บทที่ 3

การหาข้อมูลผลตอบความถี่จากการทดลอง

ในบทที่ 2 ได้แสดงการหาทรานสเฟอร์ฟังก์ชันโดยวิธีอนาไลติก (Analytic Transfer Function) ได้รูปแบบทรานสเฟอร์ฟังก์ชันตามสมการ (2-8) หรือฟังก์ชันผลตอบความถี่ (Frequency Response Function) โดยให้ s = jw ในบทนี้จะแสดงการหาผลตอบความถี่ของระบบในรูปของข้อมูลจากการทดลองกับระบบจริง ข้อมูลผลตอบความถี่ที่ได้เป็นจำนวนเชิงซ้อนประกอบด้วยส่วนจริง (Real Part) และส่วนจินตภาพ (Imaginary Part) ซึ่งสัมพันธ์กับสมการผลตอบความถี่ที่ได้จากการแทน s ด้วย jw โดย

$$H(jw_i) = [\, b_0 + b_1(jw_i) + \dots + b_m(jw_i)^m] \,/\, [\, a_0 + a_1(jw_i) + \dots + a_n(jw_i)^n]$$
$$= R_i + j\, I_i \qquad (3\text{-}1)$$

เมื่อ R_i และ I_i เป็นส่วนจริงและส่วนจินตภาพของข้อมูลผลตอบความถี่ ที่ความถี่ w_i ตามลำดับ จากสมการ (3-1) จะเห็นว่าถ้าเรามีค่า R และ I ในช่วงความถี่ที่สนใจ และทราบโครงสร้างของทรานสเฟอร์ฟังก์ชันหรือออเดอร์ของ s (ค่า m และ n) จากวิธีการในบทที่ 2 เราก็จะสามารถหาค่าพารามิเตอร์ a, b ได้โดยอาศัยกรรมวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์จากข้อมูลผลตอบความถี่ที่จะกล่าวต่อไปในบทที่ 4 สำหรับวิธีการทดลองเพื่อหาข้อมูลผลตอบความถี่หรือทรานเฟอร์ฟังก์ชันที่เหมาะสมสำหรับระบบเชิงกลนั้นได้แก่ การทดสอบโดยใช้อินพุทแบบพัลส์ (Pulse Testing Method) ซึ่งกระบวนการในการทดสอบเป็นกระบวนการแบบดีเทอมินิสติก (Deterministic Process) และลักษณะการทดสอบเป็นแบบทรานเซียน (Transient) เพราะอินพุทและเอ้าพุทของระบบในโดเมนของเวลา (Time Domain) จะมีค่าเข้าสู่ศูนย์ที่เวลาจำกัดค่าหนึ่ง อีกวิธีหนึ่งคือการทดสอบด้วยอินพุทแบบแรนดอม (Random Input) ซึ่ง

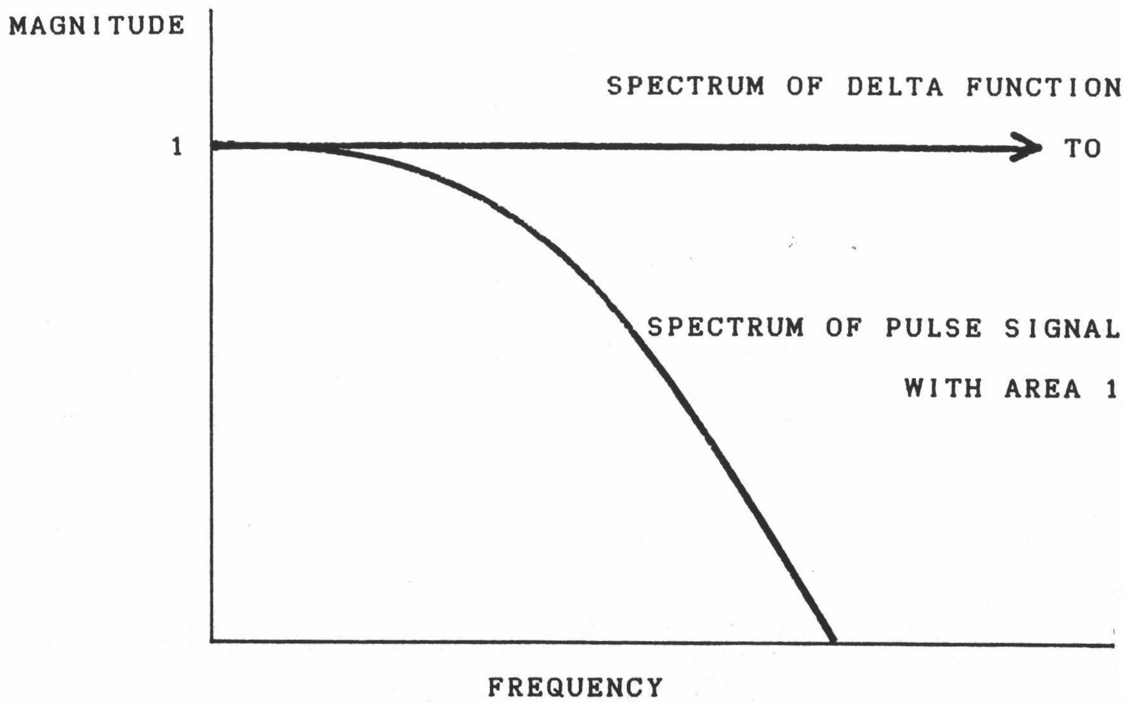
การทดสอบเป็นกระบวนการความน่าจะเป็น (Stochastic Process) และลักษณะการทดสอบเป็นแบบต่อเนื่อง การคำนวณหาข้อมูลผลตอบความถี่ของทั้งสองวิธีอาศัยการวิเคราะห์เสปคตรัม (Spectral Analysis) และโดยที่การคำนวณทั้งหมดจะทำบนไมโครคอมพิวเตอร์ การวิเคราะห์เสปคตรัมจึงต้องทำในแบบดิจิตอลด้วย

3.1 <u>การทดสอบด้วยอินพุทแบบพัลส์</u> ทรานสเฟอร์ฟังก์ชันของระบบที่มีอินพุทแบบพัลส์ ซึ่งเป็นทรานเซียนอินพุทและเป็นกระบวนการแบบดีเทอมินิสติกนั้นหาได้โดยใช้อัตราส่วนของฟูเรียร์ทรานสฟอร์มของเอ้าพุทและอินพุท

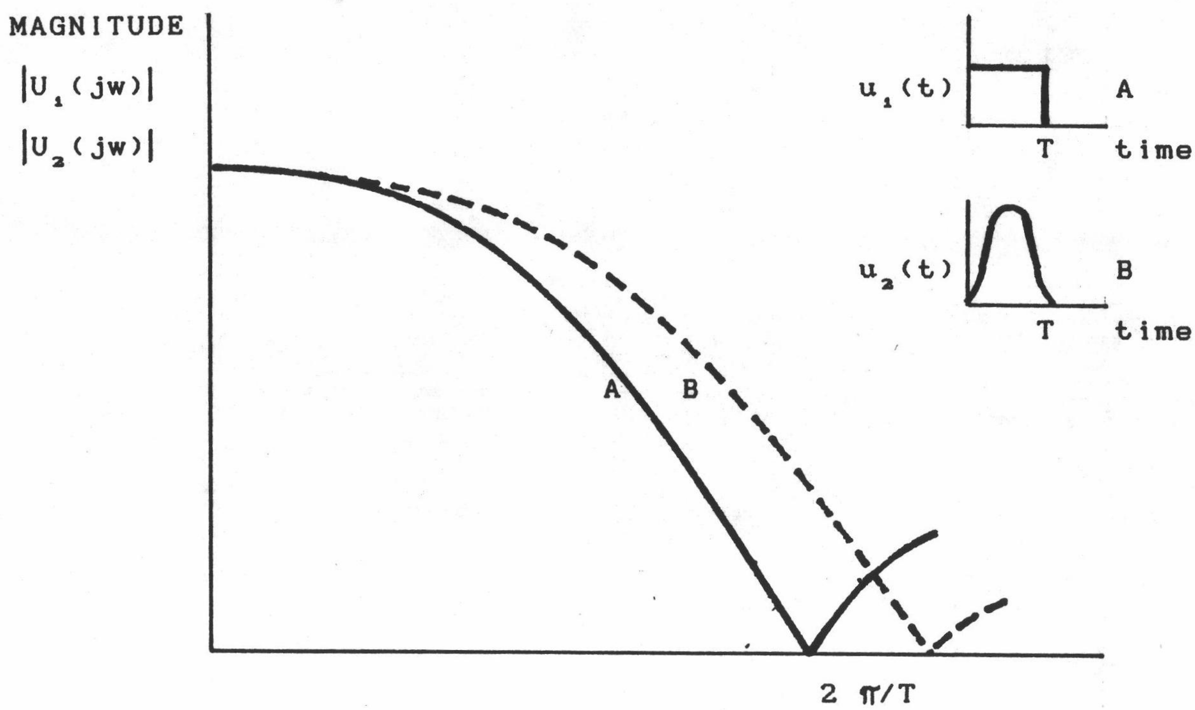
$$H(jw) = Y(jw) \ / \ U(jw) \qquad (3-2)$$

เมื่อ Y(jw) เป็นฟูเรียร์ทรานสฟอร์มของสัญญาณเอ้าพุท y(t) และ U(jw) เป็นฟูเรียร์ทรานสฟอร์มของสัญญาณอินพุท u(t) ตามลำดับ ค่า H(jw) ที่ได้มีทั้งส่วนจริงและส่วนจินตภาพ การแสดงค่า H(jw) นิยมแสดงในรูปของกราฟผลตอบความถี่ด้วยแมกนิจูด (Magnitude) และเฟส (Phase)

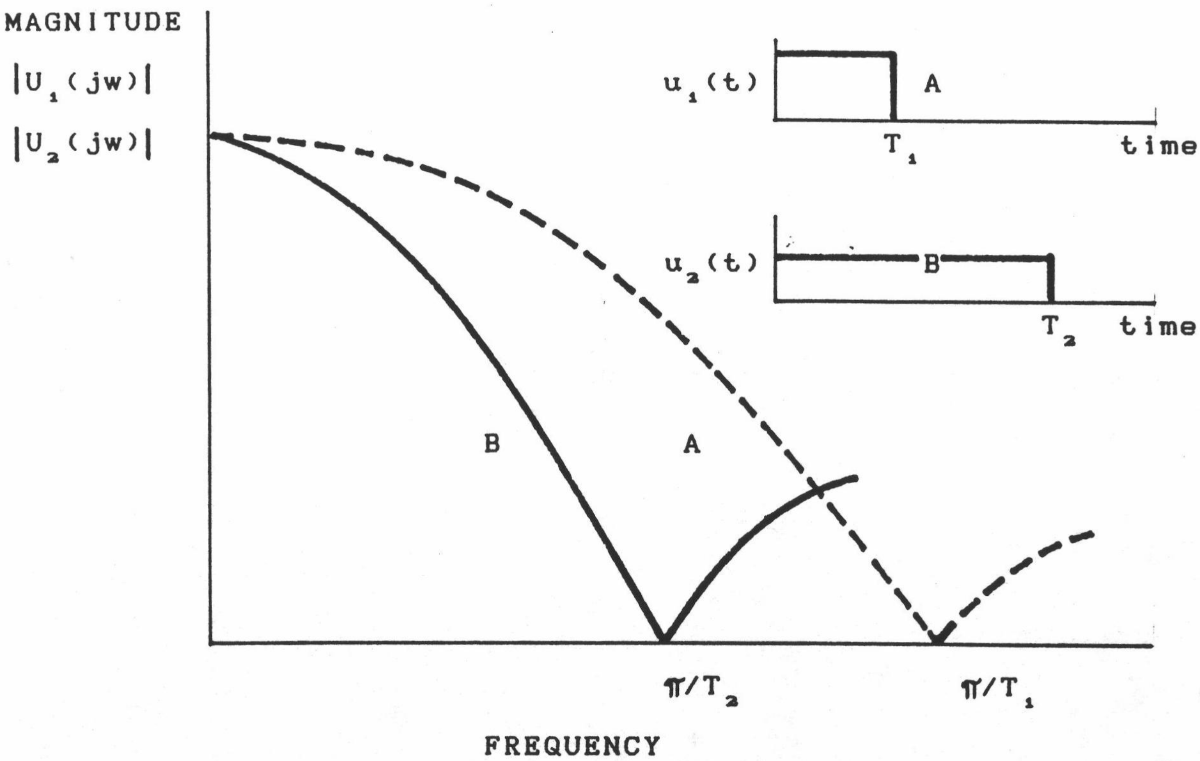
อินพุทแบบพัลส์ในอุดมคติก็คือเดลต้าฟังก์ชัน (Delta Function) หรืออิมพัลส์ (Impulse) ซึ่งเสปคตรัมของอินพุทชนิดนี้จะมีลักษณะแบน (Flat) ไปถึงความถี่อนันต์ (ดูรูป 3-1) ทำให้สามารถกระตุ้น (Excite) ระบบให้แสดงค่าเสปคตรัมของมันออกมาได้ครบทุกค่าความถี่ ถ้าพัลส์ที่ใช้เป็นแบบอิมพัลส์การหาข้อมูลผลตอบความถี่หรือทรานสเฟอร์ฟังก์ชันนั้นสามารถหาได้จากฟูเรียร์ทรานสฟอร์มของเอ้าพุท y(t) ได้เลยเนื่องจากเสปคตรัมหรือฟูเรียร์ทรานสฟอร์มของอิมพัลส์เป็นค่าคงที่ที่มีค่าเท่ากับพื้นที่ของมันเองในโดเมนของเวลา [2] แต่ในความเป็นจริงไม่มีทางหาอินพุทเช่นนี้ได้ อีกทั้งแอมปลิจูด (Amplitude) ของอิมพัลส์ที่มีค่าสูงมากจะเป็นตัวการนำระบบเข้าสู่ความไม่เป็นเชิงเส้น (Non-Linear) ซึ่งจะผิดไปจากสมมติฐานในการสร้างทรานสเฟอร์ฟังก์ชัน



รูป 3-1 เสปคตรัมของพัลส์และอิมพัลส์



รูป 3-2 เสปคตรัมของพัลส์รูปร่างต่างๆ



รูป 3-3 ผลของคาบเวลาของพัลส์ต่อเสปคตรัม

เสปคตรัมของอินพุทแบบพัลส์ที่ใช้ในการทดสอบระบบมิได้มีลักษณะแบนเรียบไปจนถึงความถี่อนันต์ หากแต่จำกัดเพียงค่าความถี่หนึ่งเท่านั้นซึ่งช่วงความถี่นี้จะขึ้นกับคาบเวลา (Period) และรูปร่างของพัลส์นั้น รูปที่ (3-2) และ (3-3) แสดงเสปคตรัมของพัลส์รูปร่างต่างๆ 4 แบบ และผลของคาบเวลาของพัลส์ต่อเสปคตรัมของมัน จะเห็นว่าคาบเวลาของพัลส์นั้นมีผลต่อช่วงความกว้างของความถี่แบน (Flat Frequency) มากกว่ารูปร่างของตัวพัลส์มาก รูปร่างของพัลส์จะมีผลในด้านลักษณะของการเกิดโหลบทางด้านข้าง (Side Lobe) ซึ่งอธิบายได้โดยอาศัยหลักการของการใส่กรอบหรือวินโดว์ (Window) ให้กับข้อมูลในหัวข้อ 3.3 สำหรับพัลส์รูปสี่เหลี่ยม เสปคตรัมของมันจะมีค่าลงไปเป็นศูนย์ครั้งแรกที่ความถี่ $w = 2\pi/T$ เมื่อ T เป็นคาบเวลาของพัลส์ ดังนั้นการเลือกใช้พัลส์นั้นจึงจะต้องทราบความถี่สูงสุดของระบบ เพื่อที่จะได้เลือกใช้พัลส์ที่มีเสปคตรัมแบนเรียบยาวถึงหรือมากกว่าความถี่สูงสุดของระบบหรือเฉพาะช่วงความถี่ที่เราสนใจเสปคตรัมของระบบจึงจะถูกกระตุ้นได้ครบ แต่ถ้าไม่ทราบ

ค่าความถี่สูงสุดของระบบหรือช่วงความถี่ที่ต้องการเลยก็ต้องใช้พัลส์ที่มีคาบเวลาน้อยที่สุด เมื่อทำฟูเรียร์ทรานสฟอร์มและหาข้อมูลผลตอบความถี่ (ทรานสเฟอร์ฟังก์ชัน) ออกมา ข้อมูลผลตอบความถี่ก็จะใช้ได้ในช่วงความถี่แบนของอินพุทเท่านั้นถึงแม้ว่าในความเป็นจริง อัตราส่วนของฟูเรียร์ทรานสฟอร์มระหว่างเอ้าพุทกับอินพุทน่าจะถูกต้องที่ความถี่ต่อไปถัดจากความถี่แบนไปก็ตาม แต่เมื่อเสปคตรัมมีค่าลดลงหลังจากช่วงความถี่แบนจะทำให้อัตราส่วนที่ได้มีโอกาสผิดพลาดได้ง่าย โดยเฉพาะเมื่อข้อมูลมีการรบกวนและอัตราส่วนที่ได้อาจจะไม่มีความหมายเนื่องจากตัวส่วนอาจมีค่าเป็นศูนย์ได้ เช่น ที่ความถี่ $2\pi/T$ ของเสปคตรัมรูปสี่เหลี่ยม (ดูรูป 3-2)

ในทางปฏิบัติการคำนวณหา $H(jw)$ จะคำนวณไปจนถึงค่าความถี่สูงสุดของข้อมูล ช่วงความถี่ที่ $H(jw)$ ไม่มีความหมายจะแสดงออกมาให้เห็นจากการผิดรูปไปของกราฟ $H(jw)$ เอง [2]

3.2 <u>การทดสอบด้วยอินพุทแบบแรนดอม</u> ทรานสเฟอร์ฟังก์ชันของระบบที่มีอินพุทแบบแรนดอมซึ่งเป็นกระบวนการความน่าจะเป็น (Stochastic Process) โดยทั่วไปสามารถหาได้จากอัตราส่วนของครอสสเปคตรัลเดนซิตี (Cross Spectral Density) ของอินพุทกับเอ้าพุทกับเพาเวอร์เสปคตรัลเดนซิตี (Power Spectral Density) ของอินพุท ให้ $H(jw)$ เป็นทรานสเฟอร์ฟังก์ชันของระบบ

$$H(jw) = G_{UY}(jw) \;/\; G_{UU}(w) = H_1(jw) \qquad (3\text{-}3)$$

เมื่อ G_{UY} คือครอสเสปคตรัลเดนซิตีของอินพุทกับเอ้าพุท และ G_{UU} คือเพาเวอร์สเปคตรัลเดนซิตีของอินพุท การคำนวณหา G_{UY} และ G_{UU} ทำได้โดยอาศัยฟูเรียร์ทรานสฟอร์ม โดยความสัมพันธ์

$$G_{UY}(jw) = U^*(jw)\; Y(jw) \;/\; T \qquad (3\text{-}4)$$

$$G_{UU}(jw) = |U^2(jw)| \; / \; T = U^*(jw) \; U(jw) \; / \; T \qquad (3-5)$$

เมื่อ U(jw) คือฟูเรียร์ทรานสฟอร์มของอินพุท u(t) Y(jw) คือฟูเรียร์ทรานสฟอร์มของเอ้าพุท y(t) $U^*(jw)$ คือคอนจูเกตเชิงซ้อน (Complex Conjugate) ของ U(jw) T เป็นช่วงเวลาที่ใช้เก็บข้อมูล รายละเอียดของวิธีการ มีแสดงใน [1]

การหาทรานสเฟอร์ฟังก์ชันโดยสมการ (3-3) นี้มีข้อได้เปรียบที่ทรานสเฟอร์ฟังก์ชันที่ได้ จะไม่ไว (Sensitive) ต่อการรบกวนในเอ้าพุท [4] ทรานสเฟอร์ฟังก์ชันหรือข้อมูลผลตอบความถี่ H(jw) อาจคำนวณหาได้อีกวิธีหนึ่งโดยสมการ

$$H(jw) = G_{YY}(w) \; / \; G_{UY}^*(jw) = H_2(jw) \qquad (3-6)$$

เมื่อ $G_{UY}^*(jw)$ คือคอนจูเกตเชิงซ้อน (Complex Conjugate) ของ $G_{UY}(jw)$ และ $G_{YY}(w)$ คือเพาเวอร์สเปคตรัลเดนซิตีของเอ้าพุทซึ่งสามารถหาได้โดยอาศัยการทำฟูเรียร์ทรานสฟอร์มเช่นเดียวกับสมการ (3-5) โดยความสัมพันธ์

$$G_{YY}(jw) = |Y^2(jw)| \; / \; T = Y^*(jw) \; Y(jw) \; / \; T \qquad (3-7)$$

ทรานสเฟอร์ฟังก์ชัน $H_2(jw)$ จากสมการ (3-6) นี้จะไม่ไว (Insensitive) ต่อค่ารบกวนในอินพุท และเมื่ออินพุทเป็น <u>White Noise</u> $H_2(jw)$ ก็ยังมีไบแอสน้อยกว่า $H_1(jw)$ ในช่วงความถี่รอบๆเรโซแนน (Resonance) อีกด้วย [4]

การคำนวณหาทรานสเฟอร์ฟังก์ชันของระบบเมื่ออินพุทเป็นแบบแรนดอม ในทางทฤษฎีได้กำหนดให้อินพุทแบบแรนดอมและเอ้าพุทที่ได้มีค่าเฉลี่ยทางสถิติเป็นศูนย์เมื่อเวลาถึงอนันต์ แต่ในทางปฏิบัติมิได้ทำไปจนเวลาถึงอนันต์ อินพุทที่ใช้และเอ้าพุทมีค่าเฉลี่ย (Mean) ไม่เป็นศูนย์ ดังนั้นขั้นตอนหนึ่งก่อนการคำนวณหา

ทรานสเฟอร์ฟังก์ชันจะต้องทำให้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลในโดเมนของเวลานี้มีค่าเป็นศูนย์ โดยการหาค่าเฉลี่ยของข้อมูลก่อนแล้วจึงนำไปลบออกจากข้อมูลชุดนั้น สร้างเป็นข้อมูลชุดใหม่ที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ [1] ไปใช้แทนข้อมูลชุดเดิม

ในการหาทรานสเฟอร์ฟังก์ชันตามสมการ (3-3) หรือ (3-6) ถึงแม้ว่ารูปแบบของสมการทั้งสองนี้ในทางทฤษฎีจะลดการรบกวนลงไปได้ก็ตาม [1] แต่ในทางปฏิบัติโดยอาศัยการทำฟูเรียร์ทรานสฟอร์มโดยวิธี FFT* (Fast Fourier Transform) กับข้อมูลที่ได้จากกระบวนการความน่าจะเป็นชุดหนึ่ง เมื่อมีการรบกวนในข้อมูล ทรานสเฟอร์ฟังก์ชันที่ได้จะมีความผิดพลาดแบบแรนดอม (Random Error) อย่างมาก เห็นได้จากรูปทรานสเฟอร์ฟังก์ชันจะมีการเบี่ยงเบนมากจนมองไม่ออก ดังนั้นจึงจำเป็นต้องทำการเฉลี่ยโดยการแบ่งข้อมูลออกเป็นชุดๆ (Ensemble Average) ส่วนการเพิ่มจำนวนข้อมูลให้ยาวขึ้นนั้นมิได้เป็นการลดความเบี่ยงเบนแต่เป็นการเพิ่มความละเอียดของทรานสเฟอร์ฟังก์ชันเท่านั้น การเฉลี่ยทำโดยการแบ่งข้อมูลออกเป็นชุดๆ หาครอสเสปคตรัมระหว่างอินพุทและเอ้าพุทและเพาเวอร์เสปคตรัมของอินพุทหรือเอ้าพุทตามแต่วิธีการที่จะใช้ (สมการ 3-3 หรือ 3-6) การเฉลี่ยจะทำที่ครอสเสปคตรัมและเพาเวอร์เสปคตรัม เนื่องจากโครงสร้างของครอสเสปคตรัมและเพาเวอร์เสปคตรัม เอื้ออำนวยให้ค่ารบกวนมีโอกาสหักล้างหมดไปมากที่สุด โครงสร้างของครอสและเพาเวอร์เสปคตรัมเมื่อข้อมูลมีการรบกวนมีแสดงใน [1] แล้วจึงนำค่าเฉลี่ยของครอสและเพาเวอร์เสปคตรัมมาหาทรานสเฟอร์ฟังก์ชันในขั้นตอนสุดท้าย

การตรวจสอบความมั่นใจหรือความแม่นยำของข้อมูลทรานสเฟอร์ฟังก์ชันที่คำนวณได้ ดูได้จาก ฟังก์ชันโคฮีเรน (Coherence Function, COH^2) ซึ่งนิยามเอาไว้ดังนี้

$$COH^2_{UY}(w) = [G_{UY}^*(jw)\ G_{UY}(jw)] / [G_{UU}(w)\ G_{YY}(w)] \quad (3-8)$$

---

* Cooley-Tukey (1965)

ถ้าระบบเป็นเชิงเส้นโดยสมบูรณ์และไม่มีการรบกวน $COH^2 \cong 1.0$ และถ้าระบบมีการรบกวน COH^2 จะมีค่าน้อยกว่า 1.0 ซึ่งแสดงให้เห็นใน [1] ในทางปฏิบัติการที่ COH^2 มีค่าน้อยกว่า 1.0 นั้นเป็นผลจากการรบกวนและรวมถึงความไม่เป็นเชิงเส้นของระบบด้วย โดยทั่วไปค่า COH^2 ที่ใช้ได้ควรจะมากกว่า 0.9 แต่อาจจะน้อยกว่าได้ถ้าหากรูปทรานสเฟอร์ฟังก์ชันที่ได้ออกมายอมรับได้ จากสมการ (3-8) จะเห็นว่า COH^2 เป็นฟังก์ชันเชิงความถี่ ดังนั้นอาจจะมีเพียงช่วงความถี่เดียวเท่านั้นที่สามารถยอมรับค่า COH^2 ได้ แต่ในบางครั้งค่า COH^2 อาจมีค่าต่ำจนเข้าใกล้ศูนย์ได้ที่ความถี่ซึ่งทรานสเฟอร์ฟังก์ชันเปลี่ยนจากค่าสูงสุดลงมายังค่าต่ำสุดเนื่องจากการรบกวนมีอิทธิพลมากที่จุดนั้น ค่าของ COH^2 ในกรณีจะไม่มีผลลบต่อความมั่นใจในทรานสเฟอร์ฟังก์ชันที่ได้ [1]

ในหัวข้อ 3.1 การเลือกใช้พัลส์เพื่อทดสอบระบบจะต้องคำนึงถึงช่วงคาบเวลาของพัลส์ที่สามารถกระตุ้นระบบได้ครบทุกความถี่ที่เราต้องการ ในการทดสอบด้วยอินพุทแบบแรนดอมก็เช่นกัน แรนดอมในทางทฤษฎีจะมีเสปคตรัมแบนไปตลอดทุกช่วงความถี่ไปจนถึงอนันต์ (แต่จะมองไม่เห็นว่าแบนถ้าใช้แรนดอมเพียงชุดเดียว) ในทางปฏิบัติสเปคตรัมมีลักษณะแบนเพียงช่วงกว้างความถี่หนึ่ง ดังนั้นจึงต้องเลือกใช้อินพุทแบบแรนดอมที่ให้ช่วงกว้างความถี่กว้างเพียงพอที่จะกระตุ้นระบบในช่วงความถี่ที่เราสนใจได้

3.3 <u>การวิเคราะห์เสปคตรัมในแบบดิจิตอล</u> ในการหาครอสเสปคตรัลเดนซิตี (Cross Spectral Density) เพาเวอร์เสปคตรัลเดนซิตี (Power Spectral Density) และทรานสเฟอร์ฟังก์ชัน (Transfer Function) ของระบบในทางปฏิบัตินั้น สามารถหาได้โดยอาศัยการทำฟูเรียร์ทรานสฟอร์มในแบบ DFT (Discrete Fourier Transform) กับข้อมูลที่สุ่มมาจากกระบวนการในการทดสอบระบบ โดยสมการ

$$F_r = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-j2\pi nr/N} \quad , \; r = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \qquad (3\text{-}9)$$

เมื่อ F_r คือ ฟูเรียร์ทรานสฟอร์มของ f_n, $n = 0, 1, 2, \ldots, N - 1$ แต่การทำฟูเรียร์ทรานสฟอร์มแบบ DFT โดยตรงนั้น กินเวลานานมาก ใน Chen [2] ได้แสดงการทำ DFT โดยใช้อัลกอริทึม FFT (Fast Fourier Transform) และได้แสดงการเปรียบเทียบจำนวนครั้งของการคูณและการบวกจำนวนเชิงซ้อนที่ต้องใช้ในแต่ละวิธี โดยถ้าให้ข้อมูลมีจำนวน N ข้อมูล การทำ DFT โดยตรงต้องใช้การคูณและการบวกจำนวนเชิงซ้อน เป็นจำนวน N^2 และ $N(N - 1)$ ครั้งตามลำดับซึ่งหากใช้อัลกอริทึม FFT จำนวนครั้งในการคูณและการบวกจำนวนเชิงซ้อนจะลดลงเหลือเพียง $N/2 \log_2 N$ และ $N \log_2 N$ ครั้งตามลำดับเท่านั้น ความแตกต่างของจำนวนครั้งของการคำนวณจะชัดเจนมากขึ้นเมื่อจำนวนข้อมูล N มากขึ้น ตัวอย่างเช่น ถ้าใช้จำนวนข้อมูล $N = 2^{10} = 1024$ การทำ DFT โดยตรงตามสมการ (3-1) ต้องใช้การคูณและการบวกจำนวนเชิงซ้อนเป็นจำนวนครั้งถึง 1,048,576 และ 1,047,522 ตามลำดับ ในขณะที่อัลกอริทึม FFT ต้องการเพียง 5,120 และ 10,240 ครั้งเท่านั้น และถึงแม้ว่าการใช้อัลกอริมทึม FFT จะต้องการจำนวนครั้งของการคำนวณน้อยก็ตาม แต่ก็ให้ผลการคำนวณได้เหมือนกับการทำ DFT โดยตรงทุกประการ [2] อย่างไรก็ตามทั้งการทำ DFT โดยตรง และการใช้อัลกอริทึม FFT ต่างก็มีข้อจำกัดที่เหมือนกัน ทั้งนี้เนื่องจากทั้งคู่เป็นการทำฟูเรียร์ทรานสฟอร์มในแบบดิจิตอล จึงทำให้มีข้อจำกัดเมื่อปรียบเทียบกับการทำฟูเรียร์ทรานสฟอร์มในทางทฤษฎี ข้อจำกัดที่สำคัญได้แก่

3.3.1 <u>ความละเอียดของเสปคตรัม</u> ในทางปฏิบัติจำนวนข้อมูลที่จะนำมาทำ DFT นั้นมีจำกัดเสมอ ถ้าทำ DFT กับข้อมูล $f(nT)$, $n = 0, 1, \ldots, N - 1$ ซึ่งมีจำนวน N ค่า ก็จะได้เสปคตรัมออกมาจำนวน N ค่าเช่นกัน [2] ในช่วงความถี่ $[0, 2\pi / T)$ เมื่อ T เป็นคาบเวลาที่ใช้สุ่มข้อมูลแต่ละค่า (แต่จะใช้ได้จริงเพียงช่วงความถี่ $[0, \pi / T)$ หรือ $N / 2$ ค่าแรกเท่านั้น ส่วนที่เหลือเป็นเพียงเพอริโอดิกที่เป็นสเปคตรัมกลับด้านกันกับส่วนแรกเนื่องจากเป็นผลของการทำฟูเรียร์ทรานสฟอร์มในแบบดิจิตอล ซึ่งจะอธิบายในหัวข้อต่อไป) แต่ละค่าของเสปคตรัมที่คำนวณได้จะอยู่ห่างกัน $w = 2\pi / N T$ ดังนั้นถ้าจำนวนข้อมูลมีน้อย ทำให้ Δw มาก ความละเอียดของเสปคตรัมที่ได้ก็จะ

น้อยลงไปด้วย การเพิ่มความละเอียด (Resolution) สามารถทำได้โดยการเพิ่มข้อมูลที่มีค่าเป็นศูนย์เข้ากับข้อมูลเดิม รวมเป็นจำนวนข้อมูลทั้งหมด $N > N'$ โดยให้

$$f'(nT) = \begin{cases} f(nT), & n = 0, 1, \ldots, N'-1 \\ 0, & n = N', N'+1, \ldots, N-1 \end{cases} \qquad (3\text{-}2)$$

ซึ่งใน [2] แสดงให้เห็นว่าเสปคตรัมของ $f'(nT)$ มีค่าเท่ากับเสปคตรัมของ $f(nT)$ ทุกค่าความถี่ ($F'(e^{jwT}) = F(e^{jwT}), \forall w$ เมื่อ $F'(e^{jwT})$ และ $F(e^{jwT})$ เป็นเสปคตรัมของ $f'(nT)$ และ $f(nT)$ ตามลำดับ) นอกจากนี้การเพิ่มข้อมูลค่าศูนย์ ยังช่วยในการทำ FFT ซึ่งปกติต้องการข้อมูลเป็นจำนวนยกกำลังของสอง แต่ถ้าข้อมูลไม่ครบก็จะใช้วิธีดังกล่าวช่วย

3.3.2 <u>อัตราการสุ่มข้อมูลเมื่อข้อมูลเป็นแบบอนาลอก</u> เนื่องจากข้อมูลที่วัดได้จากระบบในทางปฏิบัติส่วนใหญ่จะเป็นแบบอนาลอก การนำข้อมูลเหล่านี้มาทำ DFT จำเป็นต้องทำการเปลี่ยนดิจิตอลเสียก่อน อัตราการสุ่มข้อมูลเพื่อเปลี่ยนจากอนาลอกเป็นดิจิตอล สามารถหาได้จากการหาความสัมพันธ์ระหว่างเสปคตรัมของข้อมูลแบบต่อเนื่อง (Continuos Signal) และของข้อมูลเดียวกันที่สุ่มขึ้นมาด้วยความถี่อันหนึ่ง (Discrete Signal) ซึ่งจะได้สมการ

$$F(e^{jwt}) = 1/T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{F}(w + 2k\pi / T) \qquad (3\text{-}3)$$

[2]

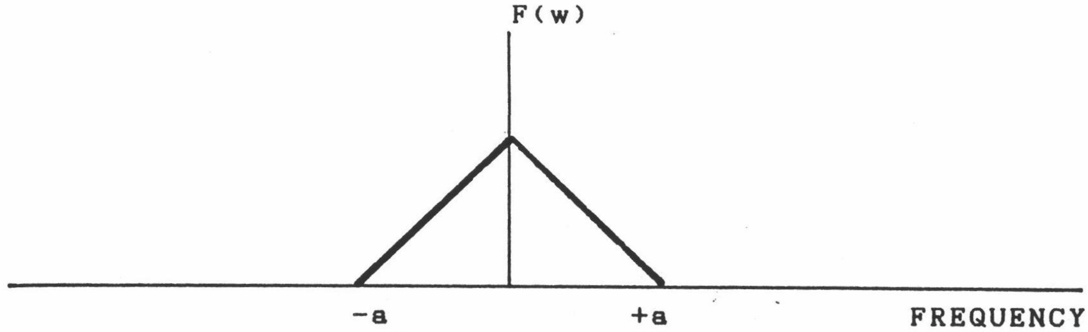
เมื่อ $\bar{F}(w)$ คือ เสปคตรัมของข้อมูลต่อเนื่อง $f(t)$ ซึ่งหาได้จากการทำฟูเรียร์ทรานสฟอร์มในทางทฤษฎี และ $F(e^{jwt})$ คือเสปคตรัมของข้อมูลสุ่มเดียวกัน $f(nT)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ซึ่งหาได้โดยการทำแซดทรานสฟอร์ม (Z-Transform) ลงบนวงกลมหนึ่งหน่วย ในโดเมนของ Z (Z-Domain) โดยมี T เป็นคาบการสุ่มข้อมูล (Sampling Period) จะเห็นว่าเสปคตรัมที่หาได้ในแบบดิจิตอล จะมีลักษณะเป็นเพอริโอดิก (Periodic) ของเสปคตรัมในทาง

ทฤษฎี โดยจะมีรูปร่างซ้ำแบบเดิมทุกคาบความถี่ 2π / T ในหน่วยเรเดียนต่อวินาที ความสัมพันธ์นี้สามารถแสดงให้เห็นได้ชัดเจนในรูป 3-4 โดยสมมติให้เสปคตรัมของข้อมูลต่อเนื่องมีรูปร่างเป็นรูปสามเหลี่ยม (รูป 3-4-a) ที่มีย่านความถี่จำกัด (Band Limits) จาก -a ถึง +a ในรูป 3-4-b และ 3-4-c เป็นเสปคตรัมที่หาในแบบดิจิตอลโดยใช้อัตราการสุ่มข้อมูลด้วยความถี่ 2a และ a ตามลำดับ จะเห็นว่าถ้าใช้อัตราความถี่การสุ่มข้อมูลต่ำกว่า 2a จะเกิดการเสียรูปของเสปคตรัมขึ้น (Aliasing) เนื่องจากเกิดการซ้อนทับกันของเสปคตรัมจริงกับส่วนที่เป็นเพอริโอดิก ดังนั้นอัตราความถี่การสุ่มข้อมูลเพื่อเปลี่ยนจากอนาลอกเป็นดิจิตอลจะต้องไม่น้อยกว่าสองเท่าของความถี่สูงสุดของข้อมูลนั้น ในทางปฏิบัติข้อมูลส่วนใหญ่ไม่ใช่ข้อมูลที่มีลักษณะความถี่จำกัด จึงต้องมีการใช้ตัวกรองความถี่สูง (Low-Pass Filter) กรองความถี่สูงที่ไม่ต้องการออกไปจากข้อมูล ทำให้ข้อมูลมีลักษณะความถี่จำกัดเสียก่อน ประโยชน์ของการใช้ตัวกรองความถี่สูงอีกประการหนึ่งก็คือทำให้เราทราบความถี่ต่ำสุดที่แน่นอนที่ต้องใช้ในการสุ่มข้อมูล แต่ในความเป็นจริงตัวกรองความถี่สูงที่ใช้กันมิได้กรองเอาความถี่ที่สูงเกินช่วงกว้างความถี่ (Bandwidth) ออกไปหมดเสียทีเดียว เนื่องจากเป็นลักษณะโดยธรรมชาติของตัวกรองความถี่สูงเองที่เสปคตรัมของมันไม่หักลงเป็นศูนย์ในทันทีที่ความถี่ w_c (ดูรูป 3-5) ดังนั้นถ้าเลือกอัตราการสุ่มข้อมูลเป็นสองเท่าของความถี่ w_c ก็จะยังเกิดความผิดเพี้ยนของเสปคตรัมหรืออะเลียสซิ่ง (Aliasing) ในช่วงประมาณ 20 เปอร์เซนต์หลัง ในทางปฏิบัติจึงควรเลือกใช้ความถี่การสุ่มข้อมูลที่ค่าประมาณมากกว่า 2.5 เท่าของความถี่สูงสุดหรือความถี่ w_c ในรูป 3-5

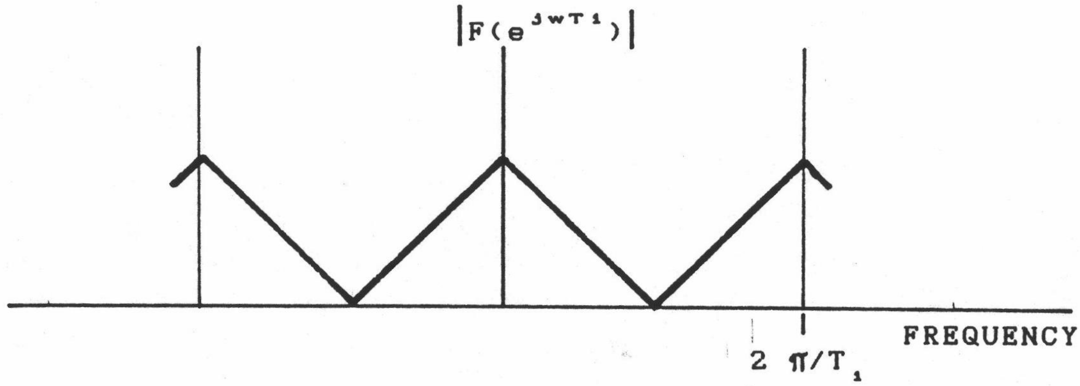
3.3.3 <u>การรั่วไหลของเสปคตรัมเนื่องจากการตัดทอนข้อมูล</u> ถ้าข้อมูลที่ต้องการหาเสปคตรัมนั้นเป็นข้อมูลที่มีความยาวต่อเนื่องไม่รู้จบ* ตัวอย่าง

---

* สำหรับข้อมูลที่มีความยาวจำกัดนั้น ตัวอย่างได้แก่ อินพุทและเอ้าพุทของกระบวนการทางดีเทอมินิสติก (Deterministic Process) เช่น การทดสอบระบบด้วยพัลส์เดี่ยว (Single Pulse) อินพุทและเอ้าพุทของระบบจะมีขนาดเข้าใกล้ศูนย์ที่เวลาจำกัดค่าหนึ่ง

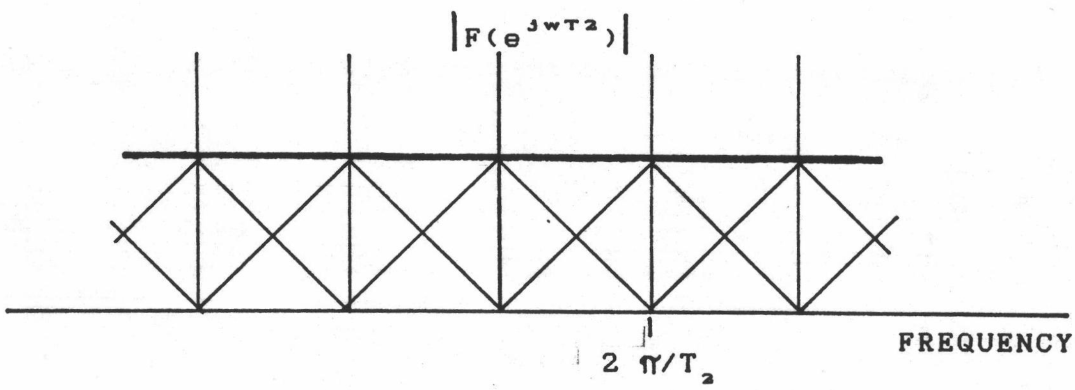


(a) THEORETICAL FREQUENCY SPECTRUM



(b) DIGITAL FREQUENCY SPECTRUM

(SAMPLING PERIOD $T_1 = \pi/a$ OR $w_s = 2a$)



(c) DIGITAL FREQUENCY SPECTRUM, ALIASING

(SAMPLING PERIOD $T_2 = 2\pi/a$ OR $w_s = 2a$)

รูป 3-4 การเกิดอะเลียสซิง (Aliasing)

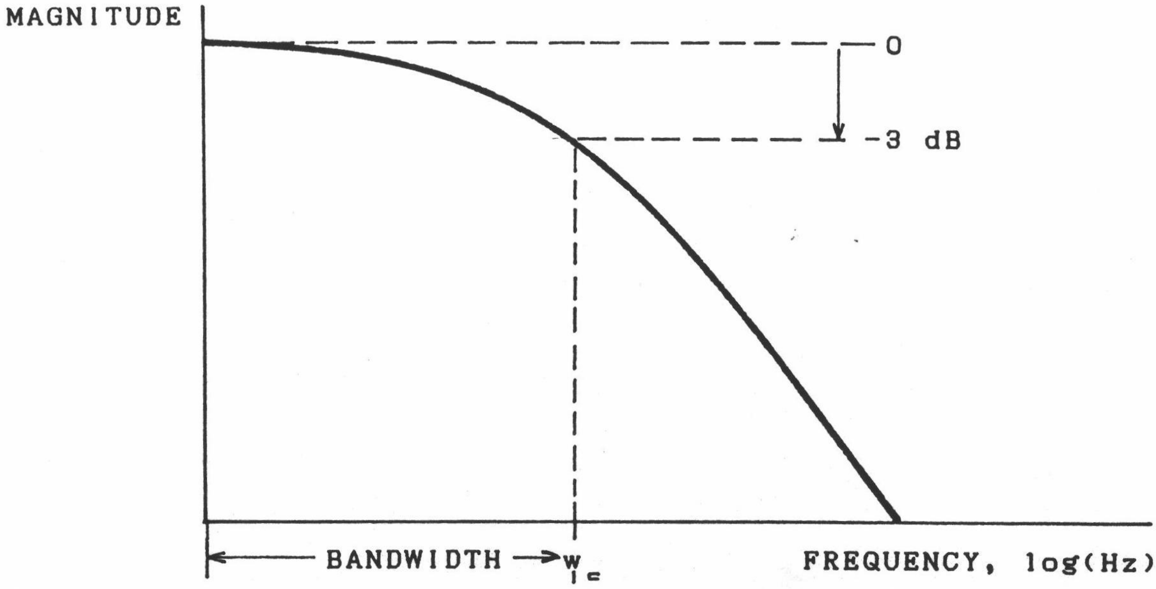
เช่น ข้อมูลอินพุทและเอ้าพุทของระบบที่เป็นกระบวนการความน่าจะเป็น (Stochastic Process) ได้แก่ การทดสอบระบบด้วยอินพุทแบบแรนดอม ในการทำฟูเรียร์ทรานสฟอร์มกับข้อมูลชนิดนี้ในทางทฤษฎีนั้น ข้อมูลที่ใช้จะต้องมีความยาวถึงอนันต์ซึ่งในทางปฏิบัติไม่มีทางทำได้ จึงต้องมีการตัดทอนข้อมูลเพียงบางช่วงมาใช้เท่านั้น เรียกว่าการใส่กรอบหรือวินโดว์ (Window) ให้กับข้อมูล การตัดทอนข้อมูลโดยตรงก็เหมือนกับการใส่วินโดว์แบบสี่เหลี่ยม (Rectangular Window) ให้กับข้อมูล (ดูรูป 3-6-a) พิจารณาวินโดว์แบบสี่เหลี่ยมซึ่งมีความยาว $N = 2N' + 1$

$$d(nT) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } n = 0, \pm 1, \ldots, \pm N' \\ 0 & \text{เมื่อ } n > N' \end{cases} \qquad (3\text{-}4)$$

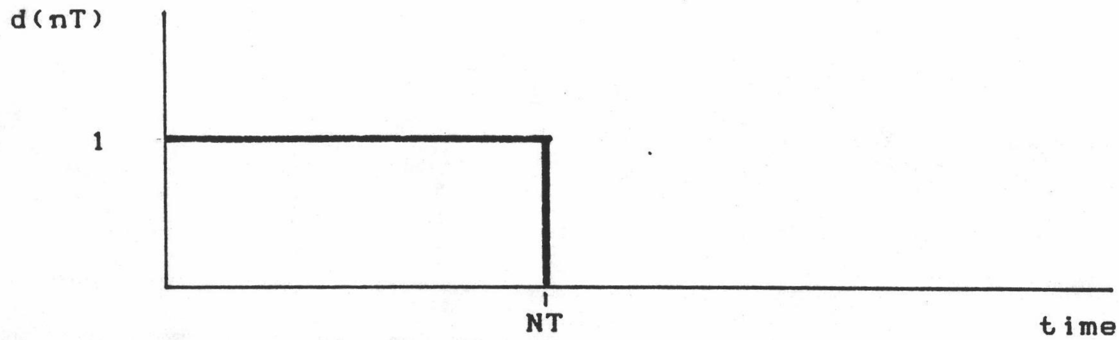
หาเสปคตรัมของ d(nT) ได้ [2]

$$D(e^{jwT}) = \sin(NwT / 2) / \sin(wT / 2) \qquad (3\text{-}5)$$

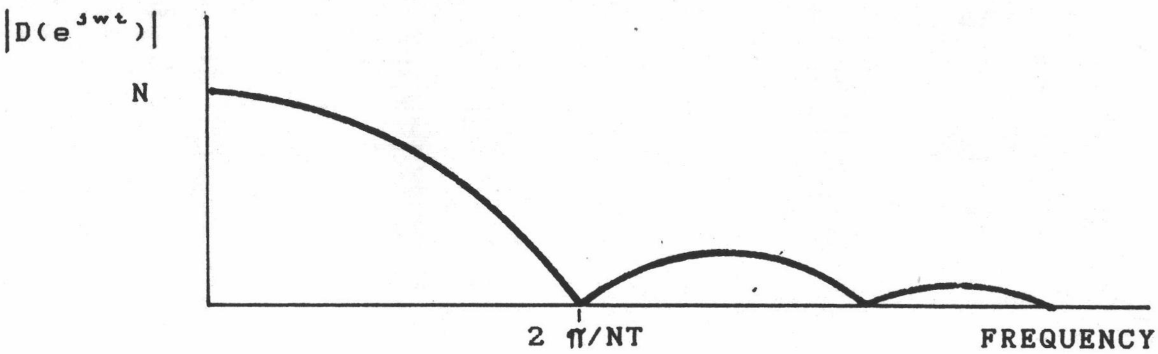
เสปคตรัมของ d(nT) (รูป 3-6-b) ประกอบด้วยโหลบ (Lobe) ใหญ่สูง N กว้าง $4\pi / NT$ และโหลบเล็กๆ ทางด้านข้าง ถ้า N มากขึ้นจนเข้าใกล้อนันต์ $D(e^{jwT})$ ก็จะมีลักษณะเข้าใกล้อิมพัลส์โดยมีพื้นที่ $2\pi / T$ ลองพิจารณาเสปคตรัมของ $h(nT) = \sin nw_oT$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$ ถ้าให้ N มีค่าเข้าใกล้อนันต์ เสปคตรัมของ h(nT) จะมีลักษณะเข้าใกล้อิมพัลส์ที่ความถี่ w_o (รูป 3-7-a) แต่ถ้าตัดทอน h(nT) เหลือจำนวน N' โดยให้ $h(nT) = 0$ เมื่อ $n > N'$ เสปคตรัมของ h(nT) จะหาได้จากคอนโวลูชัน (Convolution) ของเสปคตรัมในรูป 3-6-b กับ รูป 3-7-a ได้เสปคตรัมในรูป 3-7-b จะเห็นว่าเกิดการรั่วไหลของเสปคตรัมออกมาทางด้านข้างทั้งสองด้านของความถี่ w_o ดังนั้นผลของการตัดทอนข้อมูลจะทำให้เกิดการรั่วไหล (Leakage) ของเสปคตรัมออกไปทางด้านข้าง



รูป 3-5 ผลตอบความถี่ของตัวกรองความถี่สูง

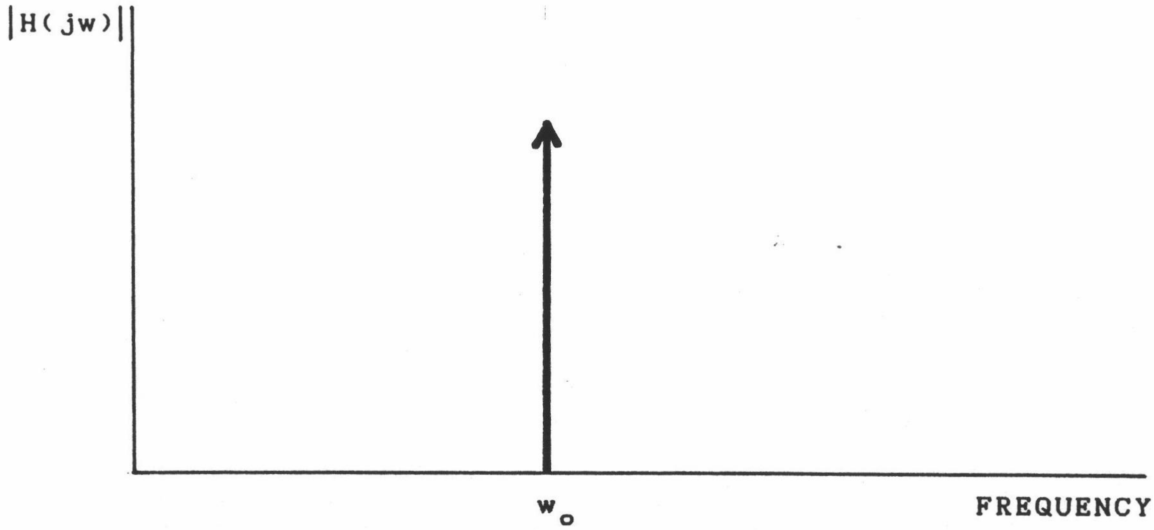


(a) RECTANGULAR WINDOW



(b) SPECTRUM OF RECTANGULAR WINDOW

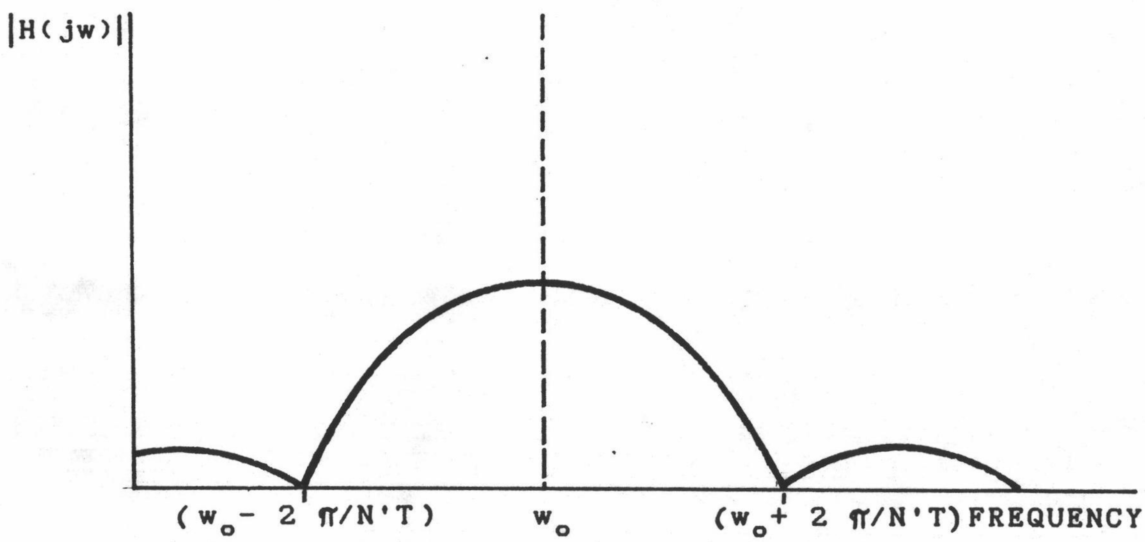
รูป 3-6 วินโดว์แบบสี่เหลี่ยมและเสปคตรัม



SPECTRUM OF $h(nT) = \sin nw_oT$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$

$N \rightarrow \infty$

(a) เสปคตรัมเมื่อจำนวนข้อมูล N มีค่าเข้าใกล้อนันต์



SPECTRUM OF $h(nT) = \sin nw_oT$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$

$N = N'$

(b) เสปคตรัมเมื่อจำนวนข้อมูล N = N'

รูป 3-7 ผลของการตัดทอนข้อมูล h(nT)

การลดการรั่วไหลของเสปคตรัม สามารถทำได้โดยการเปลี่ยนรูปวินโดว์จากรูปสี่เหลี่ยมเป็นรูปอื่น ตารางที่ 3-1 [3] แสดงรูปแบบวินโดว์แบบต่างๆ วินโดว์ในอุดมคติจะต้องมีความสูงของโหลบด้านข้างน้อย อัตราการลดลงของความสูงของโหลบด้านข้างสูง และมีสัมประสิทธิ์ความกว้างของโหลบเข้าใกล้หนึ่ง*

รูปที่ 3-8 แสดงการเปรียบเทียบเสปคตรัมของวินโดว์แบบสี่เหลี่ยมกับแบบแฮนนิ่ง (Hanning) จะเห็นว่าโหลบด้านข้างมีขนาดเล็กลง โหลบกลางกว้างขึ้นแต่มีความสูงลดลง การที่โหลบกลางกว้างขึ้นนี้ทำให้ความละเอียดของเสปคตรัมที่ได้ลดลง แต่ผลอันนี้ไม่กระทบต่อรูปร่างของเสคตรัมมากนักเมื่อเทียบกับผลจากโหลบด้านข้าง [2]

TABLE

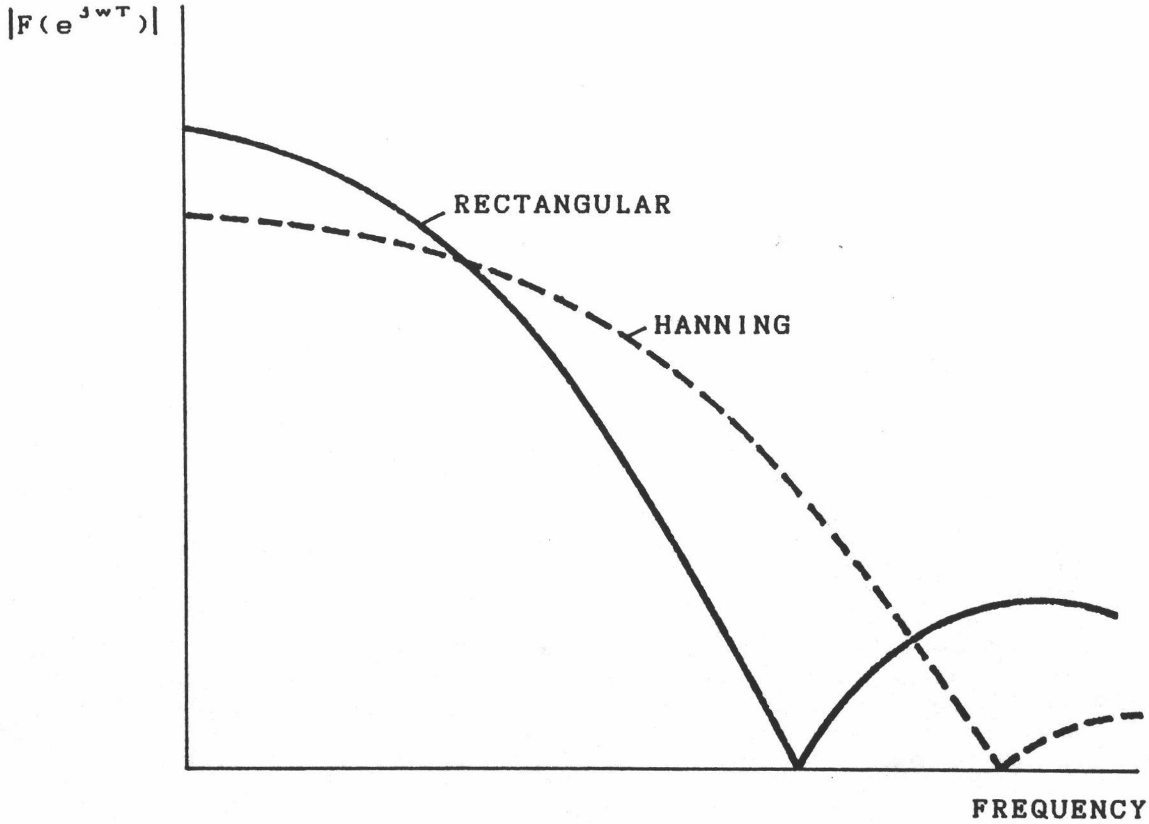
Comparison of Several Time Windows Used in FFT Analysis

Window	Describing Equation	Highest Side Lobe (dB)	Side Lobe Fall-Off Rate dB/decade	Bandwidth Factor
Rectangular	$\omega(t) = 1$ for $t = 0$ to T	−13	20	1
Flat-top cosine	$\omega(t) = 0.5\,(1 - \cos 10\pi t/T)$ for $t = 0$ to $T/10$ and $t = 9T/10$ to T; $= 1$ for $t = T/10$ to $9T/10$	−14	32	1.07
Bartlett (triangular)	$\omega(t) = 2t/T$ for $t = 0$ to $T/2$; $= -2t/T + 2$ for $t = T/2$ to T	−27	26	1.73
Hamming	$\omega(t) = 0.8 + 0.46\,(\cos 2\pi t/T)$ for $t = 0$ to T	−42	20	1.59
Hanning (cosine)	$\omega(t) = 0.5\,(1 - \cos 2\pi t/T)$ for $t = 0$ to T	−32	60	1.63
Parzen	$\omega(t) = 1 - 6\,(2t/T - 1)^2 + 6\lvert 2t/T - 1\rvert^3$ for $t = T/4$ to $3T/4$; $= 2\,(1 - \lvert 2t/T - 1\rvert)^3$ for $t = 0$ to $T/4$ and $t = 3T/4$ to T	−53	38	2.10

ตาราง 3-1 เปรียบเทียบวินโดว์แบบต่างๆ

---

* สัมประสิทธิ์ความกว้างของโหลบของวินโดว์แบบสี่เหลี่ยมมีค่าเท่ากับ 1



รูป 3-8 เปรียบเทียบเสปคตรัมของวินโดว์รูปสี่เหลี่ยมกับแบบ <u>Hanning</u>

3.4 <u>โปรแกรมวิเคราะห์เสปคตรัมที่เขียนขึ้นใช้ในการวิจัย</u>

โปรแกรมวิเคราะห์เสปคตรัมที่ได้เขียนขึ้นใช้ในการวิจัยมีฟังก์ชันการทำงานหลักดังนี้

3.4.1 การทำวินโดว์ (Windowing) เพื่อป้องกันไม่ให้เสปคตรัมรั่วไหลออกจากส่วนกลางหรือโหลบใหญ่ (Main Lobe) มากเกินไป ซึ่งมีวินโดว์แบบต่างๆ ให้เลือก ได้แก่ แบบ <u>Hanning</u> แบบ <u>Flat-top Cosine</u> และแบบ <u>Hamming</u>

3.4.2 การปรับค่าเฉลี่ย (Mean Adjustment) เนื่องจากในการวิเคราะห์เสปคตรัมของระบบที่ทำการทดสอบด้วยอินพุทแบบแรนดอมนั้น เป็นลักษณะของกระบวนการความน่าจะเป็น (Stochastic Process) ซึ่งตั้งสมมติฐานให้ค่าเฉลี่ยของสัญญาณเป็นศูนย์ กระบวนการจริงข้อมูลที่ได้อาจมีค่า

เฉลี่ย (mean) ไม่เท่ากับศูนย์ จึงต้องมีการปรับให้ข้อมูลมีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ก่อน

3.4.3 การทำ FFT กับทั้งข้อมูลอินพุทและเอ้าพุท

3.4.4 การหาครอส และเพาวเวอร์เสปคตรัม (Cross and Power Spectrum) ของข้อมูลอินพุทและเอ้าพุท

3.4.5 การหาทรานสเฟอร์ฟังก์ชันหรือผลตอบความถี่จากครอสและเพาเวอร์เสปคตรัม

รูปที่ 3-9 แสดงโฟล์วชาร์ตแสดงขั้นตอฯการทำงานของโปรแกรม

เมื่อ

$u(t)$ = อินพุท

$y(t)$ = เอ้าพุท

$U(jw)$ = ฟูเรียร์ทรานสฟอร์มของ $u(t)$

$Y(jw)$ = ฟูเรียร์ทรานสฟอร์มของ $y(t)$

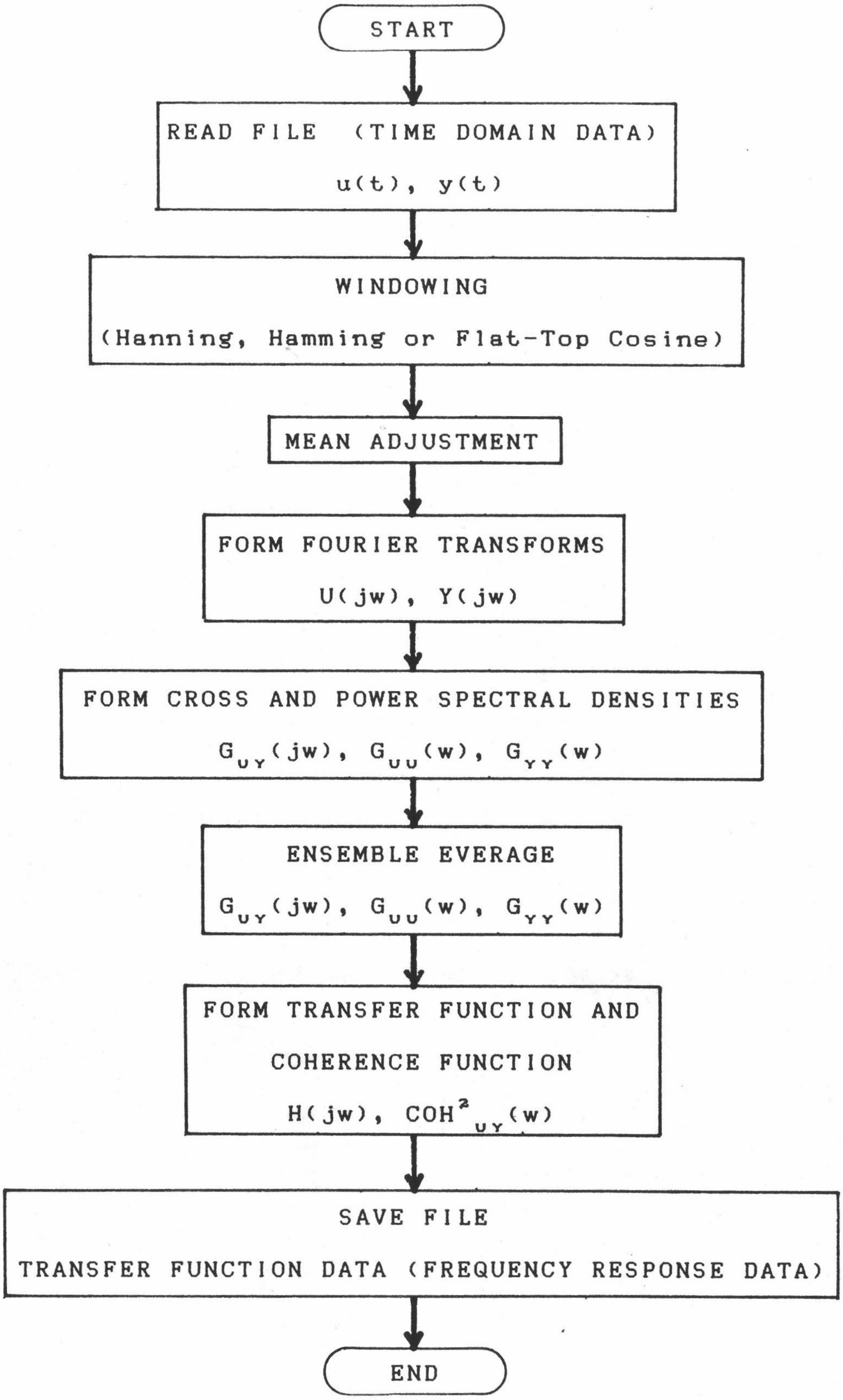
$G_{UU}(w)$ = เพาวเวอร์เสปคตรัลเดนซิตีของ $u(t)$

$G_{YY}(w)$ = เพาวเวอร์เสปคตรัลเดนซิตีของ $y(t)$

$G_{UY}(jw)$ = ครอสเสปคตรัลเดนซิตีของ $u(t)$ และ $y(t)$

$H(jw)$ = ทรานสเฟอร์ฟังก์ชันระหว่างอินพุท $u(t)$ และเอ้าพุท $y(t)$

$COH^2_{UY}(w)$ = ฟังก์ชันโคฮีเรนในการหาทรานสเฟอร์ฟังก์ชัน $H(jw)$



รูป 3-9 แสดงโฟล์วชาร์ตการทำงานของโปรแกรมวิเคราะห์เสปคตรัม