## บทที่ 4

## การสร้างแบบจำลอง การจำลองผล และการทดสอบแบบจำลอง

การจำลองผลเหมาะที่จะใช้ในการหาคำตอบของระบบที่มีความสลับซับซ้อนมาก ต้องใช้เวลานาน และไม่สะดวกในการหาคำตอบ หรือต้องสิ้นเปลืองค่าใช้จ่ายจำนวนมาก ในการวิจัยนี้จึงใช้ Mini Computer ช่วยในการจำลองผลของการให้บริการในรอบเวลา 4200 นาที ทั้งนี้จะได้ทดสอบความถูกต้องของแบบจำลองโดยการตรวจสอบผลลัพธ์บางค่ากับข้อมูลจริงในช่วงเวลาที่เท่ากัน นอกจากนั้นจะตรวจสอบด้วยสมการของแบบจำลองแถวคอย

ในการจำลองผลของระบบแถวคอยมี input ที่สำคัญซึ่งต้องใช้ตลอดเวลาของการจำลองผล คือ เวลาที่หน่วยเข้ารับบริการมาถึงระบบและระยะเวลาที่ใช้ในการบริการ ดังนั้นเพื่อความสะดวกในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วย Computer Program จะใช้โปรแกรมย่อยช่วยในการสร้าง (Generate) ค่า input ทั้งสองนี้

1. <u>การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเวลาที่เครื่องบินเข้ามาถึงระบบ</u>

โดยทั่ว ๆ ไปในการจำลองผลของแถวคอยมักจะพิจารณารูปแบบของการเข้ารับบริการ (Arrival Pattern) ในเทอมของช่วงเวลาที่เครื่องบินแต่ละเครื่องเข้ามาห่างกัน (Inter arrival time) จากการวิเคราะห์ข้อมูลทราบว่าอัตราการเข้ารับบริการของท่าอากาศยาน ฯ มีการแจกแจงแบบปัวซอง หรือกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่า ช่วงเวลาที่ระบบเข้ามาถึงแถวคอยห่างกันแต่ละเครื่องมีการแจกแจงความถี่แบบเอ็กซ์โพเนนเชียล ซึ่งมีรูปแบบของฟังค์ชั่นดังนี้

$$f(t) \quad = \quad \lambda e^{-\lambda t} \qquad t \geq 0$$

และรูปแบบฟังค์ชั่นของการแจกแจงความถี่สะสมเป็น

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad 0 \leq F(t) \leq 1$$

เมื่อแทนค่าสมการด้วยค่า $\log_e$ จะได้

$$\lambda t = -\log_e \{1 - F(t)\}$$

โดยที่ค่า $F(t)$ มีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1

ถ้ากำหนดให้ $R_i$ เป็นตัวเลขสุ่มใด ๆ (Random number) ซึ่ง

$$R_i = 1 - F(t) \qquad 0 \leq R_i \leq 1$$

$$t_i = -\frac{1}{\lambda} \log_e R_i \qquad (4.1)$$

ค่า $t_i$ ที่ได้จะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีรูปแบบของการแจกแจงความถี่แบบเอ็กซ์โพ-เนนเชียล

ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของช่วงเวลาที่เครื่องบินเข้ามาห่างกันแต่ละเครื่องจึงใช้สมการ (4.1) ซึ่งเขียนเป็น Computer Program ภาษา BASIC ได้ว่า

```
T = (-1/L) * LOG(RND(1))
```

เมื่อ T เป็นเวลา

L เป็นอัตราเฉลี่ยของการเข้ารับบริการ

2. <u>การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเวลาที่ใช้บริการ</u>

เวลาที่หอบังคับการบินใช้ในการบริการนำเครื่องบินลงแต่ละเครื่องมีการแจกแจงความถี่แบบปกติ ซึ่งมีฟังค์ชั่นของความน่าจะเป็นว่า

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

เนื่องจากการแจกแจงความถี่แบบ Continuous uniform distribution มีค่าฟังค์ชั่นว่า

$$f(x) = \frac{1}{b - a} \quad , \quad a < x < b$$

เมื่อ $a = 0$ และ $b = 1$

ค่าฟังค์ชั่นของการแจกแจงความถี่สะสมจะได้

$$f(x) = x \quad , \quad 0 < x < 1$$

$$x = R_i$$

ดังนั้นค่าเฉลี่ยของการแจกแจงความถี่มีค่า

$$\mu = \frac{a + b}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

และ

$$\sigma^2 = \frac{(b - a)^2}{12}$$

$$= \frac{1}{12}$$

เมื่อใช้ทฤษฎีทางสถิติเกี่ยวกับ Central Limit Theorem จะได้ว่า เมื่อมีการแปรผันของตัวแปรเชิงสุ่ม n ตัว ตัวแปรเชิงสุ่มเหล่านั้นจะถูกประมาณว่ามีการแจกแจงความถี่แบบปกติ[1] (Approximately Normal Distribution) ด้วยค่าเฉลี่ย n/2 และค่าเบี่ยงเบนมาตราฐาน n/12 ค่าตัวแปรเชิงสุ่มที่มีรูปแบบการแจกแจงความถี่แบบปกติจะได้จากสมการ

$$x = \frac{\sigma}{\sqrt{n/12}} \Sigma R_i + (\mu - \frac{n}{2} \frac{\sigma}{\sqrt{n/12}})$$

---

[1] Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman, op.cit., P.450.

ในทางปฏิบัติเพื่อหาค่าตัวแปรเชิงสุ่ม x นิยมกำหนดให้ n มีค่าเท่ากับ 12 จึงจัดรูปสมการใหม่ได้ว่า

$$x = \sigma \left(\sum_{i=1}^{12} R_i - 6.0\right) + \mu \qquad (4.2)$$

ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเวลาที่ใช้ในการนำเครื่องบินลงสู่สนาม จึงใช้สมการ 4.2 ซึ่งเขียนเป็น Computer Program ภาษา BASIC ได้ดังนี้

```
        K  =  0
FOR     I  =  1 TO 12
        K  =  K + RND(2)
  NEXTI
        X  =  D * (K - 6.0) + M
```



เมื่อ X เป็นค่าตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงความถี่แบบปกติ

D = ค่าเบี่ยงเบนมาตราฐาน

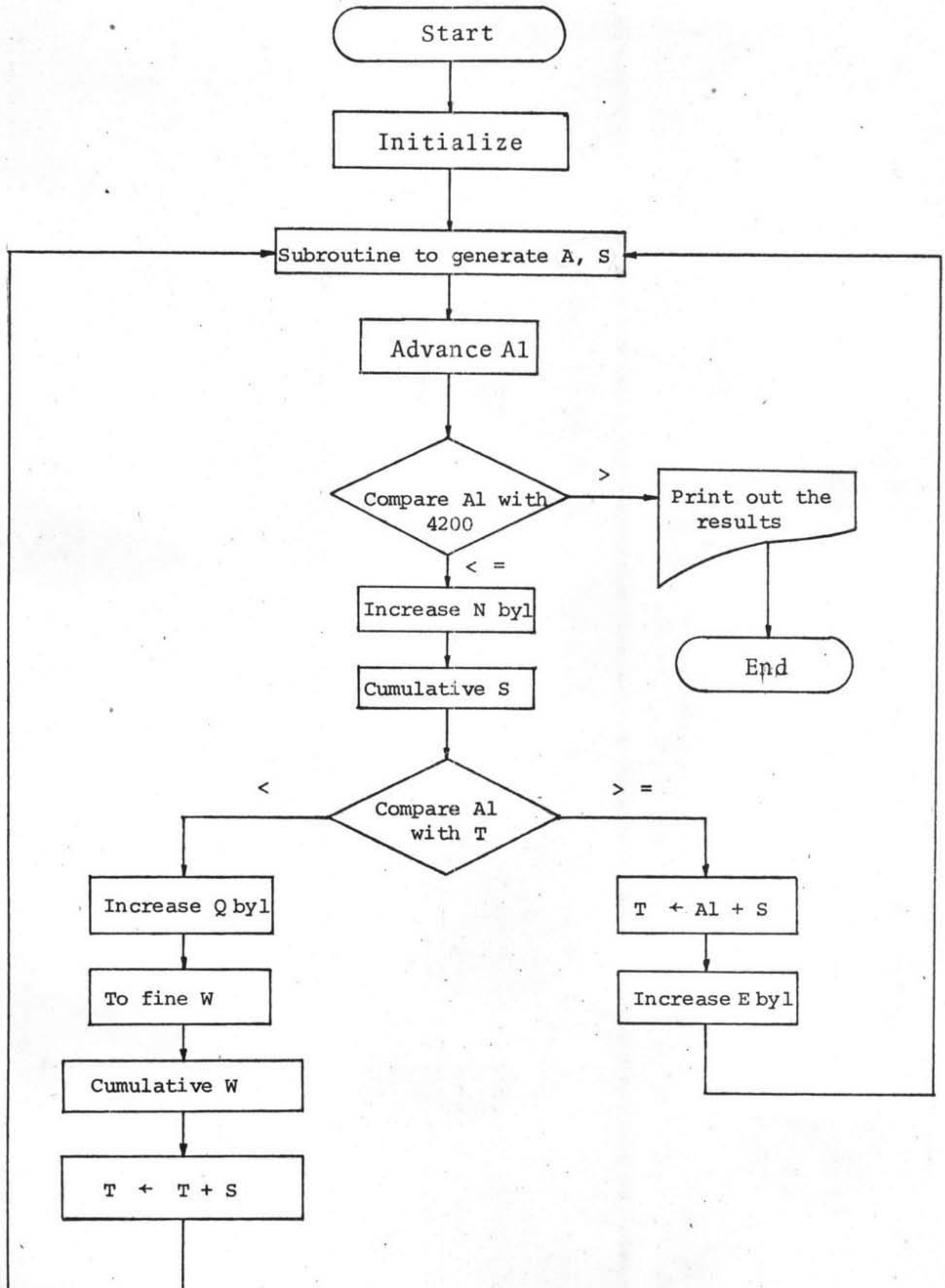
M = ค่าเฉลี่ยของระบบ

K = ผลรวมของตัวแปรเชิงสุ่ม 12 ตัว

3. <u>การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบแถวคอยเครื่องบิน ณ ท่าอากาศยานกรุงเทพ ฯ</u>

เมื่อได้แบบจำลองของ input ที่สำคัญทั้ง 2 ส่วนแล้วต่อไปเป็นการสร้างแบบจำลองของระบบแถวคอยเครื่องบิน ณ ท่าอากาศยานกรุงเทพ ฯ ในปัจจุบัน คือ ให้บริการนำเครื่องบินลงสู่สนามเพียง 1 ทางวิ่ง เพื่อความสะดวกในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วย Computer program จึงสร้างผังงาน (flow chart) ของระบบเสียก่อน โดยสรุปกรรมวิธีของการให้บริการได้ดังนี้

<u>รูปที่ 12</u> ผังงานของการให้บริการ 1 ทางวิ่ง


Start
Initialize
Subroutine to generate A, S
Advance A1
Compare A1 with 4200
>
Print out the results
End
< =
Increase N by1
Cumulative S
Compare A1 with T
<
> =
Increase Q by1
To fine W
Cumulative W
T ← T + S
T ← A1 + S
Increase E by1

ท่าอากาศยาน ฯ เปิดบริการเวลา 0000 เครื่องบินลำแรกที่เข้ามาถึงท่าอากาศยาน ฯ จะนำเครื่องบินลงได้ทันที เพราะทางวิ่งว่าง ส่วนเครื่องบินลำถัด ๆ ไปหากเข้ามาถึงท่าอากาศยาน ฯ ในเวลาที่ทางวิ่งว่างจะนำเครื่องบินลงได้ทันที แต่ถ้าเข้ามาถึงในขณะที่เครื่องบินลำที่เข้ามาถึงก่อนยังได้รับบริการนำลงไม่เรียบร้อย เครื่องบินลำที่เข้ามาใหม่จะต้องเสียเวลารอคอยจนกว่าเครื่องบินเหล่านั้นจะได้รับบริการนำลงจนเสร็จสิ้น

ระบบของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้จะมีองค์ประกอบของตัวแปรดังนี้

A = ช่วงเวลาที่เครื่องบินเข้ามาถึงท่าอากาศยานห่างกันแต่ละเครื่อง

A1 = เวลาที่เครื่องบินลำล่าสุดเข้ามาถึงระบบ

S = เวลาที่ใช้ในการนำเครื่องบินลงแต่ละเครื่อง

S1 = เวลาที่ใช้ในการบริการทั้งสิ้น

N = จำนวนเครื่องบินทั้งหมดที่เข้ามาใช้บริการ

E = จำนวนเครื่องบินที่สามารถนำเครื่องบินลงสู่สนามได้ทันที

Q = จำนวนเครื่องบินที่เข้ามาถึงท่าอากาศยาน ฯ แล้วต้องบินรอคอย

W = เวลาที่เครื่องบินแต่ละเครื่องใช้ในการบินรอคอย

W1 = ผลรวมของเวลาที่เครื่องบินทั้งหมดใช้ในการบินรอคอย

T = เวลาที่สนามบินพร้อมจะให้บริการนำลง

ดังนั้นหาก $A1_i > T_i$ เครื่องบินจะสามารถนำลงได้ทันที แต่ถ้า $A1_i < T_i$ เครื่องบินจะต้องคอยด้วยเวลา $T_i - A1_i$ ขั้นตอนของการจำลองผลดังกล่าวแสดงตามผังงานดังรูปที่ 12

## 4. <u>ผลลัพธ์การจำลองผล</u>

โดยใช้รอบของการจำลองผลเทียบกับเวลาที่ให้บริการ 4200 นาที ได้ทำการจำลองผล 20 รอบ ได้ผลลัพธ์แสดงตามตารางที่ 12

ตารางที่ 12 แสดงผลลัพธ์จากการจำลองผลของระบบปัจจุบัน

| ครั้งที่ | จำนวนเครื่องบินที่เข้ารับบริการทั้งสิ้น | จำนวนเครื่องบินที่สามารถนำเครื่องลงได้ทันที | จำนวนเครื่องบินที่ต้องบินรอคอย | อัตราเฉลี่ยของการเข้ารับบริการต่อชั่วโมง | เวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการบริการนำลง | ผลรวมของเวลาทั้งหมดที่ใช้ในการบินรอคอย | เวลาเฉลี่ยของเครื่องบินที่ใช้ในแถวคอย | ความน่าจะเป็นที่เครื่องบินสามารถนำลงได้ทันที |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 517 | 163 | 354 | 7.39 | 5.77 | 3092.92 | 5.98 | 0.32 |
| 2 | 528 | 134 | 394 | 7.54 | 5.87 | 4440.51 | 8.41 | 0.25 |
| 3 | 520 | 167 | 353 | 7.43 | 5.54 | 3228.38 | 6.21 | 0.32 |
| 4 | 530 | 139 | 391 | 7.57 | 5.77 | 4236.20 | 7.99 | 0.26 |
| 5 | 524 | 141 | 383 | 7.49 | 5.69 | 4934.68 | 9.42 | 0.27 |
| 6 | 517 | 154 | 363 | 7.39 | 5.61 | 3180.56 | 6.15 | 0.30 |
| 7 | 513 | 151 | 362 | 7.33 | 5.66 | 4309.99 | 8.40 | 0.29 |
| 8 | 520 | 154 | 366 | 7.43 | 5.70 | 3846.19 | 7.40 | 0.30 |
| 9 | 518 | 152 | 366 | 7.40 | 5.75 | 3250.75 | 6.28 | 0.29 |
| 10 | 530 | 142 | 388 | 7.57 | 5.59 | 3667.27 | 6.92 | 0.27 |
| 11 | 519 | 164 | 355 | 7.41 | 5.57 | 3583.65 | 6.90 | 0.32 |
| 12 | 513 | 156 | 357 | 7.33 | 5.76 | 3750.51 | 7.31 | 0.30 |
| 13 | 525 | 154 | 371 | 7.50 | 5.61 | 3591.76 | 6.84 | 0.29 |
| 14 | 516 | 168 | 348 | 7.37 | 5.59 | 3494.15 | 6.77 | 0.33 |
| 15 | 521 | 162 | 359 | 7.44 | 5.60 | 3719.62 | 7.14 | 0.31 |
| 16 | 523 | 161 | 362 | 7.47 | 5.73 | 3169.53 | 6.06 | 0.31 |
| 17 | 526 | 141 | 385 | 7.51 | 5.78 | 3939.22 | 7.49 | 0.27 |
| 18 | 524 | 139 | 385 | 7.49 | 5.78 | 3353.75 | 6.40 | 0.27 |
| 19 | 520 | 155 | 365 | 7.43 | 5.90 | 4378.56 | 8.42 | 0.30 |
| 20 | 510 | 153 | 357 | 7.29 | 5.74 | 3923.62 | 7.69 | 0.30 |
| เฉลี่ย | 520.70 | 152.50 | 368.20 | 7.44 | 5.70 | 3754.59 | 7.21 | 0.29 |
| ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน | 5.45 | 9.91 | 13.86 | 0.08 | 0.10 | 489.76 | 0.93 | 0.02 |

<u>การทดสอบแบบจำลอง</u>

เพื่อให้มีความมั่นใจว่าแบบจำลองที่สร้างขึ้นมีความถูกต้องสามารถใช้จำลองผลแทนระบบจริงได้ จึงทำการทดสอบแบบจำลองโดยการนำผลลัพธ์จากการจำลองผลมาเปรียบเทียบกับผลที่เกิดขึ้นกับระบบจริง ๆ ผลการเปรียบเทียบแสดงดังตารางที่ 13

<u>ตารางที่ 13</u> แสดงการเปรียบเทียบผลลัพธ์ของการจำลองผลและผลจากการเก็บข้อมูล

| | การจำลองผล | เก็บข้อมูล | ความแตกต่าง คิดเป็นร้อยละ |
|---|---|---|---|
| จำนวนเครื่องบินที่เข้ารับบริการทั้งสิ้น | 521 | 521 | 0.0 |
| จำนวนเครื่องบินที่สามารถลงได้ทันที | 153 | 141 | + 8.51 |
| จำนวนเครื่องบินที่ต้องบินรอคอย | 368 | 380 | - 3.16 |
| อัตราเฉลี่ยของเครื่องบินที่เข้ารับบริการ | 7.44 | 7.44 | 0.0 |
| เวลาเฉลี่ยในการใช้บริการ | 5.70 | 5.68 | + 0.35 |
| ผลรวมของเวลาทั้งหมดที่ใช้ในการรอคอย | 3754.59 | 3950.5 | - 4.96 |
| เวลาเฉลี่ยของเครื่องบินทั้งหมดในแถวคอย | 7.21 | 7.58 | - 4.88 |
| ความน่าจะเป็นที่เครื่องบินสามารถลงได้ทันที | 0.29 | 0.27 | + 7.40 |

จากตารางที่ 13 จะเห็นว่าผลลัพธ์จากการจำลองผลกับผลลัพธ์จากข้อมูลแตกต่างกันไม่เกิน ± 10% ซึ่งนับว่าใกล้เคียงมาก และเพื่อให้แน่ใจยิ่งขึ้นจะทดสอบเวลาเฉลี่ยในแถวคอยจากการจำลองผลด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแถวคอยอีกครั้งหนึ่ง

$$\because \quad W_q = \frac{\rho^2 + \lambda^2\sigma^2}{2\lambda(1-\rho)}$$

เมื่อ $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$\because \quad \lambda = 0.124$ เครื่อง/นาที

$\mu = 0.176$ เครื่อง/นาที

$\sigma^2 = 3.828$

$\therefore \quad W_q = 7.6$ นาที

$\therefore$ จะเห็นได้ว่า ผลจากการจำลองผลมีค่าน้อยกว่าค่าตามทฤษฎีเพียงร้อยละ 5.13 เท่านั้น

สรุปได้ว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นสามารถใช้จำลองผลแทนระบบจริง ๆ ได้