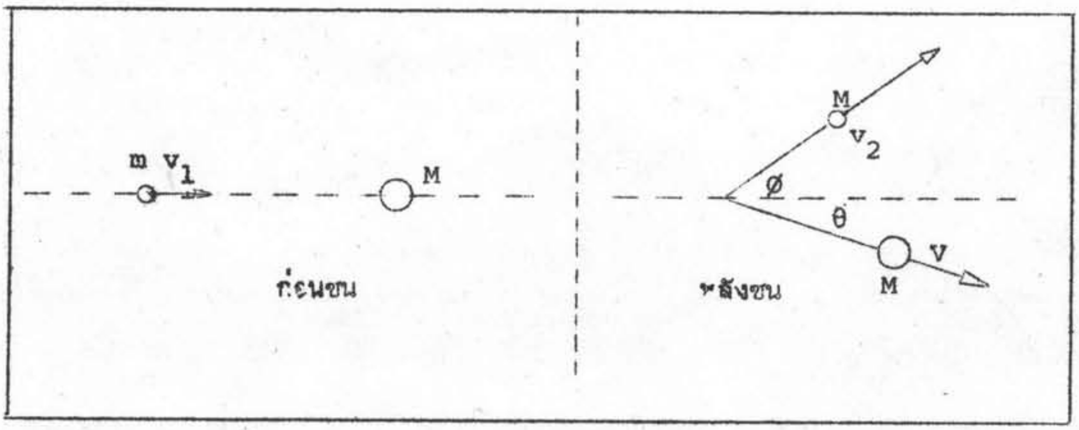
บทที่ 3

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการทดลอง

3.1 การชนของอีเลกตรอน (Electron collision)

การใช้อีเลกตรอนเข้าชนกับอะตอมเป็นการให้พลังงานแก่อะตอมวิธีหนึ่ง ถ้าอีเลกตรอนที่เข้าชนมีพลังงานสูงกว่าศักย์การเกิดไอออน ผลจะทำให้อะตอมกลายเป็นไอออนได้ในระหว่างการชนอีเลกตรอนจะให้พลังงานจลน์แก่อีเลกตรอนอนุภาคหนึ่งที่อยู่ในอะตอม หลังจากนั้นอีเลกตรอนที่เข้าชนจะเคลื่อนที่ช้าลงและโดยทั่ว ๆ ไปทิศทางจะเปลี่ยนด้วย ในการชนครั้งหนึ่ง ๆ นั้นถ้าพลังงานภายในของอะตอมเพิ่มขึ้น การชนลักษณะนี้จะเรียกว่าการชนแบบไม่ยืดหยุ่น (inelastic collision) แต่ถ้าในระหว่างการชน พลังงานภายในอะตอมไม่เปลี่ยนแปลง ผลคือโมเมนตัมและพลังงานจลน์ของการส่งผ่านอนุรักษ์ การชนกรณีนี้เรียกว่า การชนแบบยืดหยุ่น (elastic collision)

กรณีง่าย ๆ ที่แสดงให้เห็นว่าการชนแบบยืดหยุ่นอีเลกตรอนมีการสูญเสียพลังงาน สมมติว่าอีเลกตรอนก่อนชนมีมวล m เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v_1 และอะตอมมีมวล M หยุดนิ่งอยู่กับที่ หลังชนอีเลกตรอนและอะตอมมีความเร็ว v_2 และ V ทำมุม ϕ และ θ กับแนวที่เข้าชน ตามลำดับดังรูป 3.1



รูปที่ 3.1 แสดงการชนของอีเลกตรอนกับอะตอม

โดยอาศัยการอนุรักษ์โมเมนตัม (conservation of momentum) และการอนุรักษ์พลังงาน (conservation of energy) สามารถเขียนสมการเป็น

$$mv_1 = mv_2\cos \phi + MV\cos \theta \qquad (3.1)$$

$$mv_2\sin \phi = MV\sin \theta \qquad (3.2)$$

และ

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}MV^2 \qquad (3.3)$$

จาก (3.1), (3.2), และ (3.3) แสดงได้เป็น

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 \cdot \frac{4M\,m\cos^2\theta}{(M+m)^2} \qquad (3.4)$$

ถ้า $M >> m$ สมการ (3.4) สามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 \cdot \frac{4m}{M}\cos^2\theta$$

$$E_a = E_e\,\frac{4m}{M}\cos^2\theta \qquad (3.5)$$

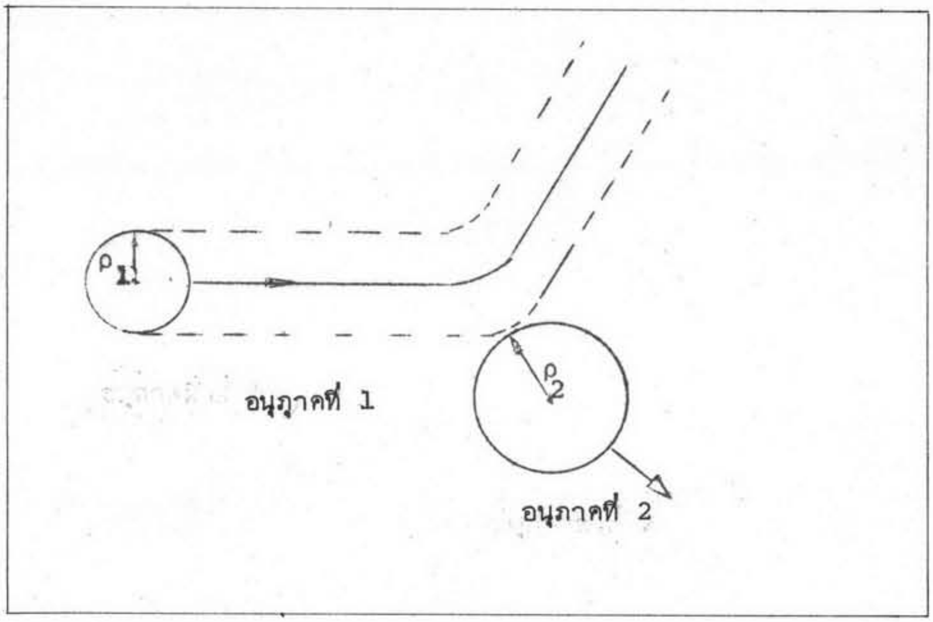
เมื่อ E_e เป็นพลังงานจลน์เริ่มต้นของอีเลกตรอน และ E_a เป็นพลังงานจลน์ที่อะตอมได้รับในระหว่างการชน

ในการชนของอีเลกตรอนกับอะตอมผลที่เป็นไปได้มี 3 ประการคือ อีเลกตรอนอาจจะทำให้อะตอมโลด (excite) อาจจะทำให้อะตอมเป็นไอออน หรืออาจจะทำให้เกิดการชนแบบยืดหยุ่น โอกาสที่จะเป็นชนิดไหนนั้นขึ้นอยู่กับความเร็วของอีเลกตรอน ถ้าอีเลกตรอนที่เข้าชนมีพลังงานน้อย การเกิดไอออนของอะตอมอาจจะไม่มี จะเป็นไปได้ในอีกสองกรณีเท่านั้น แต่ถ้าให้พลังงานแก่อีเลกตรอนที่เข้าชนเพิ่มขึ้น จนกระทั่งทำให้อีเลกตรอนในอะตอมได้รับพลังงานเท่ากับความแตกต่างของพลังงานระหว่างสถานะเริ่มต้น (initial state) กับสถานะสุดท้ายแล้ว อะตอมจึงจะเป็นไอออน ดังนั้นอีเลกตรอนที่เข้าชนจึงต้องมีพลังงานสูงกว่าศักย์การเกิดไอออนของอะตอม[8]

3.2 ระยะทางของการเคลื่อนที่เฉลี่ย (Mean free path)

ในการชนกันระหว่างอีเลกตรอนกับอะตอมหรือโมเลกุลนั้น สิ่งที่นับว่ามีความสำคัญอีกประการหนึ่งคือ ระยะทางของการเคลื่อนที่เฉลี่ยระหว่างการชน

ถ้าพิจารณาถึงว่าอนุภาคมีรูปทรงคล้ายของแข็งยืดหยุ่นทรงกลม (solid elastic spheres) และการชนเป็นไปดังรูป 3.2



รูปที่ 3.2 แสดงการชนของอนุภาค

ให้อนุภาคที่ 1 และ 2 มีรัศมีเป็น ρ_1 และ ρ_2 ตามลำดับ ดังนั้นการชนของอนุภาคจะอยู่ภายในช่วง $\rho_1 + \rho_2$ ซึ่งนับจากจุดศูนย์กลางของมวลทั้งสอง สมมติว่าอีเลกตรอนที่เข้าชนกับโมเลกุลของกาซเป็นจุด ดังนั้นอัตราการกระเจิง (rate of scattering) จากลำอีเลกตรอนมีความสัมพันธ์ดังสมการ[9]

$$\frac{-dN}{dx} = kN \tag{3.6}$$

อินทิเกรตสมการ (3.6) ในช่วง N_o ถึง N กับ o ถึง x

$$\int_{N_o}^{N} \frac{dN}{N} = -k\int_{o}^{x} dx$$

$$\ln \frac{N}{N_o} = -kx$$

$$N = N_o e^{-kx} \tag{3.7}$$

ถ้า λ เป็นระยะทางของการเคลื่อนที่เฉลี่ย ซึ่งจะกำหนดโดยสมการ

$$\lambda = \int_{o}^{N_o} \frac{xdN}{N_o} \tag{3.8}$$

จาก (3.7) สามารถดิฟเฟอเรนทิเอทเป็น

$$dN = -kN_o\, e^{-kx}\, dx \tag{3.9}$$

สมการ (3.9) แทนใน (3.8) จะได้

$$\lambda = \int_{\infty}^{o} -kxe^{-kx}\, dx \tag{3.10}$$

สมการ (3.10) สามารถอินทิเกรตได้โดยให้ $y = kx$ ดังนั้น

$$\lambda = \frac{1}{k}\int_{o}^{\infty} y\, e^{-y} dy$$

$$= \frac{1}{k}\Gamma(2)$$

$$\lambda = \frac{1}{k} \tag{3.11}$$

k เป็นค่าคงที่ (proportionality constant) เป็นพารามิเตอร์ (parameter) ของ ๆ ก๊าซที่ใช้เป็นเป้าซึ่งดูได้จากสมการ (3.6) คือ

$$k = -\frac{dN}{Ndx} \tag{3.12}$$

ค่าคงที่ K จะอยู่ในรูปที่เป็นสัดส่วนกับพื้นที่ตัดขวาง (cross-sectional area) โดยที่พื้นที่หน้าตัดขวางของการเข้าชนเป็น $\pi(\rho_1 + \rho_2)^2$ ถ้า N เป็นจำนวนโมเลกุลในปริมาตร V โดยสอดคล้องกับสมการ (3.12)

$$k = \pi(\rho_1 + \rho_2)^2 \frac{N}{V} \tag{3.13}$$

สมการ (3.13) แทนใน (3.11)

$$\lambda = \frac{V}{\pi(\rho_1 + \rho_2)^2 N} \tag{3.14}$$

ค่า λ ในสมการ (3.14) มากเกินไปเพราะว่าการชนเกิดขึ้นหลาย ๆ ครั้ง เพื่อให้ค่าในสมการ (3.14) ถูกต้องจะอาศัยการแจกแจงความเร็วของแมกสเวลโบลต์ซมานน์แก้ได้เป็น

$$\lambda = \frac{V}{\pi(\rho_1 + \rho_2)^2 N(2)^{1/2}} \tag{3.15}$$

สำหรับกาซในอุดมคติ (ideal gas) จะแทน $V = \frac{NKT}{P}$ ใน (3.15)

$$\lambda = \frac{KT}{\pi(\rho_1 + \rho_2)^2 P(2)^{1/2}} \tag{3.16}$$

เมื่อ T เป็นอุณหภูมิสัมบูรณ์

P เป็นความดันของกาซ

K เป็นค่าคงที่ของโบลต์ซมานน์

3.3 การเกิดไอออนบวก

รูปแบบดั้งเดิมของการเกิดไอออนจะต้องประกอบด้วยอีเลกตรอนเข้าชนโมเลกุลหรือเป้าที่เป็นกลาง การชนของอีเลกตรอนที่มีพลังงานสูงกับอีเลกตรอนที่หมุนอยู่รอบ ๆ นิวเคลียสอาจจะทำให้อีเลกตรอนหลุดจากวงโคจรได้ ดังนั้นจะเกิดมีโมเลกุล หรืออะตอมที่มีประจุเป็นบวก ที่เรียกว่าไอออนบวก แต่ถ้าโมเลกุลที่เป็นกลางดูดกลืนอีเลกตรอนที่ชนดังนั้นไอออนลบก็จะเกิดขึ้น สำหรับการเกิดไอออนบวกปกติจะแทนโดยความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$AB + e \quad = \quad AB^{+} + 2e \tag{3.17}$$

ที่ความดันต่ำ ๆ อัตราการเกิดไอออนบวกต่อหนึ่งหน่วยความยาวกำหนดโดยความสัมพันธ์

$$\frac{d}{dt}(AB^{+}) \quad = \quad k(AB)(N_e)$$

N_e = เป็นจำนวนอีเลกตรอน

k = เป็นค่าคงที่

AB = เป็นโมเลกุล หรือเป้าที่เป็นกลาง

ปกติถ้าความดันของ (AB) และกระแสอีเลกตรอนคงที่แล้ว ความเข้มของไอออนจะคงที่โดยสอดคล้องกับสมการ (3.18) อัตราการเกิดไอออนเป็นฟังชันเชิงเส้น (linear function) ทั้งความดันและความเข้มของอีเลกตรอน[9]

3.4 จำนวนไอออนที่เกิดขึ้นจากการชนของอีเลกตรอน

ถ้าลำอีเลกตรอนที่มีความเข้ม I_o ผ่านเข้าไปในกาซที่มีความหนาแน่น N_o เป็นระยะทาง x เมื่ออีเลกตรอนชนกับโมเลกุลของกาซแล้วผลทำให้ความเข้มของอีเลกตรอนลดลง ทั้งนี้เนื่องจากปฏิกริยาการเกิดไอออน (ionization reactions) การลดความเข้มของอีเลกตรอนเป็นไปโดยสมการ

$$-dI = \sigma_+ N_o I_o \, dx \qquad (3.19)$$

σ_+ **คือ** หน้าตัดขวาง (cross section) สำหรับการเกิดไอออนบวก

ถ้า σ_+ ไม่เป็นฟังชั่นของระยะทาง สมการ (3.19) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{dI}{I} = -\sigma_+ N_o dx \qquad (3.20)$$

อินทิเกรตสมการ (3.20) จะได้

$$\int_{I_o}^{I} \frac{dI}{I} = -\int_o^x \sigma_+ N_o dx$$

$$I = I_o e^{-\sigma_+ N_o x} \qquad (3.21)$$

ในการเกิดไอออนอีเลกตรอนจะสูญหายไป เพื่อทำให้เกิดไอออนลบซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปคณิตศาสตร์ได้เป็น

$$I_o - I \equiv N^- \qquad (3.22)$$

เมื่อ N^- เป็นจำนวนไอออนลบที่เกิดขึ้น

การทำให้เกิดไอออนลบ ย่อมหมายถึงการทำให้เกิดไอออนบวกด้วยโดยอาศัยความจริงนี้ จากสมการ (3.21) และ (3.22) จะได้

$$N^+ = I_o - I_o e^{-\sigma_+ N_o x}$$

$$= I_o (1 - e^{-\sigma_+ N_o x}) \qquad (3.23)$$

เมื่อ N^+ เป็นจำนวนไอออนบวกที่เกิดขึ้น

กระจาย $e^{-\sigma_+ N_o x}$ โดยให้ $Z = \sigma_+ N_o x$

ดังนั้น $$e^{-Z} = 1 - Z + \frac{Z^2}{2!} - \frac{Z^3}{3!} + \ldots \qquad (3.24)$$

ที่มีความดันต่ำ ๆ และระยะทางน้อย ๆ จากการประมาณสมการ (3.24) จะได้

$$e^{-\sigma_+ N_o x} = 1 - \sigma_+ N_o x \qquad (3.25)$$

สมการ (3.25) แทนใน (3.23) ได้

$$N^+ = I_o\left(1-(1 - \sigma_+ N_o x)\right)$$

$$N^+ = I_o \sigma_+ N_o x$$

หรือ $$N^+ = \sigma_+ N_o N_e x \qquad (3.26)$$

เมื่อแทน I_o ด้วยจำนวนอีเลกตรอน N_e ที่ผ่านเข้าในบริเวณการเกิดไอออน จะเห็นว่าสมการ (3.26) สามารถหาจำนวนไอออนบวกที่เกิดในแหล่งกำเนิดไอออนโดยใช้อีเลกตรอนระดมยิงได้ [8]

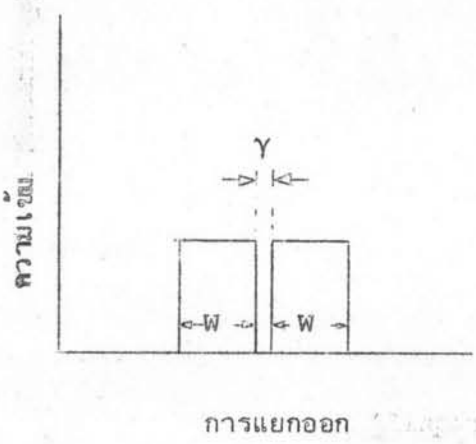
3.5 <u>ความสามารถในการแยกมวลหรือกำลังการแยก</u> (Resolution or Resolving power)

ในการแยกสเปกตรัมมวลนั้นสิ่งหนึ่งที่จะบอกถึงการแยกลำไอออนที่มีมวล M และ M+ΔM คือความสามารถในการแยกมวลหรือกำลังการแยกซึ่งมีนิยามดังนี้ [9]

ถ้า R_s เป็นความสามารถในการแยกมวล ดังนั้น

$$R_s = \frac{M}{\Delta M} \qquad (3.27)$$

ในการแยกลำไอออนถ้า D เป็นระยะห่างระหว่างจุดกึ่งกลางลำไอออนและ W เป็นความกว้างของลำไอออนแต่ละลำ ลำไอออนที่อยู่ติดกันจะแยกออกจากกันได้ก็ต่อเมื่อ D ต้องมีค่ามากกว่า W เล็กน้อย ดังในรูป 3.3



รูปที่ 3.3 แสดงการแยกลำไอออนที่มีความกว้าง W

ถ้าให้ D มากกว่า W อยู่ γ

$$D = W + \gamma \qquad (3.28)$$

ค่า D เรียกว่าการแยกออก (dispersion)

ในการแยกลำไอออนที่มีมวล M และ M + ΔM นั้นสามารถเขียนเป็นฟังชันของการแยกออกได้เป็น

$$\Delta M = \frac{W + \gamma}{D} \qquad (3.29)$$

ที่เขียนดังสมการ (3.29) ได้เพราะ ΔM จะให้มีค่าเป็น 1 a.m.u.

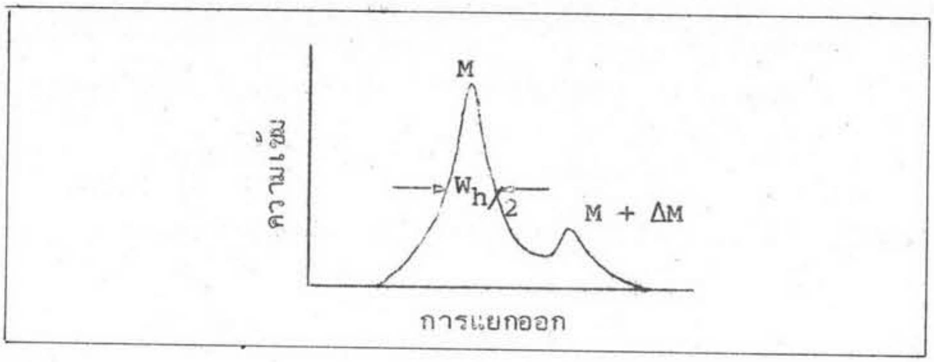
สมการ **(3.29)** แทนในสมการ (3.27) ได้

$$R_S = \frac{MD}{W+\gamma} \qquad (3.30)$$

เนื่องจากในการหาความสามารถในการแยกไม่มีสูตรที่แน่นอน ดังนั้นในบางครั้งความสามารถในการแยกมวลอาจกำหนดจากความกว้างของลำไอออนที่ครึ่งหนึ่งของความเข้มสูงที่สุด นั่นคือ

$$R_s = \frac{MD}{W_{h/2}} \qquad (3.31)$$

เมื่อ $W_{h/2}$ เป็นความกว้างของลำไอออนที่ครึ่งหนึ่งของความเข้มสูงที่สุดดังรูป 3.4



รูปที่ 3.4 แสดงความกว้างที่ครึ่งหนึ่งของความเข้มสูงสุด

สำหรับเครื่องแยกสเปกตรัมมวล ลำไอออนไม่จำเป็นต้องมีความเข้มเท่ากันและบางครั้งขอบของลำไอออนจะซ้อนกัน (overlap) เนื่องจากมวลของไอออนขึ้นอยู่กับค่า R, H และ V ดังนั้นถ้าใช้สมการ (3.30) จะหาค่าความสามารถในการแยกมวลจากตัวแปรค่า R, H และ V ได้ จากสมการ (1.3) ซึ่งกำหนดความสัมพันธ์ของตัวแปรค่าคือ

$$\frac{M}{q} = \frac{R^2H^2}{2VC^2}$$

โดยการดิฟเฟอเรนทิเอทสมการข้างบนนี้จะได้

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{2\Delta R}{R} + \frac{2\Delta H}{H} - \frac{\Delta V}{V} \qquad (3.32)$$

สำหรับสนามแม่เหล็กมีค่าสม่ำเสมอ (homogeneous magnetic field) และ ไอออนไม่คิดการแผ่กระจายพลังงาน (energy spread) สมการ (3.32) เทอมสุดท้ายสองเทอมเป็นศูนย์ ดังนั้นได้

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{2\Delta R}{R}$$

หรือ $$2\Delta R = \frac{R\Delta M}{M} \qquad (3.33)$$

สมการ (3.33) เป็นปริมาณที่กำหนดค่าการแยกออก

$$D = 2\Delta R$$

หรือ $$D = \frac{R\Delta M}{M} \qquad (3.34)$$

โดยทั่วๆ ไป $\Delta M = 1$ ดังนั้นสมการ (3.34) จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$D = \frac{R}{M} \qquad (3.35)$$

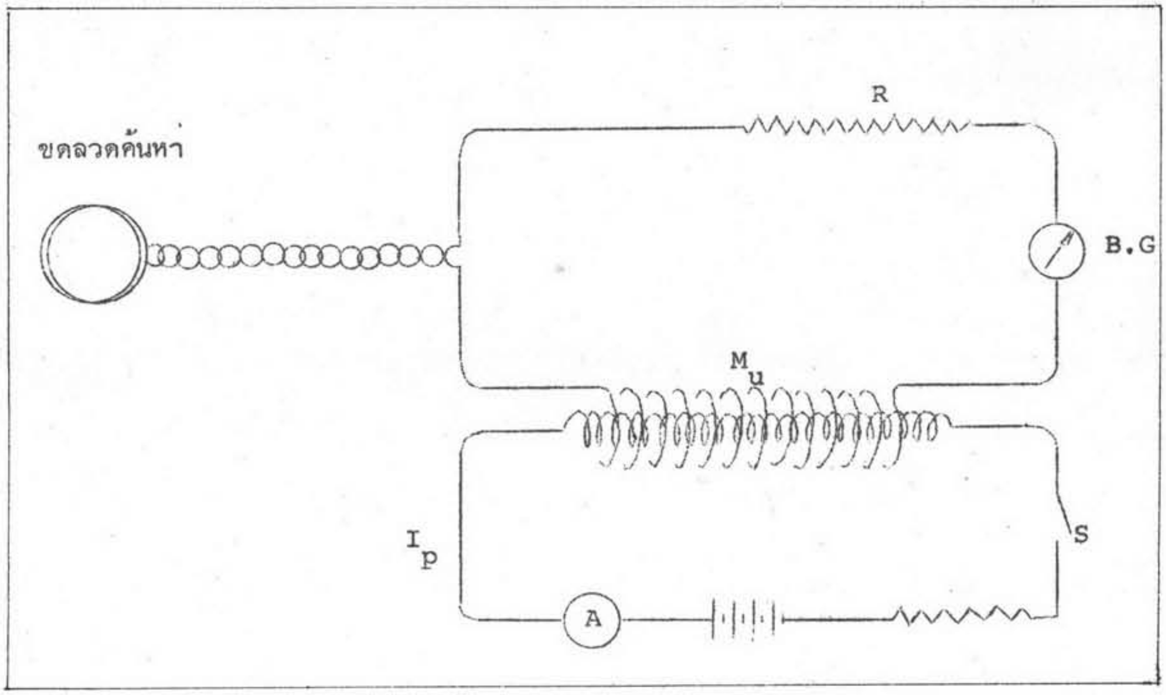
แทนค่า D จากสมการ (3.34) ลงในสมการ (3.30) ได้

$$R_s = \frac{R}{W + \gamma} \qquad (3.36)$$

จากสมการ (3.36) แสดงถึงค่าความสามารถในการแยกมวล ซึ่งไม่ขึ้นกับมวล แต่ขึ้นอยู่กับรัศมีของเครื่องมือ และความกว้างของลำไอออนสำหรับความกว้างของลำไอออนนั้นจะมีความสัมพันธ์กับความกว้างของช่องแคบไอออนเข้า (entrance slit) S_2 และช่องแคบไอออนออก (exit slit) S_4 คือ $W \approx S_2 + S_4$ และ $\gamma = 0.1\ W$ [6,9,10,11]

3.6 <u>การวัดสนามแม่เหล็ก</u>

ในการวัดอาศัยขดลวดค้นหา (search coil) ตัดกับสนามแม่เหล็ก แล้วคำนวณค่าสนามแม่เหล็กโดยอาศัยวงจรในรูป 3.5



รูปที่ 3.5 แสดงวงจรการวัดสนามแม่เหล็กโดยขดลวดค้นหา

จากรูปที่ 3.5 ขดลวดค้นหา มีพื้นที่หน้าตัดเป็น A มีจำนวนรอบเป็น N ต่ออนุกรมกับ **บัลลิสติก** กัลวานอมิเตอร์ (ballistic galvanometer) ความต้านทาน R และความเหนี่ยวนำร่วมมาตรฐาน (standard mutual inductance) M_u ถ้าขดลวดมีระนาบตั้งฉากกับสนามแม่เหล็กที่มีความหนาแน่นฟลักซ์ B และดึงออกจากสนามแม่เหล็กอย่างรวดเร็วในช่วงเวลา Δt ดังนั้นจะมีกระแสไหลผ่านกัลวานอมิเตอร์ และประจุรวม Q ที่ไหลผ่านวงจรจะคำนวณได้ดังนี้

$$Q = \int_0^{\Delta t} I dt$$

$$= \int^{\Delta t} \frac{E dt}{R}$$

$$= \frac{1}{R} \int_0^{\Delta t} \left(\frac{dN\phi}{dt}\right) dt$$

$$Q = \frac{\Delta N\phi}{R} \tag{3.37}$$

เมื่อ ϕ เป็นฟลักซ์แม่เหล็ก

จากกฎของเกาส์ (Gauss 's law) สำหรับฟลักซ์แม่เหล็กจะได้

$$\Delta N\phi = NAB \tag{3.36}$$

จาก (3.37) และ (3.38) จะได้

$$Q = \frac{NAB}{R} \tag{3.39}$$

ในการที่ประจุ Q ผ่านกัลวานอมิเตอร์ ทำให้กัลวานอมิเตอร์เบี่ยงเบนไป θ ดังนั้นจะได้

$$Q = k\theta \tag{3.40}$$

เมื่อ k เป็นค่าคงที่ของกัลวานอมิเตอร์

จากสมการ (3.39) และ (3.40) จะได้

$$B = \frac{kR\theta}{NA} \tag{3.41}$$

การหาค่า k ทำได้โดยให้ขดลวดตั้งอยู่กับที่ ผ่านกระแส I_p ในวงจรขดลวดปฐมภูมิของตัวเหนี่ยวนำรวม ดังนั้นจะมีฟลักซ์ลิงเกจ (flux linkage) ในขดลวดทุติยภูมิ ถ้าตัดกระแส I_p อย่างรวดเร็วจะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์ในขดลวดทุติยภูมิ และเกิดมีประจุ Q' ไหลผ่านบัลลิสติก กัลวานอมิเตอร์ และทำให้เบี่ยงเบนไป θ' ดังนั้นจะได้

$$Q' = \frac{\Delta N\phi}{R}$$

$$k\theta' = \frac{M_u I_p}{R} \tag{3.42}$$

ดังนั้นจากสมการที่ (3.41) และ (3.42) โดยการกำจัด k ได้

$$B = \frac{\theta M I_p}{\theta' N A}$$

หรือ $$H = \frac{\theta M I_p}{\theta' N A} \qquad (3.43)$$

เมื่อ H เป็นความเข้มสนามแม่เหล็ก

M เป็นค่าความเหนี่ยวนำร่วม

N เป็นจำนวนขดลวดของขดลวดค้นหา

A เป็นพื้นที่หน้าตัดขวางของขดลวดค้นหา

θ เป็นการเบี่ยงเบนของบัลลิสติก กัลวานอมิเตอร์ เมื่อดึงขดลวดค้นหาออกจากสนามแม่เหล็ก

θ' เป็นการเบี่ยงเบนของบัลลิสติกกัลวานอมิเตอร์ เมื่อเกิดการเปลี่ยนแปลงกระแสไฟฟ้าในขดลวดปฐมภูมิ

I_p เป็นกระแสไฟฟ้าที่ผ่านในขดลวดปฐมภูมิ

3.7 การคำนวณค่าความผิดพลาดที่น่าจะเป็น (Probable error)

ในการคำนวณหาค่ามวลของไอออนจากสมการ (1.4) เนื่องจากในการวัดค่า H, R และ V ย่อมมีความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้น ผลจึงทำให้การคำนวณหาค่า M เกิดความคลาดเคลื่อน[13]

ถ้า ΔM เป็นความคลาดเคลื่อนจากการคำนวณหาค่ามวลของไอออน ΔM อาจหาได้โดยอาศัยสมการ (1.4) จากสมการ (1.4)

$$M = 4.83 \times 10^{-5} \frac{H^2R^2}{V} \qquad (1.4)$$

จากสมการ (1.4) จะเห็นว่า M เป็นฟังชั่นของ H,R และ V ดังนั้น

$$\Delta M = \frac{\partial M \Delta H}{\partial H} + \frac{\partial M \Delta R}{\partial R} + \frac{\partial M \Delta V}{\partial V} \qquad (3.44)$$

เนื่องจากในการหาค่าความคลาดเคลื่อนนั้นจะมีทั้งที่เป็นเครื่องหมายบวกและลบเพื่อตัดปัญหาด้านเครื่องหมายจะทำการยกกำลังสอง ดังนั้นจากสมการ (3.44) จะได้

$$(\Delta M)^2 = \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)^2 (\Delta H)^2 + \left(\frac{\partial M}{R}\right)^2 (\Delta R)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial V}\right)^2 (\partial V)^2 \qquad (3.45)$$

ค่า $\frac{\partial M}{\partial H}$, $\frac{\partial M}{\partial R}$ และ $\frac{\partial M}{\partial V}$ หาได้จากสมการ (1.4) คือ

$$\frac{\partial M}{\partial H} = 4.83 \times 10^{-5} \left(\frac{2HR^2}{V}\right) \qquad (3.46)$$

$$\frac{\partial M}{\partial R} = 4.83 \times 10^{-5} \left(\frac{2RH^2}{V}\right) \qquad (3.47)$$

$$\frac{\partial M}{\partial V} = 4.83 \times 10^{-5} \left(\frac{-R^2H^2}{V^2}\right) \qquad (3.48)$$

สมการ (3.46), (3.47) และ (3.48) แทนในสมการ (3.49) แล้วหารด้วยสมการ (1.4) ยกกำลังสอง จะได้

$$\left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2 = 4\left(\frac{\Delta H}{H}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2 \qquad (3.49)$$

เมื่อ ΔH คือ ความผิดพลาดที่น่าจะเป็นของสนามแม่เหล็ก

ΔR คือ ความผิดพลาดที่น่าจะเป็นของรัศมีความโค้งของแนวการเคลื่อนที่ของไอออน

ΔV คือ ความผิดพลาดที่น่าจะเป็นของความต่างศักย์ที่ใช้เร่งไอออน

สำหรับค่า $\left(\frac{\Delta H}{H}\right)^2$ คำนวณหาได้จากสูตร (3.43) โดยทำนองเดียวกับ สมการ (3.49) ซึ่งจะได้เป็น

$$\left(\frac{\Delta H}{H}\right)^2 = \left(\frac{\Delta M_u}{M_u}\right) + \left(\frac{\Delta I_p}{I_p}\right) + \left(\frac{\Delta \theta}{\theta}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \theta'}{\theta'}\right)^2 + \left(\frac{\Delta NA}{NA}\right)^2 \qquad (3.50)$$

เมื่อ ΔM_u คือความผิดพลาดที่น่าจะเป็นของ M_u

$\Delta\theta$ คือความผิดพลาดที่น่าจะเป็นของ θ

$\Delta\theta'$ คือความผิดพลาดที่น่าจะเป็นของ θ'

ΔI_p คือความผิดพลาดที่น่าจะเป็นของ I_p

ΔNA คือความผิดพลาดที่น่าจะเป็นของ NA