บทที่ 4

การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรในระบบคิวและการทดสอบ

4.1 จำนวนผู้เข้ามาใช้บริการ (Inputs or Arrivals)

4.1.1 โค้งแสดงลักษณะของข้อมูล

การที่จะมีผู้มาใช้บริการจำนวนมากน้อยเท่าใดตามระยะเวลาต่าง ๆ นั้นเป็นเหตุการณ์ที่กำหนดหรือกะเกณฑ์ไว้ก่อนไม่ได้เลย เป็นสิ่งที่มีขึ้นเองซึ่งเรียกว่า random การศึกษาในที่นี้เพื่อจะหาว่าจำนวนของผู้มาใช้บริการมีลักษณะเป็นอย่างไรโดยดูว่าจะเข้าข่ายเป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบไหนและมีความเหมาะสมเพียงไร

ตามทฤษฎีที่ว่าด้วยเรื่องคิว (queue) นั้น โดยส่วนใหญ่จะกล่าวไว้ว่าการแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนผู้มาใช้บริการในระบบคิวนั้นเป็นแบบพัวซอง ซึ่งจะได้ทดสอบต่อไปว่าข้อมูลที่ได้จากการสำรวจนั้นเป็นไปตามนี้หรือไม่อย่างไร ในตอนนี้เราอาจดูการแจกแจงความถี่อย่างคร่าว ๆ ได้จากเส้นโค้ง ที่สร้างขึ้นจากตัวเลขที่แสดงจำนวนผู้มาใช้บริการตามระยะเวลาต่าง ๆ ตามรูปที่ 2 และ 3 ในหน้า 22 และ 24

รูปที่ 2 เป็นโค้งที่สร้างตามตารางที่ 1 ซึ่งแสดงจำนวนผู้มาใช้บริการในแผนกซูเปอร์มาร์เก็ตบริษัทเซ็นทรัล ตามวันที่เลือกให้เป็นตัวแทนของวันอื่น ๆ ทั้งหมด คือวันที่ 17 มีนาคม 2516 ทั้งนี้เพราะว่าผู้มาใช้บริการตามวันดังกล่าวมีจำนวนที่อาจถือว่าอยู่ในระดับที่เป็นปกติได้โดยทั่วไปแล้ว จำนวนผู้มาใช้บริการจะค่อย ๆ เพิ่มขึ้นจนถึงจุดหนึ่งแล้วจะลดลงต่ำเรื่อย ๆ หลังจากจุดสูงสุดนั้น ช่วงเวลาที่มีการคับคั่งมาก ๆ อยู่ระหว่าง 13.30-15.30 น.

ส่วนรูปที่ 3 คือโค้งซึ่งสร้างจากตัวเลขในตารางที่ 2 (หน้า 24) แสดงจำนวนลูกค้าที่แผนกซูเปอร์มาร์เก็ต บริษัทไทยไดมารู จากรูปจะเห็นได้ว่าช่วงที่มีผู้มาใช้บริการจำนวนมากๆ อยู่ราว ๆ 12.30-14.30 น.

ในระบบคิวที่บริษัทเซ็นทรัล มีข้อสังเกตอย่างหนึ่งคือ สถานที่เป็นปัจจัยอย่างหนึ่งที่มีผล

ต่อความยาวของคิว ตัวอย่างเช่น แคชเชียร์ที่อยู่ใกล้ทางออกไปยังที่จอดรถของลูกค้า มักจะไม่ค่อยมีช่วงเวลาว่าง ซึ่งต่างกับแคชเชียร์ทางด้านหน้าที่มีการว่างมากกว่า สำนักที่บริษัทไทย-ไดมารูนั้น คิวมัก ไม่ยาวทั้งนี้อาจเนื่องจากว่า มีจำนวนผู้ให้บริการมากกว่าและจากค่าประมาณของอัตราเร็วในการให้บริการที่ได้ (ในบทที่ 3) ทราบว่าอัตราเร็วเฉลี่ยในการให้บริการที่บริษัทไทยไดมารูสูงกว่าที่บริษัทเซ็นทรัลคือบริษัทไทยไดมารูมีอัตราเป็น 4.79 และบริษัทเซ็นทรัลมีอัตรา 3.76 (ตอนาที)

4.1.2. สมมุติฐานเกี่ยวกับการแจกแจงความน่าจะเป็นและการทดสอบ

ในการวิเคราะห์ถึงจำนวนผู้มาใช้บริการระบบคิว เราจะตั้งสมมุติฐาน (Hypothesis) ตามโมเดลเรื่องคิวที่ว่า[13] การแจกแจงความน่าจะเป็น (probability distribution) ของจำนวนดังกล่าวเป็นแบบ พัวซอง (Poisson)

(โปรดพิจารณาตารางในหน้าต่อไป)

---

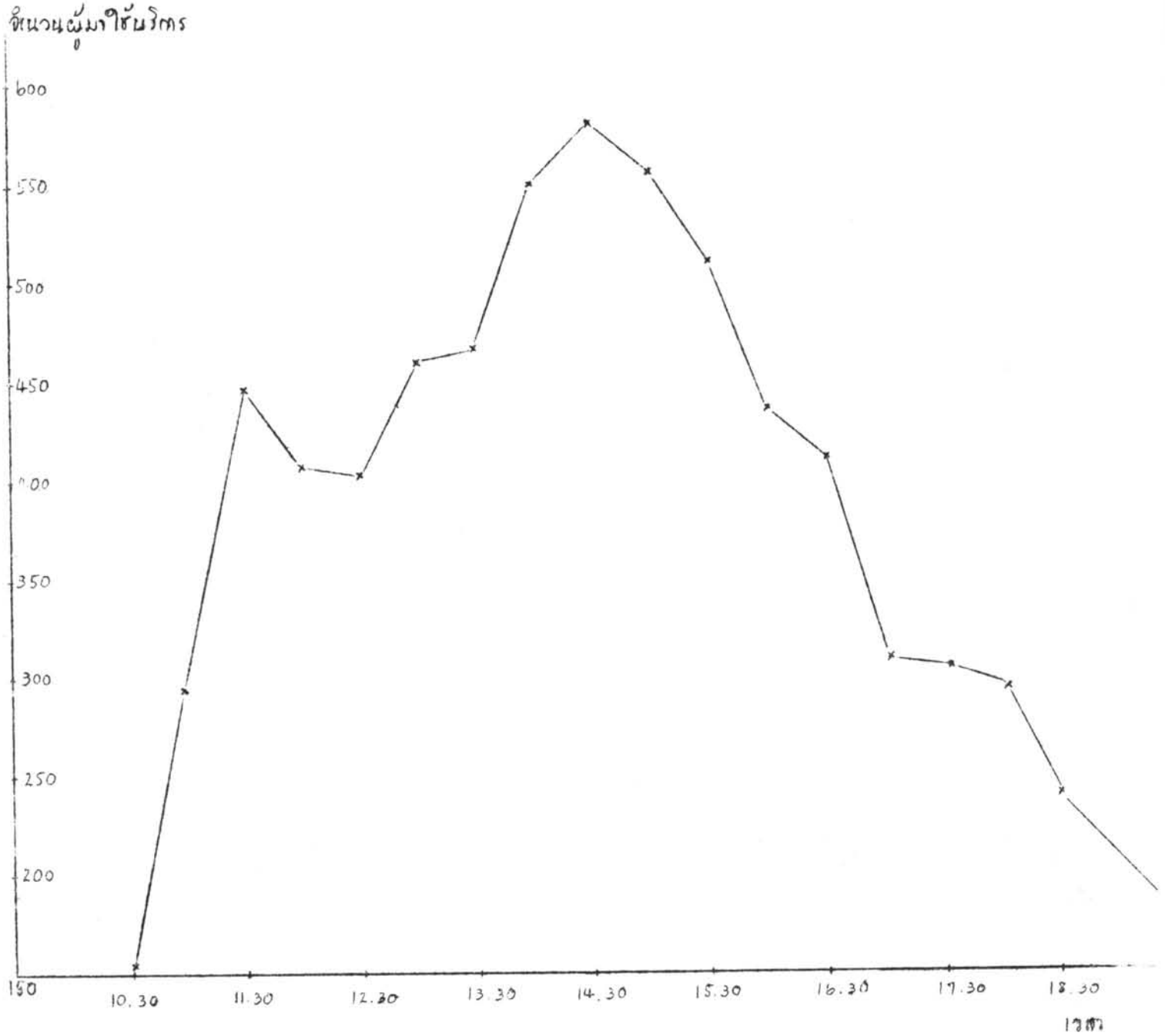
13. Taha, H.A, Operations Research, An Introduction, p. 510

ตารางที่ 1

แสดงจำนวนผู้มาใช้บริการที่แผนกซูเปอร์มาร์เก็ต บริษัท เซ็นทรัลตามช่วงเวลาต่าง ๆ ที่มีการให้บริการ

เวลา	อาทิตย์	จันทร์	* เสาร์	เสาร์	ศุกร์	เสาร์
	13 สค.2515	4 กย.2515	30 ธค.2515	17มีค.2516	9 กพ.2516	17 กพ.2516
10.00-10.30	97	85	488	153	78	112
10.31-11.00	254	198	754	295	101	189
11.01-11.30	349	146	1032	446	114	275
11.31-12.00	306	254	744	409	263	194
12.01-12.30	266	371	595	404	298	376
12.31-13.00	345	362	597	464	314	401
13.01-13.30	222	288	210	471	288	425
13.31-14.00	351	274	452	550	194	349
14.01-14.30	363	299	997	581	325	385
14.31-15.00	342	346	1013	559	369	374
15.01-15.30	314	299	896	513	214	368
15.31-16.00	302	245	918	438	206	294
16.01-16.30	284	193	874	423	285	303
16.31-17.00	289	227	812	315	274	286
17.01-17.30	156	311	774	313	261	327
17.31-18.00	274	297	581	295	287	299
18.01-18.30	261	103	318	237	244	254
18.31-19.00	178	99	201	112	146	137

* วันใกล้เทศกาลปีใหม่ จำนวนผู้มาใช้บริการสูงกว่าระดับปกติ

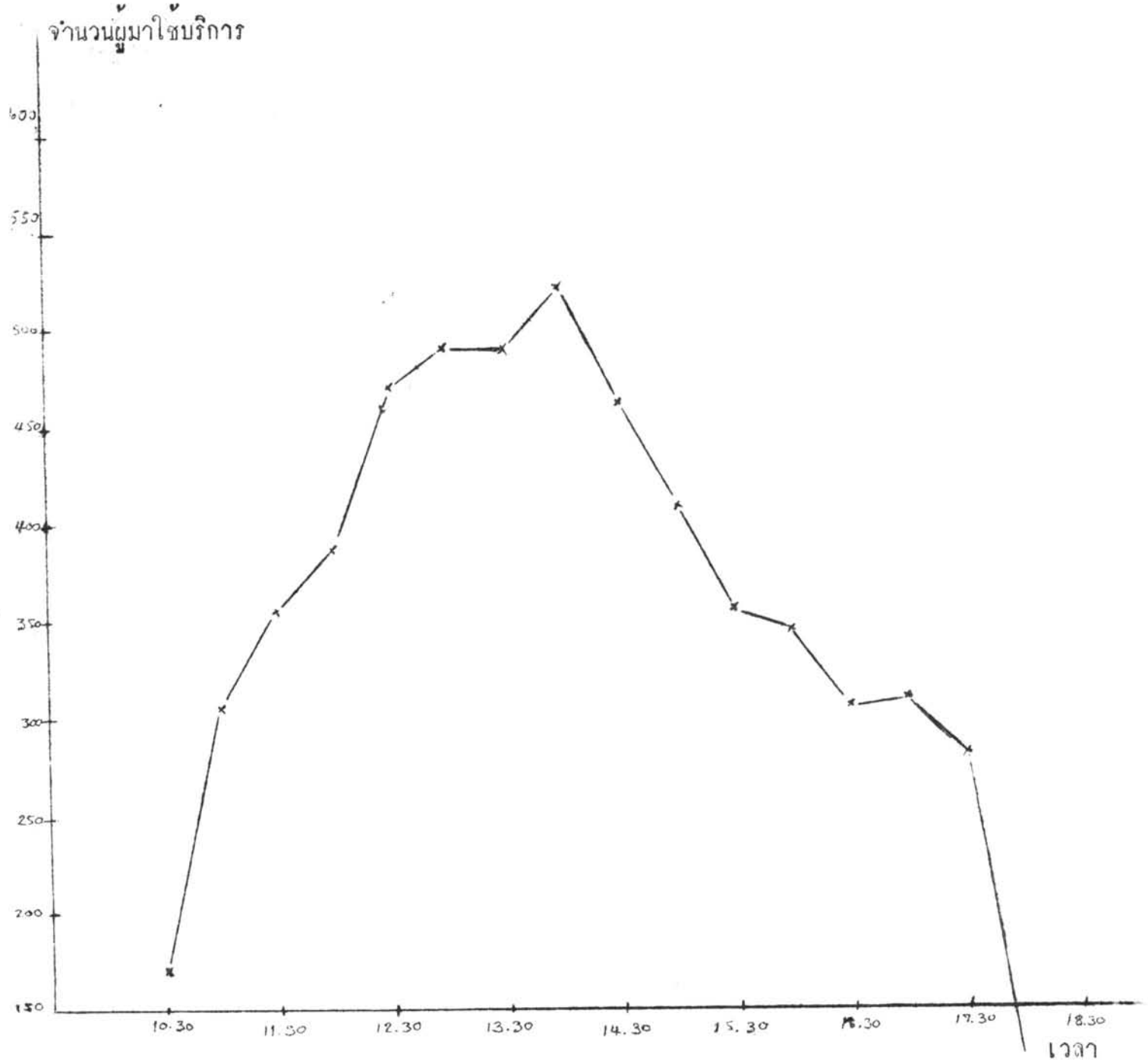


รูปที่ 2 กราฟแสดงจำนวนผู้มาใช้บริการที่แผนกซูเปอร์มาร์เก็ต บริษัทเซ็นทรัลตามช่วงเวลาต่าง ๆ ในวันที่ถือเป็นวันที่มีการคับคั่ง (17 มีนาคม 2516.)

ตารางที่ 2

แสดงจำนวนผู้มาใช้บริการที่แผนกซูเปอร์มาร์เก็ต บริษัทไทยไดมารูตามช่วงเวลาต่าง ๆ ที่มีการให้บริการ

เวลา	ศุกร์	เสาร์	อังคาร	เสาร์
	1 มิ.ย.2516	2 มิ.ย. 2516	14 มิ.ย.2516	22 ก.ย. 2516
10.00-10.30	165	174	79	199
10.31-11.00	94	305	86	367
11.01-11.30	92	354	101	384
11.31-12.00	79	389	89	381
12.01-12.30	129	472	132	498
12.31-13.00	151	493	184	522
13.01-13.30	165	493	171	503
13.31-14.00	180	521	173	517
14.01-14.30	155	464	145	428
14.31-15.00	149	417	119	405
15.01-15.30	121	353	120	361
15.31-16.00	161	347	132	372
16.01-16.30	211	311	301	309
16.31-17.00	183	320	273	201
17.01-17.30	190	280	282	212
17.31-18.00	125	142	104	135



รูปที่ 3 กราฟแสดงจำนวนผู้มาใช้บริการที่แผนกซูเปอร์มาร์เก็ต บริษัทไทยไดมารู ตามช่วงเวลาต่าง ๆ ในวันที่ 2 มิถุนายน 2516 ซึ่งถือว่าเป็นวันที่มีลูกค้ากับคั่ง.

ตามที่ได้ตั้งข้อสมมุติให้จำนวนผู้มาใช้บริการมีการแจกแจงแบบพัวซองนั้น เพื่อที่จะทราบว่าสมมุติฐานนั้นใช้ได้หรือไม่ และมีความเหมาะสมเพียงไร เราทดสอบได้โดยใช้วิธีที่เรียกว่า Chi - square test for goodness of fit [14] หรือ Kolmogorov - Smirnov Test [15] และในการที่มีสมมุติว่าจำนวนลูกค้ามีการแจกแจงแบบพัวซอง หมายความว่า จำนวนดังกล่าวเป็น random และจำนวนผู้มาใช้บริการในเวลาต่อไปไม่ขึ้นกับการเกิดขึ้นในครั้งแล้ว ๆ ด้วย

ต่อไปนี้เป็นตารางแสดงค่าของความถี่ของจำนวนผู้มาใช้บริการ, ความน่าจะเป็นตามตารางการแจกแจงความถี่แบบพัวซอง, ความถี่ที่คำนวนได้ตามฟังก์ชั่นแบบพัวซองตามที่สมมุติ (expected) หรือ theoretical frequency และการทดสอบตามวิธี Chi - Square test for goodness of fit

---

14 & 15 ; Ostle, Bernard., op. cit., p. 126 - 130

ตารางที่ 3
(ข้อมูลที่เก็บรวบรวมจากซูเปอร์มาร์เก็ต บริษัทเซ็นทรัล)
ระหว่าง 11.00 - 16.00 น. ในวันที่มีการคับคั่ง

จำนวน(n)	ความถี่ที่ได้จากการ สำรวจ (O)	ความน่าจะเป็นตามการ แจกแจงแบบพัวซอง (P)	ความถี่ที่คำนวนจาก P [E = P x Σ O]
0	3	0.004	1.2
1	10	0.020	6.0
2	26	0.058	17.4
3	40	0.109	32.7
4	43	0.151	45.3
5	47	0.170	51.0
6	39	0.158	47.4
7	25	0.127	38.1
8	21	0.089	26.7
9	13	0.055	16.5
10	10	0.031	9.3
11	9	0.016	4.8
12	5	0.007	2.1
13	3	0.003	0.9
14	3	0.001	0.3
15	2	0	0
16	0	0	0
17	1	0	0
	Σ O = 300		

ตารางที่ 4

Chi - square test for goodness of fit ต่อเนื่องกับตารางที่ 3

จำนวน (n)	ความถี่จากการสำรวจ (O)	ความถี่ที่คำนวนได้ (E)	ค่าความแตกต่าง (O-E)	$\frac{(O-E)^2}{E}$
0	3	1	2	4
1	10	6	4	2.667
2	26	17	9	4.764
3	40	33	7	1.484
4	43	45	-2	0.088
5	47	51	-4	0.313
6	39	47	-8	1.361
7	25	38	-13	4.447
8	21	27	-6	1.333
9	13	17	-4	0.941
10	10	9	1	0.111
11	9	5	4	3.200
12	5	2	3	4.500
13	3	1	2	4.000
14	3	0	3	-
15	2	0	2	-
16	0	0	0	- -
17	1	0	1	-
				33.209

สมมติฐาน (H_0) :- จำนวนผู้มาใช้บริการมีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบพัวซอง

คาประมาณ λ ($\hat{\lambda}$) $= \frac{1670}{300} = 5.6$

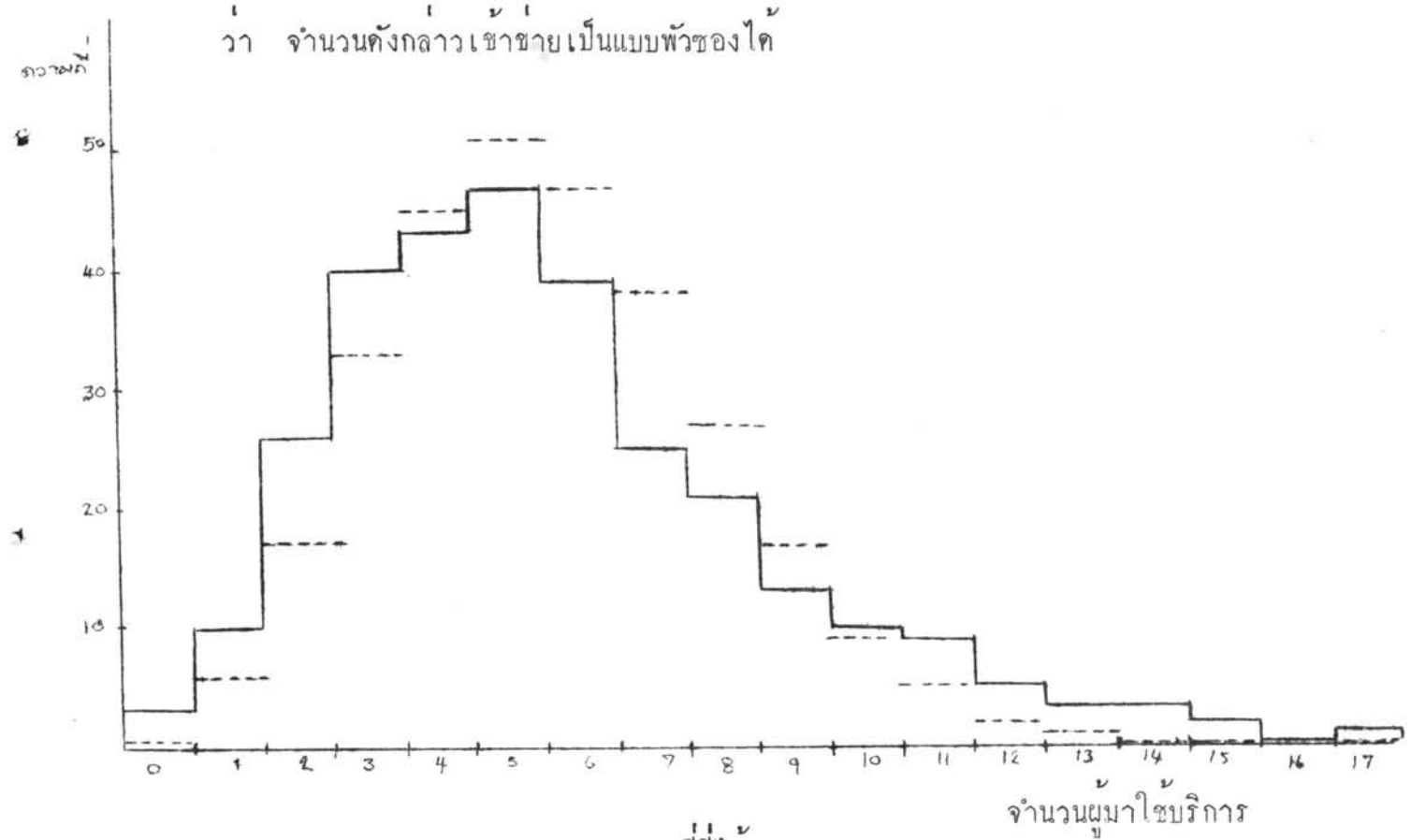
ค่า χ^2 จากการทดสอบ $= \Sigma (O-E)^2/E$

$= 33.209$

ค่า χ^2 จากตาราง 17 d.f. :-

$\chi^2_{(.05)} = 27.6$, $\chi^2_{(.01)} = 33.4$

จะเห็นว่า χ^2 จากการทดสอบ $< \chi^2_{(.01)}$ ยอมรับ H_0 ที่ระดับความเชื่อมั่น 1% ผลจากที่คำนวนได้เปรียบเทียบค่าจากตาราง ทำให้เราได้ข้อสรุปว่า การแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนผู้มาใช้บริการที่แผนกซูเปอร์มาร์เก็ต บริษัทเซ็นทรัลเป็นแบบ พัวซอง ได้ ณ.ระดับความมีนัยสำคัญเท่านั้นคือ สมมติฐานที่เราตั้งไว้จะใช้ได้กับข้อมูลชุดนี้ แต่ถ้าพิจารณาถึงระดับความเหมาะสมแล้วเราอาจกล่าวได้ว่ามีไม่มากนัก อย่างไรก็ตาม หมายความว่า จำนวนดังกล่าวเข้าข่ายเป็นแบบพัวซองได้



———— ความถี่ที่ได้จากการสำรวจ (Actual frequency)

- - - - - - - - - ความถี่ตามทฤษฎี (Theoretical or Expected frequency)

รูปที่ 4 แสดงความถี่ของจำนวนผู้มาใช้บริการ(ที่ซูเปอร์มาร์เก็ต บริษัทเซ็นทรัล)ตามจริง เปรียบเทียบกับค่าความถี่ที่คำนวนตามพัวซองฟังก์ชั่น.

ตารางที่ 5

ข้อมูลที่เก็บรวบรวมจากซูเปอร์มาร์เก็ต บริษัทไทยไดมารู

ระหว่าง 11.30-17.30 น. ในวันที่มีผู้มาใช้บริการในระดับที่ถือเป็นปกติได้

จำนวน(n)	ความถี่ที่ได้จากการสำรวจ(O)	ความน่าจะเป็นตามการแจกแจงแบบพัวซอง(P)	ความถี่ที่คำนวนจาก P (E = P × ΣO)
0	3	0.006	1.96
1	11	0.028	10.08
2	32	0.075	27.00
3	50	0.129	46.44
4	58	0.168	60.48
5	60	0.175	63.00
6	52	0.151	54.36
7	33	0.113	40.68
8	35	0.073	26.28
9	10	0.042	15.12
10	11	0.022	7.92
11	4	0.011	3.96
12	1	0.004	1.44

ค่า χ^2 ที่คำนวนเพื่อจะทดสอบว่าจำนวนผู้มาใช้บริการในแผนกซูเปอร์มาร์เก็ต บริษัท ไทยไดมารู เป็นแบบพัวซองหรือไม่นั้น ดูจากโปรแกรมฟอแทรน และผลที่ได้ในภาคผนวก ได้ว่า

$$\chi^2 = 9.5913297$$

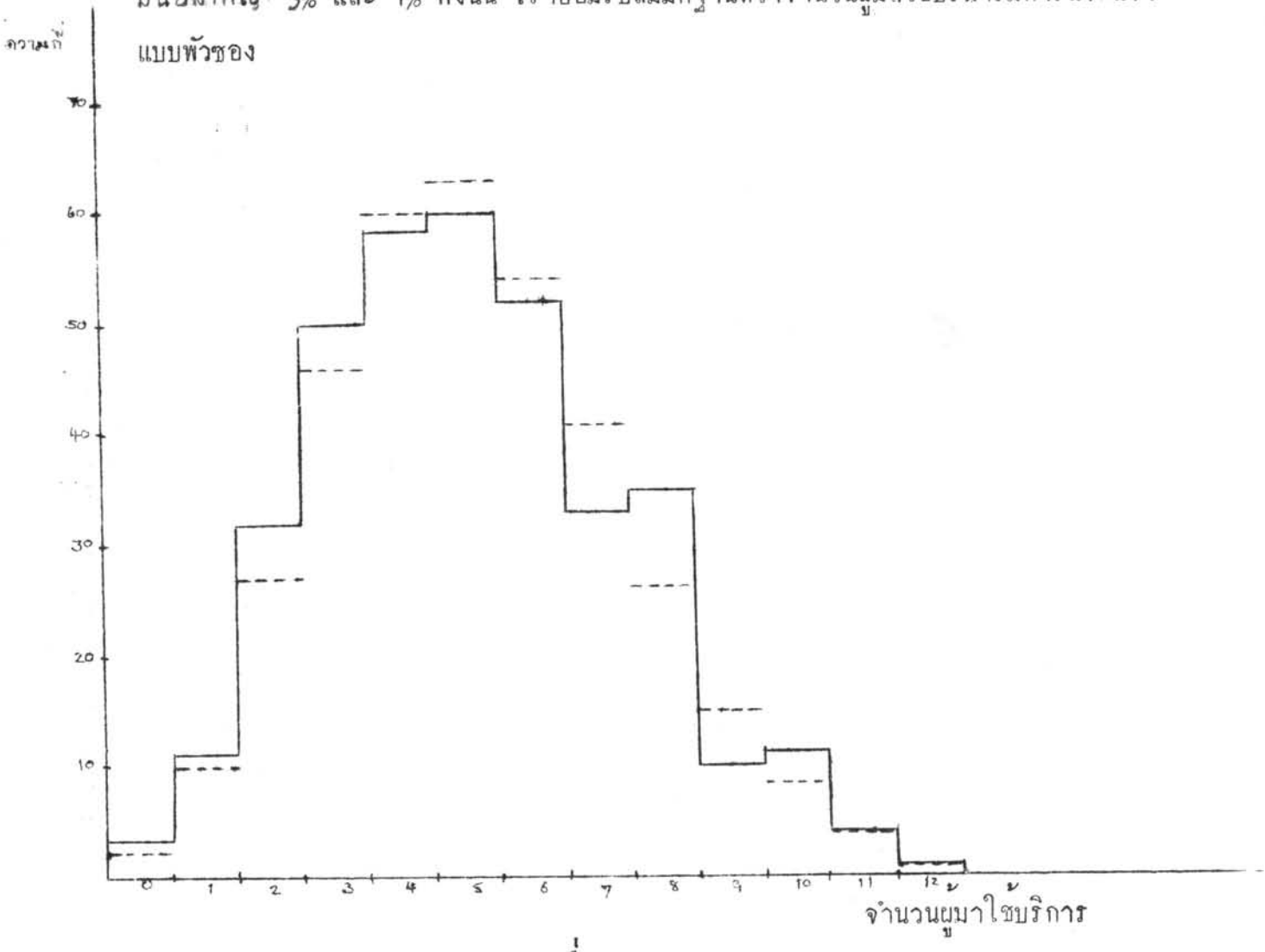
ในที่นี้เราใช้ จำนวน degree of freedom = 11

ค่าจากตาราง

$$\chi^2(.05) = 19.7$$

$$\chi^2(.01) = 24.7$$

เปรียบเทียบกันจะเห็นว่า χ^2 จากการคำนวน มีค่าน้อยกว่า χ^2 จากตาราง ณ.ระดับความมีนัยสำคัญ 5% และ 1% ดังนั้น เรายอมรับสมมติฐานที่ว่าจำนวนผู้มาใช้บริการมีการแจกแจงแบบพัวซอง



รูปที่ 5 แสดงการเปรียบเทียบความถี่จริง กับค่าความถี่ที่คำนวนตามฟังก์ชั่นแบบพัวซองข้อมูลจากซูเปอร์มาร์เก็ต บริษัท ไทยไดมารู

4.2 ระยะเวลาที่ใช้ในการบริการ (Servicing time)

ทฤษฎีที่ว่าด้วยเรื่องนี้มักจะถือว่า ระยะเวลาที่ใช้ในการบริการนั้นเป็นตัวแปรที่เข้าลักษณะซึ่งต่อเนื่องกัน และมีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบเอ็กซ์โพเน็นเชียล อย่างไรก็ตามจากการค้นคว้าเรื่อง คิว (queue) จากหนังสือที่กล่าวถึงการแจกแจงความน่าจะเป็นของระยะเวลาที่ใช้ในการให้บริการดังกล่าว ได้ข้อสังเกตว่า นอกจากจะเป็นแบบเอ็กซ์โพเน็นเชียลแล้ว ก็อาจเป็นชนิดที่เรียกว่า เออร์แลง (Erlang) หรือ แกมมา ดิสทริบิวชั่น (Gamma Distribution) นั่นเอง การแจกแจงแบบนี้ทั้ง Wagner[16] และ Hillier[17] กล่าวไว้ว่า ในทางปฏิบัตินั้นอาจพบได้เสมอว่า การแจกแจงดังกล่าวนั้นเป็นแบบ Erlang ซึ่ง Wagner ได้แสดงฟังก์ชั่นแบบนี้ไว้ดังนี้ คือ :-

ถ้าให้ t = ระยะเวลาที่ใช้ในการให้บริการ

$$f(t) = \frac{(\lambda n)(\lambda n t)^{n-1} \cdot e^{-\lambda n t}}{(n-1)!} \quad ; \ t \geq 0$$

โดยที่ n เป็นเลขจำนวนเต็มบวก

ค่าตัวกลาง (mean) $= \frac{1}{\lambda}$

ค่าเบี่ยงแบนมาตรฐาน (standard deviation) $= \frac{1}{\sqrt{n\lambda^2}}$

ส่วน Hillier ได้ให้ข้อสังเกตไว้ว่า กรณีที่ในระบบคิวมีการทำงานแบบต่อเนื่องกันเป็นลำดับสมมติว่าเป็นหลาย ๆ ช่วงต่อกัน (ให้เท่ากับจำนวน k) และแต่ละตอนเวลาที่ใช้ในการให้บริการผู้มาซื้อของแต่ละคนเป็นแบบเอ็กซ์โพเน็นเชียลเหมือน ๆ กันโดยตลอดทั้ง k ครั้ง ดังนี้ การแจกแจงความน่าจะเป็นของเวลาที่ใช้ในการให้บริการทั้งสิ้น ก็จะเป็นแบบ Erlang ซึ่งกำหนดแบบไว้ดังนี้ :-

$$f(t) = \frac{(\mu k)^k t^{k-1} \cdot e^{-k\mu t}}{(k-1)!} \quad ; \ t \geq 0$$

โดยที่ μ, k = ค่าพารามิเตอร์ที่เป็นบวก

ค่าตัวกลาง (mean) $= 1/\mu$

ค่าความแปรปรวน (variance) $= 1/k\mu^2$

mode $= (k-1)/\mu k$

การสำรวจเพื่อการศึกษา การแจกแจงความน่าจะเป็นของเวลาที่ใช้ในการให้บริการแก่ลูกค้านั้น ได้กำหนดช่วงเวลาต่าง ๆ กันไว้ (ตามที่แสดงในตาราง) และนับจดจำนวนครั้งที่มีการให้บริการลูกค้าแต่ละคนโดยใช้เวลาตามช่วงต่าง ๆ ซึ่งกำหนด ตัวเลขที่ได้จะแสดงความถี่ (frequency) ของช่วงเวลาที่ใช้ในการให้บริการโดยกำหนดเป็นวินาที

ในการวิเคราะห์เรื่องนี้ ได้สำรวจและเก็บข้อมูลที่แผนกซูเปอร์มาร์เก็ตของบริษัทเซ็นทรัลสีลม โดยเลือกวันเสาร์ที่ 17 มีนาคม 2516 เป็นวันปกติที่อาจถือเป็นตัวแทนได้ดีพอควร และนับจดความถี่ของการใช้เวลาให้บริการลูกค้าแต่ละคนระหว่างเวลาที่มีผู้มาใช้บริการค่อนข้างมากและสม่ำเสมอ คือตั้งแต่ 11.00 - 16.00 น.

ส่วนการสำรวจที่บริษัทไทยไดมารูนั้น ได้กำหนดให้ วันเสาร์ที่ 2 มิถุนายน 2516 เป็นวันปกติ และข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์ดูการแจกแจงความน่าจะเป็นของเวลาในการบริการนี้เลือกให้เป็นตัวเลขแสดงความถี่ในช่วง 10.00 - 18.00 น.

การพิจารณาว่า เวลาที่ใช้ในการให้บริการมีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบ เอ็กซ์โพเน็นเชี่ยล ตามทฤษฎีนั้นใช้ได้กับสถานการณ์ในทางปฏิบัติได้หรือไม่เพียงไร โดยเฉพาะกับระบบการให้บริการทั้งสองแห่ง ที่กำลังศึกษานี้ เราอาจใช้ทฤษฎีทางสถิติทดสอบว่าแบบของการแจกแจงซึ่งเรากำหนดตามทฤษฎีดังกล่าวนั้นมีความเหมาะสมหรือไม่ (Goodness of fit test)

ถ้าให้ t เป็นเวลาที่ใช้ในการให้บริการ

ฟังก์ชันแบบเอ็กซ์โพเน็นเชียลของ t คือ $g(t) = \mu e^{-\mu t} \quad ; t \geq 0$

ค่าเฉลี่ยของเวลาที่ใช้ในการบริการ $= \int_0^\infty t\, g(t)\, dt$

$= \frac{1}{\mu}$

โดยที่ μ = อัตราการให้บริการต่อหนึ่งหน่วยเวลา หมายถึงจำนวนลูกค้าที่ได้รับการบริการเสร็จสิ้นในหนึ่งหน่วยเวลาที่กำหนด

เพื่อที่จะหาค่าความถี่ของเวลาที่ใช้บริการตามทฤษฎี (Theoretical value) นั้น เราต้องคำนวนหาความน่าจะเป็นตามช่วงเวลาต่าง ๆ โดยการ อินทีเกรท (Integrate) ฟังก์ชัน

$$\int_a^b \mu e^{-\mu t}\, dt = -e^{-\mu t}\Big|_{t=a}^{b}$$

แล้วนำมาคูณกับจำนวนความถี่รวม (Total Frequency) ที่ได้จากการสำรวจ

ตารางที่ 6

แสดงการแจกแจงความถี่ของระยะเวลาที่ใช้ในการให้บริการของแผนกซูเปอร์มาร์เก็ต ที่บริษัทเซ็นทรัลในวันปกติ (เสาร์ที่ 17 มีนาคม 2516) ระหว่าง 11.00-16.00 น. เป็นช่วงที่มีผู้มาใช้บริการมาก

$1/\mu = 15.92$ (วินาที) , $\mu = 3.76$ ต่อนาที หรือ $= 0.0628$ ต่อวินาที

* ความน่าจะเป็น (probability) ในช่วงเวลาต่าง ๆ (P_i) $= \int_a^b 0.0628 e^{-0.0628t}\, dt$

$= -e^{-0.0628t}\Big|_{t=a}^{b}$

ช่วงเวลาที่ใช้ในการให้บริการ (t) เป็นวินาที	ความถี่จากการสำรวจ(O_i)	ความน่าจะเป็นตามเอ็กซ์โพเน็นเชียลฟังก์ชัน * (P_i)	ความถี่คำนวนตามเอ็กซโพเน็นเชียลฟังก์ชัน (E_i) (P_i)(512)
$0 \leq t \leq 10$	197	0.467408	239.3088
$11 \leq t \leq 20$	171	0.277922	142.29504
$21 \leq t \leq 30$	66	0.11994	61.40928
$31 \leq t \leq 40$	41	0.062436	31.967232
$41 \leq t \leq 50$	15	0.033253	17.025536
$51 \leq t \leq 60$	11	0.017710	9.06752
$61 \leq t \leq 70$	4	0.009309	4.766208
$71 \leq t \leq 80$	4	0.004957	2.537984
$81 \leq t \leq 90$	2	0.0027025	1.38368
$91 \leq t \leq 100$	1	0.0014155	0.724736
	512		

ตารางที่ 7

แสดงการทดสอบการแจกแจงความน่าจะเป็นของเวลาที่ใช้ในการให้บริการ ในแผนกซูเปอร์มาร์เก็ต บริษัทเซ็นทรัล ว่าเป็นแบบเอ็กซ์โพเน้นเชียล หรือไม่ โดยใช้วิธีที่เรียกว่า Chi - square test for goodness of fit

ช่วงเวลาที่ใช้ในการให้บริการ (t เป็น วินาที)	ความถี่ที่ได้จากการสำรวจ (O)	ความถี่ที่คำนวณได้ตามเอ็กซ์โพเน้นเชียล (E)	O-E	$(O-E)^2/E$
$0 \leq t \leq 10$	197	239	-42	7.3807
$11 \leq t \leq 20$	171	142	29	5.9225
$21 \leq t \leq 30$	66	61	5	0.4098
$31 \leq t \leq 40$	41	32	9	2.5312
$41 \leq t \leq 50$	15	17	-2	0.2355
$51 \leq t \leq 60$	11	9	2	0.4444
$61 \leq t \leq 70$	4	5	-1	0.2000
$71 \leq t \leq 80$	4	3	1	0.3333
$81 \leq t \leq 90$	2	1	1	1.0000
$91 \leq t \leq 100$	1	1	0	0.0000
				18.4574

ค่า χ^2 ที่คำนวณได้ = 18.4574 = $\Sigma (O-E)^2/E$

และเมื่อเปรียบเทียบกับค่าจากตารางโดยใช้ d.f. = 9

$$\chi^2_{(.05)} = 16.9$$

$$\chi^2_{(0025)} = 19.0$$

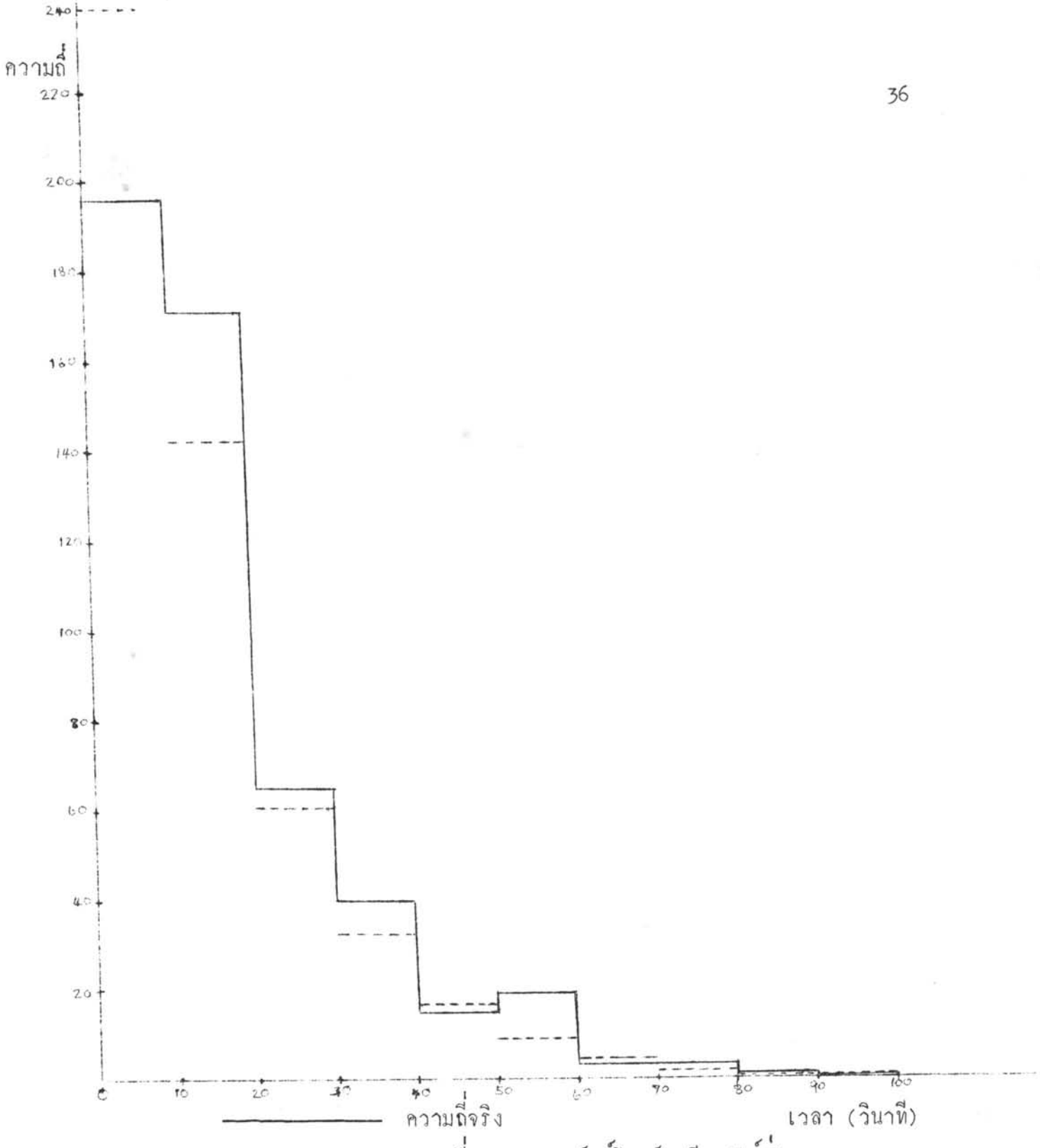
$$\chi^2_{(.01)} = 21.7$$

จะเห็นว่า ณ. ระดับความมีนัยสำคัญ 5% ค่าที่คำนวณได้มากกว่าค่าจากตาราง แต่ถ้าพิจารณาที่ 2.5% หรือ 1% ค่าที่คำนวณได้น้อยกว่าค่าจากตาราง ดังนั้น สรุปได้ว่า สมมติฐาน (hypothesis) ซึ่งตั้งไว้ว่าการแจกแจงความน่าจะเป็นของเวลาที่ใช้ในการให้บริการเป็นแบบเอ็กซ์โพเน็นเชียลนั้น เรายอมรับได้ที่ระดับความมีนัยสำคัญ 5% และ 1%

ถ้าพิจารณาข้อสังเกตที่ Hillier ได้กล่าวว่า ในทางปฏิบัตินั้น การแจกแจงความน่าจะเป็นของเวลาที่ใช้ในการให้บริการมีโอกาสจะเป็นอย่างอื่นได้เสมอนอกเหนือไปจากแบบเอ็กซ์โพเน็นเชียล เช่นเป็นแกมมาฟังก์ชั่น ตามที่กล่าวแล้วข้างต้น อย่างไรก็ตามการแจกแจงความน่าจะเป็นของเวลาที่ใช้ในการให้บริการในระยะที่มีผู้มาใช้บริการมาก ในระบบคิวที่ซูเปอร์มาร์เก็ตของบริษัทเซ็นทรัลถือว่ามีแนวโน้มที่จะเป็นไปตามแบบเอ็กซ์โพเน็นเชียลที่ระดับความมีนัยสำคัญ 2.5% และ 1% ถ้าหากใช้ระยะเวลาสังเกตการณ์มากครั้งขึ้น การแจกแจงความน่าจะเป็นของเวลาที่ใช้ในการให้บริการอาจจะเป็นแบบเอ็กซ์โพเน็นเชียล ที่ระดับความเชื่อมั่นสูงขึ้นก็ได้

ต่อจากนี้ จะได้พิจารณาถึงการแจกแจงความน่าจะเป็นของเวลาที่ใช้ในการให้บริการในระบบคิวของซูเปอร์มาร์เก็ตที่ บริษัท ไทยไดมารู บ้าง เพื่อให้แตกต่างกับที่ศึกษาในกรณีของบริษัทเซ็นทรัล และเพื่อจะได้แนวความคิดกว้างขวางขึ้น ก็จะดูการแจกแจงความถี่ในระยะยาวขึ้นเกือบตลอดเวลาที่มีการให้บริการ คือตั้งแต่ 10.00 น. ถึง 18.00 น. แทนการศึกษาในช่วงเวลาที่มีการคับคั่งตามกรณีที่แล้ว.

I16575064



รูปที่ 6 แสดงความถี่ของเวลาที่ใช้ในการให้บริการ ผู้มาซื้อของในแผนกซูเปอร์มาร์เก็ต บริษัท เซ็นทรัล ตามที่ได้จากการสำรวจจริง เปรียบเทียบกับค่าความถี่ที่คำนวณตามเอ็กซ์โพเน็นเชียลฟังก์ชั่น.

ตารางที่ 8

แสดงจำนวนผู้ได้รับการบริการเสร็จสิ้นภายในช่วงเวลาต่าง ๆ ในวันที่มีผู้มาใช้บริการในระดับที่ถือเป็นปกติได้ ที่แผนกซูเปอร์มาร์เก็ต บริษัท เซ็นทรัล

คิวที่ I

ช่วงเวลาเป็นนาทีที่ (t)	เวลา							
	10-11 น.	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18
$0 \leq t \leq 5$	5	13	9	9	13	13	8	10
$6 \leq t \leq 10$	8	9	9	14	9	13	15	5
$11 \leq t \leq 15$	4	10	10	11	20	14	12	7
$16 \leq t \leq 20$	7	9	10	10	17	17	10	7
$21 \leq t \leq 25$	9	8	6	11	13	13	10	8
$26 \leq t \leq 30$	9	8	11	15	14	7	5	8
$31 \leq t \leq 35$	6	7	8	11	11	11	12	7
$36 \leq t \leq 40$	7	12	5	15	9	11	3	10
$41 \leq t \leq 45$	8	6	9	15	12	7	7	8
$46 \leq t \leq 50$	5	8	14	17	8	9	10	5
$51 \leq t \leq 55$	10	8	5	13	15	9	10	9
$56 \leq t \leq 60$	10	10	7	16	12	9	4	8

ตารางที่ 9

แสดงจำนวนผู้ได้รับการบริการเสร็จสิ้นภายในช่วงเวลาต่าง ๆ ในวันที่มีผู้มาใช้บริการในระดับที่ถือเป็นปกติได้ ที่แผนกซูเปอร์มาร์เก็ต บริษัท เซ็นทรัล

คิวที่ 1

ช่วงเวลาน่าที่ที่(t)	เวลา							
	10-11 น.	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18
$0 \leq t \leq 5$	5	13	9	9	13	13	8	10
$6 \leq t \leq 10$	8	9	9	14	9	13	15	5
$11 \leq t \leq 15$	4	10	10	11	20	14	12	7
$16 \leq t \leq 20$	7	9	10	10	17	17	10	7
$21 \leq t \leq 25$	9	8	6	11	13	13	10	8
$26 \leq t \leq 30$	9	8	11	15	14	7	5	8
$31 \leq t \leq 35$	6	7	8	11	11	11	12	7
$36 \leq t \leq 40$	7	12	5	15	9	11	3	10
$41 \leq t \leq 45$	8	6	9	15	12	7	7	8
$46 \leq t \leq 50$	5	8	14	17	8	9	10	5
$51 \leq t \leq 55$	10	8	5	13	15	9	10	9
$56 \leq t \leq 60$	10	10	7	16	12	9	4	8

ตารางที่ 10

แสดงจำนวนรวมของผู้ที่ได้รับบริการเสร็จสิ้นภายในช่วงเวลาต่าง ๆในระบบจ่ายที่แผนกซูเปอร์มาร์เก็ต บริษัทเซ็นทรัล

ช่วงเวลาเป็นนาทีที่ (t)	13 สิงหาคม 2515				4 กันยายน 2515				9 กุมภาพันธ์ 2516				17 กุมภาพันธ์ 2516				17 มีนาคม 2516			
	11-12	12-13	13-14	14-15	11-12	12-13	13-14	14-15	11-12	12-13	13-14	14-15	11-12	12-13	13-14	14-15	11-12	12-13	13-14	14-15
$0 \leq t < 5$	18	12	10	25	14	16	12	6	12	14	11	20	19	17	11	16	19	15	18	16
$5 \leq t < 10$	24	15	21	14	17	21	12	18	22	19	17	18	19	20	16	20	16	15	22	19
$10 \leq t < 15$	23	20	23	21	20	19	14	13	16	10	22	16	22	18	17	22	20	19	18	28
$15 \leq t < 20$	13	18	21	24	12	21	16	17	18	25	19	16	14	18	12	16	16	17	16	29
$20 \leq t < 25$	16	18	14	24	19	15	10	19	17	16	20	18	18	17	21	21	15	11	23	23
$25 \leq t < 30$	25	20	16	15	23	18	11	14	21	15	13	19	20	16	14	13	16	17	22	20
$30 \leq t < 35$	19	16	26	16	14	12	12	12	20	15	16	14	18	19	17	15	17	16	15	19
$35 \leq t < 40$	12	17	31	16	22	11	9	12	21	14	24	18	21	19	18	23	24	12	23	18
$40 \leq t < 45$	24	15	19	13	19	9	8	12	10	23	19	17	17	15	22	19	13	17	21	19
$45 \leq t < 50$	25	14	25	15	19	20	10	11	14	17	22	15	18	21	21	19	17	24	23	21
$50 \leq t < 55$	22	14	16	10	17	20	13	12	21	20	20	13	20	14	15	16	22	14	23	18
$55 \leq t < 60$	20	13	25	16	15	10	16	17	22	14	19	20	19	18	19	21	13	14	16	23

ตารางที่ 11

แสดงการแจกแจงความถี่ของเวลาที่ใช้ในการให้บริการของแผนกซูเปอร์มาร์เก็ตที่ บริษัท-ไทยไดมารู ในวันปกติคือ เสาร์ที่ 2 มิถุนายน 2516 ระหว่างเวลา 10.00-18.00 น.

$$f(t) = \mu e^{-\mu t} \quad ; t \geq 0$$

μ = 4.79 ต่อนาที หรือ 0.0798 ต่อวินาที

$1/\mu$ = 12.52 (วินาที)

ความน่าจะเป็น (probability) ในช่วงเวลาต่าง ๆ (P_i) $= \int_a^b 0.798\, e^{-0.0798t}\, dt$

$= -e^{-0.0798t}\Big|_{t=a}^{b}$

ช่วงเวลาที่ใช้ในการให้บริการ เป็นวินาที (t)	ความถี่จากการสำรวจ (O_i)	ความน่าจะเป็นตามเอ็กซ์โพเน็นเชียล-ฟังกชัน (P_i)	ความถี่คำนวณจากเอ็กซ์โพเน็นเชียล-ฟังกชัน $E_i = (P_i)(519)$
$0 \leq t \leq 10$	274	0.546155	293.454445
$11 \leq t \leq 20$	135	0.214666	111.411654
$21 \leq t \leq 30$	63	0.096617	50.144223
$31 \leq t \leq 40$	22	0.043413	22.531347
$41 \leq t \leq 50$	14	0.019506	10.123614
$51 \leq t \leq 60$	4	0.008853	4.594707
$61 \leq t \leq 70$	4	0.0038625	2.0046375
$71 \leq t \leq 80$	2	0.0017708	0.9190452
$81 \leq t \leq 90$	0	0.0008339	0.4327941
$91 \leq t \leq 100$	1	0.0003747	0.1844693
	519		

ตารางที่ 12

แสดงการทดสอบการแจกแจงความน่าจะเป็น ของเวลาที่ใช้ในการบริการในแผนกซูเปอร์มาร์เก็ตของบริษัท ไทยไดมารู ว่าเป็นเอ็กซ์โพเน็นเชียลฟังก์ชั่น หรือไม่ โดยใช้วิธี Chi - square test for goodness of fit

ช่วงเวลาที่ใช้ในการให้บริการ(t) เป็นวินาที	ความถี่ที่ได้จากการสำรวจ (O_i)	ความถี่ที่คำนวณได้ตามเอ็กซ์โพเน็นเชียลฟังก์ชั่น (E_i)	$O_i - E_i$	$(O_i - E_i)^2 / E_i$
$0 \leq t \leq 10$	274	293	-19	1.23208
$11 \leq t \leq 20$	135	111	24	5.19819
$21 \leq t \leq 30$	63	50	13	3.38000
$31 \leq t \leq 40$	22	23	-1	0.04347
$41 \leq t \leq 50$	14	10	4	1.60000
$51 \leq t \leq 60$	4	5	-1	0.20000
$61 \leq t \leq 70$	4	2	2	2.00000
$71 \leq t \leq 80$	2	1	1	1.00000
$81 \leq t \leq 90$	0	0	0	0
$91 \leq t \leq 100$	1	0	1	-
				14.65374

ค่าที่ได้จากการคำนวณ $\chi^2 = \sum (O - E)^2 / E$

$= 14.65374$

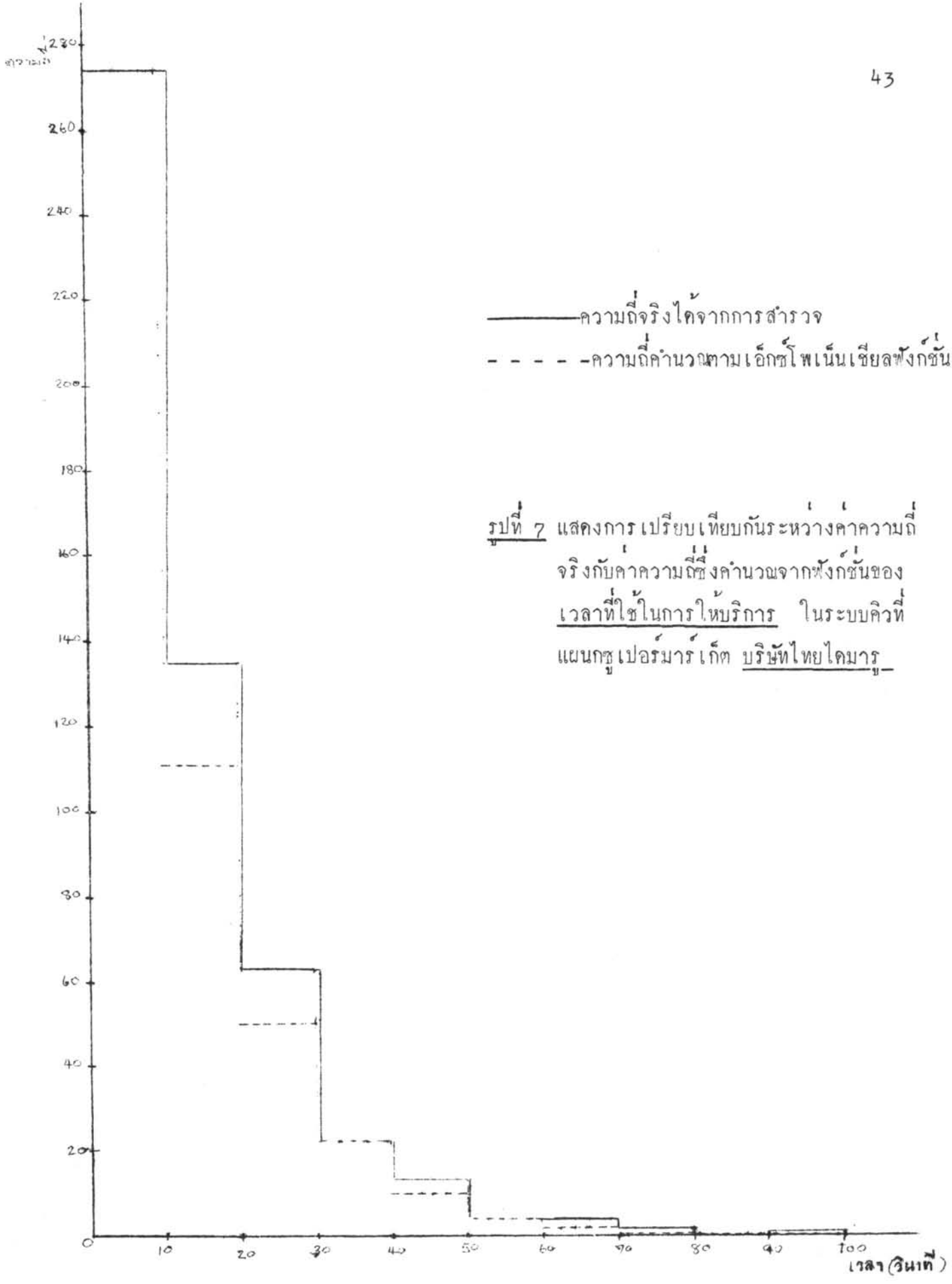
เปรียบเทียบกับค่าจากตาราง โดยใช้ degree of freedom = 9

$\chi^2_{(.05)} = 16.9$

$\chi^2_{(.025)} = 19.0$

$\chi^2_{(.01)} = 21.7$

จะเห็นว่า ค่าที่คำนวณน้อยกว่า ค่ามาตรฐานจากตาราง ณ.ระดับความมีนัยสำคัญ 5% , 2.5% และ 1% ซึ่งแสดงว่า สมมติฐานที่เราตั้งไว้ว่าการแจกแจงความน่าจะเป็นของเวลาที่ใช้ในการให้บริการลูกค้าเป็นแบบเอ็กซ์โพเน็นเชียล นั้น ใช้ได้อย่างเหมาะสมและถูกต้อง ถ้าเทียบกับการทดสอบตัวเลขที่เก็บจากบริษัทเซ็นทรัลจะได้ข้อสังเกตว่า ตัวเลขแสดงเวลาที่ใช้ในการบริการซึ่งเป็นค่าจริง ๆ ที่เก็บรวบรวมจากบริษัทไทยไดมารูมีแบบของการกระจาย เป็นเอ็กซ์โพเน็นเชียลฟังก์ชั่นชัดเจนกว่า



———ความถี่จริงได้จากการสำรวจ

- - - - -ความถี่คำนวณตามเอ็กซ์โพเน็นเชียลฟังก์ชั่น

รูปที่ 7 แสดงการเปรียบเทียบกันระหว่างค่าความถี่จริงกับค่าความถี่ซึ่งคำนวณจากฟังก์ชั่นของเวลาที่ใช้ในการให้บริการ ในระบบคิวที่แผนกซูเปอร์มาร์เก็ต บริษัทไทยไดมารู

ตารางที่ 13

แสดงจำนวนผู้ใดรับบริการเสร็จสิ้นภายในช่วงเวลาต่าง ๆ ในระบบคิวที่แผนกซูเปอร์มาร์เก็ตบริษัท ไทยไดมารู-

คิวที่ I

ช่วงเวลาเป็นนาที ที่ (t)	ศุกร์ที่ 1 มิถุนายน 2516								เสาร์ที่ 2 มิถุนายน 2516.							
	$10\frac{}{}11$	$11\frac{}{}12$	$12\frac{}{}13$	$13\frac{}{}14$	$14\frac{}{}15$	$15\frac{}{}16$	$16\frac{}{}17$	$17\frac{}{}18$	$10\frac{}{}11$	$11\frac{}{}12$	$12\frac{}{}13$	$13\frac{}{}14$	$14\frac{}{}15$	$15\frac{}{}16$	$16\frac{}{}17$	$17\frac{}{}18$
$0 \leq t \leq 5$	2	5	4	7	6	2	2	4	2	5	4	9	9	8	7	7
$6 \leq t \leq 10$	3	4	4	4	4	10	3	7	2	4	7	4	9	11	7	12
$11 \leq t \leq 15$	-	5	4	3	3	8	-	4	2	3	2	10	7	14	10	9
$16 \leq t \leq 20$	1	2	5	6	8	4	1	-	3	5	2	5	3	6	9	8
$21 \leq t \leq 25$	3	4	4	3	6	3	8	6	3	6	3	6	7	11	11	5
$26 \leq t \leq 30$	3	3	7	7	8	7	3	4	5	5	7	6	4	9	8	3
$31 \leq t \leq 35$	3	5	2	6	6	3	3	3	2	6	5	9	6	8	11	4
$36 \leq t \leq 40$	4	4	8	8	7	2	3	8	2	5	9	9	6	8	3	9
$41 \leq t \leq 45$	5	4	4	3	6	2	3	4	2	4	10	9	4	11	5	4
$46 \leq t \leq 50$	2	1	4	5	6	1	-	10	1	6	12	8	3	6	6	8
$51 \leq t \leq 55$	4	1	3	7	4	6	2	7	6	2	9	10	5	8	12	12
$56 \leq t \leq 60$	5	3	6	5	3	-	5	9	5	4	6	10	8	6	11	5

ตารางที่ 14

แสดงจำนวนผู้ได้รับบริการเสร็จสิ้นภายในช่วงเวลาต่าง ๆ ในแผนกซูเปอร์มาร์เก็ตบริษัท ไทยไดมารู

คิวที่ II

ช่วงเวลาเป็นนาทีที่ (t)	ศุกร์ที่ 1 มิถุนายน 2516								เสาร์ที่ 2 มิถุนายน 2516							
	$10\frac{-}{11}$	$11\frac{-}{12}$	$12\frac{-}{13}$	$13\frac{-}{14}$	$14\frac{-}{15}$	$15\frac{-}{16}$	$16\frac{-}{17}$	$17\frac{-}{18}$	$10\frac{-}{11}$	$11\frac{-}{12}$	$12\frac{-}{13}$	$13\frac{-}{14}$	$14\frac{-}{15}$	$15\frac{-}{16}$	$16\frac{-}{17}$	$17\frac{-}{18}$
$0 \leq t \leq 5$	-	1	2	8	3	2	3	7	2	7	9	11	7	9	9	9
$6 \leq t \leq 10$	5	2	3	4	-	4	4	3	1	5	8	9	10	7	9	6
$11 \leq t \leq 15$	-	4	3	3	2	3	5	5	7	6	4	11	10	6	8	9
$16 \leq t \leq 20$	3	1	3	3	4	1	5	6	6	9	8	10	10	8	3	6
$21 \leq t \leq 25$	1	-	2	4	5	4	2	5	2	5	6	11	9	8	3	9
$26 \leq t \leq 30$	5	4	1	6	-	4	6	3	2	2	6	13	6	4	7	6
$31 \leq t \leq 35$	3	3	2	6	1	3	3	8	4	6	4	11	10	9	5	5
$36 \leq t \leq 40$	2	2	5	4	3	2	3	3	6	4	6	10	9	3	11	7
$41 \leq t \leq 45$	4	2	7	2	2	1	2	4	2	9	5	6	8	8	5	5
$46 \leq t \leq 50$	1	2	7	6	5	3	4	5	4	6	7	11	9	9	8	8
$51 \leq t \leq 55$	3	1	3	5	1	4	2	5	6	4	10	10	9	9	7	8
$56 \leq t \leq 60$	-	1	3	2	3	3	5	4	2	6	7	14	7	7	5	5

ตารางที่ 15

แสดงจำนวนผู้ได้รับบริการเสร็จสิ้นภายในช่วงเวลาต่าง ๆ ในระบบคิวที่แผนกซูเปอร์มาร์เก็ตบริษัท ไทยไดมารู

คิวที่ III

ช่วงเวลานาทีที่ (t)	ศุกร์ที่ 1 มิถุนายน 2516								เสาร์ที่ 2 มิถุนายน 2516							
	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18
0 ≤ t ≤ 5	1	2	3	4	4	3	3	6	5	13	13	16	13	7	10	10
6 ≤ t ≤ 10	1	2	2	5	4	5	3	3	3	12	13	10	10	6	13	16
11 ≤ t ≤ 15	2	1	3	2	1	2	4	4	8	6	11	13	15	9	11	9
16 ≤ t ≤ 20	3	-	4	3	1	4	5	4	10	7	14	9	7	9	7	14
21 ≤ t ≤ 25	3	1	1	2	2	4	5	2	4	9	14	16	11	3	15	10
26 ≤ t ≤ 30	2	3	1	2	1	4	8	2	11	11	15	8	14	6	16	12
31 ≤ t ≤ 35	3	2	3	-	3	2	3	3	6	12	11	6	13	7	12	9
36 ≤ t ≤ 40	-	3	5	3	3	3	4	5	9	17	14	7	9	9	17	7
41 ≤ t ≤ 45	4	2	4	6	4	-	2	2	9	12	19	8	8	23	15	-
46 ≤ t ≤ 50	4	3	2	5	-	1	3	5	11	12	12	12	14	12	11	-
51 ≤ t ≤ 55	4	3	1	2	4	6	5	3	10	10	16	10	13	11	12	-
56 ≤ t ≤ 60	2	3	3	5	6	4	7	4	10	17	16	10	5	6	17	-

ตารางที่ 16

แสดงจำนวนรวมของผู้ได้รับบริการเสร็จสิ้นภายในช่วงเวลาต่าง ๆ ที่แผนกซูเปอร์มาร์เก็ตบริษัท ไทยไดมารู

ช่วงเวลาเป็นนาที (t)	ศุกร์ที่ 1 มิถุนายน 2516								เสาร์ที่ 2 มิถุนายน 2516.							
	$10\frac{}{}11$	$11\frac{}{}12$	$12\frac{}{}13$	$13\frac{}{}14$	$14\frac{}{}15$	$15\frac{}{}16$	$16\frac{}{}17$	$17\frac{}{}18$	$10\frac{}{}11$	$11\frac{}{}12$	$12\frac{}{}13$	$13\frac{}{}14$	$14\frac{}{}15$	$15\frac{}{}16$	$16\frac{}{}17$	$17\frac{}{}18$
$0 \le t \le 5$	3	8	9	19	13	7	8	17	9	25	26	36	29	24	26	26
$6 \le t \le 10$	9	8	9	13	12	19	10	13	6	21	28	23	29	24	29	34
$11 \le t \le 15$	2	10	10	8	6	13	9	13	17	15	17	34	32	29	29	27
$16 \le t \le 20$	7	3	12	12	13	9	11	10	19	21	24	24	20	23	19	28
$21 \le t \le 25$	7	6	7	9	13	11	15	13	9	20	23	33	27	22	29	24
$26 \le t \le 30$	10	10	9	15	9	15	17	9	18	18	28	27	24	19	31	21
$31 \le t \le 35$	9	10	7	12	10	8	9	14	12	24	20	26	29	24	28	18
$36 \le t \le 40$	6	9	18	15	13	7	10	16	17	26	29	26	24	20	31	23
$41 \le t \le 45$	13	8	15	11	12	3	7	10	13	25	34	23	20	42	25	9
$46 \le t \le 50$	7	6	13	16	11	5	7	20	16	24	31	31	26	27	25	16
$51 \le t \le 55$	11	5	7	14	9	16	9	15	22	16	35	30	22	28	31	20
$56 \le t \le 60$	7	7	12	12	12	7	17	17	17	27	29	34	23	19	33	10

4.3 เวลาที่ผู้มาใช้บริการรออยู่ในคิว (Waiting time)

การสำรวจระบบคิวที่แผนกซูเปอร์มาร์เก็ตทั้งสองแห่ง ได้เก็บรวบรวมข้อมูลซึ่งแสดงเวลาที่ผู้มาซื้อของแต่ละคนใช้เวลารออยู่ในแถวตามช่วงเวลาต่าง ๆ ในวันเปิดร้านขายสินค้า การบริการในที่ดังกล่าวถือหลัก "ผู้มาก่อน ได้รับการบริการก่อน" ตามหลักที่ว่าด้วยทฤษฎีคิวนั้น เวลาที่ลูกค้าต้องรออยู่ในแถวเพื่อรับการบริการนั้นจะมีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบเอ็กซ์โพเน็นเชียล และเพื่อพิจารณาว่าตัวเลขที่ได้จากการสำรวจจะมีการแจกแจงดังกล่าวหรือไม่ อาจใช้วิธีการทดสอบตามวิธีของ Kolmogorov Smirnov ตามที่แสดงในตารางที่ 20 และ 22.

ตารางที่ 17

แสดงความถี่จริงกับความถี่ที่คำนวณตามเอ็กซ์โพเน็นเชียลฟังก์ชั่นของเวลาที่รอรับการบริการในระบบคิวที่ซูเปอร์มาร์เก็ต บริษัทเซ็นทรัล ในวันที่มีผู้มาใช้บริการในระดับที่ถือเป็นปกติได้ ระหว่างช่วงเวลาที่มีการคับคั่ง

ช่วงเวลาเป็นวินาที (t)	ความถี่จริงที่ได้จากการสำรวจ(O)	ค่าความน่าจะเป็นตามเอ็กซ์โพเน็นเชียลฟังก์ชัน (P)	ความถี่ที่คำนวณตาม P (E)
$0 \leq t \leq 10$	218	0.4621	204.7103
$11 \leq t \leq 20$	105	0.2201	97.5043
$21 \leq t \leq 30$	53	0.1173	51.9639
$31 \leq t \leq 40$	29	0.0617	27.3331
$41 \leq t \leq 50$	21	0.0328	14.5304
$51 \leq t \leq 60$	7	0.0179	7.9297
$61 \leq t \leq 70$	7	0.0094	4.1642
$71 \leq t \leq 80$	2	0.0050	2.1150
$81 \leq t \leq 90$	0	0.0027	1.6361
$91 \leq t \leq 100$	1	0.0014	0.6202
$t \geq 100$	0	0	0

ตารางที่ 18

แสดงการทดสอบโดยใช้ Kolmogorov - Smirnov test เพื่อดูว่าเวลาที่รอรับการบริการที่ซูเปอร์มาร์เก็ต บริษัทเซ็นทรัล มีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเน็นเชียลหรือไม่

(ระหว่าง 13.30-15.00 น. : ช่วงที่มีการคับคั่ง)

ช่วงเวลาเป็นวินาที (t)	ความถี่จริงจากการสำรวจ	ความถี่จริงสะสม	ความถี่สัมพัทธ์ $S_n(t)$	ความถี่ตามเอ็กซ์โพเน็นเชียลสะสม $F(t)$	$F(t)-S_n(t)$	$\lvert F(t)-S_n(t)\rvert$
$0 \le t \le 10$	218	218	0.49209	0.4621	-0.300	0.300
$11 \le t \le 20$	105	323	0.72911	0.6822	-0.0469	0.0469
$21 \le t \le 30$	53	376	0.84875	0.7995	-0.0492	0.0492
$31 \le t \le 40$	29	405	0.91422	0.8612	-0.0530	0.0530
$41 \le t \le 50$	21	426	0.96162	0.8940	-0.0676	0.0676
$51 \le t \le 60$	7	433	0.97742	0.9119	-0.0655	0.0655
$61 \le t \le 70$	7	440	0.99322	0.9213	-0.0719	*0.0719 ค่าสูงสุด
$71 \le t \le 80$	2	442	0.99774	0.9263	-0.0714	0.0174
$81 \le t \le 90$	0	442	0.99774	0.9290	-0.0687	0.0687
$91 \le t \le 100$	1	443	1	0.9304	-0.0696	0.0696
$t \ge 100$	0	443	1	0.9304	-0.0696	0.0696

ค่า $\lvert F(t) - S_n(t) \rvert$ ที่สูงสุดจากที่คำนวณได้ = 0.071

ค่าจากตาราง : $D_{.01} = 0.085$; $D_{.05} = 0.071$

ตารางที่ 19

แสดงความถี่จริง และความถี่ซึ่งคำนวณตามเอ็กซ์โพเน็นเชียลฟังก์ชั่น (Theoretical frequency) ของเวลาที่ลูกค้ารออยู่ในคิวเพื่อรับการบริการ ในแผนกซูเปอร์มาร์เก็ต บริษัท ไทยไดมารู

ระหว่างเวลาที่มีการคับคั่ง (12.30 - 14.30 น)

ช่วงเวลาเป็นวินาที (t)	ความถี่จริงที่ได้จากการสำรวจ (O)	ความน่าจะเป็นตามเอ็กซ์โพเน็นเชียลฟังก์ชัน(P)	ความถี่คำนวณตาม P
$0 \leq t \leq 10$	253	0.5462	258.7988
$11 \leq t \leq 20$	117	0.2150	101.9100
$21 \leq t \leq 30$	57	0.0966	45.7884
$31 \leq t \leq 40$	26	0.04341	20.57634
$41 \leq t \leq 50$	9	0.019506	9.245844
$51 \leq t \leq 60$	9	0.008853	4.196322
$61 \leq t \leq 70$	3	0.003581	1.967394
$t > 70$	0	-	-

ตารางที่ 20

แสดงการทดสอบโดยใช้ Kolmogorov Smirnov test เพื่อดูว่าเวลาที่รอรับการบริการที่บริษัทไทยไดมารู มีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเน็นเชียลหรือไม่

ช่วงเวลาเป็นวินาที (t)	ความถี่จริง (O)	ความถี่จริงสะสม (C)	ความถี่จริงสัมพัทธ์ $S_n(t)$	ความถี่ตามเอ็กซ์โพเน็นเชียลสะสม $F(t)$	$F(t) - S_n(t)$	$\lvert F(t) - S_n(t) \rvert$
$0 \leq t \leq 10$	253	253	0.5338	0.5462	0.0124	0.0124
$11 \leq t \leq 20$	117	370	0.7851	0.7612	-0.0239	0.0239
$21 \leq t \leq 30$	57	427	0.9008	0.8578	-0.0430	0.0430
$31 \leq t \leq 40$	26	453	0.9556	0.9012	-0.0544	0.0544
$41 \leq t \leq 50$	9	462	0.9747	0.9207	-0.0540	0.0540
$51 \leq t \leq 60$	9	471	0.9937	0.9295	-0.0642	0.0642
$61 \leq t \leq 70$	3	474	1	0.9331	-0.0669	0.0669 * ค่าสูงสุด
$t > 70$	0	474	1	0.9331	-0.0669	0.0669

ค่าสูงสุดของ $\lvert F(t) - S_n(t) \rvert$ ที่คำนวณได้ = 0.0669

ค่าจากตาราง

$D_{.01} = 0.085$

$D_{.05} = 0.071$

ผลจากการทดสอบ สรุปได้ดังนี้

สมมติฐาน (H_0) : เวลาที่ลูกค้าใช้ในการรอรับการบริการมีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเน็นเชียล

	ข้อมูลจากซูเปอร์มาร์เก็ต	
	บริษัท เซ็นทรัล	บริษัท ไทยไดมารู
(1) ค่า D ที่คำนวณได้ (D')	0.071	0.0669
(2) ค่า D จากตาราง ณ.		
-ระดับความเชื่อมั่น 1%	0.085	0.085
ค่า D จากตาราง ณ.		
-ระดับความเชื่อมั่น 5%	0.071	0.071
(3) ผลการเปรียบเทียบค่า D' และ D		
ที่ 1%	$0.071 < 0.085 \therefore$ ยอมรับ H_0	$0.669 < 0.085 \therefore$ ยอมรับ H_0
ที่ 5%	$0.071 = 0.071 \therefore$ ยอมรับ H_0	$0.669 < 0.071 \therefore$ ยอมรับ H_0