บทที่ 2

ทรานสเฟอร์ฟังก์ชันแบบอนาไลติก

การหาทรานสเฟอร์ฟังก์ชัน (Transfer Function) ของระบบเชิงกลใดๆ สามารถหาได้โดยวิธีอนาไลติก (Analytic) หรือการวิเคราะห์ทางทฤษฎี แต่อาจเกิดปัญหาขึ้นได้ดังได้กล่าวในบทที่ 1 อย่างไรก็ตาม โครงสร้างหรือออเดอร์ (Order) ของทรานสเฟอร์ฟังก์ชันแบบอนาไลติกนี้ เป็นโครงสร้างเริ่มต้นที่ดี โดยเฉพาะของระบบเชิงกลที่ไม่ซับซ้อนนักจะมีปัญหาที่ค่าพารามิเตอร์เท่านั้น ซึ่งสามารถประมาณได้โดยอาศัยวิธีการที่จะกล่าวต่อไปในบทที่ 3 และ 4 สำหรับระบบเชิงกลที่มีความซับซ้อนมากขึ้น โครงสร้างหรือออเดอร์ที่วิเคราะห์ได้ควรจะต้องได้รับการตรวจสอบและปรับโดยการพิจารณาผลตอบความถี่ที่ได้จากการทดสอบระบบ และผลการประมาณค่าพารามิเตอร์ซึ่งอาจจะต้องอาศัยประสพการณ์พอสมควร

การวิเคราะห์หาทรานเฟอร์ฟังก์ชันของระบบเชิงกลเริ่มจากการหาระบบสมการตัวแปรสภาวะ (State Variable Equations) โดยใช้กฎของนิวตัน (Newton's Law) หรือใช้สมการลากราน (Lagrange's Equation) หรือถ้าระบบที่สนใจมีตัวขับเคลื่อน (Drive System) ซึ่งส่วนใหญ่ในระบบควบคุมของระบบเชิงกล จะใช้ดีซีมอเตอร์ (D.C. Motor) การหาสมการสภาวะของดีซีมอเตอร์นี้มีแสดงในหนังสือระบบควบคุมทั่วไป เช่นใน Okata [9] ระบบสมการสภาวะที่ใช้ในการวิจัยนี้เป็นแบบอินพุทเดี่ยวและเอ้าพุทเดียว (Single Input-Single Output) ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกได้ดังนี้

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\,\underline{x}(t) + \underline{b}\,u(t) \qquad (2\text{-}1)$$

$$y(t) = \underline{c}^{T}\underline{x}(t) + d\,u(t) \qquad (2\text{-}2)$$

โดย $\underline{x}$ เป็นเวคเตอร์สภาวะ (state vector) ขนาด nx1 เมื่อ n เป็นจำนวนตัวแปรสภาวะ (State Variable) u เป็นอินพุท y เป็นเอ้าพุท A, $\underline{b}$, $\underline{c}^T$ และ d เป็นเมตริกค่าคงที่ขนาด nxn, nx1, 1xn, และ 1x1 ตามลำดับ ทำลาปลาสทรานสฟอร์ม (Laplace Transform) กับสมการ (2-1) และ (2-2) ได้

$$s\,\underline{X}(s) = A\,\underline{X}(s) + \underline{b}\,U(s) \qquad (2\text{-}3)$$

$$Y(s) = \underline{c}^T\underline{X}(s) + d\,U(s) \qquad (2\text{-}4)$$

เมื่อ $s = \sigma + j\omega$ คือ ตัวแปรเชิงซ้อนลาปลาส (complex Laplace variable) จาก (2-3)

$$[s\,I - A]\,\underline{X}(s) = \underline{b}\,U(s)$$

$$\underline{X}(s) = [s\,I - A]^{-1}\underline{b}\,U(s) \qquad (2\text{-}5)$$

แทนสมการ (2-5) ในสมการ (2-4) ได้

$$Y(s) = \underline{c}^T[s\,I - A]^{-1}\underline{b}\,U(s) + d\,U(s) \qquad (2\text{-}6)$$

หรือได้ทรานสเฟอร์ฟังก์ชัน (transfer function)

$$H(s) = Y(s) / U(s) = \underline{c}^T[s\,I - A]^{-1}\underline{b} + d \qquad (2\text{-}7)$$

ทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันตามสมการ (2-7) ที่ได้นั้น สามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้เป็น

$$H(s) = (b_o + b_1 s + \ldots\ldots + b_{m-1}s^{m-1} + b_m s^m) / (a_o + a_1 s + \ldots\ldots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n) \qquad (2\text{-}8)$$

เมื่อ m <= n (จะเกิดกรณี m = n ต่อเมื่อค่า d ในสมการ (2-8) ไม่เท่ากับศูนย์) และ $b_0, b_1, \ldots, b_m, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ เป็นพารามิเตอร์ของทรานเฟอร์ฟังก์ชัน H(s) ตามลำดับ