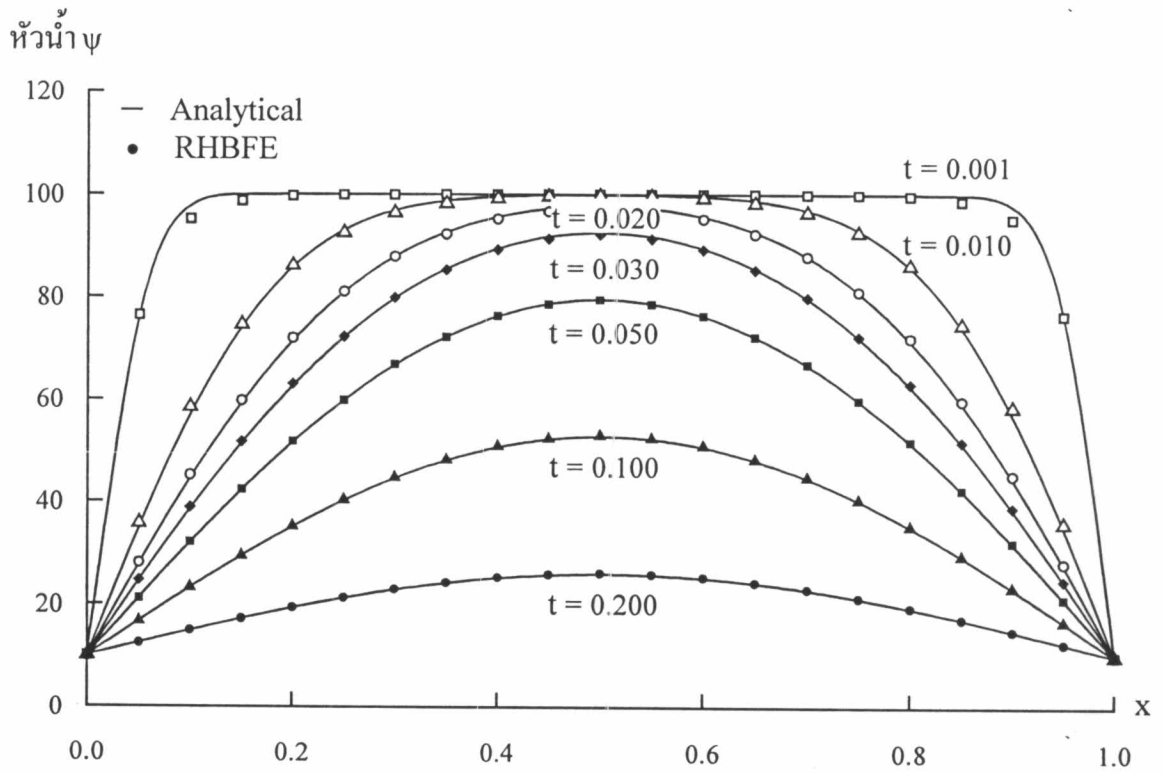
$$\psi = \psi_{\infty} + \frac{4(\psi_0 - \psi_{\infty})}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{a}x\right]}{2k+1} \exp\left[-\pi^2 \frac{(2k+1)^2 t}{a^2}\right] \quad (5.8)$$

การวิเคราะห์ปัญหาเริ่มจากการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประกอบไปด้วย 441 จุดต่อและ 800 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 5.10 สำหรับเงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขเริ่มต้นของปัญหาที่ 5.3 ถูกแสดงในรูปที่ 5.9 โดยใช้ช่วงเวลาเท่ากับ 0.001 วินาที เป็นจำนวน 200 ช่วงเวลา

รูปที่ 5.11 แสดงการเปรียบเทียบค่าหัวน้ำที่ได้จากการคำนวณกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ ณ เวลาที่แตกต่างกันซึ่งได้แก่ $t = 0.001, 0.01, 0.02, 0.03, 0.05, 0.1$ และ 0.2 วินาที จะเห็นว่าได้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องแม่นยำ



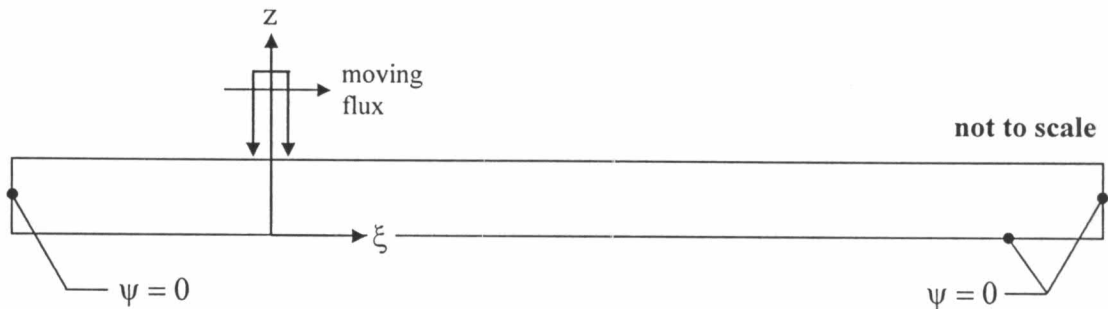
รูปที่ 5.10 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาที่ 5.3



รูปที่ 5.11 เปรียบเทียบห้วน้ำในเวลาที่ต่างๆ ที่ได้จากโปรแกรม RHBFE กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของปัญหาที่ 5.3

5.4 ปัญหาฟลักซ์เคลื่อนที่ภายใต้สถานะไม่คงตัว

วัสดุพอรูปลี่เหลี่ยมผืนผ้า 1.00×0.02 ตารางหน่วย ถูกกำหนดหัวน้ำให้มีค่าเท่ากับศูนย์ ตลอดขอบสามด้านประกอบด้วย ด้านซ้าย ด้านขวา และด้านล่าง โดยมีฟลักซ์ของเกรเดียนท์ของหัวน้ำ q รูปลี่เหลี่ยมจัตุรัสกว้าง 0.01 หน่วยเคลื่อนที่ที่ผิวด้านบนด้วยความเร็ว 2.00 หน่วย/วินาที ซึ่งฟลักซ์ดังกล่าวมีขนาด 347.22 ดังแสดงรายละเอียดไว้ในรูปที่ 5.12 การสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วย $1,809$ จุดต่อและ $3,200$ เอลิเมนต์ โดยใช้ช่วงเวลาเท่ากับ 1×10^{-5} วินาที เป็นจำนวน $50,000$ ช่วงเวลา



รูปที่ 5.12 ลักษณะปัญหาฟลักซ์เคลื่อนที่ภายใต้สถานะไม่คงตัว

ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์สำหรับ โดเมนและเงื่อนไขขอบเขตข้างต้นอ้างอิง [20] อยู่ในรูปอนุกรมอนันต์

$$\psi(\xi, z) = \frac{4qHe^{-H\xi}}{kL} \left\{ \sum_{n=2,4}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{3/2}} \left[\sin\left(\frac{\alpha\xi}{w}\right) \frac{\sinh(\lambda_n z)}{\cosh(\lambda_n h)} \right] \left[\sin \alpha \cosh(Hw) - \frac{\alpha}{w} \cos \alpha \sinh(Hw) \right] \right. \\ \left. + \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{3/2}} \left[\sin\left(\frac{\alpha\xi}{w}\right) \frac{\sinh(\lambda_n z)}{\cosh(\lambda_n h)} \right] \left[\cos \alpha \sinh(Hw) + \frac{\alpha}{w} \sin \alpha \cosh(Hw) \right] \right\} \quad (5.9)$$

โดยกำหนดให้ q คือ ขนาดของฟลักซ์ h คือ ความกว้างของวัสดุ และ H คือ พารามิเตอร์ที่กำหนดโดย

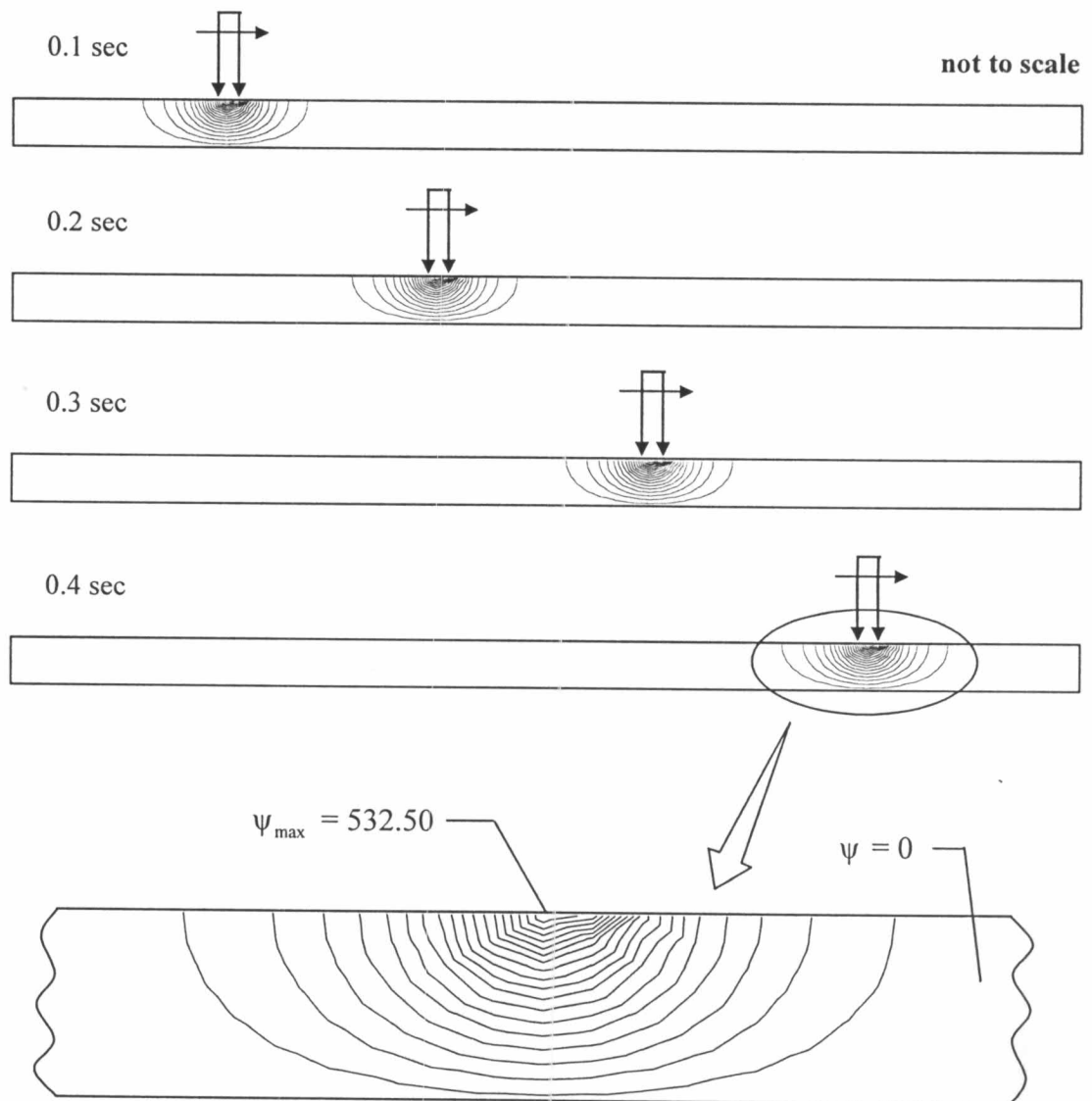
$$H = \frac{\rho cv}{2k} \quad (5.10)$$

โดยที่ ρ, c, k คือ ค่าคงที่ของคุณสมบัติของวัสดุพอรู และ v คือ ความเร็วของฟลักซ์

พารามิเตอร์ α และ λ_n ถูกกำหนดให้มีค่าดังนี้

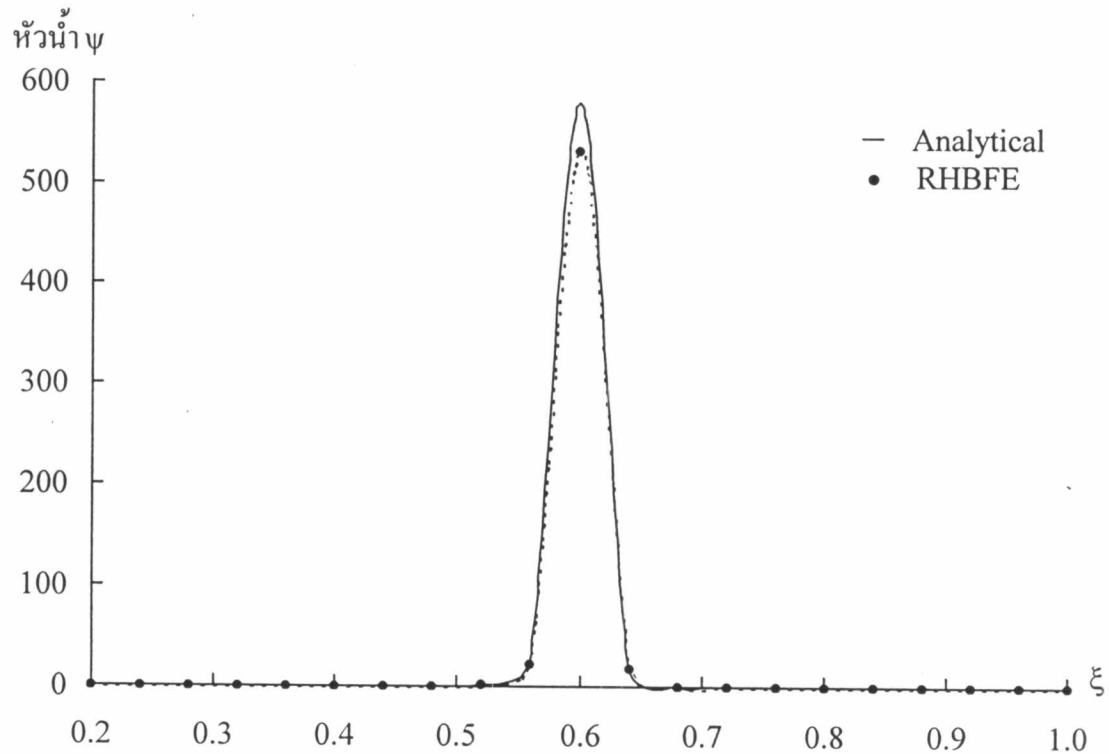
$$\alpha = \frac{n\pi w}{2L} \text{ และ } \lambda_n = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{4L^2} + H^2} \quad (5.11)$$

โดยที่ L คือ ความยาวของวัสดุ และ w คือ ความกว้างของฟลักซ์



รูปที่ 5.13 เส้นชั้นของหัวน้ำที่เวลาต่างๆ ซึ่งคำนวณจากโปรแกรม RHBFE ของปัญหาที่ 5.4

สำหรับรูปที่ 5.13 ได้แสดงลักษณะการกระจายตัวของหัวน้ำที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรม RHBFE ที่เวลาแตกต่างกัน ได้แก่ $t = 0.1, 0.2, 0.3,$ และ 0.4 วินาที จากนั้นทำการเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ดังแสดงในรูปที่ 5.14 ซึ่งจะเห็นได้ว่ามีความสอดคล้องกัน ยกเว้นตำแหน่งของพริกซ์สูงสุดซึ่งแตกต่างกันประมาณ 8.25% ซึ่งเป็นผลมาจากเอลิเมนต์ที่ใช้ในนั้นยังมีขนาดไม่เล็กพอ



รูปที่ 5.14 เปรียบเทียบหัวน้ำได้จากโปรแกรม RHBFE กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของปัญหา 5.4

5.5 ปัญหาการซึมหนึ่งมิติในแนวระดับแบบไม่เชิงเส้นภายใต้สถานะไม่คงตัว

สำหรับการซึมหนึ่งมิติในแนวระดับแบบไม่เชิงเส้นภายใต้สถานะไม่คงตัวโดยละทิ้งหัวน้ำเนื่องจากแรงโน้มถ่วงนั้น สัมประสิทธิ์การซึมผ่านจะมีค่าขึ้นกับหัวน้ำซึ่งจะทำให้สมการเป็นสมการไม่เชิงเส้น โดยสามารถเขียนสมการอยู่ในรูป

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = \theta^*(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (5.12)$$

พารามิเตอร์ $K(\psi)$ และ $\theta^*(\psi)$ ของดินชนิดหนึ่งซึ่งได้ทำการทดลองพบว่ามีค่าดังนี้

$$K(\psi) = K_s \left(\frac{\psi}{100} + 1 \right) \quad (5.13)$$

$$\text{และ} \quad \theta^* = 6.67 \times 10^{-3} \phi \quad (5.14)$$

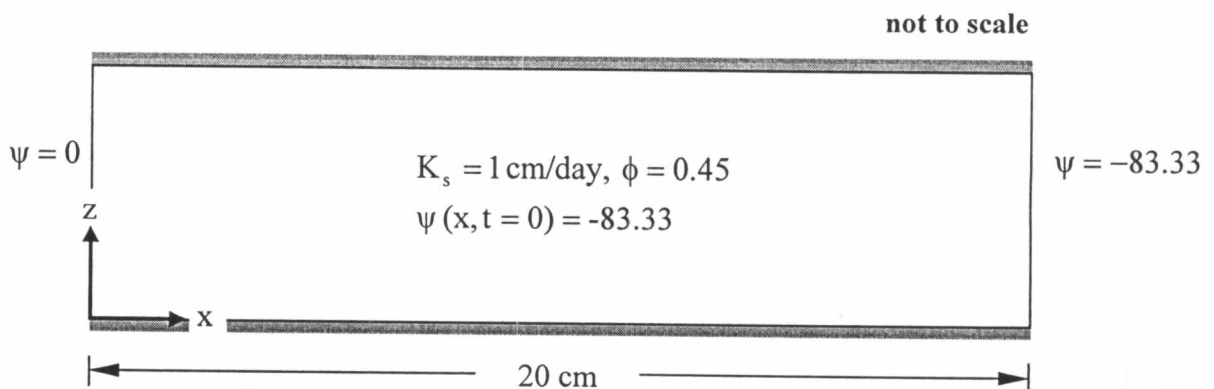
โดยที่ K_s คือ สัมประสิทธิ์การซึมผ่านของวัสดุขณะอิ่มตัว และ ϕ คือ ความพรุนของวัสดุ

กำหนดให้เงื่อนไขเริ่มต้น คือ $\psi(x, 0) = -83.33$ cm ซึ่งคิดเป็นปริมาณความชื้น $\theta = 0.1$

เงื่อนไขขอบเขต คือ $\psi(0, t) = \psi_{\text{left}} = 0$ cm ซึ่งคิดเป็นปริมาณความชื้น $\theta = 0.35$

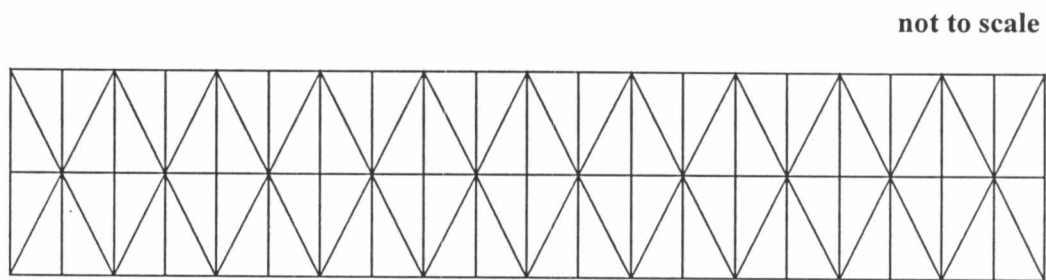
$\psi(20, t) = \psi_{\text{right}} = -83.33$ cm ซึ่งคิดเป็นปริมาณความชื้น $\theta = 0.1$

และพลั๊กซึมมีค่าเป็นศูนย์ตลอดขอบด้านบนและด้านล่าง

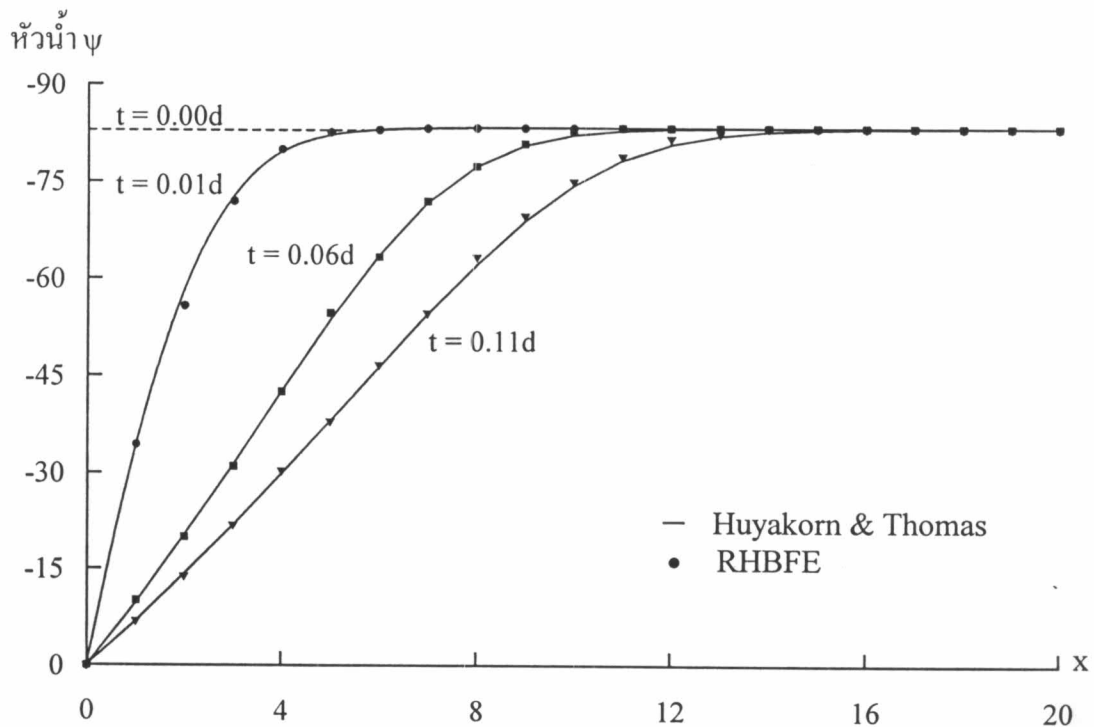


รูปที่ 5.15 ลักษณะปัญหาการซึมหนึ่งมิติในแนวระดับแบบไม่เชิงเส้นภายใต้สถานะไม่คงตัว

รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหานี้ประกอบด้วย 63 จุดต่อและ 80 เอลิเมนต์ดังแสดงในรูปที่ 5.16 ซึ่งกำหนดให้ตลอดขอบด้านซ้ายมีหัวน้ำมากกว่าตลอดขอบด้านขวา ดังนั้นลักษณะการกระจายตัวของความชื้นก็จะกระจายตัวจากซ้ายไปขวาเช่นเดียวกัน โดยใช้ช่วงเวลาเท่ากับ 0.01 วัน เป็นจำนวน 20 ช่วงเวลา ส่วนรูปที่ 5.17 แสดงการเปรียบเทียบค่าหัวน้ำที่ได้จากการคำนวณโดยเปรียบเทียบกับผลการคำนวณของ Huyakorn & Thomas [21] ณ เวลา $t = 0.01, 0.06$ และ 0.11 วัน ซึ่งจะเห็นว่าได้ผลลัพธ์ที่มีความสอดคล้องกัน



รูปที่ 5.16 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาที่ 5.5



รูปที่ 5.17 เปรียบเทียบหัวน้ำในเวลาต่างๆ ที่ได้จากโปรแกรม RHBFE กับผลการคำนวณของ Huyakorn & Thomas

5.6 ปัญหาการซึมหนึ่งมิติในแนวตั้งแบบกำหนดเงื่อนไขขอบเขตด้วยหัวน้ำ

สำหรับการซึมหนึ่งมิติในแนวตั้งแบบไม่เชิงเส้นภายใต้สถานะไม่คงตัวแบบกำหนดเงื่อนไขขอบเขตด้วยหัวน้ำ จำเป็นต้องพิจารณาหัวน้ำเนื่องจากแรงโน้มถ่วงด้วย ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์เป็นที่รู้จักในชื่อว่า สมการของริชาร์ด

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial K_z(\psi)}{\partial z} = \theta^*(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (5.15)$$

ดินชนิดหนึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์การซึมผ่านเป็นดังสมการ (5.16) และความสัมพันธ์ระหว่างค่าหัวน้ำและปริมาณความชื้นเป็นดังสมการ (5.17) ซึ่งดินชนิดดังกล่าวถูกนำเสนอโดย Haverkamp et al. [22]

$$K(\psi) = K_s \frac{A}{A + |\psi|^\gamma} \quad (5.16)$$

$$\text{และ} \quad \theta = \frac{\alpha (\theta_s - \theta_r)}{\alpha + |\psi|^\beta} + \theta_r \quad (5.17)$$

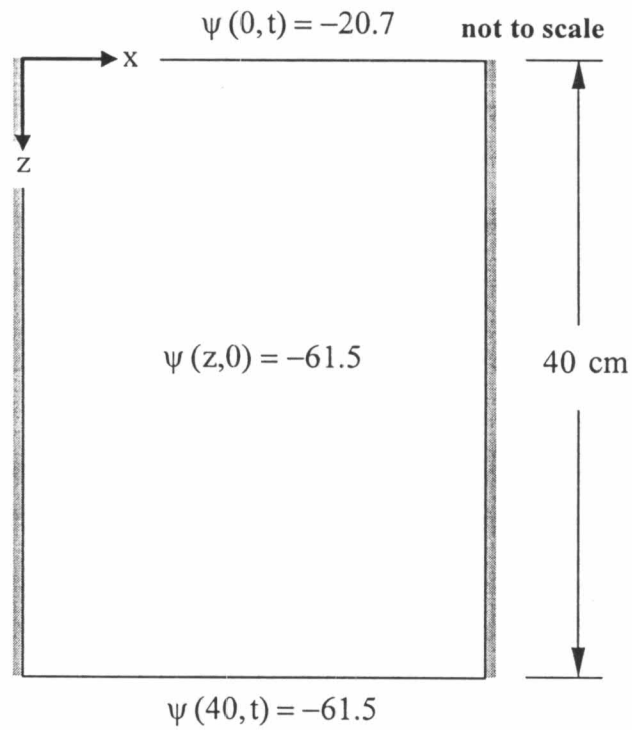
โดยกำหนดให้ $\alpha = 1.611 \times 10^6$ $\theta_s = 0.287$ $\theta_r = 0.075$ $\beta = 3.96$
 $A = 1.175 \times 10^6$ $\gamma = 4.74$ $K_s = 0.00944 \text{ cm/s}$

กำหนดให้เงื่อนไขเริ่มต้น คือ $\psi(z, 0) = -61.5 \text{ cm}$ ซึ่งคิดเป็นปริมาณความชื้น $\theta = 0.0999$

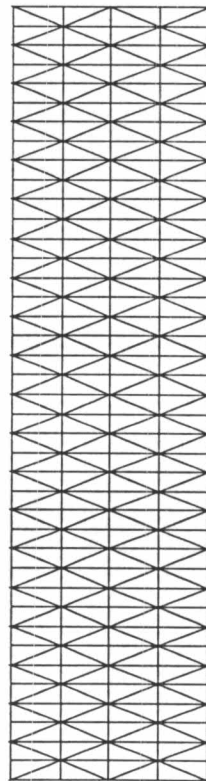
เงื่อนไขขอบเขต คือ $\psi(0, t) = \psi_{\text{top}} = -20.7 \text{ cm}$ ซึ่งคิดเป็นปริมาณความชื้น $\theta = 0.2676$
 $\psi(40, t) = \psi_{\text{bottom}} = -61.5 \text{ cm}$ ซึ่งคิดเป็นปริมาณความชื้น $\theta = 0.0999$

และฟลักซ์เป็นศูนย์ที่ด้านซ้ายและด้านขวา

การวิเคราะห์ปัญหาเริ่มจากการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประกอบไปด้วย 205 จุดต่อและ 320 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 5.19 ซึ่งกำหนดให้ตลอดขอบด้านบนมีหัวน้ำมากกว่าตลอดขอบด้านล่างขวา ดังนั้นลักษณะการกระจายตัวของความชื้นก็จะกระจายตัวจากบนลงล่าง โดยใช้ช่วงเวลาเท่ากับ 0.1 วินาที เป็นจำนวน 3,600 ช่วงเวลา เงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขเริ่มต้นของปัญหาที่ 5.6 ถูกแสดงในรูปที่ 5.18

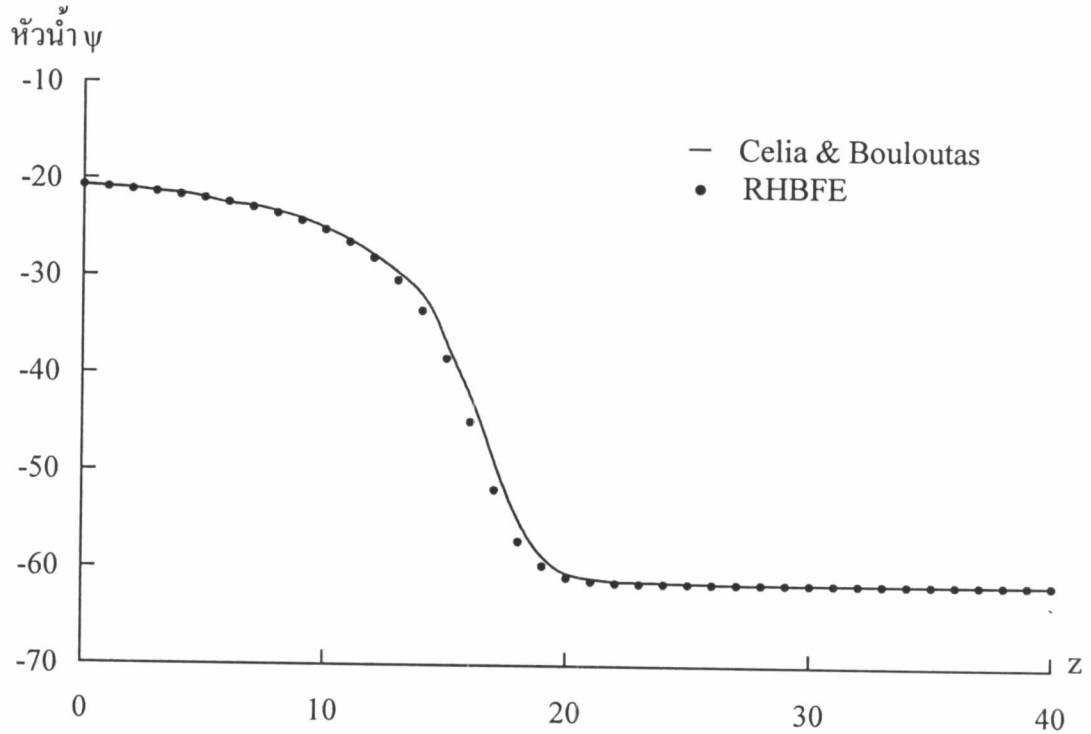


รูปที่ 5.18 ลักษณะปัญหาการซึ่มหนึ่งมิติในแนวตั้งแบบกำหนดเงื่อนไขขอบเขตด้วยหัวน้ำ



รูปที่ 5.19 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาที่ 5.6

รูปที่ 5.20 แสดงการเปรียบเทียบหัวน้ำที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรม RHBFE โดยเปรียบเทียบกับการคำนวณของ Celia & Bouloutas [23] ที่เวลา $t = 360$ วินาที ซึ่งจะเห็นว่าได้ผลลัพธ์ที่มีความสอดคล้องใกล้เคียงกัน



รูปที่ 5.20 เปรียบเทียบหัวน้ำที่เวลา 360 วินาทีที่ได้จากโปรแกรม RHBFE กับผลการคำนวณของ Celia & Bouloutas

5.7 ปัญหาการซึมหนึ่งมิติในแนวตั้งแบบกำหนดเงื่อนไขด้วยฟลักซ์

สมการในปัญหานี้มีลักษณะเช่นเดียวกับปัญหาที่ 5.6 เพียงต่างกันที่การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตด้วยฟลักซ์ สมการจึงคงรูปเหมือนสมการในปัญหาที่ 5.6 นั่นคือ

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial K_z(\psi)}{\partial z} = \theta^*(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (5.18)$$

ดินอีกชนิดหนึ่งที่ถูกนำเสนอโดย Antonopoulos & Papazafiriou [24] มีค่าสัมประสิทธิ์การซึมผ่านและความสัมพันธ์ระหว่างค่าหัวน้ำกับปริมาณความชื้นอยู่ในรูปสมการ (5.19) และ (5.20).

$$K(\psi) = K_s \frac{A}{A + |\psi|^\gamma} \quad (5.19)$$

$$\text{และ} \quad \theta = \frac{\alpha (\theta_s - \theta_r)}{\alpha + |\psi|^\beta} + \theta_r \quad (5.20)$$

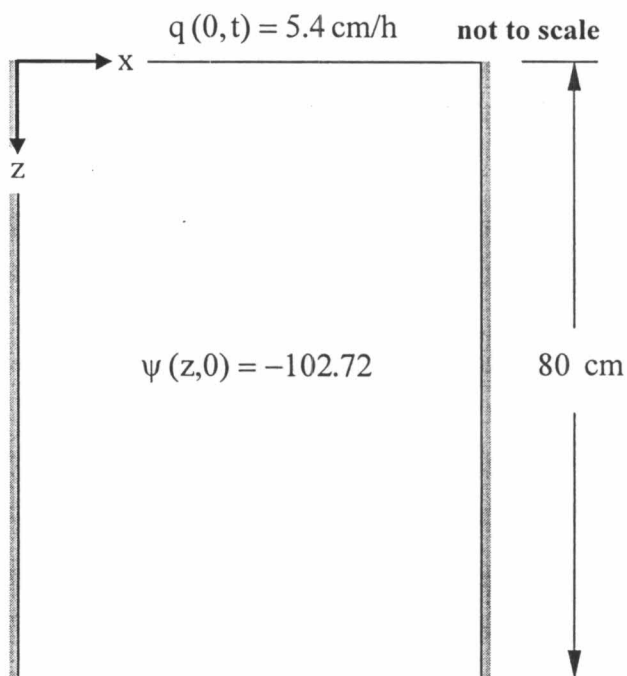
โดยที่ $\alpha = 5.264 \times 10^4$ $\theta_s = 0.27$ $\theta_r = 0.06$ $\beta = 3.163$ $K_s = 18 \text{ cm/h}$
 $A = 3.098 \times 10^7$ $\gamma = 6.355$

กำหนดให้เงื่อนไขเริ่มต้น คือ $\psi(z, 0) = -102.72 \text{ cm}$

เงื่อนไขขอบเขต คือ $q(0, t) = q_{\text{top}} = 5.4 \text{ cm/h}$

และฟลักซ์เป็นศูนย์ที่ด้านซ้ายและด้านขวา

รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประกอบไปด้วย 820 จุดต่อและ 1,304 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 5.22 การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตมีความแตกต่างจากปัญหาที่ 5.6 กล่าวคือกำหนดให้มีการเคลื่อนที่ของความชื้นที่ขอบด้านบนของโดเมน โดยใช้ช่วงเวลาวิเคราะห์เท่ากับ 2×10^{-4} ชั่วโมง เป็นจำนวน 1,000 ช่วงเวลา สำหรับเงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขเริ่มต้นของปัญหาที่ 5.7 ถูกแสดงในรูปที่ 5.21

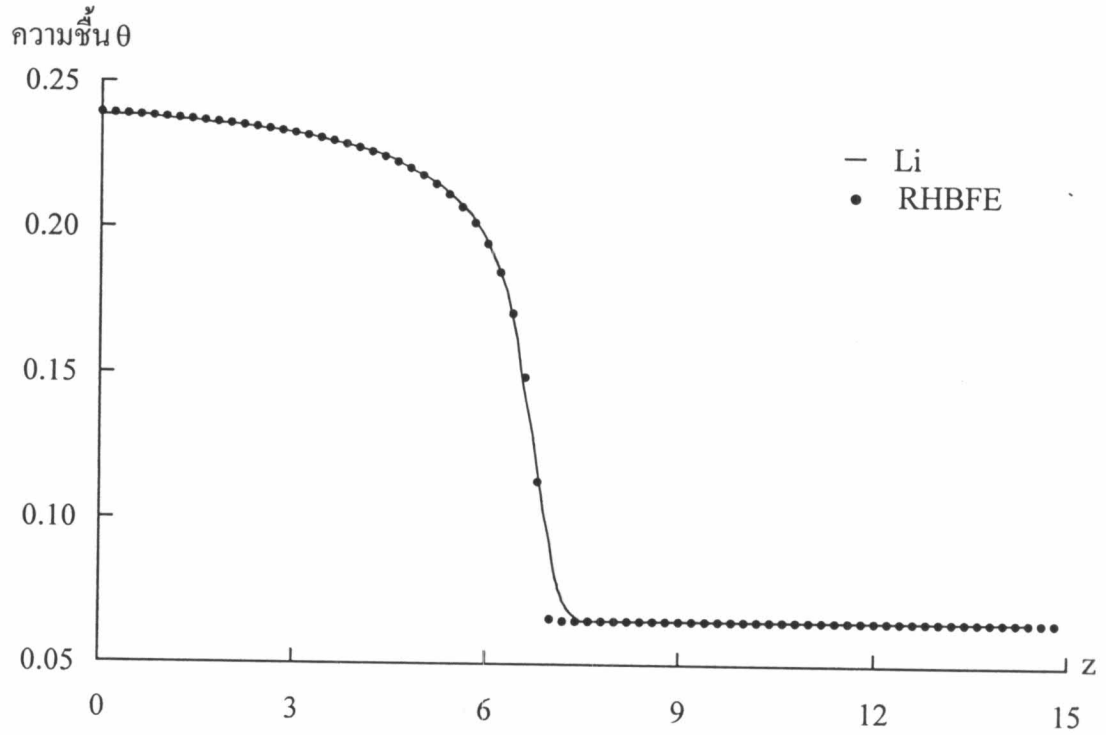


รูปที่ 5.21 ลักษณะปัญหาการซึมหนึ่งมิติในแนวตั้งแบบกำหนดเงื่อนไขขอบเขตด้วยฟลักซ์



รูปที่ 5.22 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาที่ 5.7

สำหรับรูปที่ 5.23 ได้ทำการเปรียบเทียบผลจากการคำนวณที่ได้จากโปรแกรม RHBFE กับผลการคำนวณของ Li [25] ที่เวลา $t = 0.2$ ชั่วโมง ซึ่งจะเห็นได้ว่ามีความสอดคล้องกัน



รูปที่ 5.23 เปรียบเทียบปริมาณความขึ้นที่เวลา 0.2 ชั่วโมงที่ได้จากโปรแกรม RHBFE กับผลการคำนวณของ Li

5.8 ปัญหาการซึมสองมิติแบบไม่เชิงเส้นภายใต้สถานะไม่คงตัว

สมการในปัญหาสองมิตินี้มีลักษณะเช่นเดียวกับปัญหาที่ 5.6 และปัญหาที่ 5.7 สมการจึงเหมือนสมการในปัญหาที่ 5.6 และปัญหาที่ 5.7 นั่นคือ

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial K_z(\psi)}{\partial z} = \theta^*(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (5.21)$$

Warrick et al. [27] เสนอไดนามิกชนิดหนึ่งซึ่งมีแบบจำลองที่ต่างออกไปจากดินที่ Haverkamp et al. และ Antonopoulos & Papazafiriou ได้เสนอในปัญหาก่อนหน้านี้ พารามิเตอร์ $K(\psi)$ และ $\theta(\psi)$ ถูกกำหนดให้มีค่าเป็นไปตามสมการ (5.22) และ (5.23) ข้างล่างนี้

$$K(\psi) = \begin{cases} 1343 |\psi|^{-3.4095} & \psi < -29.48 \\ 0.3589 |\psi|^{-0.97814} & \psi \geq -29.48 \end{cases} \quad (5.22)$$

$$\text{และ } \theta(\psi) = \begin{cases} 0.6829 - 0.09524 \ln |\psi| & \psi < -29.48 \\ 0.4531 - 0.02732 \ln |\psi| & \psi \geq -29.48 \end{cases} \quad (5.23)$$

กำหนดให้เงื่อนไขเริ่มต้น คือ

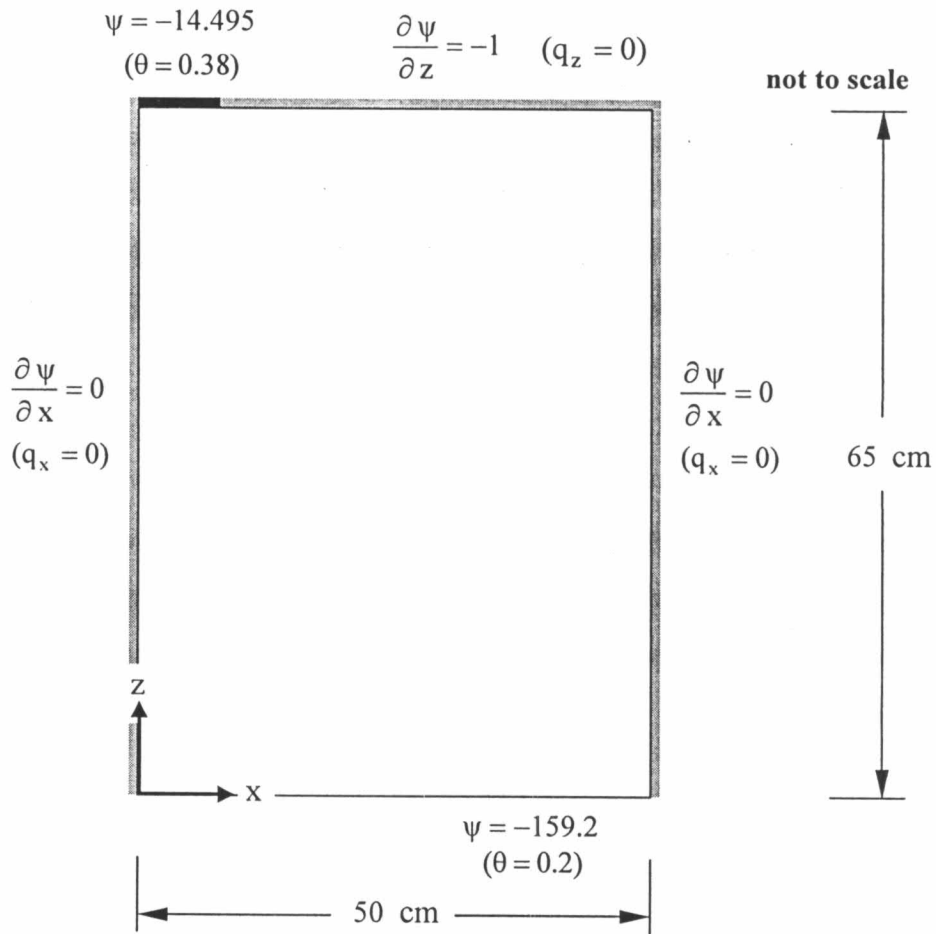
$$\theta(x, z, 0) = \begin{cases} 0.2 - (0.05) \left(\frac{z-5}{60} \right) & 5 \leq z \leq 65 \text{ cm} \\ 0.2 & z \leq 5 \text{ cm} \end{cases} \quad (5.24)$$

เงื่อนไขขอบเขต คือ $\psi(0, t) = \psi_{\text{bottom}} = -159.2 \text{ cm}$

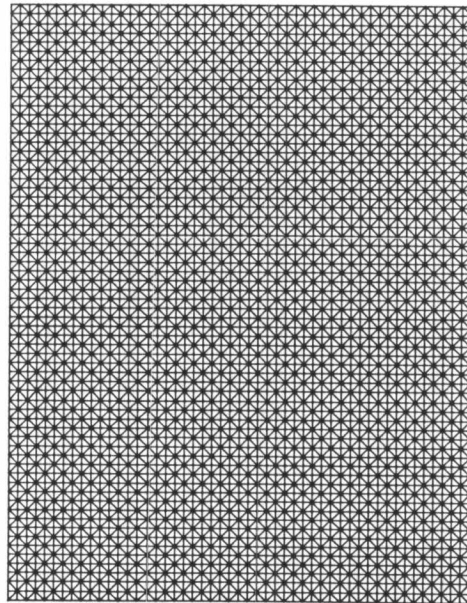
$$\psi(65, t) = \psi_{\text{top}} = -14.495 \text{ cm} \quad 0 \leq x \leq 8 \text{ cm} \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -1 \quad x > 8 \text{ cm}$$

และฟังก์ชันเป็นศูนย์ที่ด้านซ้ายและด้านขวา



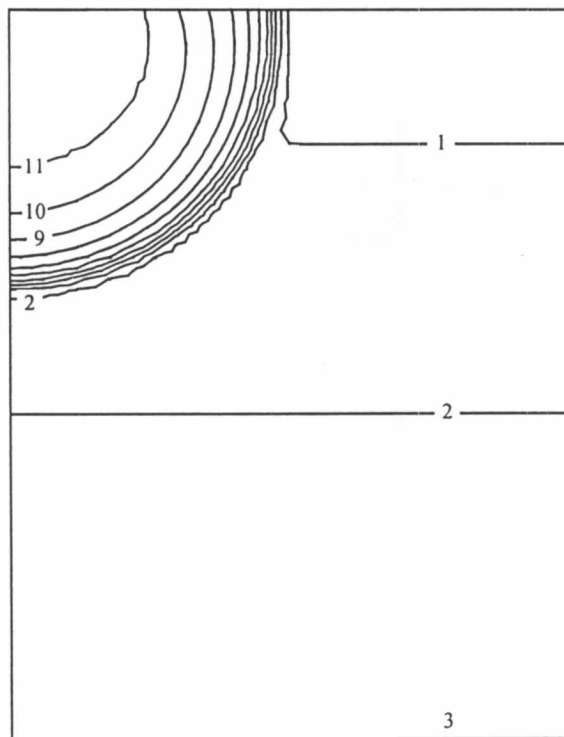
รูปที่ 5.24 ลักษณะปัญหาการซึมสองมิติแบบไม่เชิงเส้นภายใต้สถานะไม่คงตัว



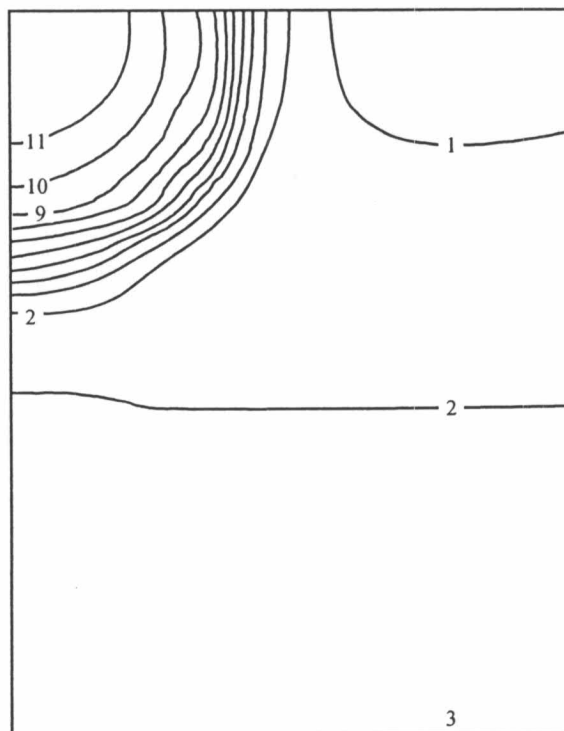
รูปที่ 5.25 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาที่ 5.8

การวิเคราะห์ปัญหาเริ่มจากการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประกอบไปด้วย 3,366 จุดต่อและ 6,500 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 5.25 การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตมีลักษณะต่างไปจากปัญหาที่ผ่านมาโดยกำหนดให้มีความชื้นผ่านเข้าที่บริเวณขอบบนด้านซ้ายขนาดกว้าง 8 cm. ขอบด้านบนที่เหลือถูกกำหนดให้ฟลักซ์เท่ากับศูนย์ และตลอดขอบล่างก็ถูกกำหนดปริมาณความชื้นให้คงที่อีกค่าหนึ่ง ดังแสดงรายละเอียดอยู่ในรูปที่ 5.24 โดยกำหนดช่วงเวลาเท่ากับ 1 วินาที เป็นจำนวน 7,200 ช่วงเวลา

จากการเปรียบเทียบการกระจายตัวของความชื้นซึ่งได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรม RHBFE ดังแสดงในรูปที่ 5.26 (บน) กับการกระจายตัวของความชื้นซึ่งได้จากการคำนวณโดย Celia et al. [26] ดังแสดงในรูปที่ 5.26 (ล่าง) พบว่าลักษณะการกระจายตัวของความชื้นซึ่งได้จากการคำนวณทั้งสองมีลักษณะคล้ายคลึงและสอดคล้องกัน



level	moisture content
1	0.16
2	0.18
3	0.20
4	0.22
5	0.24
6	0.26
7	0.28
8	0.30
9	0.32
10	0.34
11	0.36
12	0.38



level	moisture content
1	0.16
2	0.18
3	0.20
4	0.22
5	0.24
6	0.26
7	0.28
8	0.30
9	0.32
10	0.34
11	0.36
12	0.38

รูปที่ 5.26 เปรียบเทียบหัวน้ำที่เวลา 120 นาทีที่ได้จาก

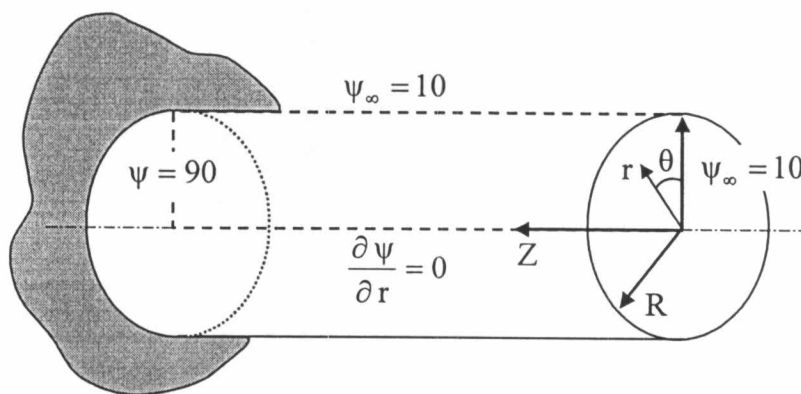
(บน) โปรแกรม RHBFE

(ล่าง) ผลการคำนวณของ Celia et al.

5.9 ปัญหาการซึมแบบที่มีความสมมาตรรอบแกน

ปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกน (axisymmetric problem) ดังแสดงในรูป 5.26 เป็นปัญหาที่มีรูปร่างสามมิติแต่สามารถแก้ปัญหาได้โดยใช้เอลิเมนต์แบบสองมิติ รูปที่ 5.26 แสดงรูปร่างของปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกน Z เมื่อกำหนดให้เป็นปัญหาสถานะอยู่ตัวซึ่งละทิ้งการพิจารณาหัวน้ำเนื่องจากแรงโน้มถ่วงและเป็นการซึมผ่านใน โชนอ้อมตัวซึ่งค่าสัมประสิทธิ์การซึมผ่านอ้อมตัวจะมีค่าคงที่โดยกำหนดให้เท่ากับ 1 หน่วย/วินาที สมการ (3.53) จึงลดรูปลงเหลือ

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (5.26)$$

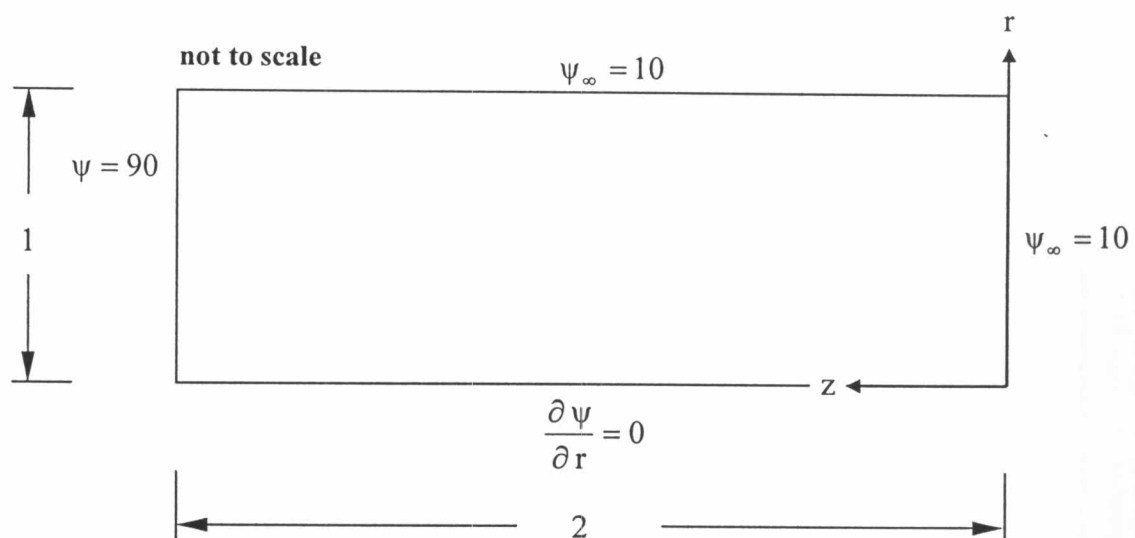


รูปที่ 5.27 รูปร่างของปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกน

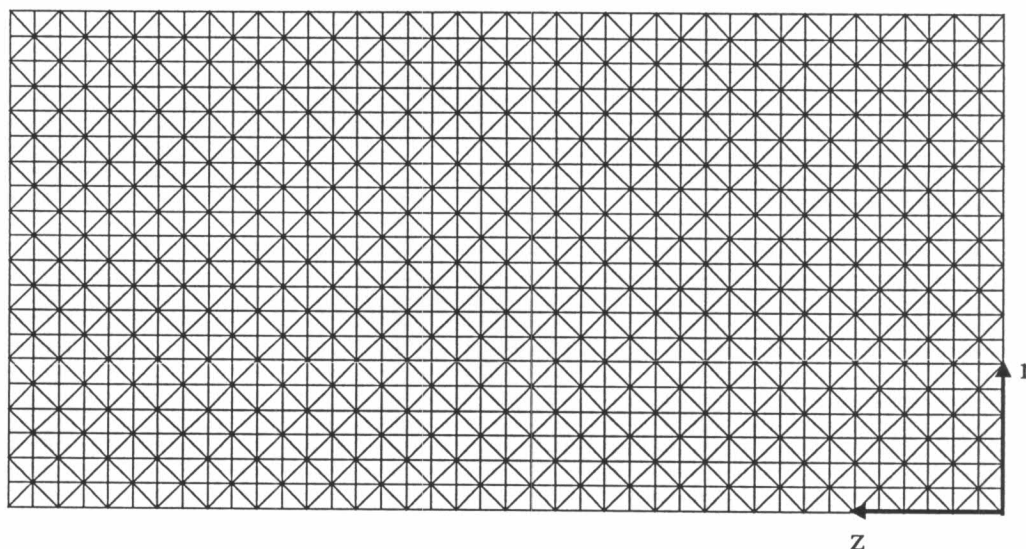
กำหนดให้เงื่อนไขขอบเขต คือ

$$\begin{aligned} r=0 & : \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \\ r=R & : \quad \psi_{\infty} = 10 \\ z=0 & : \quad \psi_{\infty} = 10 \\ z=L & : \quad \psi = f(r) - \psi_{\infty} = 90 \end{aligned}$$

รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประกอบไปด้วย 861 จุดต่อและ 1,600 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 5.29 สำหรับเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาที่ 5.9 ถูกแสดงในรูปที่ 5.28



รูปที่ 5.28 รูปทรง มิติ เงื่อนไขขอบเขต และเงื่อนไขเริ่มต้นของปัญหาที่ 5.9



รูปที่ 5.29 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาที่ 5.9

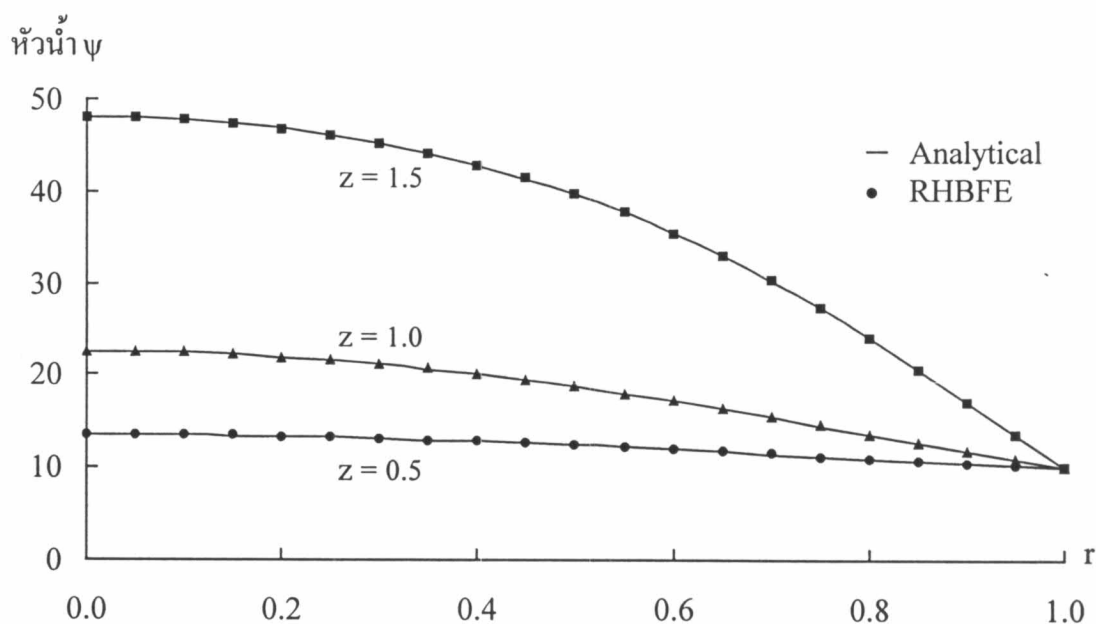
ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์สำหรับโดเมนและเงื่อนไขขอบเขตข้างต้นอ้างอิง [19] อยู่ในรูป

$$\psi = \psi_\infty + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^R (f(r) - \psi_\infty) J_0(\alpha_n r) r dr}{\sinh(\alpha_n L) R^2 J_1^2(\alpha_n R)} J_0(\alpha_n r) \sinh(\alpha_n z) \quad (5.27)$$

แต่ในกรณีเฉพาะเมื่อ $f(r) = \psi_0 = \text{const}$. ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์จะสามารถลดรูปเหลือเพียง

$$\psi = \psi_\infty + 2(\psi_0 - \psi_\infty) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n r) \sinh(\alpha_n z)}{(\alpha_n R) J_1(\alpha_n R) \sinh(\alpha_n L)} \quad (5.28)$$

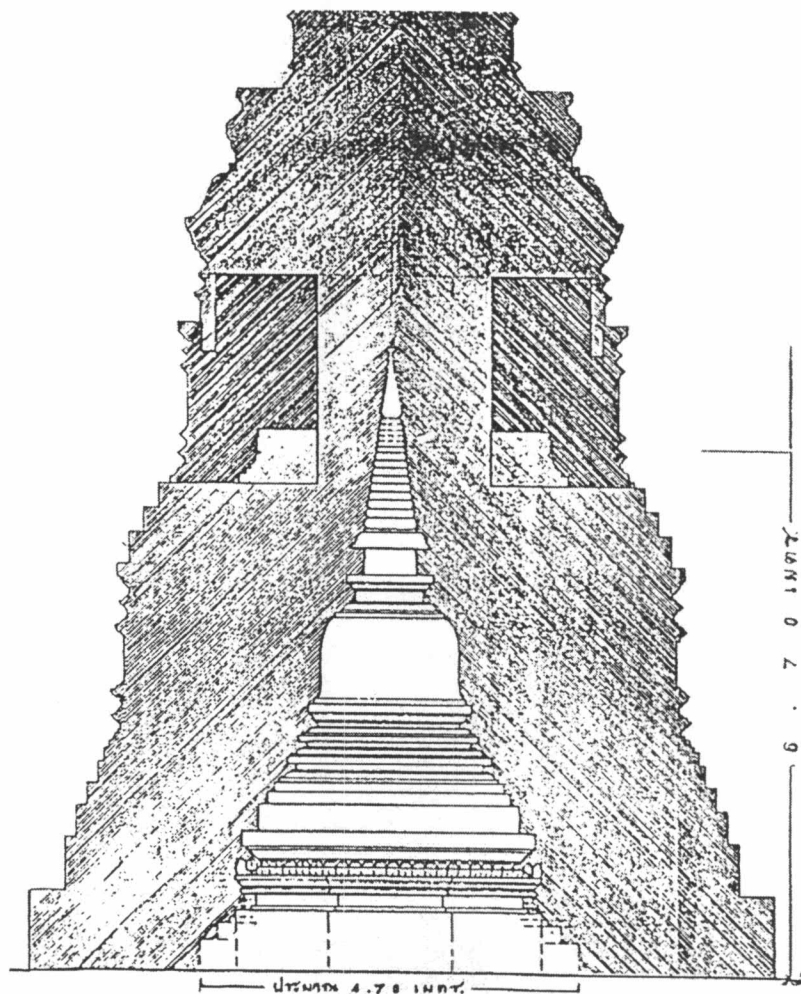
รูปที่ 5.30 แสดงการเปรียบเทียบค่าหัวน้ำที่ได้จากการคำนวณกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของตำแหน่งที่แตกต่างกันซึ่งได้แก่ $z = 0.5, 1.0$, และ 1.5 หน่วย จะเห็นว่าได้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องแม่นยำ



รูปที่ 5.30 เปรียบเทียบหัวน้ำในหน้าตัดต่างๆ ที่ได้จากโปรแกรม RHBFE กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

5.10 กรณีศึกษาการชมในพระสถูปเจดีย์วัดพันสัด [28]

วัดพันสัดเป็นวัดโบราณซึ่งตั้งอยู่บนถนนนิมมานเหมินท์ อำเภอเมือง จังหวัดเชียงใหม่ ซึ่งคาดว่าสร้างขึ้นในสมัยอาณาจักรล้านนา ราวปีพ.ศ. 1900 เจดีย์วัดพันสัดจึงเป็นสถาปัตยกรรมแบบล้านนาและเรียกรูปแบบของทรงเจดีย์ว่า เจดีย์ทรงปราสาทยอด โดยเจดีย์ทรงดังกล่าวมีลักษณะที่สำคัญคือ มีเรือนธาตุสี่เหลี่ยมต่อยอดทรงกรวย และเป็นหลักฐานที่เชื่อมโยงความสัมพันธ์กับสุโขทัยและลงมาถึงกรุงศรีอยุธยา ภายในเจดีย์วัดพันสัดบรรจุไว้ด้วยสถูปองค์หนึ่งดังในรูปที่ 5.31



รูปที่ 5.31 พระสถูปในองค์เจดีย์วัดพันสัด

สมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานี้ได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 3 นั่นคือสมการ (3.53)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r K_r(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial K_z(\psi)}{\partial z} = \theta^*(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (5.29)$$

กรณีศึกษานี้มีเป้าหมายเพื่อศึกษาการเปลี่ยนแปลงของความชื้นภายในพระศดูป ดังนั้น โดเมนเริ่มต้นของปัญหาคือองค์ศดูปที่บรรจุภายในเจดีย์ แต่เนื่องจากไม่สามารถกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่บริเวณฐานของพระศดูป จึงได้ขยายโดเมนในการคำนวณลงไปต่ำกว่าฐานของพระศดูปจนกระทั่งถึงระดับน้ำใต้ดินซึ่งเป็นตำแหน่งที่หัวน้ำมีค่าเท่ากับศูนย์ จากนั้นภายใต้สมมติฐานที่ว่า การเปลี่ยนแปลงของปริมาณความชื้นในช่วงเวลาหนึ่งของเจดีย์มีค่าน้อยมากและขณะเริ่มพิจารณาองค์ศดูปมีปริมาณความชื้นน้อยกว่าเจดีย์ จึงสมมติให้ความชื้นในเจดีย์มีค่าคงที่และเนื่องจากเจดีย์เปรียบเสมือนเปลือกที่หุ้มพระศดูป การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่ผิวของพระศดูปก็จะกำหนดให้มีปริมาณความชื้นคงที่ (หัวน้ำคงที่) เช่นเดียวกัน และได้สมมติค่าคงที่ของแบบจำลองสำหรับวัสดุพรุนขึ้นโดยมีความสัมพันธ์ดังสมการ (5.30) และ (5.31)

$$K(\psi) = K_s \frac{A}{A + |\psi|^\gamma} \quad (5.30)$$

$$\text{และ} \quad \theta = \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{\alpha + |\psi|^\beta} + \theta_r \quad (5.31)$$

โดยที่ $\alpha = 1.611 \times 10^6$ $\theta_s = 0.45$ $\theta_r = 0.075$ $\beta = 3.96$ $K_s = 0.00944$ cm/h
 $A = 1.175 \times 10^6$ $\gamma = 4.74$

กำหนดให้เงื่อนไขเริ่มต้นคือ

$$\psi(r, z, 0) = -30.5 \text{ cm} \text{ ซึ่งมีปริมาณความชื้น } \theta = 0.33$$

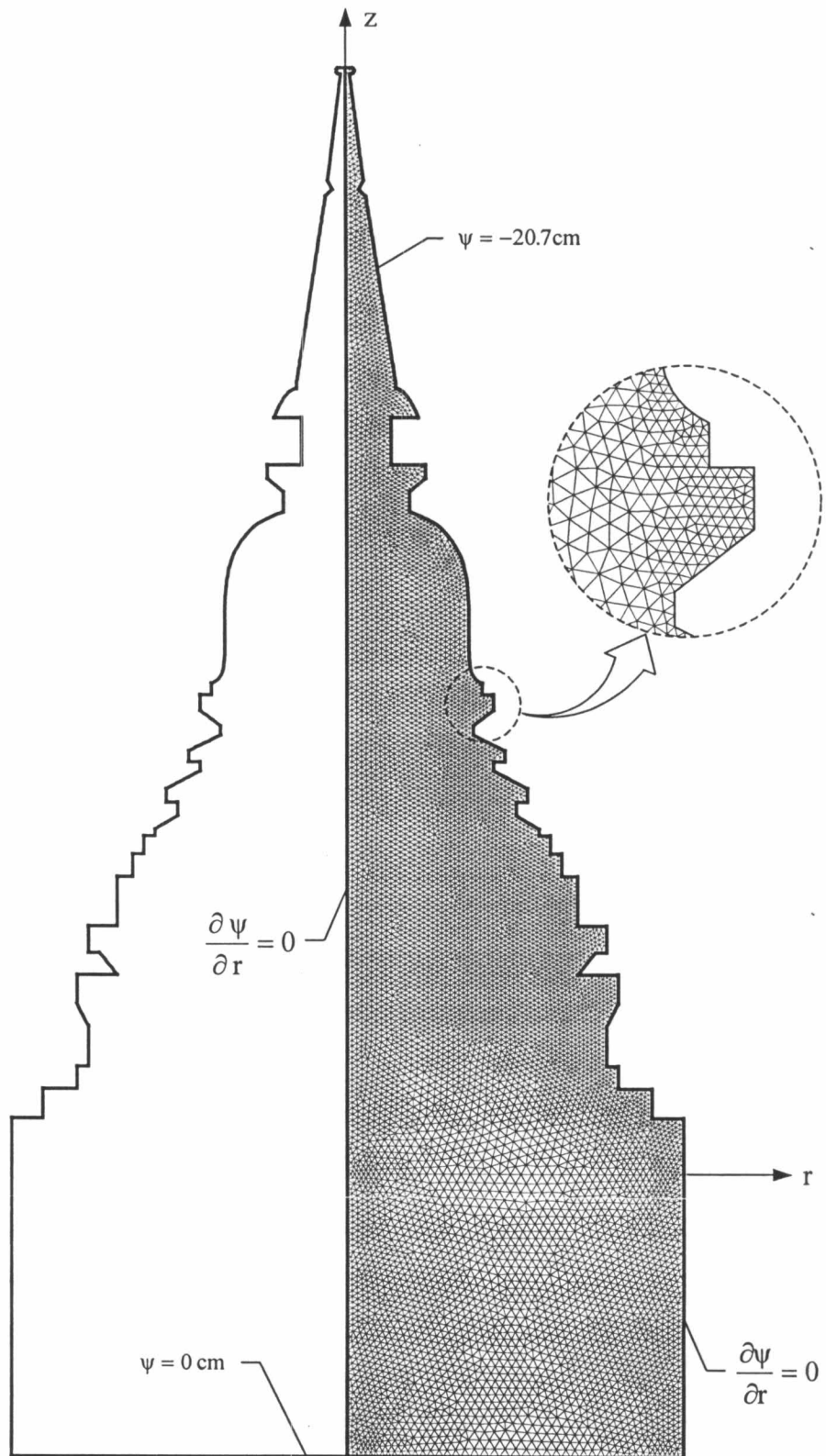
เงื่อนไขขอบเขต คือ

ที่ด้านล่างเป็นระดับน้ำใต้ดินจึงมีเงื่อนไข $\psi = 0$ cm ซึ่งมีปริมาณความชื้น $\theta = 0.45$

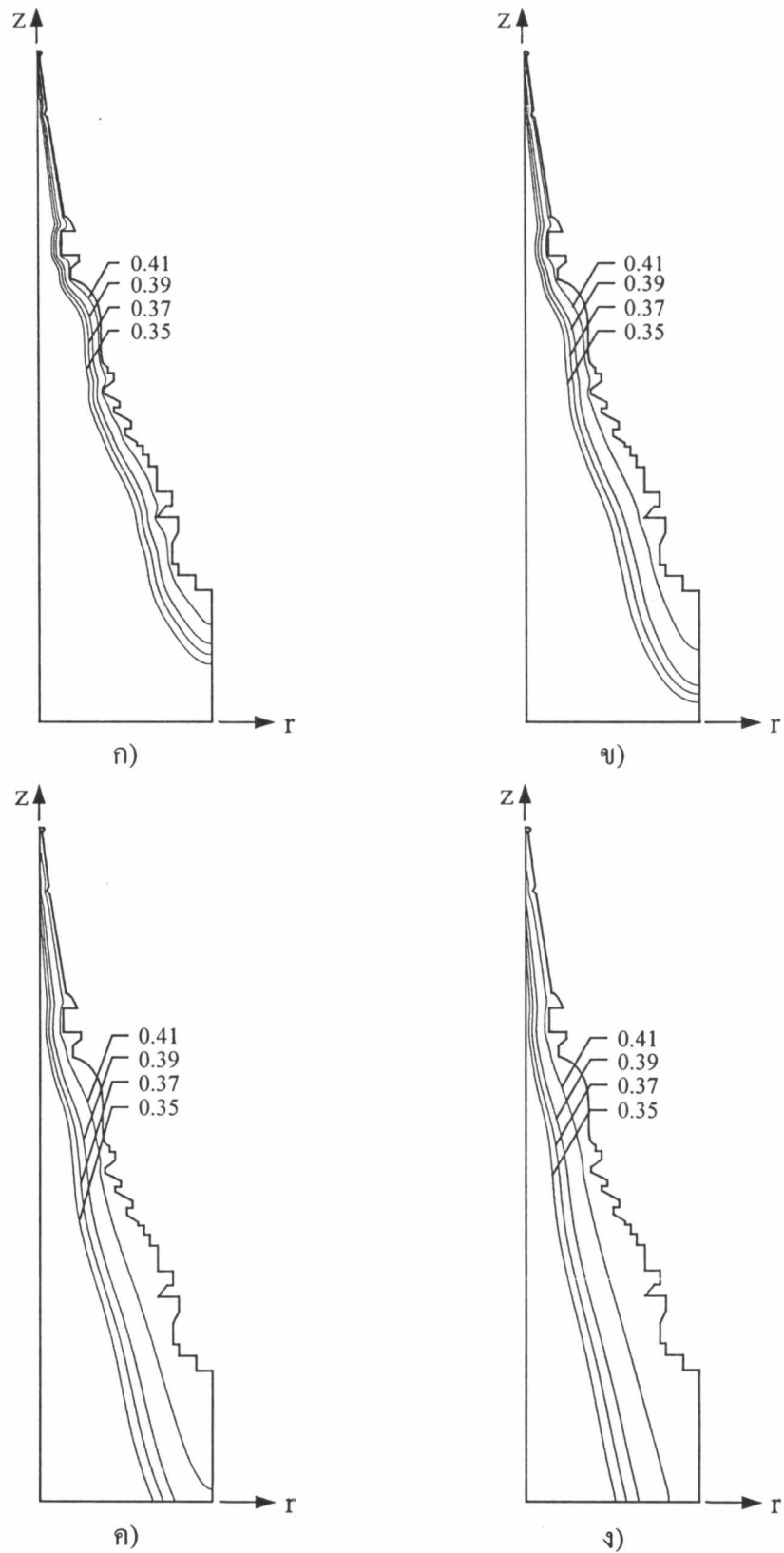
ที่ผิวของพระศดูปถูกกำหนดให้มีหัวน้ำ $\psi = -20.7$ cm ซึ่งมีปริมาณความชื้น $\theta = 0.42$

จากความสมมาตรของพระศตูปจึงสามารถพิจารณาเพียงครึ่งหนึ่งของพระศตูป รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประกอบไปด้วย 8,987 จุดต่อและ 17,264 เอลิเมนต์ การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตกำหนดให้มีความชื้นผ่านเข้าที่บริเวณผิวของพระศตูป ดังแสดงรายละเอียดอยู่ในรูปที่ 5.32 โดยกำหนดช่วงเวลาเท่ากับ 60 ชั่วโมง เป็นจำนวน 60 ช่วงเวลา

จากผลการคำนวณพบว่าความชื้นมีการกระจายตัวจากผิวพระศตูปเข้าสู่ใจกลางของพระศตูป และเมื่อเข้าสู่สถานะอยู่ตัวจะพบว่าการกระจายตัวของความชื้นสม่ำเสมอเท่ากันทั้งองค์พระศตูป โดยมีปริมาณความชื้น $\theta = 0.42$ ในขณะที่ปริมาณความชื้นที่เวลา 5 ชม. 10 ชม. 20 ชม. และ 30 ชม. ถูกแสดงรายละเอียดอยู่ในรูปที่ 5.33



รูปที่ 5.32 รูปทรง มิติ เจ็อนไขขอบเขต และเจ็อนไขเริ่มต้น
และแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการซึมในสลับ



รูปที่ 5.33 เส้นชั้นแสดงปริมาณความชื้นที่เวลาต่างๆ

ก) 5 ชั่วโมง ข) 10 ชั่วโมง ค) 20 ชั่วโมง ง) 30 ชั่วโมง