บทที่ IV

ข้อสรุป และ ข้อเสนอแนะ

ในบทที่ 3 เราได้เสนอวิธีการหาความหนาแน่นของสถานะในระบบที่ไม่เป็นระเบียบ โดยใช้พฤติกรรมอะซิมป์โทติค สำหรับบทนี้จะสรุปผลที่ได้และประโยชน์จากการศึกษานี้ ทำให้ขยายการประมาณค่าต่อไปได้ โดยเฉพาะพลังงานปริเวณแถบหาง อนึ่ง ข้อเสนอแนะที่ปรับปรุงรวมทั้งข้อดีข้อเสียของแต่ละวิธี ดังจะกล่าวรายละเอียดไว้ในบทนี้.

IV.1 ข้อสรุปและเปรียบเทียบผลที่ได้

การศึกษาเพื่อหาความหนาแน่นของสถานะในระบบที่ไม่เป็นระเบียบ เราใช้วิธีหา 3 วิธีด้วยกันคือ.—

1) โดยวิธีกึ่งแบบฉบับ วิธีนี้เป็นแบบผสมระหว่างฟิสิกส์ดั้งเดิมกับควอนตัม บางทีเราเรียกว่าวิธีของโทมัส – เฟอร์มี หรือวิธีของเคน(Kane) วิธีดำเนินการ เราใช้ผลที่เกี่ยวข้องกับอิเลกตรอนอิสระในระบบที่เป็นระเบียบและการประมาณค่าของมวลยังผล ตามที่กล่าวแล้วในบทที่ 1 แต่เนื่องจากในระบบที่ไม่เป็นระเบียบ เราต้องคิดทุก ๆ รูปลักษณ์ทั้งหมดของระบบ โดยที่ตั้งสมมุติฐานว่า ศักย์ต้องเป็นฟังก์ชันที่แปรผันอย่างช้า ๆ ตามตำแหน่ง $\underline{r}$ แทนด้วย $V(\underline{r})$ และพลังงานจลย์ตามตำแหน่ง $\underline{r}$ มีค่าเท่ากับ $E-V(\underline{r})$ เมื่อ E คือพลังงานทั้งหมด ดังนั้นพลังงานจลย์ถูกรบกวนจากศักย์ฟลักซ์จูเอชัน (Fluctuation Potential) แต่เนื่องจากต้องคิดทุก ๆ รูปลักษณ์ของอสุทธิทั้งหมดของระบบ ดังสมการ(1.12) และมีเงื่อนไขว่า E มากกว่า $V(\underline{r})$ จึงจะหาค่าได้ และ F(V) คือฟังก์ชันแจกแจงของพลังงานศักย์ เราจึงนิยาม

ฟังก์ชันแจกแจงดังสมการ(1.14) และใช้เอกลักษณ์ของเดลตาฟังก์ชันในรูปของอนุกรมฟูเรียร์ กับวิธีของเฟสคงที่ สำหรับศักย์ที่ใช้เป็นศักย์คูลอมบ์แบบกำบัง เมื่อเรารู้ค่าของฟังก์ชันแจกแจงแล้ว (สมการ 1.23) ทำให้เราหาความหนาแน่นของสถานะได้ ตามสมการ(1.34) โดยพิจารณา

ก) ที่พลังงานสูง ๆ จะได้ความหนาแน่นของสถานะ คือ

$$N(E) = c_1\left(\frac{E}{\eta}\right)^{1/2} \qquad (4.1)$$

เมื่อ $c_1 = \dfrac{\Omega m^{*3/2}\sqrt{2\eta}}{\hbar^3 q^2}$

$$\eta = \frac{e^2}{\varepsilon_d}\sqrt{\frac{4q\rho}{\Lambda}}$$

ข) ที่พลังงานต่ำ ๆ โดยเฉพาะบริเวณหาง และใช้พฤติกรรมอะซิมป์โทติคในสมการ ความหนาแน่นของสถานะของระบบที่ไม่เป็นระเบียบจะเป็น

$$N(E) = c_2\left(\frac{|E|}{\eta}\right)^{-3/2}\exp\left(-\frac{E^2}{\eta^2}\right) \qquad (4.2)$$

เมื่อ $c_2 = \dfrac{m^{*3/2}\,\eta^{1/2}\,\Omega}{4q^2\hbar^3}$

สำหรับอีกสองวิธีคือ วิธีไม่รบกวน กับ วิธีรบกวนนั้น เราใช้วิธีการรวมเส้นทางที่ประยุกต์เข้ากับปัญหาระบบที่ไม่เป็นระเบียบ อนึ่ง การศึกษานี้เราใช้วิธีการรวมเส้นทางของฟายน์แมน จึงมีความจำเป็นที่ว่าจะหานิพจน์แบบฟายน์แมนตามที่บัญญัติได้อย่างไร และ วิธีการหารวมเส้นทางได้

อย่างไร ซึ่งได้กล่าวแล้วในบทที่ 2 ต่อไปวิธีดำเนินการ เริ่มจากการแนะนำพลังงานทั้งหมดของระบบ หรือฮามิลโทเนียน (สมการ 3.2) ตัวแพร่กระจายหรือกรีนฟังก์ชัน (สมการ 3.5) ซึ่งแทนการเคลื่อนที่ของอิเลกตรอนตัวหนึ่ง ในรูปลักษณ์ที่กำหนดให้ของตัวกระเจิง ที่เขียนในรูปของการรวมเส้นทางของฟายน์แมน และเรานิยามการแจกแจงความน่าจะเป็นดังสมการ (3.9) รวมทั้งใช้การพิสูจน์ของเอดวาร์ดส กับกัลเยว์ของค่าเฉลี่ยตัวแพร่กระจาย (3.10) ที่คิดทุก ๆ รูปลักษณ์ของระบบที่ไม่เป็นระเบียบ เมื่อใช้แบบจำลองเอดวาร์ดส ในลิมิตของศักย์ออนหรือ $v \to 0$ และความหนาแน่นสูง หรือ $\rho \to \infty$ ทำให้ศักย์กระเจิง ρv^2 หาค่าได้แน่นอน ดังนั้นตัวแพร่กระจายลดรูปเป็นนิพจน์ง่าย ๆ ดังสมการ (3.13) สำหรับศักย์ที่ใช้เป็นศักย์คูลอมบ์แบบกำบัง เมื่อเรารู้ค่าตัวแพร่กระจายนี้ ทำให้เราคำนวณหาความหนาแน่นของสถานะในระบบที่ไม่เป็นระเบียบได้ ค่านี้เองก่อให้เกิดความสนใจเกี่ยวกับคุณสมบัติทางกายภาพหลายประการ ของระบบที่ไม่เป็นระเบียบ

2) โดยวิธีไม่รบกวน

เมื่อได้ตัวแพร่กระจายลดรูปในสมการ (3.13) เราจะพิจารณาทางเดินในเอกซ์โปเนนต์ โดยวิธีการกระจายทางเดิน $\underline{r}(\sigma)$ รอบ $\underline{r}(\tau)$ จะได้ความเร็วของทางเดิน ซึ่งความหมายทางกายภาพก็คือ การเคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้นไปยังจุดปลายทาง ด้วยความเร็วสม่ำเสมอ เมื่อคำนวณหาตัวแพร่กระจายนี้ได้แล้ว แล้วนำไปแทนลงในสมการ (3.20) ก็จะได้ความหนาแน่นของสถานะ (สมการ 3.33) แล้วจึงพิจารณาเวลา $t \to 0$

พลังงาน $E \to \pm \infty$ และใช้พฤติกรรมอะซิมป์โทติค ผลที่ได้ก็ตรงกันกับสมการ (4.1) และสมการ (4.2)

3) วิธีรบกวน

เมื่อเราหาตัวแพร่กระจาย (สมการ 3.42) ได้แล้ว ก็ทำการกระจายคิวมูแลนท์ โดยคิดเพียงคิวมูแลนท์ที่หนึ่ง ผลที่ได้ก็คือ

$$\langle G(\underline{r}_2,\underline{r}_1,t)\rangle = G_o(\underline{r}_2,\underline{r}_1,t)\exp\left[\frac{i}{\hbar}\langle(S-S_o)\rangle_{S_o}+\cdots\right] \quad (4.3)$$

ความแตกต่างระหว่าง S กับ S_o ถือเป็นการรบกวน แล้วทำการกระจายคิวมูแลนท์เฉพาะทางเดินในเอกซ์โปเนนต์ โดยคิดเพียงสองเทอมแรกที่ไม่เป็นศูนย์ จากนั้นก็ทำการคำนวณหาค่าเฉลี่ยของ S ที่เป็นฟังก์ชันของทางเดิน ซึ่งต้องใช้ลักษณะฟังก์ชันช่วยคำนวณหา โดยตั้งแอกชันเดิมดังสมการ (3.54) ก็จะหาค่าเฉลี่ยตัวแพร่กระจายได้ (สมการ 3.64) เมื่อนำไปแทนลงในสมการ (3.20) ก็จะได้ความหนาแน่นของสถานะของระบบที่ไม่เป็นระเบียบสมการ (3.65) แล้วจึงทำการพิจารณาเวลา t มีค่าน้อย พลังงาน E มีค่ามาก

ก) ไม่คิดเทอมในเอกซ์โปเนนท์ที่อันดับเวลา t กำลังสองผลของการคำนวณความหนาแน่นของสถานะก็จะตรงกับสมการ (4.1)

ข) ถ้าคิดเทอมในเอกซ์โปเนนท์ที่อันดับเวลา t กำลังสอง การคำนวณนี้ใช้พฤติกรรมอะซิมป์โทติคด้วย ผลของการคำนวณความหนาแน่นของสถานะก็จะตรงกับสมการ (4.2) เช่นกัน

จากการศึกษาทั้งสามวิธี เราจะเห็นว่าในย่านพลังงานสูงและที่พลังงานต่ำทั้งสามวิธี จะให้ผลเหมือนกัน แต่ถ้าจะขยายการประมาณค่าออกไปอีกจะพบว่าวิธีกึ่งแบบฉบับ ทำได้ยากเพราะไม่ปรากฏชัดว่า จะขยายในทิศทางใดแต่วิธีไม่รบกวนก็มีปัญหาเช่นกัน เช่นถ้าเราขยายคิดถึงเทอมที่มีความเร่งดังสมการ (3.28) การคำนวณหาตัวแพร่กระจายนี้จะประสบปัญหายุ่งยาก เป็นเพราะว่าทางเดินของอนุภาคคดเคี้ยวมาก ดังนั้นค่าเฉลี่ยของความเร่งจะมีค่าเป็นอนันต์ดังได้กล่าวไว้ในหนังสือของฟายน์แมนและฮิบบ์ส วิธีที่จะขยายการประมาณค่าได้ดีก็คือ วิธีรบกวน แม้ว่านิพจน์ที่จะนำไปคำนวณนั้นเป็นเทอมที่ค่อนข้างยาวก็ตาม แต่ในทางปฏิบัติก็อาจคำนวณหาได้ โดยหาจากลักษณะของฟังก์ชัน(Characteristic Functional) ตามสมการ (3.52) สิ่งที่จะหาก็คือค่าเฉลี่ย $\langle \underline{r}(\tau).\underline{r}(6)\rangle_{s_o}$

IV.2 ข้อเสนอแนะ

ตามที่กล่าวแล้วในข้างต้น วิธีที่จะปรับปรุงขยายการคำนวณให้ดีขึ้นก็คือ วิธีรบกวน มีวิธีขยาย ดังต่อไปนี้คือ.-

ก) การคำนวณหาความหนาแน่นของสถานะจากสมการ(3.65) ที่เขียนอยู่ในรูป ดังนี้คือ

$$N(E) = \frac{\Omega}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt\left(\frac{m^*}{2\pi i\hbar t}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{\rho^{e^4}}{h^2\epsilon_d^2}\,\tau^{1/2}\, t\int_0^{\infty} dy\int_0^{t} dxy\right.$$
$$\left. A(t,x,y)^{-3/2}\exp(-\Lambda^2 y) + \frac{iE}{\hbar}\,t\right]$$

เมื่อ $A(t,x,y) = ax^2+bx+c$

ในที่นี้ $a = -\frac{i\hbar}{2m^*t}$, $b = \frac{i\hbar}{2m^*}$ และ $c = y$ โดยพิจารณาเวลา $t \to 0$ พลังงาน $E \to \pm\infty$ ปรากฏว่าทำให้การคำนวณได้ผลถูกต้องในย่านพลังงานสูง และพลังงานต่ำ ทั้งนี้อาศัยพฤติกรรมอะซิมป์โทติค แต่ถ้าเราขยายการคำนวณออกไปอีก ก็อทำการอินทิเกรตในเอกซ์โปเนนท์บน dx ผลที่ได้จะเป็น

$$N(E) = \frac{\Omega}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt\left(\frac{m^*}{2\pi i\hbar t}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{\rho e^4}{\hbar\varepsilon_d^2}\sqrt{\pi}\, t\int_0^{\infty} dy e^{-\Lambda^2 y}\frac{t}{\sqrt{y}\left(y+\frac{i\hbar t}{8m^*}\right)} + \frac{iE}{\hbar}t\right],$$

และ กำหนดเงื่อนไขว่าเวลา t ไม่เข้าใกล้ 0 จึงทำให้นำไปศึกษาพลังงานที่อยู่ระหว่างกลาง กล่าวคือที่พลังงานต่ำและพลังงานสูง แต่การคำนวณนิพจน์ของเอกซ์โปเนนท์ จะมีปัญหายุ่งยากขึ้นจึงจำเป็นต้องอาศัยการคำนวณจากเครื่องคอมพิวเตอร์ งานดังกล่าวจึงจะสำเร็จตามความประสงค์ แต่ก็ต้องใช้เวลาศึกษาอย่างน้อยอีกหนึ่งปี

ข) เนื่องจากการคำนวณหาความหนาแน่นของสถานะนั้น เราหาจากค่าเฉลี่ยของตัวแพร่กระจายที่กึ่งเพียงคิวมูแลนท์ที่หนึ่ง ตามที่กล่าวแล้วในบทที่ 3 การที่จะปรับปรุงให้ดีขึ้น เราอาจขยายโดยการกระจายถึงคิวมูแลนท์ที่สองด้วย คือ

$$\langle G_2(\underline{r}_2,\underline{r}_1;t)\rangle = G_o(\underline{r}_2,\underline{r}_1,t)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\langle S-S_o\rangle_{S_o} + \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2\frac{1}{2}\left[\langle (S-S_o)^2\rangle_{S_o} - \langle S-S_o\rangle_{S_o}^2\right]\right\}$$

จากสมการข้างบน เนื่องจากเราได้หาค่าเฉลี่ยของ $\langle S - S_0 \rangle$ แล้วใน สมการ (3.47) ดังนั้นเราจะต้องหา $\langle (S - S_0)^2 \rangle_{S_0}$ เพิ่มเติม ที่เขียนอยู่ในรูปสมการคือ

$$\langle (S - S_0)^2 \rangle_{S_0} = \left(\frac{i\rho}{2\hbar}\right)^2 \int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^t d\tau d\sigma d\tau' d\sigma' \iint \left(\frac{dK}{2\pi}\right)^3 \frac{e^4}{\varepsilon_d^2}$$

$$\left(\frac{4\pi}{\underline{K}^2+\Lambda^2}\right)^2 \left(\frac{dK'}{2\pi}\right)^3 \frac{e^4}{\varepsilon_d^2} \left(\frac{4\pi}{\underline{K}^2+\Lambda^2}\right)^2$$

$$\langle \exp\{i\underline{K}\cdot[\underline{r}(\tau)-\underline{r}(\sigma)] + i\underline{K}'\cdot[\underline{r}(\tau')-\underline{r}(\sigma')]\} \rangle_{S_0}$$

การคำนวณค่าเฉลี่ยของสมการบน อาจทำได้ในทางปฏิบัติตามที่ได้กล่าวแล้ว

อนึ่ง ประโยชน์ที่ได้จากการหาความหนาแน่นของสถานะ อาจนำไปศึกษาทางกายภาพ อาทิ เช่น คุณสมบัติสภาพนำ (Conductivity) ไฟฟ้าของสารกึ่งตัวนำ และอื่น ๆ เนื่องจากแบบจำลองที่เราใช้นั้น เกี่ยวข้องกับกึ่งตัวนำที่มีอสุทธิปริมาณสูง (Heavily Doped Semiconductor)