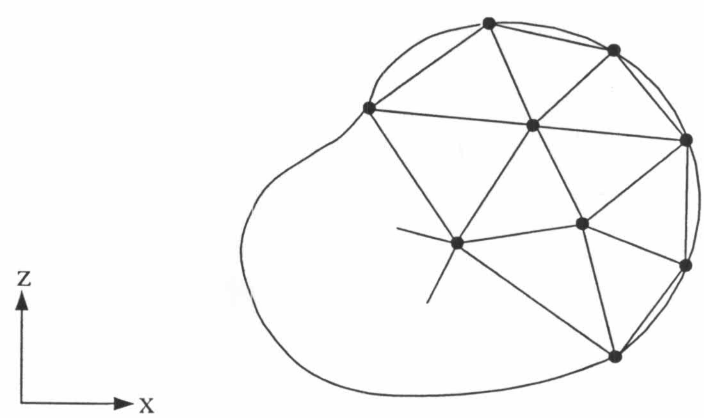
บทที่ 3

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการซึมของความชื้น

3.1 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

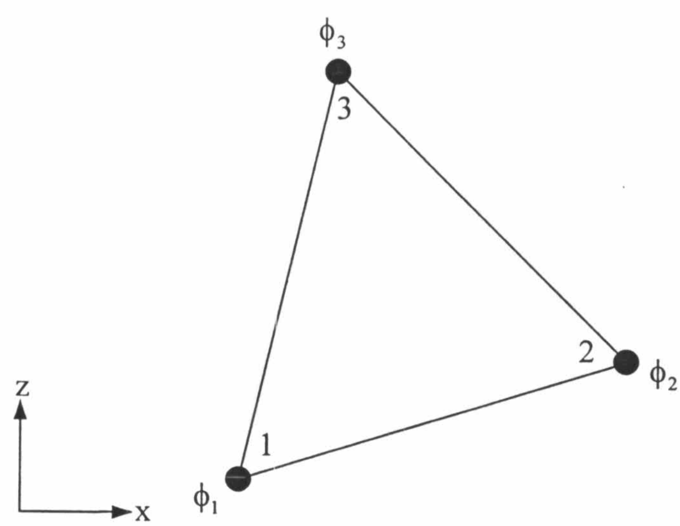
ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วยขั้นตอนทั้งหมด 6 ขั้นตอน [13] คือ

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> การแบ่งขอบเขตรูปร่างลักษณะของปัญหาที่ต้องการหาผลลัพธ์ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ดังแสดงในรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 การแบ่งขอบเขตของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> เลือกฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ (element interpolation functions)



รูปที่ 3.2 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อโดยมีแปรตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อ

ยกตัวอย่างเช่น เอลิเมนต์สามเหลี่ยมซึ่งประกอบด้วยจุดต่อ 3 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 3.2 โดยที่จุดต่อนี้เป็นตำแหน่งของตัวแปรไม่ทราบค่า (nodal unknowns) ซึ่งคือ ϕ_1 , ϕ_2 และ ϕ_3 ตัวแปรไม่ทราบค่าเหล่านี้เป็นคุณสมบัติต่างๆ ของการไหล ลักษณะการกระจายของตัวแปรไม่ทราบค่าบนเอลิเมนต์นี้ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันการประมาณภายในและตัวแปรไม่ทราบค่าที่จุดต่อได้ดังนี้

$$\phi(x,y) = \lfloor N_1 \;\; N_2 \;\; N_3 \rfloor \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \tag{3.1}$$

$$= \underset{(1x3)}{\lfloor N \rfloor} \;\; \underset{(3x1)}{\{\phi\}}$$

โดยที่ $\lfloor N \rfloor$ คือ เมตริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

$\{\phi\}$ คือ เวกเตอร์เมตริกซ์ที่ประกอบด้วยตัวแปรไม่ทราบค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> การสร้างสมการของเอลิเมนต์ (element equations) ดังตัวอย่างเช่นสมการเอลิเมนต์สามเหลี่ยมในรูปที่ 3.2 จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}_e \tag{3.2}$$

ซึ่งเขียนได้อีกรูปแบบหนึ่งคือ

$$[k]_e \{\phi\}_e = \{F\}_e \tag{3.3}$$

ขั้นตอนนี้ถือว่าเป็นหัวใจสำคัญของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ การสร้างสมการของเอลิเมนต์ ซึ่งอยู่ในรูปของสมการ (3.2) สามารถทำได้โดย

1. วิธีการโดยตรง (direct approach)
2. วิธีการแปรผัน (variational approach)
3. วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residuals)

<u>ขั้นตอนที่ 4</u> การนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมาประกอบรวมกัน ก่อให้เกิดระบบสมการในรูปแบบดังนี้

$$\sum(\text{Element Equations}) = [k]_{sys}\{\phi\}_{sys} = \{F\}_{sys} \qquad (3.4)$$

<u>ขั้นตอนที่ 5</u> ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ลงในระบบสมการ จากนั้นจึงแก้ระบบสมการเพื่อหา $\{\phi\}_{sys}$ อันประกอบด้วยตัวแปรไม่ทราบค่าที่จุดต่อ ซึ่งอาจจะเป็นค่าของการเคลื่อนตัว ณ ตำแหน่งต่างๆ ของโครงสร้าง หรืออาจจะเป็นค่าความเร็วของของไหล สำหรับปัญหาของไหล

<u>ขั้นตอนที่ 6</u> เมื่อคำนวณหาค่าต่างๆ ที่จุดต่อออกมาได้แล้วก็สามารถทำการหาค่าอื่นๆ ที่ต้องการทราบต่อไปได้ เช่น เมื่อทราบความเร็วของของไหลก็สามารถนำไปคำนวณหาปริมาณอัตราการไหลทั้งหมดได้

3.2 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

จากสมการของริชาร์ด (2.20) ซึ่งถูกสมมติให้เป็นการซึมผ่านในตัวกลางเนื้อเดียวและมีค่าสัมประสิทธิ์การซึมผ่านเท่ากันทุกทิศทาง

$$\theta^*(\psi)\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(K(\psi)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(K(\psi)\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) - \frac{\partial K(\psi)}{\partial z} = 0 \qquad (3.5)$$

เมื่อเลือกใช้เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม 3 จุดต่อ ลักษณะการกระจายของหัวน้ำของเอลิเมนต์ชนิดนี้จะอยู่ในรูปแบบของแผ่นเรียบ (flat plate) ซึ่งสามารถเขียนในรูปแบบของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\psi(x,z,t) &= \lfloor N_1(x,z)\ N_2(x,z)\ N_3(x,z)\rfloor \begin{Bmatrix}\psi_1(t)\\ \psi_2(t)\\ \psi_3(t)\end{Bmatrix}\\ &= \underset{(1x3)}{\lfloor N(x,z)\rfloor}\ \underset{(3x1)}{\{\psi(t)\}}\end{aligned} \qquad (3.6)$$

โดย $\lfloor N(x,z)\rfloor$ แทนเมตริกซ์ที่ประกอบด้วยฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

$$N_i(x,z) = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i z) \qquad i = 1,2,3 \tag{3.7}$$

และ A แทนพื้นที่เอลิเมนต์ของสามเหลี่ยม

$$A = \frac{1}{2}[x_1(z_2 - z_3) + x_2(z_3 - z_1) + x_3(z_1 - z_2)] \tag{3.8}$$

ส่วน a_i, b_i, c_i ; i = 1, 2, 3 นั้นขึ้นอยู่กับตำแหน่งของโคออร์ดิเนตที่จุดต่อ ดังนี้

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 z_3 - x_3 z_2 & b_1 &= z_2 - z_3 & c_1 &= x_3 - x_2 \\ a_2 &= x_3 z_1 - x_1 z_3 & b_2 &= z_3 - z_1 & c_2 &= x_1 - x_3 \\ a_3 &= x_1 z_2 - x_2 z_1 & b_3 &= z_1 - z_2 & c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \tag{3.9}$$

จากนั้นประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง แต่เนื่องจากลักษณะการกระจายของหัวน้ำ $\psi(x,z,t)$ ที่สมมติให้บนเอลิเมนต์นั้นอยู่ในรูปแผ่นเรียบซึ่งไม่ใช่ผลเฉลยแม่นตรงสำหรับปัญหาโดยทั่วไป ดังนั้นการแทนการกระจายของหัวน้ำลงในสมการ (3.5) จะก่อให้เกิดเศษตกค้าง (residual) R ทางด้านขวาของสมการดังนี้

$$\theta^*(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(K(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(K(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) - \frac{\partial K(\psi)}{\partial z} = R \tag{3.10}$$

จากนั้นจึงพยายามทำให้เศษตกค้างนี้มีค่าน้อยสุด โดยทำการคูณเศษตกค้างด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก W_i ตัวห้อย i = 1, 2, 3 เพื่อก่อให้เกิดสมการของเอลิเมนต์ทั้งหมด 3 สมการเท่ากับจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าของหัวน้ำทั้งหมด 3 ค่าที่ 3 จุดต่อของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม แล้วจึงอินทิเกรตตลอดทั้งพื้นที่ A ของเอลิเมนต์นั้นและกำหนดผลที่ได้ให้เท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\int_A W_i R \, dA = 0 \tag{3.11}$$

เมื่อแทนเศษตกค้าง R จากสมการ (3.10) ลงในสมการ (3.11) จะได้

$$\int_A W_i \left[\theta^*(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(K(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(K(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial K(\psi)}{\partial z} \right] dA = 0 \quad (3.12)$$

แล้วแตกพจน์ต่างๆ ออกมาพิจารณา จะได้

$$\int_A W_i\, \theta^*(\psi)\, \frac{\partial \psi}{\partial t}\, dA - \int_A W_i \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(K(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right) dA$$
$$- \int_A W_i\, \frac{\partial K(\psi)}{\partial z}\, dA = 0 \quad (3.13)$$

ประยุกต์ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss theorem) ซึ่งกล่าวว่า

$$\int_A u\left(\nabla \cdot \bar{V}\right) dA = \int_S u\left(\bar{V} \cdot \hat{n}\right) dS - \int_A \left(\nabla u \cdot \bar{V}\right) dA \quad (3.14)$$

เข้ากับพจน์ที่สองของสมการ (3.13) ทำให้

$$\int_A W_i \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(K(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right) dA =$$
$$\int_S W_i \left(K(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial x} n_x + K(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial z} n_z \right) dS - \int_A \left(\frac{\partial W_i}{\partial x} K(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial z} K(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dA$$

แล้วทำให้สมการ (3.13) กลายมาเป็น

$$\int_A W_i\, \theta^*(\psi)\, \frac{\partial \psi}{\partial t}\, dA - \int_S W_i \left(K(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial x} n_x + K(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial z} n_z \right) dS +$$
$$\int_A \left(\frac{\partial W_i}{\partial x} K(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial z} K(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dA - \int_A W_i\, \frac{\partial K(\psi)}{\partial z}\, dA = 0 \quad (3.15)$$

โดย $i = 1, 2, 3$ สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 3 จุดต่อ ซึ่งได้สมมติลักษณะการกระจายของหัวน้ำบนเอลิเมนต์ดังแสดงในสมการ (3.16) คือ

$$\psi(x,z,t) = \lfloor N(x,z) \rfloor \{ \psi(t) \} \tag{3.16}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x}(x,z) \right\rfloor \{ \psi(t) \} \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial z}(x,z) \right\rfloor \{ \psi(t) \} \tag{3.18}$$

และ

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \lfloor N(x,z) \rfloor \{ \dot{\psi}(t) \} \tag{3.19}$$

แทนสมการ (3.17) – (3.19) ลงในสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (3.15) แล้วเขียนสมการนี้ให้อยู่ในรูปแบบของเมตริกซ์จะได้

$$\int_A \theta^*(\psi)\ \{W\}\lfloor N \rfloor dA\ \{\dot{\psi}\} + \int_A \left(\left\{ \frac{\partial W}{\partial x} \right\} K(\psi) \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor + \left\{ \frac{\partial W}{\partial z} \right\} K(\psi) \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial z} \right\rfloor \right) dA\ \{\psi\}$$
$$= \int_S \{W\} \left(K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} n_x + K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} n_z \right) dS + \int_A \{W\} \frac{\partial K(\psi)}{\partial z}\ dA \tag{3.20}$$

เงื่อนไขขอบเขตของปัญหาโดยทั่วๆ ไปอาจประกอบด้วย

(1) กำหนดหัวน้ำที่ตลอดผิว S_1 :

$$\psi_S = \psi(x,z,t) \tag{3.21}$$

(2) กำหนดฟลักซ์ตลอดผิว S_2 :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \psi}{\partial z} n_z = -q_s \tag{3.22}$$

พจน์แรกทางขวามือของสมการ (3.20) แทนปริมาณความชื้นที่เคลื่อนที่ผ่านผิวของเอลิเมนต์นั้นๆ หากเอลิเมนต์ที่พิจารณานั้นอยู่ภายในวัตถุ ปริมาณความชื้นจะเคลื่อนที่จากเอลิเมนต์หนึ่งไปยังเอลิเมนต์ที่อยู่ถัดไป หากเอลิเมนต์นั้นอยู่ที่ผิวนอกของวัตถุปริมาณความชื้นจะเคลื่อนที่ผ่านผิวของเอลิเมนต์นั้นจะอยู่ในภาวะสมดุลกับปริมาณการถ่ายเทความชื้นภายนอกที่เกิดขึ้นที่ผิวของเอลิเมนต์นั้น ซึ่งอาจจะเป็นอัตราการเคลื่อนที่ของความชื้นที่กำหนดให้ (สมการ 3.22) ส่วนพจน์ที่สองแทนแรง

โน้มถ่วงที่กระทำต่อความชื้น ซึ่งก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในรูปแบบทั่วไปดังแสดงในสมการ (3.23)

$$[C(\psi)]\{\dot{\psi}\}+[K_c(\psi)]\{\psi\}=\{Q_c(\psi,t)\}+\{Q_s(\psi,t)\}+\{Q_g(\psi)\} \tag{3.23}$$

โดยที่

$$[C(\psi)] = \int_A \theta^*(\psi)\,\{W\}\lfloor N \rfloor dA \tag{3.24}$$

$$[K_c(\psi)] = \int_A \left(\left\{\frac{\partial W}{\partial x}\right\}K(\psi)\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor+\left\{\frac{\partial W}{\partial z}\right\}K(\psi)\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial z}\right\rfloor\right)dA \tag{3.25}$$

$$\{Q_c(\psi,t)\} = \int_S \{W\}\left(K(\psi)\frac{\partial\psi}{\partial x}n_x+K(\psi)\frac{\partial\psi}{\partial z}n_z\right)dS \tag{3.26}$$

$$\{Q_s(\psi,t)\} = \int_{S_2} \{W\}q_s\,dA \tag{3.27}$$

$$\{Q_g(\psi)\} = \int_A \{W\}\frac{\partial K(\psi)}{\partial z}\,dA \tag{3.28}$$

หากสัมประสิทธิ์การซึมผ่านมีค่าคงที่ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆ เหล่านี้ สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้ในรูปแบบปิด (closed-form) สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ ซึ่งนำไปใช้ในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ต่อเนื่องได้โดยตรง โดยเริ่มจากฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

$$N_i(x,z) = \frac{1}{2A}\left(a_i+b_ix+c_iz\right) \qquad i=1,2,3$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{b_i}{2A} \tag{3.29}$$

และ

$$\frac{\partial N_i}{\partial z} = \frac{c_i}{2A} \tag{3.30}$$

และสำหรับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบบับโนฟ-กาเลอร์คิน (Bubnov-Galerkin) ซึ่งจะให้ $W_i = N_i$ ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆในสมการ (3.23) สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้ แต่สมการดังกล่าวอยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้นการแก้ปัญหาไม่เชิงเส้นนั้นจะถูกนำเสนอในหัวข้อถัดไป สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับสมการเชิงเส้นในรูปแบบทั่วไปดังแสดงในสมการ (3.30)

$$[C]\{\dot{\psi}\}+[K_c]\{\psi\}=\{Q_s\}+\{Q_g\} \tag{3.31}$$

ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับสมการ (3.30) สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้ดังนี้

<u>เมตริกซ์ของการจุ (capacitance matrix)</u>

$$[C] = \int_A \theta^* \{N\} \lfloor N \rfloor dA$$

$$= \frac{\theta^* A}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

<u>เมตริกซ์ของการแพร่ (diffusion matrix)</u>

$$[K_c] = \int_A K\left(\left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor + \left\{\frac{\partial N}{\partial z}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial z}\right\rfloor\right) dA$$

$$= \frac{K}{4A}\begin{bmatrix} b_1b_1+c_1c_1 & b_1b_2+c_1c_2 & b_1b_3+c_1c_3 \\ b_1b_2+c_1c_2 & b_2b_2+c_2c_2 & b_2b_3+c_2c_3 \\ b_1b_3+c_1c_3 & b_2b_3+c_2c_3 & b_3b_3+c_3c_3 \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

<u>โหลดเวกเตอร์การเคลื่อนที่ที่กำหนดให้ (specified movement load vector)</u>

$$\{Q_s\} = \int_S q_s \{N\}\, dA$$

$$= \frac{q_s A}{3}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{3.34}$$

<u>โหลดเวกเตอร์เนื่องจากแรงโน้มถ่วง (gravity load vector)</u>

$$\left\{Q_g\right\} = \int_A K\left\{\frac{\partial N}{\partial z}\right\} dA$$

$$= \frac{K}{2}\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \tag{3.35}$$

3.3 การประยุกต์ระเบียบวิธีพิคาร์ด

ระบบสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังแสดงในสมการ (3.23) นั้นอยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้น โดยประกอบด้วยค่าหัวน้ำที่จุดต่อซึ่งไม่ทราบค่า ระบบสมการดังกล่าวสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปอันประกอบด้วย n สมการ ดังนี้

$$\underset{(n\times n)}{[K(x)]}\ \underset{(n\times 1)}{\{X\}} = \underset{(n\times 1)}{\{R\}} \tag{3.36}$$

โดยที่ $\{X\}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งประกอบด้วยตัวไม่ทราบค่า $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ที่ต้องการหา $[K(x)]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด $\{n \times n\}$ ซึ่งบรรจุตัวไม่ทราบค่า $x_1, x_2, \ldots, x_n$ อยู่ด้วย และ $\{R\}$ เป็นเวกเตอร์ที่ทราบค่า ดังนั้นการแก้สมการ (3.36) ด้วยวิธีโดยตรงใดๆ เพียงครั้งเดียวเพื่อหาตัวไม่ทราบค่า $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ที่ถูกต้องจึงเป็นไปไม่ได้ จำเป็นต้องประยุกต์ระเบียบวิธีการทำซ้ำบางอย่างเพื่อทำให้ตัวไม่ทราบค่า $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ลู่เข้าสู่ผลลัพธ์ที่ถูกต้อง ระเบียบวิธีที่นิยมใช้กันแพร่หลายวิธีหนึ่งก็คือระเบียบวิธีการทำซ้ำของพิคาร์ด (Picard iteration method) [14] แนวความคิดของระเบียบวิธีนี้เริ่มจากการพิจารณาสมการที่ i^{th} ใดๆในระบบสมการ (3.36) ซึ่งหากตัวไม่ทราบค่า $x_1, x_2, \ldots, x_n$ นั้นไม่ใช่ค่าที่ถูกต้อง จะก่อให้เกิดเศษตกค้าง F_i ของสมการที่ i^{th} นั้นๆ ดังนี้

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ij}(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)x_j - R_i = F_i(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \tag{3.37}$$

หรือ

$$E_{ij}\, x_j = F_i \tag{3.38}$$

การเริ่มต้นทำซ้ำเริ่มโดยสมมติผลเฉลยเริ่มต้น $x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1$ และแทนค่าลงในสมการ (3.38) ซึ่งกลายเป็นระบบสมการเชิงเส้น จากนั้นแก้ระบบสมการเพื่อหา x_j ถัดไป ซึ่งผลเฉลยสามารถเขียนอยู่ในรูป

$$x_j^{r+1} = \left(E_{ji}^r\right)^{-1} F_i^r \tag{3.39}$$

โดยที่ r คือ ตัวนับจำนวนการทำซ้ำ และ $\left(E_{ji}^r\right)^{-1}$ แสดงถึงเมตริกซ์ผกผัน $\left[E^r\right]^{-1}$ การทำซ้ำสมการ (3.39) ในแต่ละรอบจะต้องทำการปรับค่าสัมประสิทธิ์ด้านซ้ายมือและค่าด้านขวามือโดยจะกระทำซ้ำจนกระทั่งลู่เข้า ซึ่งพิจารณาจาก

$$\left(\max_j \left|x_j^{r+1} - x_j^r\right|\right) / \left(\max_j \left|x_j^{r+1}\right|\right) \le \varepsilon \tag{3.40}$$

โดย ε คือ ค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้

3.4 การสร้างความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

วิธีการแก้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (3.23) ที่นิยมใช้กันโดยทั่วไป คือ วิธีของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (recurrence relations) [15] ซึ่งสามารถอธิบายได้โดยใช้รูปที่ 3.3 กล่าวคือ ที่เวลา t_n นั้นทราบค่าหัวน้ำ ψ_n และใช้ช่วงเวลา (time step) Δt เพื่อคำนวณหาหัวน้ำ ψ_{n+1} ที่เวลา t_{n+1} จากรูปที่ 3.3 จะเห็นว่าที่เวลา t_θ ใดๆ ซึ่งอยู่ในเวลา Δt ดังกล่าว สามารถเขียนสมการขึ้นมาได้

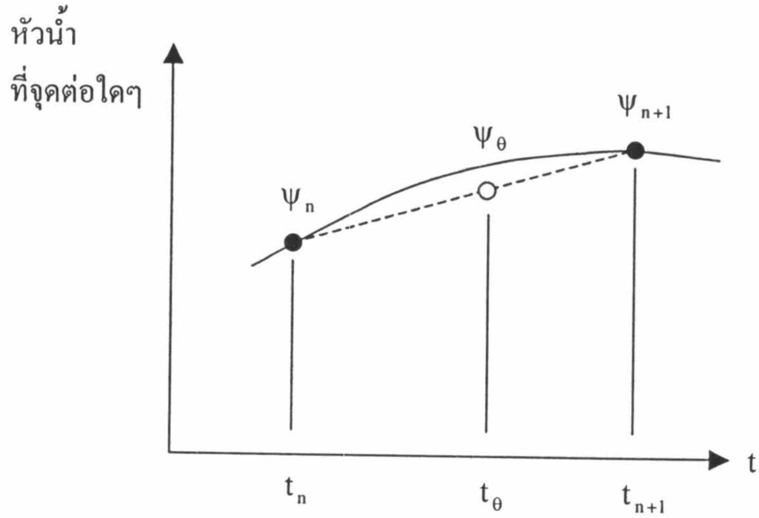
$$t_\theta = t_n + \theta\, \Delta t \tag{3.41}$$

โดย $0 \le \theta \le 1$ ในช่วงเวลาดังกล่าวความชันของหัวน้ำโดยประมาณ คือ

$$\dot{\psi}_\theta \cong \frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{\Delta t} \tag{3.42}$$

และหัวน้ำโดยประมาณที่เวลา t_θ คือ

$$\psi_\theta \;\cong\; (1-\theta)\,\psi_n \;+\; \theta\,\psi_{n+1} \qquad (3.43)$$



รูปที่ 3.3 การเปลี่ยนแปลงของหัวน้ำที่จุดต่อใดๆกับเวลา

ใช้หลักการดังแสดงในสมการ (3.42) – (3.43) นี้เพื่อการคำนวณหาผลลัพธ์ของหัวน้ำในสถานะไม่คงตัวจากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (3.23) โดยเริ่มจากการเขียนสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังกล่าวที่เวลา t_θ ดังนี้

$$[C]\{\dot{\psi}\}_\theta + [K]\{\psi\}_\theta = \{Q\}_\theta \qquad (3.44)$$

ในทำนองเดียวกันกับสมการ (3.42) เวกเตอร์ของความชันของหัวน้ำที่จุดต่อต่างๆ คือ

$$\{\dot{\psi}\}_\theta \;\cong\; \frac{\{\psi\}_{n+1} - \{\psi\}_n}{\Delta t} \qquad (3.45)$$

และในทำนองเดียวกันกับสมการ (3.43) เวกเตอร์ของหัวน้ำที่จุดต่อต่างๆ คือ

$$\{\psi\}_\theta \;\cong\; (1-\theta)\,\{\psi\}_n \;+\; \theta\,\{\psi\}_{n+1} \qquad (3.46)$$

หากโหลดเวกเตอร์ทางด้านขวามือของสมการ (3.23) นั้นเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา โหลดเวกเตอร์ดังกล่าวที่เวลา t_θ ก็สามารถคำนวณได้ในทำนองเดียวกันคือ

$$\{Q\}_\theta \cong (1-\theta)\{Q\}_n + \theta\{Q\}_{n+1} \tag{3.47}$$

แทนสมการ (3.45) – (3.47) ลงในสมการ (3.44) แล้วจัดพจน์โดยให้เวกเตอร์ของหัวน้ำที่ไม่ทราบค่าอยู่ทางซ้ายของสมการจะได้

$$\left(\frac{1}{\Delta t}[C]+\theta[K]\right)\{\psi\}_{n+1} = \left(\frac{1}{\Delta t}[C]-(1-\theta)[K]\right)\{\psi\}_n + (1-\theta)\{Q\}_n + \theta\{Q\}_{n+1} \tag{3.48}$$

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (3.23) ถูกเปลี่ยนให้มาอยู่ในรูปแบบระบบสมการธรรมดา (3.48) ซึ่งสามารถทำการแก้สมการได้โดยตรง ลักษณะของผลลัพธ์ที่ได้จากการแก้ระบบสมการ (3.48) นี้จะขึ้นอยู่กับค่า θ ที่เลือกใช้ และมีชื่อเรียกดังต่อไปนี้

$\theta = 0$	เรียกว่า	ออยเลอร์ (Euler)
$\theta = 1/2$	เรียกว่า	แครงก์-นิโคลสัน (Crank-Nicolson)
$\theta = 2/3$	เรียกว่า	กาเลอร์คิน (Galerkin)
$\theta = 1$	เรียกว่า	ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง (Backward difference)

เมื่อ $\theta = 0$ สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (3.48) จะลดรูปแบบลงเป็น

$$\frac{1}{\Delta t}[C]\{\psi\}_{n+1} = \left(\frac{1}{\Delta t}[C]-[K]\right)\{\psi\}_n + \{Q\}_n \tag{3.49}$$

เมื่อ $\theta = 1/2$ สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (3.48) จะกลายมาเป็น

$$\left(\frac{1}{\Delta t}[C]+\frac{1}{2}[K]\right)\{\psi\}_{n+1} = \left(\frac{1}{\Delta t}[C]-\frac{1}{2}[K]\right)\{\psi\}_n + \frac{1}{2}(\{Q\}_n + \{Q\}_{n+1}) \tag{3.50}$$

เมื่อ $\theta = 2/3$ สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (3.48) จะกลายเป็นสมการที่มีลักษณะเหมือนสมการ (3.42)

$$\left(\frac{1}{\Delta t}[C]+\frac{2}{3}[K]\right)\{\psi\}_{n+1} = \left(\frac{1}{\Delta t}[C]-\frac{2}{3}[K]\right)\{\psi\}_{n} + \frac{2}{3}\left(\{Q\}_{n} + \{Q\}_{n+1}\right) \tag{3.51}$$

เมื่อ $\theta = 1$ สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (3.48) จะกลายเป็นสมการที่มีลักษณะคล้ายสมการ (3.41)

$$\left(\frac{1}{\Delta t}[C]+[K]\right)\{\psi\}_{n+1} = \frac{1}{\Delta t}[C]\{\psi\}_{n} + \{Q\}_{n+1} \tag{3.52}$$

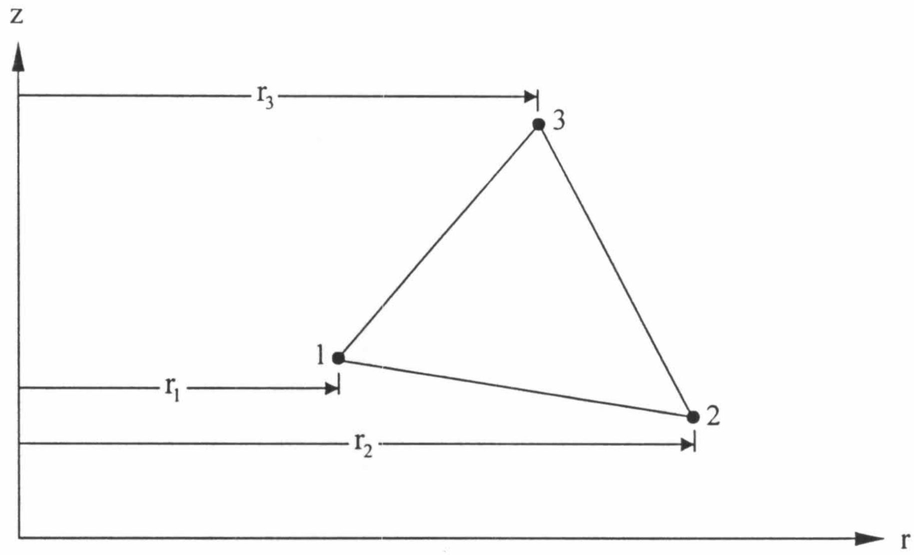
ระบบสมการ (3.49) – (3.52) อยู่ในรูปแบบระบบสมการเชิงเส้นซึ่งสามารถทำการแก้สมการเพื่อหาค่าหัวน้ำ ψ ที่จุดต่อใดๆ ได้โดยตรง

3.5 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมกับความสมมาตรรอบแกน

ปัญหาการซึมในโดเมนสามมิติที่มีความสมมาตรของรูปร่างรอบแกน z [16] นั้น ถูกจำลองให้สะดวกในพิกัดทรงกระบอก r,θ,z (cylindrical coordinate) หากคุณสมบัติต่างๆ ของวัสดุพรุนไม่ขึ้นกับมุม θ ทำให้หัวน้ำเป็นฟังก์ชันของ r และ z เท่านั้น ดังนั้นโดเมนสามมิติจึงถูกนำเสนอด้วยเอลิเมนต์ที่หมุนเป็นวงรอบแกนสมมาตร และทำให้สามารถที่จะวิเคราะห์ในลักษณะปัญหาสองมิติดังแสดงในสมการ (3.53) เอลิเมนต์สามเหลี่ยมซึ่งมีความสมมาตรรอบแกนแบบสามจุดต่อถูกแสดงอยู่ในรูปที่ 3.4

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r K_r(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + \frac{\partial K_z(\psi)}{\partial z} = \theta^*(\psi)\,\frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{3.53}$$

การสร้างไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์จากเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสมมาตรรอบแกนนั้นก็มีความใกล้เคียงกับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมปกติ โดยความแตกต่างอยู่ที่การอินทิเกรตบนระนาบ $r-z$ และในพิกัดทรงกระบอก $dA = 2\pi r\,dr\,dz$ ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆ ในสมการ (3.31) สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้ในทำนองเดียวกัน ดังนี้



รูปที่ 3.4 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมซึ่งมีความสมมาตรรอบแกนแบบสามจุดต่อ

เมตริกซ์ของการจุ (capacitance matrix)

$$[C] = \int_A \theta^* \{N\} \lfloor N \rfloor \, r \, dA$$

$$= \frac{\theta^* A}{60} \begin{bmatrix} 6r_1 + 2r_2 + 2r_3 & 2r_1 + 2r_2 + r_3 & 2r_1 + r_2 + 2r_3 \\ & 2r_1 + 6r_2 + 2r_3 & r_1 + 2r_2 + 2r_3 \\ \text{Symmetric} & & 2r_1 + 2r_2 + 6r_3 \end{bmatrix} \tag{3.54}$$

เมตริกซ์ของการแพร่ (stiffness matrix)

$$[K_c] = \int_A K \left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor + \left\{ \frac{\partial N}{\partial z} \right\} \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial z} \right\rfloor \right) r \, dA$$

$$= \frac{K(r_1 + r_2 + r_3)}{12A} \begin{bmatrix} b_1 b_1 + c_1 c_1 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_2 b_2 + c_2 c_2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ b_1 b_3 + c_1 c_3 & b_2 b_3 + c_2 c_3 & b_3 b_3 + c_3 c_3 \end{bmatrix} \tag{3.55}$$

<u>โหลดเวกเตอร์ (load vector)</u>

$$\{Q_c\} = \int_A Q\{N\}\, r\, dA$$

$$= \frac{QA}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix} \qquad (3.56)$$

<u>โหลดเวกเตอร์เนื่องจากแรงโน้มถ่วง (gravity load)</u>

$$\{Q_g\} = \int_A K\left\{\frac{\partial N}{\partial z}\right\} r\, dA$$

$$= \frac{K\left(r_1 + r_2 + r_3\right)}{6}\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \qquad (3.57)$$