บทที่ 2

สมการควบคุมการไหลเวียนของน้ำเนื่องจากลม

2.1 แรงที่ก่อให้เกิดการไหลเวียนของน้ำ

แรง (force) ที่กระทำต่อมวลน้ำที่เกี่ยวเนื่องกับการไหลเวียนของมวลน้ำในทะเลมี 3 ชนิดด้วยกัน คือ แรงเฉือน (shear force) แรงดัน (Pressure force) ซึ่งเกี่ยวเนื่องกับความต่างระดับของผิวน้ำ และแรงโคริโอลิส (Coriolis force)

2.1.1 แรงเฉือน

แรงเฉือน คือ แรงที่กระทำต่อพื้นผิวของวัตถุในแนวสัมผัส ทำให้วัตถุเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปทรงเชิงมุม (angular deformation) แรงเฉือนต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ผิวเรียกว่า ความเค้นเฉือน (สัญญลักษณ์ τ)

ในของเหลวแรงเฉือนทำให้ของเหลวไหล อัตราการเปลี่ยนรูปทรงเชิงมุม (rate of angular deformation) จะขึ้นกับความเค้นเฉือนและความหนืด (viscosity) ของของเหลวตามสมการ Newton Law of Viscosity

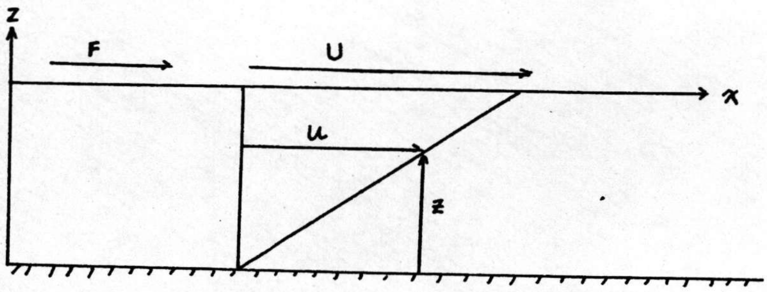
$$\tau = \mu \frac{du}{dz} \qquad (1)$$

เมื่อ du/dz = อัตราการเปลี่ยนรูปทรงเชิงเส้น

τ = ความเค้นเฉือน

μ = ความหนืดของของเหลว

ในทะเล แรงเฉือนจากลมจะทำให้มวลน้ำไหลไปกับกระแสลม ความเร็วของน้ำจะขึ้นกับความเค้นเฉือนและความหนืดของน้ำ ถ้าทะเลมีความลึกคงที่และไม่มีขอบเขต ความเร็วของกระแสน้ำจะมากที่สุดที่ผิวแล้วค่อย ๆ ลดลงจนเป็นศูนย์ที่พื้นท้องน้ำในลักษณะกราฟเส้นตรง ดังแสดงในรูป 2.1 มวลน้ำจะมีอัตราการเปลี่ยนรูปทรง

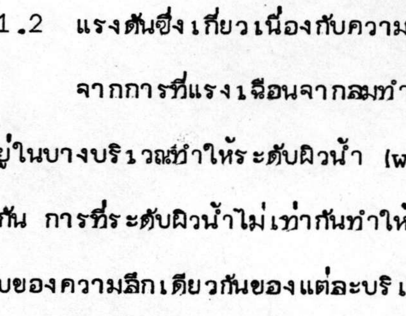


รูปที่ 2.1 การเปลี่ยนแปลงรูปทรงเชิงมุมจากแรงเฉือนขนาดคงที่

เชิงมุมคงที่ มวลน้ำจะไหลไปทางเดียวกับทิศทางของลมที่ทุกระดับ แต่ในสภาพทะเลจริง จะมีขอบเขตซึ่งทำให้มวลน้ำไปรวมตัวกันในบริเวณ ทำให้ระดับน้ำสูงกว่าบริเวณข้างเคียง ก็จะมีมวลน้ำไหลย้อนกลับ ความหนืดของน้ำที่ใช้ในสมการคำนวณจะต้องใช้ความหนืดปรากฏ (apparent viscosity) เพราะว่าทะเลมีความปั่นป่วน (turbulence)

2.1.2 แรงดันซึ่งเกี่ยวเนื่องกับความต่างระดับของผิวน้ำ

จากการที่แรงเฉือนจากลมทำให้มวลน้ำไหลออกไปจากบริเวณหนึ่ง และไปสะสมอยู่ในบางบริเวณทำให้ระดับผิวน้ำ (water surface level) ในแต่ละบริเวณไม่เท่ากัน การที่ระดับผิวน้ำไม่เท่ากันทำให้แรงดันอันเนื่องมาจากน้ำหนักของน้ำที่กดทับ ที่ระดับของความลึกเดียวกันของแต่ละบริเวณ มีขนาดไม่เท่ากัน ซึ่งเป็นเหตุให้มวลน้ำเกิดการไหลย้อนกลับไปจากบริเวณที่มีระดับผิวน้ำสูงกว่าไปยังบริเวณที่มีระดับผิวน้ำต่ำกว่า กระแสน้ำเนื่องจากแรงดันของน้ำจะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับความแตกต่างของระดับผิวน้ำ ดังรูป 2.2 ซึ่งแสดงกระแสน้ำเนื่องจากแรงดันของมวลน้ำ กระแสน้ำจะมีความเร็วที่สุดที่ผิวน้ำและจะลดลงจนเป็นศูนย์ที่พื้นท้องน้ำในลักษณะของกราฟพาราโบลา



รูปที่ 2.2 กระแสน้ำเนื่องจากแรงดันของมวลน้ำ

2.1.3 แรงโคริโอลิส

แรงโคริโอลิส คือ แรงที่ทำให้วัตถุที่เคลื่อนที่บนผิวโลกเบี่ยงเบนไปจากทิศทางปรกติ โดยวัตถุจะเคลื่อนที่เบนไปทางขวาทางซีกโลกภาคเหนือ และวัตถุจะเคลื่อนที่เบนไปทางซ้ายทางซีกโลกภาคใต้

แรงโคริโอลิส จะทำให้วัตถุมีการเคลื่อนที่ในทิศทางตั้งฉากกับทิศทางของการเคลื่อนที่ของวัตถุ สมการของแรงโคริโอลิส ในซีกโลกภาคเหนือ คือ

$$F_x = 2\omega \sin\phi \, . \, U_y \qquad (2)$$

เมื่อ F_x = แรงโคริโอลิสที่เกิดในแนวตะวันออก-ตก

ω = ความเร็วเชิงมุมของการหมุนของโลก

= 7.09×10^{-4} เรเดียน/วินาที

ϕ = เส้นละติจูดที่วัตถุเคลื่อนที่อยู่

U_y = ความเร็วของวัตถุในแนวเหนือ-ใต้

และในทำนองเดียวกัน

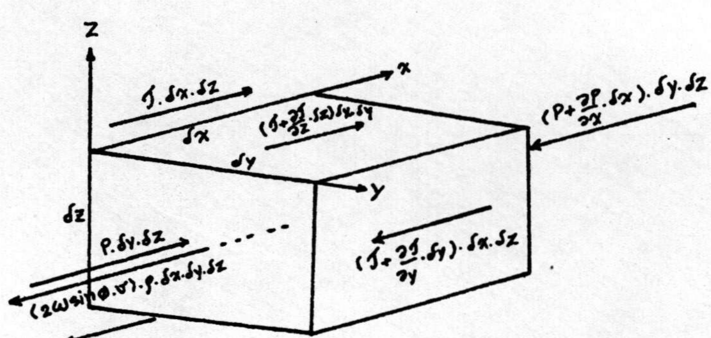
$$F_y = -2\omega \sin\phi \, . \, U_x \qquad (3)$$

เมื่อ F_y = แรงโคริโอลิสที่เกิดในแนวเหนือ-ใต้

U_x = ความเร็วของวัตถุในแนวตะวันออก-ตก

จากสมการ (2) และ (3) จะเห็นได้ว่า ขนาดของแรงโคริโอลิส จะขึ้นกับละติจูดที่วัตถุเคลื่อนที่ และอัตราความเร็วของวัตถุนั้น

2.2 สมการควบคุมการไหลเวียนของน้ำเนื่องจากลม



รูปที่ 2.3 แสดงแรงทั้งหมดที่กระทำต่อมวลน้ำขนาด $\delta x.\delta y.\delta z$ ในแนวแกน x

พิจารณามวลน้ำเล็ก ๆ ขนาด $\delta x.\delta y.\delta z$ ที่อยู่ใน steady flow field ดังแสดงในรูป 2.3 การเคลื่อนที่ของมวลน้ำปริมาตรเล็ก ๆ นี้ ตามแนวแกน x จะเป็นไปตามกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน คือ $\Sigma F = ma$ (4)

โดยที่ ΣF = ผลรวมของแรงต่าง ๆ ที่กระทำต่อมวลน้ำขนาด $\delta x.\delta y.\delta z$

= แรงเฉือน + แรงดันของน้ำ + แรงโคริโอลิส

$$= \left(\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial z}.\delta z\right).\delta x.\delta y - \tau_{xy}.\delta x.\delta y + \left(\tau_{xz}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial y}.\delta y\right).\delta x.\delta z - \tau_{xz}.\delta x.\delta z+P.\delta y\delta z$$

$$-\left(P+\frac{\partial P}{\partial x}.\delta x\right).\delta y.\delta z-\rho.\delta x.\delta y.\delta z.(2\omega\sin\phi.v)$$

$$= \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial z}.\delta x.\delta y.\delta z+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial y}.\delta x.\delta y.\delta z-\frac{\partial P}{\partial x}.\delta x.\delta y.\delta z$$

$$-\rho.\delta x.\delta y.\delta z.(2\omega\sin\phi.v) \qquad (5)$$

m = มวลน้ำซึ่งมีปริมาตร $\delta x.\delta y.\delta z$

$$= \rho.\delta x.\delta y.\delta z \qquad (6)$$

a = ความเร่งของมวลน้ำ

$$= \frac{dU}{dt}(x,y,z,t)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$= u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (7)$$

เนื่องจาก flow field อยู่ในสภาพสมดุลและความเร็วตามแกน z น้อยมาก สองเทอมหลังของสมการ (7) จึงสามารถตัดทิ้งได้ คงเหลือเป็น

$$a = u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (8)$$

แทนค่า F, m และ a จากสมการ (5),(6),(8) ลงในสมการ (4)

จะได้

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z}.\delta x.\delta y.\delta z+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y}.\delta x.\delta y.\delta z-\frac{\partial P}{\partial x}.\delta x.\delta y.\delta z-\rho.\delta x.\delta y.\delta z(2\omega\sin\phi.v)$$

$$= \rho.\delta x.\delta y.\delta z.\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad \text{-------}(9)$$

เอา $\delta x.\delta y.\delta z$ หารสมการ (9) ตลอดจะได้

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} - 2\rho\omega\sin\phi = \rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \text{-------}(10)$$

จาก Newton Law of Viscosity จะได้

$\tau_{xy} = \mu\frac{\partial u}{\partial z}$ และ $\tau_{xz} = \mu\frac{\partial u}{\partial y}$ ซึ่งเมื่อหาอนุพันธ์ เทียบกับ z และ y ตามลำดับจะได้

หาอนุมพันธ์เทียบกับ z จะได้ $$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad \text{--------}(11)$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ y จะได้ $$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \text{-------}(12)$$

ความดันที่จุดใด ๆ ในมวลน้ำจะมีค่าตามสมการ

$$p = \gamma(z+\eta) \qquad \text{-------}(13)$$

โดยที่ p = ความดัน

γ = น้ำหนักของน้ำต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร

η = การยกตัวของระดับผิวน้ำ

หาอนุพันธ์เทียบกับ x ได้

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \gamma\left(\frac{z}{x} + \frac{\eta}{x}\right) \qquad \text{--------}(14)$$

เนื่องจาก z ณ จุดใด ๆ จะคงที่เสมอ, ทำให้ $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$

ดังนั้นสมการ (14) จะเหลือเพียง

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \gamma\frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad \text{---------}(15)$$

ค่า $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ นี้ก็คือ ความเอียงของผิวน้ำตามแนวแกน x

แทนค่า $\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial z}, \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial x}$ จากสมการ (11), (12), (15) ลงในสมการ (10) จะได้

$$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \gamma\frac{\partial\eta}{\partial x} - 2\rho w\sin\phi .\ v$$
$$= \rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\cdot\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \text{----------(16)}$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อรวมแรงต่างที่กระทำในแนวแกน y ที่สภาวะสมดุล จะได้

$$\mu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \gamma\frac{\partial\eta}{\partial y} - 2\rho w\sin\phi .\ u$$
$$= \rho u\frac{\partial v}{\partial x} + \rho v\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{----------(17)}$$

สมการที่ (16) และ (17) คือสมการควบคุม (Governing equation) ของการไหลเวียนของน้ำเนื่องจากลม โดยมีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) ดังนี้

1. การเปลี่ยนแปลงของระดับผิวน้ำจะต้องเป็นไปตามสมการ

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{z=-h}^{z=\eta} u(x,y,z)\,dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{z=-h}^{z=\eta} v(x,y,z)\,dz = -\frac{\partial\eta}{\partial t}(x,y,t) \qquad \text{--------(18)}$$

2. ที่ระดับผิวน้ำ (z=o) : $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\tau_w}{\mu}\cdot\sin\theta$

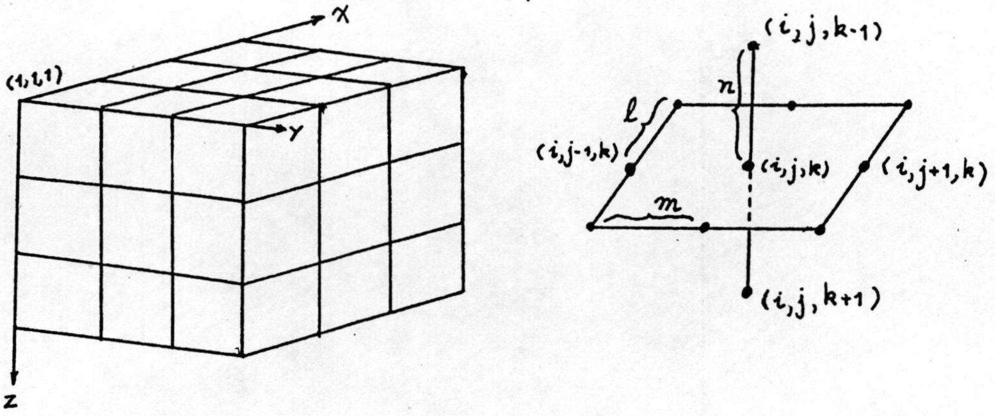
   และ $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau_w}{\mu}\cdot\cos\theta$ --------(19)

   เมื่อ θ = ทิศทางของลมที่พัด

3. ที่พื้นท้องน้ำ (z = -h) : u = o, v = o --------(20)

2.3 การแปลงสมการควบคุมการไหลเวียนของน้ำเนื่องจากลมให้อยู่ในรูปของสมการดิฟเฟอเรนท์ (Different Equation)

สมการ (16), (17) เป็นสมการดิฟเฟอเรนท์เชียล แบบพาร์เชียล จะถูกแปลงเป็นสมการดิฟเฟอเรนท์เพื่อใช้เครื่องคอมพิวเตอร์คำนวณหาคำตอบในการแปลงสมการให้อยู่ในรูปของสมการดิฟเฟอเรนท์ จะพิจารณาค่าที่จุดตัดของเส้นกริดที่ห่างกัน ℓ เมตร ตามแนวทิศตะวันออกหรือแกน x และ m เมตร ตามแนวทิศใต้หรือแกน y และอยู่ที่ระดับชั้นห่างกันชั้นละ n เมตร ตามแนวแกน z ดังแสดงในรูป 2.4



รูปที่ 2.4 แสดงการแบ่งบริเวณศึกษา

กำหนดให้	i	คือค่าดัชนีสำหรับจุดตามแนวแกน x
	j	คือค่าดัชนีสำหรับจุดตามแนวแกน y
และ	k	คือค่าดัชนีสำหรับจุดตามแนวแกน z

จุด (i,j,k) คือ จุดที่ i ตามแนวแกน X จุดที่ j ตามแนวแกน Y และจุดที่ k ตามแนวแกน Z ดังนั้น ถ้า A เป็นฟังก์ชั่นของ X,Y และ Z เราสามารถหาค่าอนุพันธ์ของ A โดยประมาณได้ดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial A}{\partial x}(i,j,k) = \frac{A(i+1,j,k) - A(i-1,j,k)}{2l} \quad \text{-------(21)}$$

$$\frac{\partial A}{\partial y}(i,j,k) = \frac{A(i,j+1,k) - A(i,j-1,k)}{2m} \quad \text{-------(22)}$$

$$\frac{\partial A}{\partial z}(i,j,k) = \frac{A(i,j,k+1) - A(i,j,k-1)}{2n} \quad \text{-------(23)}$$

$$\frac{\partial^2 A(i,j,k)}{\partial x^2} = \frac{A(i+1,j,k) - 2A(i,j,k) + A(i-1,j,k)}{l^2} \quad \text{--(24)}$$

$$\frac{\partial^2 A(i,j,k)}{\partial y^2} = \frac{A(i,j+1,k) - 2A(i,j,k) - A(i,j-1,k)}{m^2} \quad \text{--(25)}$$

$$\frac{\partial^2 A(i,j,k)}{\partial z^2} = \frac{A(i,j,k+1) - 2A(i,j,k) + A(i,j,k-1)}{n^2} \quad \text{--(26)}$$

จากการใช้สมการ (21) ถึง (26) สมการ (16) จะเปลี่ยนเป็น

$$\frac{\mu}{n^2}(U(i,j,k+1)-2U(i,j,k)+U(i,j,k-1)) + \frac{\mu}{m^2}(U(i,j+1,k)-2U(i,j,k)$$

$$+U(i,j-1,k)) - \frac{r}{2l}(\eta(i+1,j)-\eta(i-1,j,)) -2\rho\cdot\omega\sin\phi.\ V(i,j,k)$$

$$= \frac{\rho}{2l}U(i,j,k).(U(i+1,j,k)-U(i-1,j,k)) + \frac{\rho}{2m^2}V(i,j,k).(U(i,j+1,k)$$

$$-U(i,j-1,k)) \qquad \text{--------}(27)$$

ถ้าเราแบ่งให้ระยะห่างระหว่างเส้นกริดตามแกน x และ y เท่ากัน (l=m) สมการ (27) จะเปลี่ยนเป็น

$$\frac{\mu}{n^2}(U(i,j,k+1)-2U(i,j,k)+U(i,j,k-1)) + \frac{\mu}{m^2}(U(i,j+1,k)$$

$$-2U(i,j,k)+U(i,j-1,k)) - \frac{r}{2m}(\eta(i+1,j)-\eta(i-1,j)) -2\rho\cdot\omega\sin\phi$$

$$V(i,j,k) = \frac{\rho}{2m^2}U(i,j,k).(U(i+1,j,k)-U(i-1,j,k)) + \frac{\rho}{2m^2}$$

$$V(i,j,k).(U(i,j+1,k)-U(i,j-1,k) \qquad \text{---------}(28)$$

เอา $\frac{2m}{\rho}$ คูณสมการ (28) ตลอด และ $r = \rho g$ จะได้

$$\frac{2\mu m}{\rho n^2}(U(i,j,k+1)-2U(i,j,k)+U(i,j,k-1))+ \frac{2\mu}{\rho m^2}(U(i,j+1,k)$$

$$-2U(i,j,k)+ U(i,j-1,k) - g(\eta(i+1,j)-\eta(i-1,j))$$

$$-4m\,\omega\sin\phi.\ V(i,j,k)) = U(i,j,k).(U(i+1,j,k)-U(i-1,j,k))$$

$$+ V(i,j,k).(U(i,j+1,k) -U(i,j-1,k)) \qquad \text{------}(29)$$

ให้ $\lambda = \frac{2\mu m}{\rho n^2}$ จัดสมการ (29) ใหม่

$$U(i,j,k).(2\lambda + \frac{2\mu}{\rho m^2}+U(i+1,j,k)-U(i-1,j,k)) = \lambda.(U(i,j,$$

$$k+1)+U(i,j,k-1))+\frac{2\mu}{\rho m^2}(U(i,j+1,k) +U(i,j-1,k)) -g$$

$$(\eta(i+1,j)-\eta(i-1,j))-V(i,j,k).(U(i,j+1,k)-U(i,j-1,k)$$

$$+4m\,\omega\sin\phi)$$

$$
\begin{aligned}
U(i,j,k) = {} & (\lambda(U(i,j,k+1)+U(i,j,k-1))+\frac{2\mu}{\rho m^2}(U(i,j+1,k)+U(i,j-1,k)) \\
& -g.(\eta(i+1,j)-\eta(i-1,j))-V(i,j,k).(U(i,j+1,k)-U \\
& (i,j-1,k)+4m\,\omega\sin\phi))/(2\lambda+\frac{2\mu}{\rho m^2}+U(i+1,j,k)-U \\
& (i-1,j,k)) \qquad \text{--------}(30)
\end{aligned}
$$

ในทำนองเดียวกันสมการ (17) จะเปลี่ยนเป็น

$$
\begin{aligned}
V(i,j,k) = {} & (\lambda(V(i,j,k+1)+V(i,j,k-1))+\frac{2\mu}{\rho m^2}(V(i+1,j,k) \\
& +V(i-1,j,k))-g.(\eta(i,j+1)-\eta(i,j-1)) \\
& -U(i,j,k).(V(i+1,j,k)-V(i-1,j,k)-4m\cdot \\
& \omega\sin\phi))/(2\lambda+\frac{2\mu}{\rho m^2}+V(i,j+1,k)-V(i,j-1,k)) \\
& \text{-------}(31)
\end{aligned}
$$

สมการ (30) และ (31) คือ สมการควบคุมโดยมีเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

1. การหาการเปลี่ยนแปลงของระดับผิวน้ำ สมการ (18) จะได้

$$
\begin{aligned}
\Delta\eta(i,j) = {} & \frac{n}{2m^2}(U(i+1,j,1)-U(i-1,j,1)+V(i,j+1,1) \\
& -V(i,j-1,1))+ \\
& \frac{n}{m}\left\{\sum_{k=2}^{k=\frac{h}{n}(i,j)}(U(i+1,j,k)-U(i-1,j,k)+\sum_{k=2}^{k=\frac{h}{n}(i,j)}\right. \\
& \left.(V(i,j+1,k)-V(i,j-1,k))\right\} \text{-------}(31)
\end{aligned}
$$

เมื่อ $h(i,j)$ คือค่าความลึกที่จุด (i,j)

2. ที่ผิวน้ำ $(k=1)$; $U(i,j,1) = U(i,j,2)+m.\tau_w.\sin\phi$---(33)

   $V(i,j,1) = V(i,j,2)+m.\tau_w.\cos\phi$---(34)

3. ที่พื้นท้องน้ำ $(k=h+1)$; $U(i,j,h+1) = 0$

   $V(i,j,h+1) = 0$