# บทที่ 5

## สูตรสำหรับคำนวณความต้านทานของขั้วดินแบบแท่งยาว

มีวิธีหาสูตรสำหรับคำนวณความต้านทานของขั้วดินแบบแท่งยาวอยู่ 2 วิธี คือ Average Potential Method และวิธีของ Reinhold Rudenberg[2]

### 5.1 Average Potential Method

วิธีนี้คิดโดย Dr. G.W.O. Howe[8] มีวิธีการดังนี้คือ

สมมติมีความหนาแน่นของประจุสม่ำเสมอตลอดผิวหน้าของตัวนำ แล้วคำนวณค่าเฉลี่ยของศักดาไฟฟ้า ค่าคะแปซิเตนส์ (capacitance) โดยประมาณจะเท่ากับประจุทั้งหมด หารด้วยค่าเฉลี่ยของศักดาไฟฟ้า

โดยวิธีนี้ จะสามารถคำนวณความต้านทานของขั้วดินแบบแท่งยาวซึ่งฝังในดินลึก l และคิด image ด้วยได้เท่ากับ [8]

$$R = \frac{\rho}{2\pi l}\left(\ln\frac{4l}{r} - 1\right) \qquad (5)$$

เมื่อ $R$ = ความต้านทานของขั้วดินแบบแท่งยาว

$\rho$ = ความต้านทานจำเพาะของดิน

$l$ = ความยาวของขั้วดิน

$r$ = รัศมีของพื้นที่หน้าตัดของขั้วดิน

5.2 วิธีของ Reinhold Rudenberg

โดยการแบ่งขั้วดินแบบแท่งยาวออกเป็นทรงกลมเล็ก ๆ จะกล่าวถึงรายละเอียดต่อไป

5.2.1 ขั้วดินแบบทรงกลม

สมมติมีกระแส I ไหลเข้ามาในขั้วดินนี้ แผ่กระจายในดินตามแนวเส้นรัศมี ความหนาแน่นของกระแส (current density) : J ที่ระยะ y จากจุดศูนย์กลางของทรงกลมจะได้เท่ากับ

$$J = \frac{I}{4\pi y^2} \qquad (6)$$

ความเข้มของสนามไฟฟ้า (electric field strength) : E

$$E = \rho J = \frac{\rho I}{4\pi y^2} \qquad (7)$$

เมื่อ $\rho$ = ความต้านทานจำเพาะของดิน

ให้ $r$ = รัศมีของทรงกลม

∴ แรงดันไฟฟ้า : $V = \int_r^y E\,dy = \frac{\rho I}{4\pi} \int_r^y \frac{dy}{y^2}$

$$= \frac{\rho I}{4\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{y} \right) \qquad (8)$$

ความต่างศักดาไฟฟ้าของผิวของทรงกลมกับจุดที่อยู่ไกลมาก นั่นคือ จากสมการ (8) แทน $y = \infty$ จะได้เท่ากับ

$$V = \frac{\rho I}{4\pi r} \qquad (9)$$

อัตราส่วนของแรงดันไฟฟ้านี้กับกระแสทั้งหมด เรียกว่าความต้านทานของขั้วดิน : R เท่ากับ

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\rho}{4\pi r} \qquad (10)$$

จากสมการ (8) $V = \frac{\rho I}{4\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{y}\right)$ (8)

$$= \frac{\rho I}{4\pi r} - \frac{\rho I}{4\pi y}$$

$$= V_r - V_y$$

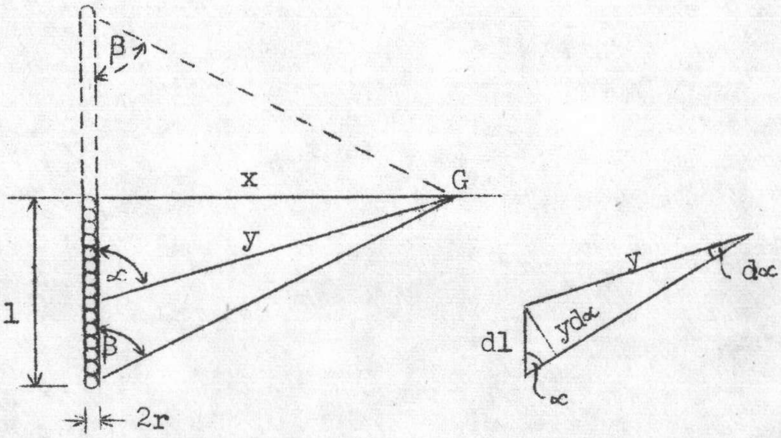
เมื่อ $V_r = \frac{\rho I}{4\pi r}$ (11)

= แรงดันไฟฟ้าที่ผิวของทรงกลม

และ $V_y = \frac{\rho I}{4\pi y}$ (12)

= แรงดันไฟฟ้าที่ระยะ y จากทรงกลม

5.2.2 ขั้วดินแบบแท่งยาว [2]




รูปที่ 17 ขั้วดินแบบแท่งยาวเมื่อถูกแบ่งเป็นรูปเกือบเป็นทรงกลมหลาย ๆ ลูก

เนื่องจากขั้วดินแบบแท่งยาวมีพื้นที่หน้าตัดเล็กมากเมื่อเทียบกับความยาว ดังนั้นจึงสามารถแบ่งขั้วดินแบบแท่งยาวที่ปักในดินลึก l (ดังรูปที่ 17) ออกเป็นรูปเกือบเป็นทรงกลมจำนวน n ลูก

∴ แต่ละลูกจะมี Mutual distance : dl เท่ากับ

$$dl = \frac{l}{n} \tag{13}$$

และแต่ละลูกจะนำกระแส $\frac{I}{n}$ สู่ดิน

y = ระยะจากลูกใดลูกหนึ่งไปที่จุด G ที่ผิวดิน

$\alpha$ = มุมระหว่าง y กับแนวแกนของขั้วดินแบบแท่งยาว

จากรูปเล็ก ๆ ได้

$$\sin\alpha = \frac{y\,d\alpha}{dl} \tag{14}$$

แรงดันไฟฟ้า dV ที่จุด G เนื่องจากทรงกลมลูกใดลูกหนึ่ง จะเท่ากับดังสมการ (12) แต่ด้วยกระแส $\frac{I}{n}$

$$dV = \frac{\rho \frac{I}{n}}{4\pi y} \tag{15}$$

แทน dl จากสมการ (13) ลงในสมการ (14) จะได้

$$y = \sin\alpha \frac{l}{n\,d\alpha}$$

แล้วแทน y ลงในสมการ (15) จะได้

$$dV = \frac{\rho I}{4\pi n} \cdot \frac{n\,d\alpha}{\sin\alpha\, l} = \frac{\rho I}{4\pi l} \cdot \frac{d\alpha}{\sin\alpha}$$

ถ้าแทนค่าจำกัดของมุม $\alpha$ ด้วย $\beta$

แรงดันไฟฟ้าที่พื้นระนาบตรงกลางของขั้วดินแบบแท่งยาวที่มีความยาว 2l ประกอบด้วยทรงกลม 2n ลูก (นั่นคือ รวมทั้ง Image บนดินด้วย) จะเท่ากับ

$$V = \frac{\rho I}{4\pi l}\int_{+\beta}^{-\beta} \frac{d\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\int \frac{d\alpha}{\sin\alpha} = \int \operatorname{cosec}\alpha \frac{(\operatorname{cosec}\alpha - \cot\alpha)}{(\operatorname{cosec}\alpha - \cot\alpha)} d\alpha$$

จะได้ $$\int \frac{d\alpha}{\sin\alpha} = \ln(\tan\frac{\alpha}{2}) + C$$

$$\int_{+\beta}^{-\beta} \frac{d\alpha}{\sin\alpha} = 2\int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sin\alpha}$$

$$= 2\left[\ln(\tan\frac{\pi}{4}) - \ln(\tan\frac{\beta}{2})\right]$$

$$= 2 \ln(\cot\frac{\beta}{2})$$

$$\therefore V = \frac{\rho I}{2\pi l}\ln(\cot\frac{\beta}{2}) \qquad (16)$$

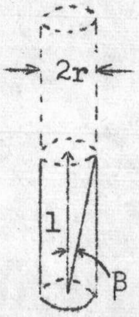
$$\cot\frac{\beta}{2} = \frac{1+\cos\beta}{\sin\beta} \qquad (17)$$

เมื่อให้จุด G เลื่อนมาอยู่ที่ผิวของขั้วดินแบบแท่งยาว จะได้

$V$ = แรงดันไฟฟ้าของขั้วดิน และ $\cos\beta \approx 1$

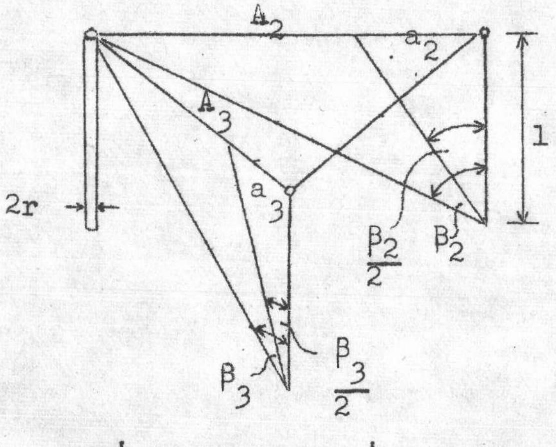
$$\cot\frac{\beta}{2} = \frac{2}{\frac{r}{l}} = \frac{2l}{r} \qquad (18)$$

$$\therefore R = \frac{V}{I} = \frac{\rho}{2\pi l}\ln\frac{2l}{r} \qquad (19)$$




รูปที่ 18 ขั้วดินแบบแท่งยาว

5.3 ขั้วดินแบบแท่งยาวหลายขั้วต่อขนานกัน




รูปที่ 19 ขั้วดินแบบแท่งยาวหลายขั้วต่อขนานกัน

ขั้วดินแบบแท่งยาวหลายขั้วต่อขนานกันดังรูปที่ 19 แรงดันไฟฟ้าที่ผิวดินของทุกๆ ขั้วจะเท่ากันตามสมการ (16) แรงดันไฟฟ้าของแต่ละขั้วจะเท่ากับผลบวกของแรงดันไฟฟ้าที่เกิดจากขั้วดินที่กำลังพิจารณาอยู่ กับของขั้วดินขั้วอื่น ๆ เช่น ขั้วดินขั้วที่ 1

$$V_1 = \frac{\rho}{2\pi l}\left[I_1 \ln(\cot \frac{\beta_1}{2}) + I_2 \ln(\cot \frac{\beta_2}{2}) + \ldots\ldots\right] \quad (20)$$

มุม β แทนมุมซึ่งประกอบด้วยแกนของขั้วดินอื่นๆ กับเส้นที่เชื่อมระหว่างจุดปลายล่างของขั้วดินอื่นๆ ไปยังจุดบนสุดของขั้วดินที่กำลังพิจารณา

เพื่อให้ง่ายขึ้น จะคำนวณโดยถือว่าความต้านทานจำเพาะของดินมีค่าสม่ำเสมอตลอด และความยาวของขั้วดินเท่ากันหมด โดยจะยังไม่คำนึงถึงค่าของกระแส

ค่า cotangent แรกในสมการ (20) หมายถึงขั้วดินที่กำลังพิจารณาอยู่ หาค่าได้ตามสมการ (18) ส่วน cotangent อันอื่น ๆ หมายถึงของขั้วดินขั้วอื่น ๆ สามารถหาค่าได้ตามรูปที่ 19 เท่ากับอัตราส่วนความยาวของขั้วดิน : l กับระยะห่าง : $a_n$ (ซึ่งถูกตัดโดยมุม $\frac{\beta}{2}$ บนระยะห่างระหว่างขั้วดิน : $A_n$ )

$$\left.\begin{aligned} \cot \frac{\beta_1}{2} &= \frac{l}{\frac{r}{2}} \\ \cot \frac{\beta_n}{2} &= \frac{l}{a_n} \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

ถ้าขั้วดินต่อถึงกันโดยสายที่ไม่มีความต้านทาน และอยู่ในตำแหน่งที่สมมาตรเมื่อเทียบกับขั้วอื่น ๆ จะได้

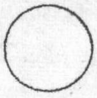
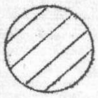
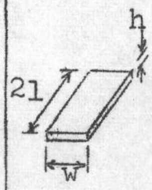
$$\left.\begin{aligned} V_1 &= V_2 = V_3 \ldots\ldots\ldots\ldots = V \\ I_1 &= I_2 = I_3 \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{I}{n} \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

แทนสมการ(21) และ (22) ลงในสมการ (20) จะได้แรงดันไฟฟ้าของขั้วดินแต่ละขั้วเท่ากับ

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{\rho}{2\pi l} \frac{I}{n} \cdot \ln\left(\frac{l}{\frac{r}{2}} \cdot \frac{l}{a_2} \cdot \frac{l}{a_3} \ldots\ldots\right) \\ \text{หรือ} &= \frac{\rho}{2\pi l} \frac{I}{n} \ln\left(\frac{2l}{r} \cdot \cot \frac{\beta_2}{2} \cdot \cot \frac{\beta_3}{2} \ldots\ldots\right) \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore R &= \frac{\rho}{2\pi l} \ln\left(\frac{l}{\frac{r}{2}} \cdot \frac{l}{a_2} \cdot \frac{l}{a_3} \ldots\ldots\right)^{\frac{1}{n}} \\ \text{หรือ} &= \frac{\rho}{2\pi l} \ln\left(\frac{2l}{r} \cdot \cot \frac{\beta_2}{2} \cdot \cot \frac{\beta_3}{2} \ldots\ldots\right)^{\frac{1}{n}} \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

ตารางที่ 2 สูตรสำหรับคำนวณความต้านทานของขั้วดินแบบต่าง ๆ รวมทั้งผลของ image ด้วย

| | | |
|---|---|---|
| | ขั้วดินแบบแท่งยาว [2,8]<br>ความยาว l รัศมี r | $R = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{2l}{r}$<br>หรือ $= \frac{\rho}{2\pi l} \left(\ln \frac{4l}{r} - 1\right)$ |
|  | ขั้วดินแบบแท่งยาวในแนวนอน[8]<br>ความยาว 2l รัศมี r<br>วางลึก $\frac{a}{2}$ | $R = \frac{\rho}{4\pi l} \left( \ln \frac{4l}{r} - 1 + \ln \frac{\sqrt{a^2 + 4l^2} + 2l}{a} + \frac{a}{2l} - \frac{\sqrt{a^2 + 4l^2}}{2l} \right)$ |
|  | ขั้วดินแบบลวดวงแหวน[8]<br>เส้นผ่านศูนย์กลางของวงแหวน D<br>เส้นผ่านศูนย์กลางของลวด 2r<br>ฝังลึก $\frac{a}{2}$ | $R = \frac{\rho}{2\pi^2 D} \left( \ln \frac{8D}{2r} + \ln \frac{4D}{a} \right)$ |
|  | ขั้วดินแบบแผ่นกลมในแนวนอน[8]<br>เส้นผ่านศูนย์กลาง D ฝังลึก $\frac{a}{2}$ | $R = \frac{\rho}{8 \frac{D}{2}} + \frac{\rho}{4 \pi a} \left( 1 - \frac{7}{12} \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2}{a^2} + \frac{33}{40} \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^4}{a^4} \cdots \right)$ |
| | ขั้วดินแบบแผ่นกลมในแนวตั้ง[8]<br>เส้นผ่านศูนย์กลาง D ฝังลึก $\frac{a}{2}$ | $R = \frac{\rho}{8 \frac{D}{2}} + \frac{\rho}{4\pi a} \left( 1 + \frac{7}{24} \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2}{a^2} + \frac{99}{320} \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^4}{a^4} \cdots \right)$ |
|  | ขั้วดินแบบเส้นยาว[8]<br>กว้าง w หนา h<br>ความยาว 2l | $R = \frac{\rho}{4\pi l} \left( \ln \frac{4l}{w} + \frac{w^2 - \pi wh}{2(w+h)^2} + \ln \frac{4l}{a} - 1 + \frac{a}{2l} - \frac{a^2}{16 l^2} + \frac{a^4}{512 l^4} \cdots\cdots \right)$ |

ที่มา Rudenberg, Reinhold. Grounding Principles and Practice-I. Electrical Engineering. January 1945[2]

Dwight, H.B. Calculation of Resistance to ground. Electrical Engineering. December 1936[8]

I16874446