บทที่ 4

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

สรุปผลการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ มีความมุ่งหมายเพื่อศึกษาเกี่ยวกับการแจกแจงปกติ โดยเน้นไปในด้านการนำไปใช้ในงานวิจัยทางการศึกษาและจิตวิทยา ว่าใช้ในกรณีใดได้บ้าง แต่ละกรณีมีความเหมาะสมหรือมีปัญหาและข้อจำกัดในการใช้อย่างไร ดำเนินการวิจัยโดยใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงประวัติศาสตร์ และแสดงการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์สถิติ รายการที่ศึกษาประกอบด้วย

1. การแจกแจงปกติ

   1.1 ประวัติการพัฒนาของการแจกแจงปกติ

   1.2 ความสำคัญของการแจกแจงปกติ

   1.3 ความหมายและลักษณะทางคณิตศาสตร์ของการแจกแจงปกติ

   1.4 คุณสมบัติทางคณิตศาสตร์และคุณสมบัติทางสถิติที่สำคัญของการแจกแจงปกติ

   1.5 การแจกแจงปกติมาตรฐาน

   1.6 การคำนวณความน่าจะเป็นของการแจกแจงปกติ

   1.7 เกณฑ์ในการวัดความเป็นปกติของข้อมูล

2. ทฤษฎีคณิตศาสตร์สถิติที่เกี่ยวข้องกับการใช้การแจกแจงปกติ

   2.1 The Chebyshev Inequality

   2.2 The Law of Large Numbers

   2.3 The Central Limit Theorem

3. การใช้การแจกแจงปกติในงานวิจัย ที่สำคัญ ๆ มี

   3.1 ใช้ประมาณค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงตามทฤษฎีที่สำคัญ ๆ ได้แก่

3.1.1 การแจกแจงทวินาม (Binomial Distribution)

3.1.2 การแจกแจงปัวซอง (Poisson Distribution)

3.1.3 การแจกแจงแกมมา (Gamma Distribution)

3.2 ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์

3.2.1 ประมาณค่ามัชฌิมของประชากร

3.2.2 ประมาณค่าสัดส่วนของประชากร

3.2.3 ประมาณค่าความแปรปรวนของประชากร

3.2.4 ประมาณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร

3.2.5 ประมาณค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบผลคูณของประชากร

3.3 ใช้ในการทดสอบสมมุติฐานทางสถิติ

3.3.1 ทดสอบเกี่ยวกับมัชฌิมของประชากร

3.3.2 ทดสอบเกี่ยวกับสัดส่วนของประชากร

3.3.3 ทดสอบเกี่ยวกับสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบผลคูณของประชากร

3.3.4 ทดสอบความมีนัยสำคัญของสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อื่น ๆ ได้แก่ r_r, τ, ϕ, r_{tet} และ r_{bis}

3.4 ใช้เป็นค่าประมาณการทดสอบแบบไม่มีพารามิเตอร์บางอย่าง ได้แก่

3.4.1 การทดสอบเครื่องหมาย (Sign Test)

3.4.2 การทดสอบลำดับที่ซึ่งมีเครื่องหมาย (Wilcoxon Signed-Rank Test)

3.4.3 การทดสอบค่ายู (Mann-Whitney U Test)

3.4.4 การทดสอบความสุ่ม (Run Test)

4. ความเหมาะสม ปัญหา และข้อจำกัดในการใช้การแจกแจงปกติ

5. ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงปกติกับการแจกแจงที่สำคัญ ๆ ที่ได้มาจากการแจกแจงปกติ (Derived Distribution) ได้แก่

5.1 การแจกแจงไคสแคว (χ^2-Distribution)

5.2 การแจกแจงเอฟ (F-Distribution)

5.3 การแจกแจงที ("Student's" t-Distribution)

ความเหมาะสม ปัญหา และข้อจำกัดในการใช้การแจกแจงปกติในกรณีต่าง ๆ ดังกล่าว พอจะสรุปได้ดังนี้

1. เมื่อใช้ประมาณค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงทวินาม (Binomial Distribution) มีปัญหาที่สำคัญ 3 ประการ คือ

ก. รูปร่างของการแจกแจง การแจกแจงทวินามจะสมมาตรต่อเมื่อ $p=q=\frac{1}{2}$ การประมาณค่าจึงเหมาะสมต่อเมื่อ p และ q ไม่เบี่ยงเบนไปจาก $\frac{1}{2}$ มากนัก และกลุ่มตัวอย่างต้องมีขนาดใหญ่พอ นักสถิติส่วนมากยึดหลักว่า np และ nq จะต้องไม่น้อยกว่า 5 (หรือถ้าจะให้ดียิ่งขึ้น np และ nq จะต้องไม่น้อยกว่า 10) การประมาณจึงจะถือว่าเหมาะสม แต่ถ้า p และ q เข้าใกล้ 0 หรือ 1 มาก แม้กลุ่มตัวอย่างจะมีขนาดใหญ่ ก็ไม่เหมาะที่จะประมาณค่าความน่าจะเป็นด้วยการแจกแจงปกติ ควรจะประมาณด้วยการแจกแจงปัวซอง (Poisson Distribution) หรือคำนวณความน่าจะเป็นจากการแจกแจงทวินามโดยตรง

ข. ความไม่ต่อเนื่องของค่าตัวเลขของข้อมูล การแจกแจงทวินามเป็นการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง แต่การแจกแจงปกติเป็นการแจกแจงแบบต่อเนื่อง ดังนั้น เพื่อให้การประมาณค่าได้ผลดี จึงต้องมีค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง (Correction for Continuity) โดยเอา $\frac{1}{2}$ บวกหรือลบขีดจำกัดของช่วงที่ต้องการประมาณค่า แต่ถ้ากลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่มาก($n\geq 100$) ค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่องก็ไม่จำเป็น

ค. ช่วงที่ต้องการประมาณค่า การประมาณค่าในช่วงรอบ ๆ มัชฌิมของการแจกแจง จะเชื่อถือได้มากกว่าการประมาณค่าในช่วงที่อยู่ห่างมัชฌิมของการแจกแจง โดยเฉพาะเมื่อ p และ q เข้าใกล้ 0 และ 1 มาก

2. เมื่อใช้ประมาณค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงปัวซอง (Poisson Distribution) มีปัญหาที่สำคัญ 3 ประการ คือ

ก. รูปร่างของการแจกแจง การแจกแจงปัวซองจะเข้าใกล้การแจกแจงปกติต่อเมื่อมัชฌิมของการแจกแจง (λ) มีค่าไม่ต่ำเกินไป และกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ ดังนั้น การประมาณค่าจะเหมาะสมต่อเมื่อ $n\lambda$ มีค่าไม่น้อยกว่า 10

ข. ความไม่ต่อเนื่องของค่าตัวเลขของข้อมูล การแจกแจงปัวซองเป็นการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง แต่การแจกแจงปกติเป็นการแจกแจงแบบต่อเนื่อง เพื่อให้การประมาณค่าได้ผลดี จึงต้องมีค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง โดยเอา $\frac{1}{2}$ บวกหรือลบขีดจำกัดของช่วงที่ต้องการประมาณค่า แต่ถ้ากลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่มาก ($n \geq 100$) ก็ไม่จำเป็นต้องมีค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง

ค. ช่วงที่ต้องการประมาณค่า การประมาณค่าในช่วงรอบ ๆ มัชฌิมของการแจกแจง จะเชื่อถือได้มากกว่าการประมาณค่าในช่วงที่อยู่ห่างมัชฌิมของการแจกแจง

3. เมื่อใช้ประมาณค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงแกมมา (Gamma Distribution) มีปัญหาที่สำคัญ 2 ประการ คือ

ก. รูปร่างของการแจกแจง การแจกแจงแกมมาจะเข้าใกล้การแจกแจงปกติต่อเมื่อ α ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ตัวหนึ่งของการแจกแจงแกมมา มีค่ามากพอเท่านั้น การประมาณค่าถือว่าเหมาะสม ถ้า α มีค่าไม่ต่ำกว่า 50 ถ้า α เล็ก การแจกแจงแกมมาจะเบ้ ยอมไม่เหมาะที่จะประมาณค่าความน่าจะเป็นด้วยการแจกแจงปกติ อย่างไรก็ตาม ถ้าใช้การเปลี่ยนตัวแปรแกมมาตามวิธีของฟิชเชอร์หรือวิธีของวิลสันกับฮิลเฟอร์ที่ ค่า α มากกว่า 14 ก็ถือว่าเหมาะสมสำหรับการประมาณค่าความน่าจะเป็นด้วยการแจกแจงปกติ

ข. ช่วงที่ต้องการประมาณค่า การประมาณค่าในช่วงรอบ ๆ มัชฌิมของการแจกแจง จะเชื่อถือได้มากกว่าการประมาณค่าในช่วงที่อยู่ห่างมัชฌิมของการแจกแจง

4. เมื่อใช้ในการประมาณค่า และ(หรือ)ทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับมัชฌิมของประชากร (μ) หรือความแตกต่างระหว่างมัชฌิมของประชากร ($\mu_1-\mu_2$) มีปัญหาเกี่ยวกับการแจกแจงของประชากร และการทราบหรือไม่ทราบค่าความแปรปรวนของประชากร (σ^2) ดังนี้

ก. ถ้าประชากรแจกแจงปกติและทราบค่า σ^2 จะใช้การแจกแจงปกติได้อย่างเหมาะสมสำหรับกลุ่มตัวอย่างทุกขนาด

ข. ถ้าประชากรแจกแจงปกติ แต่ไม่ทราบค่า σ^2 หรือประชากรไม่แจกแจงปกติ แต่ทราบค่า σ^2 จะใช้การแจกแจงปกติได้เหมาะสมต่อเมื่อ กลุ่มตัวอย่างมีขนาดไม่ต่ำกว่า 30

ค. ถ้าประชากรไม่แจกแจงปกติ และไม่ทราบค่า σ^2 จะใช้การแจกแจงปกติได้เหมาะสมต่อเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดไม่ต่ำกว่า 100

5. เมื่อใช้ประมาณค่า และ(หรือ)ทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับสัดส่วนของประชากร (π) หรือความแตกต่างระหว่างสัดส่วนของประชากร ($\pi_1-\pi_2$) โดยที่กลุ่มตัวอย่างอิสระ มีปัญหาเช่นเดียวกับเมื่อใช้ประมาณค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงทวินาม เพราะการแจกแจงตัวอย่างของสัดส่วนของกลุ่มตัวอย่าง (p) มีลักษณะเป็นการแจกแจงทวินาม ดังนั้น การใช้การแจกแจงปกติ จะเหมาะสมต่อเมื่อสัดส่วนของประชากรไม่เบี่ยงเบนไปจาก $\frac{1}{2}$ มากนัก และกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ หลักที่ใช้กันทั่วไปคือ $n\pi$ และ $n(1-\pi)$ จะต้องไม่ต่ำกว่า5 นอกจากนี้ เพื่อให้ได้ผลดียิ่งขึ้น ควรจะมีค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง โดยเอา $\frac{1}{2n}$ บวกหรือลบสัดส่วนของกลุ่มตัวอย่าง ($p\pm\frac{1}{2n}$) แต่ถ้ากลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่มาก ($n \geq 100$) ค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่องก็ไม่จำเป็น

6. เมื่อใช้ทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับความแตกต่างระหว่างสัดส่วนของประชากรโดยที่กลุ่มตัวอย่างไม่อิสระ มีข้อจำกัดคือ จำนวนสมาชิกที่เปลี่ยนลักษณะทั้งหมดของกลุ่มตัวอย่าง (A+D) จะต้องไม่ต่ำกว่า 10 และถ้า A+D อยู่ในระหว่าง 10 ถึง 20 ควรจะมีค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง โดยเอา 1 ลบออกจากค่าสัมบูรณ์ของความแตกต่างระหว่างจำนวนสมาชิกที่เปลี่ยนลักษณะของกลุ่มตัวอย่างหนึ่ง กับจำนวนสมาชิกที่เปลี่ยนลักษณะของอีกกลุ่มตัวอย่างหนึ่ง($|D-A|-1$)

7. เมื่อใช้ในการประมาณค่าความแปรปรวนของประชากร (σ^2) หรือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร (σ) โดยที่ประชากรแจกแจงปกติ มีปัญหาคือ การแจกแจงตัวอย่างของความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่าง (s^2) และการแจกแจงตัวอย่างของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง (s) มีลักษณะเป็นการแจกแจงไคสแคว (χ^2-Distribution) ดังนั้น การประมาณค่าโดยใช้การแจกแจงปกติจะเหมาะสมต่อเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดไม่ต่ำกว่า 100 ไม่เช่นนั้นต้องประมาณโดยใช้การแจกแจงไคสแคว

8. เมื่อใช้ในการประมาณค่า และ(หรือ)ทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบผลคูณของประชากร (ρ) หรือความแตกต่างระหว่างสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบผลคูณของประชากร ($\rho_1-\rho_2$) โดยที่กลุ่มตัวอย่างอิสระ เราเปลี่ยนสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบผลคูณของประชากร (ρ) และสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบผลคูณของกลุ่มตัวอย่าง (r) ให้เป็น Z_ρ และ Z_r ตามลำดับ ตามวิธีของฟิชเชอร์ (Fisher's Z transformation) จะทำให้การแจกแจงตัวอย่างของ Z_r เข้าใกล้การแจกแจงปกติสำหรับทุกค่าของ ρ และทุกขนาดของ

กลุ่มตัวอย่าง จึงใช้การแจกแจงปกติได้เหมาะสมไม่ว่าค่า ρ หรือขนาดของกลุ่มตัวอย่างจะเป็นเท่าใดก็ตาม แต่จะใช้ได้ผลดีกว่า ถ้าค่า ρ เข้าใกล้ 0 และกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ทั้งนี้มีข้อจำกัดคือ ประชากรจะต้องแจกแจงปกติแบบสองตัวแปร (Bivariate Normal Distribution) ถ้าไม่แน่ใจในลักษณะการแจกแจงของประชากร ต้องใช้กลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่

9. เมื่อใช้ในการทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับความแตกต่างระหว่างสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบผลคูณของประชากร ($\rho_{XY}-\rho_{XZ}$) โดยที่กลุ่มตัวอย่างไม่อิสระ ไม่ต้องเปลี่ยนสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบผลคูณของกลุ่มตัวอย่าง (r_{XY} กับ r_{XZ}) ให้เป็น Z_r ตามวิธีของฟิชเชอร์ แต่มีข้อจำกัดคือ กลุ่มตัวอย่างต้องสุ่มมาจากประชากรซึ่งมีตัวแปร X, Y และ Z โดยที่ X กับ Y , X กับ Z และ Y กับ Z แต่ละคู่มีการแจกแจงปกติแบบสองตัวแปร

10. เมื่อใช้ในการทดสอบความมีนัยสำคัญของสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อื่น ๆ บางตัวได้แก่ r_r, τ, ϕ, r_{tet} และ r_{bis} มีข้อจำกัดดังนี้

ก. การทดสอบความมีนัยสำคัญของ r_r ใช้ได้ต่อเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดไม่ต่ำกว่า 25

ข. การทดสอบความมีนัยสำคัญของ τ ใช้ได้ต่อเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดมากกว่า 10

ค. การทดสอบความมีนัยสำคัญของ ϕ ใช้ได้ต่อเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดไม่ต่ำกว่า 30

ง. การทดสอบความมีนัยสำคัญของ r_{tet} ใช้ได้ต่อเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดมากกว่า 30 และ p_x กับ p_y ไม่ต่างกันมาก (p_x กับ p_y เป็นสัดส่วนของจำนวนสมาชิกที่มีลักษณะที่สนใจของตัวแปร X กับตัวแปร Y ซึ่งเราหาความสัมพันธ์ ตามลำดับ)

จ. การทดสอบความมีนัยสำคัญของ r_{bis} ใช้ได้ต่อเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดมากกว่า 30 และ n_1/n กับ n_0/n มีค่ามากกว่า 0.1 (n_1= จำนวนสมาชิกของกลุ่มตัวอย่างที่มีลักษณะที่สนใจ, n_0= จำนวนสมาชิกของกลุ่มตัวอย่างที่ไม่มีลักษณะที่สนใจ = $n-n_1$)

11. เมื่อใช้เป็นค่าประมาณการทดสอบแบบไม่มีพารามิเตอร์บางอย่าง มีข้อจำกัดเกี่ยวกับขนาดของกลุ่มตัวอย่าง ดังนี้

ก. การทดสอบเครื่องหมาย (Sign Test) ใช้การแจกแจงปกติประมาณได้ต่อเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดไม่ต่ำกว่า 10

ข. การทดสอบลำดับที่ซึ่งมีเครื่องหมาย (Wilcoxon Signed-Rank Test) ใช้การแจกแจงปกติประมาณได้ต่อเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดไม่ต่ำกว่า 8

ค. การทดสอบคายู (Mann-Whitney U Test) ใช้การแจกแจงปกติประมาณได้ต่อเมื่อกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มมีขนาดไม่ต่ำกว่า 8

ง. การทดสอบความสุ่ม (Run Test) ใช้การแจกแจงปกติประมาณได้ต่อเมื่อกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มมีขนาดมากกว่า 10

ข้อเสนอแนะ

สำหรับผู้ที่จะนำการแจกแจงปกติไปใช้ ก่อนจะตัดสินใจใช้ จำเป็นต้องพิจารณาถึงข้อตกลงเบื้องต้น ความเหมาะสม ปัญหา และข้อจำกัดในการใช้ให้ดีเสียก่อน มิฉะนั้น อาจจะใช้ผิด ทำให้ผลสรุปที่ได้ไม่น่าเชื่อถือ เมื่อเห็นว่า ไม่ค่อยเหมาะที่จะใช้การแจกแจงปกติก็ควรเลือกใช้วิธีการอื่นที่จะให้ความเชื่อมั่นได้มากกว่า ทั้งนี้ต้องพิจารณาถึง ข้อตกลงเบื้องต้น ปัญหา และข้อจำกัดในการใช้เช่นเดียวกัน

สำหรับผู้ที่สนใจจะศึกษาค้นคว้าในด้านนี้ต่อไป ควรจะได้ศึกษาเปรียบเทียบว่า ในกรณีที่อาจจะใช้ได้ทั้งการแจกแจงปกติและวิธีการอื่น อย่างไหนจะเหมาะสมกว่า เมื่อพิจารณาในด้านประสิทธิภาพ (Efficiency) ความสะดวกในการใช้ (ease of applications) และอื่น ๆ โดยอาจทำเป็นตารางเปรียบเทียบค่าที่วัดประสิทธิภาพทางสถิติ เพื่อให้เห็นได้ชัดเจนเป็นกรณี ๆ ไป