บทที่ 3

การวิเคราะห์และผลการวิเคราะห์ข้อมูล

1. การแจกแจงปกติ

1.1 ประวัติการพัฒนาของการแจกแจงปกติ

อับราฮัม เดอ มัว (Abraham De Moire, 1667-1754) นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสผู้ใช้ชีวิตอยู่ในอังกฤษถึง 66 ปี ค้นพบการแจกแจงปกติเป็นคนแรก เมื่อปี 1733 โดยเขาสร้างการแจกแจงปกติขึ้นมาเป็นรูปที่จำกัดรูปหนึ่งของการแจกแจงทวินาม เพื่อสะดวกในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับความน่าจะเป็น ซึ่งนักการพนันในสมัยนั้นเสนอแก่เขา เนื่องจากที่มาดังกล่าว บางครั้งจึงเรียกโค้งของการแจกแจงปกติ หรือโค้งปกติ ว่า โค้งความน่าจะเป็นตามปกติ (The Normal Probability Curve)[1] แต่ผลงานครั้งนี้ไม่เป็นที่แพร่หลาย

การใช้การแจกแจงปกติอย่างเป็นสถิติจริง ๆ นั้น เริ่มจากผลงานของปิแอร์ ลาปลาส (Pierre Laplace, 1749-1827) นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส กับคาร์ล เกาส์ (Carl Gauss, 1777-1855) นักคณิตศาสตร์ นักฟิสิกส์ และนักดาราศาสตร์ชาวเยอรมัน ทั้งลาปลาสและเกาส์ ต่างฝ่ายต่างค้นพบการแจกแจงปกติโดยไม่ทราบถึงผลงานของเดอ มัว เขาพบว่า การแจกแจงของความคลาดเคลื่อนในการวัดทางวิทยาศาสตร์กายภาพ สามารถประมาณได้อย่างใกล้เคียงโดยใช้โค้งปกติ ซึ่งเขาเรียกว่าโค้งปกติของความคลาดเคลื่อน (The Normal Curve of Errors) และถือว่าเป็น กฎแห่งความน่าจะเป็น (The Laws of Chance)[2]

---

[1] J.F. Kenney and E.S. Keeping, Mathematics of Statistics (3a ed.; New Delhi: Affiliated East-West Press PVT.Ltd., 1965)p.109.

[2] John E. Freund, Mathematical Statistics (New Delhi: Prentice Hall of India PVT.Ltd., 1964), p. 128.

ผลงานของลาปลาสกับเกาส์ เป็นที่รู้จักและนำไปใช้ประโยชน์อย่างกว้างขวาง เพราะการแจกแจงปกติสามารถใช้อธิบายการแจกแจงของตัวแปรหลายอย่างในทางชีววิทยา สังคมวิทยา การศึกษาและจิตวิทยา ทฤษฎีสถิติหลายทฤษฎีก็มีพื้นฐานมาจากการแจกแจงปกติ อนึ่ง เพื่อเป็นเกียรติแก่บุคคลทั้งสอง บางครั้งจึงเรียกการแจกแจงปกติว่า การแจกแจงของลาปลาส (Laplacian Distribution) หรือ การแจกแจงของเกาส์ (Gaussian Distribution) แต่ไม่ค่อยนิยมเรียกกัน ทั้ง ๆ ที่คำว่า ปกติ (Normal) ไม่เหมาะนัก เนื่องจากมันชวนให้คิดว่าการแจกแจงชนิดอื่นผิดปกติ (Abnormal) ซึ่งไม่ถูกต้อง อันที่จริงควรพิจารณาการแจกแจงปกติว่า เป็นการแจกแจงความถี่ที่สำคัญชนิดหนึ่งในหลาย ๆ ชนิดเท่านั้น แต่ก็จัดว่าเป็นการแจกแจงความถี่ที่มีความสำคัญมาก[3]

1.2 ความสำคัญของการแจกแจงปกติ

การแจกแจงปกติ เป็นพื้นฐานที่สำคัญของทฤษฎีสถิติปัจจุบัน และสามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้หลายด้าน เฮส์ (Hays)[4] มูด (Mood) กับเกรย์บิล (Graybill)[5] และสนีเดอคอร์ (Snedecor) กับ คอคแรน (Cochran)[6] ได้ให้เหตุผลแสดงถึงความสำคัญของการแจกแจงปกติไว้ดังนี้

1) ประชากรที่ได้จากการวัด อาจถือว่ามีการแจกแจงปกติ ทั้งนี้เนื่องมาจากธรรมชาติของการวัด ประชากรดังกล่าวแบ่งเป็น

ก. ข้อมูลทางชีววิทยา เช่น สัดส่วนของจำนวนทารกหญิงและชายที่เกิดในประเทศหนึ่ง ๆ ในคาบหนึ่ง ๆ สัดส่วนของพืชและสัตว์ชนิดต่าง ๆ เมื่อทำการ

---

[3]John I. Griffin, Statistics: Methods and Applications (New York: Holt, Rinehart and Winston, 1962), p. 127.

[4]William L. Hays, Statistics for Psychologists (New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1965), pp. 225-227.

[5]Alexander M. Mood and Franklin A. Graybill, Introduction to the Theory of Statistics (2d ed.; New York: McGraw-Hill Book Company, 1963), pp. 156-157.

[6]George W. Snedecor and William G. Cochran, Statistical Method (6th ed.; Ames, Iowa: The Iowa State University Press, 1971), p. 35.

ผสมพันธุ์ข้ามชนิด (ตามกฎของเมนเดล)

ข. ข้อมูลทางมนุษยวิทยา เช่น ส่วนสูง น้ำหนัก ดัชนีส่วนศีรษะ ฯลฯ ของคนกลุ่มใหญ่ที่เป็นเพศเดียวกันและวัยเดียวกัน

ค. ข้อมูลทางเศรษฐกิจและสังคม เช่น อัตราเกิด อัตราตาย อัตราสมรส ในสภาวะปกติ ค่าจ้างและผลิตผลของคนงานที่ทำงานอย่างเดียวกัน

ง. การวัดทางจิตวิทยา เช่น สติปัญญาของคนเมื่อวัดโดยใช้แบบทดสอบมาตรฐาน อัตราเร่งในการสร้างคำสังสรรค์ ระยะเวลาในการมีปฏิกิริยาตอบสนอง คะแนนทดสอบทางการศึกษา

จ. ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการสังเกตหรือการวัด (Errors of observation) เช่น การวัดส่วนสูง การวัดอัตราเร็วในการเคลื่อนไหว การวัดลักษณะทางกายภาพและทางสมอง เป็นต้น ความคลาดเคลื่อนจะทำให้ตัวแปรเหล่านี้มีค่าเบี่ยงเบนไปจากค่าจริง ทั้งมากและน้อยกว่าค่าจริง ความถี่ของความคลาดเคลื่อนขนาดต่าง ๆ จะประมาณได้อย่างใกล้เคียงกับโค้งปกติ[7]

2) ในกรณีที่ประชากรที่ได้จากการวัดแจกแจงไม่ปกติ อาจทำให้แจกแจงเข้าใกล้ปกติได้โดยการเปลี่ยนมาตราวัดอย่างง่าย ที่ใช้กันบ่อยคือ ถอดรากที่สองของค่าตัวแปร หรือเปลี่ยนค่าตัวแปรเป็นค่าล็อก (Log)

3) เมื่อถือว่าประชากรแจกแจงปกติ การคำนวณจะทำได้สะดวก ปัญหาทางคณิตศาสตร์สถิติจำนวนมากมายที่แก้ได้ในรูปของการแจกแจงของประชากรปกติเท่านั้น อาศัยคุณสมบัติทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญของการแจกแจงปกติ ทำให้นักสถิติสามารถพัฒนาทฤษฎีสถิติขึ้นมาหลายทฤษฎี การแจกแจงปกติจึงเป็น "ต้นกำเนิด (Parent)" ของการแจกแจงตามทฤษฎีอื่น ๆ ที่สำคัญหลายอย่าง

---

[7]Henry E. Garrett, Statistics in Psychology and Education (5th ed.; Bombay: Vakils, Felfar and Simons Private Ltd., 1964), p.95.

4) อาจใช้การแจกแจงปกติเป็นค่าประมาณที่ดี (Good approximation) ของการแจกแจงตามทฤษฎีอื่น ๆ ที่ไม่อาจคำนวณค่าความน่าจะเป็นจากการแจกแจงนั้น ๆ โดยตรงได้ หรือคำนวณได้ยาก เช่น เมื่อประชากรทวินามมีขนาดใหญ่มาก ๆ การคำนวณความน่าจะเป็นจากการแจกแจงทวินามโดยตรงย่อมทำได้ยาก ก็อาจใช้การแจกแจงปกติเป็นค่าประมาณของการแจกแจงทวินามภายใต้เงื่อนไขบางอย่างได้ แม้ว่าการแจกแจงปกติจะเป็นการแจกแจงแบบต่อเนื่อง ส่วนการแจกแจงทวินามเป็นการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องก็ตาม

5) การแจกแจงตัวอย่าง (Sampling Distribution) ของค่าสถิติหลายค่าเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่ จะเข้าใกล้การแจกแจงปกติ แม้ว่าการแจกแจงของประชากรของกลุ่มตัวอย่างไม่เป็นปกติก็ตาม

1.3 ความหมายและลักษณะทางคณิตศาสตร์ของการแจกแจงปกติ

การแจกแจงปกติ เป็นการแจกแจงความถี่ของเหตุการณ์หนึ่ง ๆ โดยมีความถี่สูงรวมอยู่ที่จุดศูนย์กลางและกระจายออกไปทางค่าสูงและค่าต่ำอย่างสม่ำเสมอ หรือสมมาตร (Symmetry) กันทั้งสองด้าน[8]

ในทางคณิตศาสตร์สถิติอาจนิยามการแจกแจงปกติดังนี้

นิยาม: ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงเป็นปกติ ถ้า density function ของมันเป็น

$$f(x) = k\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2} \; ; \quad -\infty < x < \infty$$ [9]

$e = 2.71828$

α และ $\beta > 0$ เป็นค่าคงที่

k มีค่าที่ทำให้ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ = พื้นที่ใต้โค้งปกติ = 1

สามารถพิสูจน์ได้ว่า

1) $k = \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}}$

---

[8] Taro Yamane, Statistics: An Introductory Analysis (2d ed.; New York: Harper & Row, 1967), p. 114.

[9] Freund, op.cit., pp. 128-130.

2) $\alpha = \mu$ (มัชฌิม) และ $\beta = \sigma$ (ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน) ของการแจกแจงปกติ

<u>พิสูจน์</u> 1) พิสูจน์ว่า $k = \dfrac{1}{\beta\sqrt{2\pi}}$

เนื่องจาก $f(x)$ เป็น density function แสดงว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = k\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2} dx = 1$$

ให้ $u = \dfrac{x-\alpha}{\beta}$ จะได้

$$k\beta\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 1$$

หรือ
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \frac{1}{k\beta}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \frac{1}{k^2\beta^2}$$

เปลี่ยน u ในการอินติเกรตอันหลังเป็น v ;

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv = \frac{1}{k^2\beta^2}$$

เปลี่ยนให้อยู่ในรูปโพลาร์โคออร์ดิเนต (Polar coordinate) โดยให้ $u = r\cos\theta$ และ $v = r\sin\theta$ จะได้

$$\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} r.e^{-\frac{1}{2}r^2}\,dr\,d\theta = \frac{1}{k^2\beta^2}$$

$$2\pi = \frac{1}{k^2\beta^2}$$

$$\therefore \quad k = \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}}$$

<u>พิสูจน์</u> 2) พิสูจน์ว่า $\alpha = \mu$ (มัชฌิม) และ $\beta = \sigma$ (ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน) ของการแจกแจงปกติ

$$\because \quad \mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, dx$$

$$\therefore \quad \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2} dx$$

ให้ $y = \frac{x-\alpha}{\beta}$ จะได้

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\beta y+\alpha) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$= \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y\, e^{-\frac{1}{2}y^2} dy + \alpha \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy\right]$$

แต่ $\frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y\, e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = 0$ เพราะ $\phi(-y) = -\phi(y)$

และ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = 1$ เพราะเป็นการอินติเกรต density function ของการแจกแจงปกติจาก $-\infty$ ถึง ∞ โดยมี $\alpha = 0$ และ $\beta = 1$

$$\therefore \quad \mu = \alpha$$

ความแปรปรวน (Variance, σ^2) ของการแจกแจงปกติ ซึ่งมีพารามิเตอร์ $\alpha = \mu$ และ β จะเขียนได้เป็น

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\beta}\right)^2} dx$$

ให้ $y = \frac{x-\mu}{\beta}$ จะได้

$$\sigma^2 = \frac{\beta^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

แต่ $\theta(-y) = -\theta(y)$

$$\therefore \quad \sigma^2 = \frac{2\beta^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} y^2 e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

ให้ $z = \frac{1}{2} y^2$ จะได้

$$\sigma^2 = \frac{2\beta^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} z^{\frac{1}{2}} e^{-z} \, dz$$

$$= \frac{2\beta^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{2\beta^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$= \beta^2$$

$$\therefore \sigma = \beta$$

ดังนั้นจึงเขียน density function ของการแจกแจงปกติซึ่งมีมัชฌิม μ และความแปรปรวน σ^2 ได้เป็น

$$f(x) = n(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}; \quad -\infty < x < \infty$$

<u>Moment generating function ของการแจกแจงปกติ</u>[10]

<u>ทฤษฎี</u> ถ้าตัวแปรสุ่ม X มี density function $n(x; \mu, \sigma^2)$ ซึ่งแสดงว่ามีการแจกแจงเป็นปกติแล้ว moment generating function ของมันจะเป็น

$$m(t) = e^{t\mu + (\sigma^2 t^2)/2}$$

<u>พิสูจน์</u>

$$m(t) = E(e^{tx})$$

$$= e^{t\mu} E\left[e^{t(x-\mu)}\right]$$

$$= e^{t\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{t(x-\mu)} e^{-(1/2\sigma^2)(x-\mu)^2} \, dx$$

$$= \frac{e^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1/2\sigma^2)\left\{(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 t(x-\mu)\right\}} \, dx$$

$$= \frac{e^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1/2\sigma^2)\left\{(x-\mu-\sigma^2 t)^2 - \sigma^4 t^2\right\}} \, dx$$

---

[10] Mood and Graybill, <u>op.cit.</u>, p. 126.

$$= \frac{e^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu-\sigma^2 t)^2/2\sigma^2} e^{\sigma^2 t^2/2}\, dx$$

$$= e^{t\mu} e^{\sigma^2 t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu-\sigma^2 t)^2/2\sigma^2}\, dx$$

แต่ $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu-\sigma^2 t)^2/2\sigma^2}\, dx = 1$$

เพราะเป็นพื้นที่ใต้โค้งปกติที่มีมัชฌิม $\mu+\sigma^2 t$ และความแปรปรวน σ^2

$\therefore \quad m(t) = e^{t\mu+\sigma^2 t^2/2}$

เมื่อให้ $t = 0$ แล้วดิฟเฟอเรนติเอท (Differentiate) ฟังก์ชั่นนี้ 2 ครั้ง

จะได้ $\mu_1' = \mu =$ มัชฌิม

$\mu_2' = \sigma^2+\mu^2$

$\therefore$ ความแปรปรวน $= \mu_2'-(\mu_1')^2$

$= \sigma^2+\mu^2-\mu^2$

$= \sigma^2$

<u>ฟังก์ชั่นของการแจกแจงปกติสะสม</u> (Cumulative Normal Distribution Function)[11]

$\because \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$

$\therefore \quad F(x) = N(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2}\, dt$

เนื่องจาก density function $n(x;\mu,\sigma^2)$ สมมาตรรอบ μ

แสดงว่า $n(\mu-a) = n(\mu+a)$

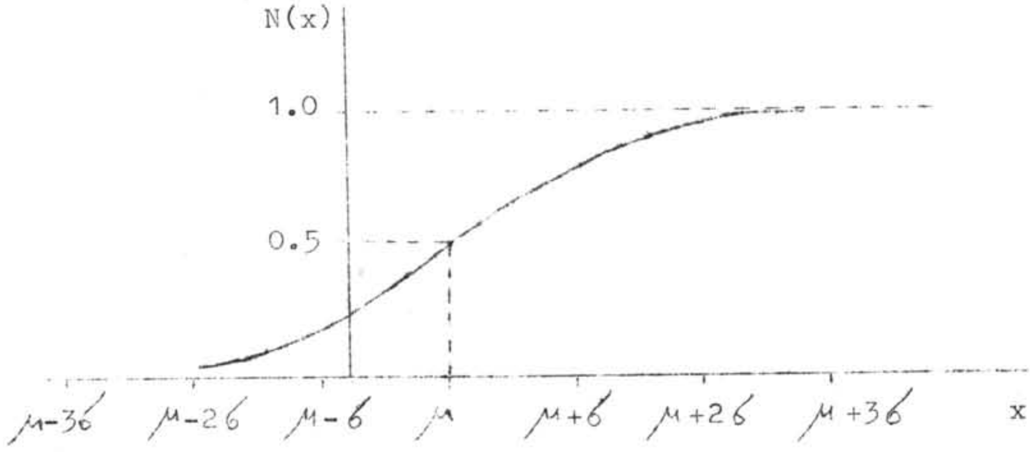
จะได้ว่า สำหรับ $(x-\mu)/\sigma$ ที่เป็นลบ

---

[11] <u>Ibid.</u>, p. 127.

$$N(x) = 1 - N(x')$$

โดยที่ $$(x' - \mu)/\sigma = -(x - \mu)/\sigma$$



ภาพที่ 1 แสดงกราฟของฟังก์ชั่นของการแจกแจงปกติสะสม

1.4 คุณสมบัติของการแจกแจงปกติ

1.4.1 คุณสมบัติทางคณิตศาสตร์

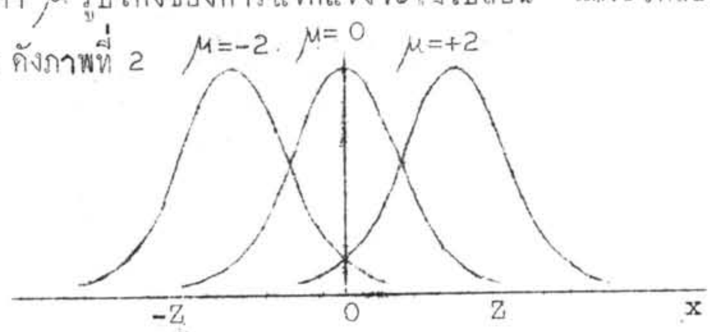
1) density function ของการแจกแจงปกติ คือ

$$n(x; \mu, \sigma^2) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} ; \; -\infty < x < \infty$$

โดยมีมัชฌิม = μ ; ความแปรปรวน = σ^2

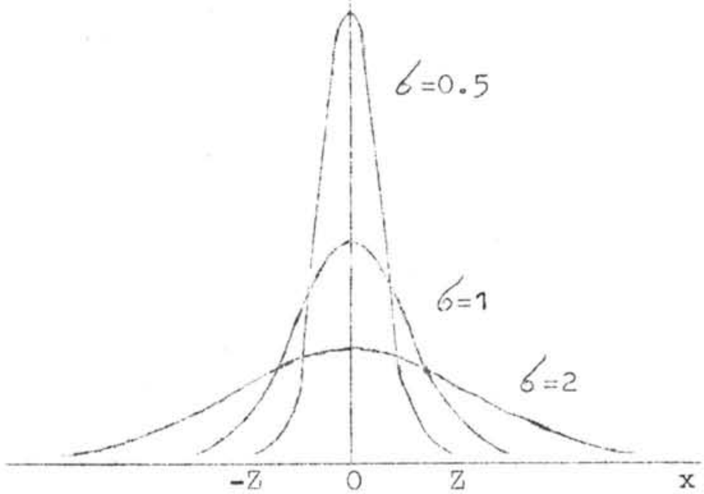
และ μ กับ σ เป็นพารามิเตอร์ของการแจกแจงปกติ

2) เมื่อเปลี่ยนค่า μ รูปโค้งของการแจกแจงจะไม่เปลี่ยน แต่จะเคลื่อนไปตามแกน x ดังภาพที่ 2



ภาพที่ 2 แสดงการแจกแจงปกติ เมื่อ μ ต่างกัน แต่ σ เท่ากัน

3) เมื่อเปลี่ยนค่า σ รูปโค้งของการแจกแจงจะเปลี่ยน ค่า σ มาก โค้งจะแบนลง ค่า σ น้อย โค้งจะโด่งขึ้น ดัง**ภาพที่ 3**



ภาพที่ 3 แสดงการแจกแจงปกติ เมื่อ μ เท่ากัน แต่ σ ต่างกัน

4) ฟังก์ชั่นกำหนดไปตลอดแกน **x** และมีค่าเป็นบวกสำหรับทุก ๆ ค่าของ x ดังนั้นเส้นโค้งของการแจกแจง (เรียกสั้น ๆ ว่า โค้งปกติ) จึงอยู่เหนือแกน **x** ทั้งหมด

5) ขีดจำกัดของฟังก์ชั่นเมื่อ **x** เข้าใกล้ $-\infty$ หรือ $+\infty$ เป็น 0 แกน x เป็นเส้นที่เข้าใกล้เส้นโค้งตามแนวนอนของกราฟ

6) จากการดิฟเฟอ เรนติเอท (Differentiate) ฟังก์ชั่นครั้งที่หนึ่ง

$$f'(x) = \frac{(x-\mu)}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

จะได้ว่า $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = \mu$

$f'(x) > 0$ เมื่อ $x < \mu$

และ $f'(x) < 0$ เมื่อ $x > \mu$

ดังนั้นค่าออร์ดิเนตที่มากที่สุดคือ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$

และเมื่อ $x<\mu$ หรือ $x>\mu$ ค่าออร์ดิเนตจะน้อยลง แต่จะไม่เป็น 0 เว้น

แต่ $(x-\mu)$ เข้าใกล้ ∞

ด้วยเหตุนี้ โค้งปกติจึงเป็นเส้นโค้งยอดเดี่ยว (Unimodal) รูประฆังซึ่งค่อย ๆ ลาดลงสู่แกน x และยื่นออกไปทั้งสองข้างอย่างไม่มีที่สิ้นสุด

7) การแจกแจงปกติมีลักษณะสมมาตร (Symmetrical Distribution) รอบ μ ทั้งนี้เพราะตัวแปรอิสระในสมการของฟังก์ชั่นอยู่ใน $(x-\mu)^2$ เท่านั้น ค่า x ที่ต่างกัน 2 ค่าซึ่งมี $|x-\mu|$ เท่ากัน จึงมี density เหมือนกัน

8) จุดเปลี่ยนโค้ง (Points of inflection) หาได้จากการดิฟเฟอเรนทิเอทฟังก์ชั่นครั้งที่ 2 จะได้

$$f''(x) = \left\{-\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\right\}\left\{1-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\}$$

$f''(x)$ จะเป็น 0 เมื่อ $x=\mu+\sigma$ และ $x=\mu-\sigma$

และเมื่อ $x=\mu+\sigma\ ;\quad f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$

$x=\mu-\sigma\ ;\quad f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$

ดังนั้น จุดเปลี่ยนโค้งจะอยู่ที่

$\left[\mu-\sigma, 1/(\sigma\sqrt{2\pi e})\right]$ และ $\left[\mu+\sigma, 1/(\sigma\sqrt{2\pi e})\right]$

1.4.2 <u>คุณสมบัติทางสถิติ</u>

1) ทุกรายการของข้อมูลจะรวมอยู่ภายใต้เส้นโค้งปกติและอยู่เหนือแกน **x**

2) มัชฌิม (Mean) มัธยฐาน (Median) และฐานนิยม (Mode) มีค่าเท่ากัน

3) ช่วง $\mu \pm 1$, 2 และ 3σ จะรวมรายการข้อมูลอยู่ร้อยละ 68.27, 95.45 และ 99.73 ตามลำดับ

4) ช่วง $\mu \pm .6745\sigma$ จะมีรายการข้อมูลอยู่ร้อยละ 50 ช่วงนี้เรียกว่า Probable error (P.E.)

5) ส่วนเบี่ยงเบนควอไตล์ (Quartile deviation) หรือ Semi interquartile range $\dfrac{Q_3-Q_1}{2}$ = Probable error (P.E.)

6) ค่า Q_1 และ Q_3 จะมีระยะห่างจากมัธยฐานเท่ากัน

7) ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย (Average deviation, A.D.) = .7979 σ

8) Probable error (P.E.) = .845 A.D.

9) การเปลี่ยนมาตราวัดแบบเส้นตรง (Linear transformation of Scale)[12]

ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่ม 2 ตัว

$Y = aX+b;\ (a \neq 0)$ และ $X \sim n(\mu, \sigma^2)$ ซึ่งหมายความว่า X มีการแจกแจงปกติโดยมีมัชฌิม μ และความแปรปรวน σ^2 แล้ว

$Y \sim n(a\mu+b,\ a^2\sigma^2)$

ในการเปลี่ยน X ให้เป็นคะแนนมาตรฐานก็เป็นการเปลี่ยนมาตราวัดแบบเส้นตรงของ X โดยให้ $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ และ $X \sim n(\mu, \sigma^2)$ แล้ว

$Z \sim n(0,1)$

10) Linear combination ของตัวแปรที่มีการแจกแจงปกติ[13]

ถ้า $Y = \sum_{i=1}^{k} a_k X_k$ โดยที่ $X_k \sim n(\mu_k, \sigma_k^2)$

X เป็นตัวแปรสุ่มอิสระ และ a เป็นค่าถ่วงน้ำหนัก (ทุกตัวไม่เป็นศูนย์)

แล้ว $Y \sim n(\sum_{i=1}^{k} a_k\mu_k,\ \sum_{i=1}^{k} a_k^2 \mu_k^2)$

พึงสังเกตว่า มัชฌิมของกลุ่มตัวอย่างสุ่มก็เป็น linear combination ของตัวแปรสุ่มซึ่งรวมกันเป็นกลุ่มตัวอย่างนั้น

สมมุติว่า $\bar{X}$ เป็นมัชฌิมของกลุ่มตัวอย่างสุ่มกลุ่มหนึ่งซึ่งประกอบด้วยสมาชิก n ตัวที่เป็นอิสระ

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n = \frac{1}{n}(X_1+X_2+\ldots+X_n)$$

ในที่นี้ $\frac{1}{n}$ เป็นค่าถ่วงน้ำหนักของค่า X แต่ละตัว

ถ้า X มีมัชฌิม μ และความแปรปรวน σ^2 แล้ว $\bar{X}$ จะมีมัชฌิม $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \mu_i$

---

[12]Lincoln L. Chao, Statistics: Methods and Analyses (New York: McGraw-Hill Book Company, 1969), p. 177.

[13]Ibid., pp. 177-178.

ซึ่งเท่ากับ μ และความแปรปรวน $\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{n})^2\sigma_i^2 = \frac{1}{n^2}\ n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

นอกจากนี้ ถ้าค่าของ x แจกแจงเป็นปกติ $\bar{x}$ ก็จะแจกแจงเป็นปกติด้วย

นั่นคือ ถ้า $x \sim n(\mu,\sigma^2)$ และ $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$ แล้ว $\bar{x} \sim n(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

กล่าวอีกนัยหนึ่ง ถ้าสุ่มตัวอย่างสุ่มซึ่งประกอบด้วยสมาชิกที่เป็นอิสระ n ตัว ได้จากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ การแจกแจงตัวอย่าง (Sampling distribution) ของมัชฌิมจะเป็นปกติด้วย โดยไม่คำนึงถึงขนาดของ n

1.5 <u>การแจกแจงปกติมาตรฐาน</u> (Standard Normal Distribution)

$$n(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2}; \quad -\infty < x < \infty$$

เป็น density function ของการแจกแจงปกติซึ่งมีมัชฌิม μ และความแปรปรวน σ^2

เมื่อให้ $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ density function ข้างบนจะกลายเป็น

$$n(Z;\ 0,\ 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Z^2/2}; \quad -\infty < Z < \infty$$

ซึ่งเป็น density function ของการแจกแจงปกติมาตรฐาน โดยมีมัชฌิม = 0 และความแปรปรวน = 1

<u>พิสูจน์ว่า</u> การแจกแจงปกติมาตรฐานมีมัชฌิม = 0 และความแปรปรวน = 1[14]

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} Z\, n(Z)\, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} Z \frac{e^{-Z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dZ$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -Z\, e^{-Z^2/2}\, dZ$$

---

[14]Marek Fisz, <u>Probability Theory and Mathematical Statistics</u> (3d ed.; New York: John Wiley &Sons, Inc., 1963), pp. 66-69.

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-Z^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= 0$$

$$E(Z^2) = \int_{-\infty}^{\infty} Z^2 n(Z)\, dZ$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} Z^2 \frac{e^{-Z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dZ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-Z)(-Z\, e^{-Z^2/2})\, dZ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-Z\, e^{-Z^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Z^2/2}\, dZ$$

$$= 1$$

$$Var(Z) = E(Z^2) - \left[E(Z)\right]^2$$

$$= 1-0$$

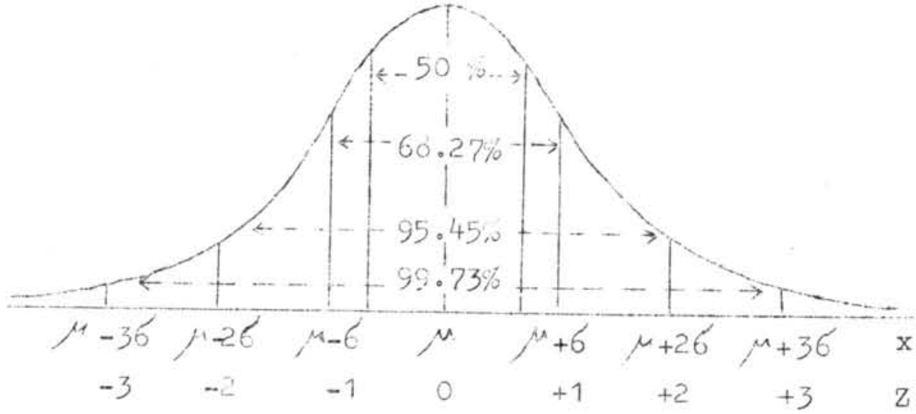
$$= 1$$

ฟังก์ชั่นของการแจกแจงปกติสะสมในรูปมาตรฐานจะเป็น

$$N(Z;0,1) = \int_{-\infty}^{Z} n(t;0,1)\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{Z} e^{-t^2/2}\, dt$$

ค่าฟังก์ชั่น $N(Z;0,1)$ สำหรับแต่ละค่าของ t เราไม่จำเป็นต้องคำนวณเอง เพราะนักสถิติได้คำนวณและทำเป็นตารางไว้แล้ว [ดูที่ตาราง (4) ภาคผนวก ข.]



ภาพที่ 4 แสดงการแจกแจงปกติมาตรฐาน และร้อยละของรายการข้อมูลที่กระจายอยู่ในช่วงต่าง ๆ รอบมัชฌิม

1.6 <u>การคำนวณความน่าจะเป็นของการแจกแจงปกติ</u>

เนื่องจากเราสามารถเปลี่ยนการแจกแจงปกติซึ่งมีมัชฌิม (μ) และความแปรปรวน (σ^2) ต่าง ๆ กันให้อยู่ในรูปมาตรฐานรูปเดียวกันได้ดังกล่าวแล้ว การมีตารางพื้นที่ (หรือความน่าจะเป็น) ของการแจกแจงปกติมาตรฐานเพียงอันเดียวย่อมพอเพียงที่จะใช้คำนวณความน่าจะเป็นสำหรับการแจกแจงปกติทุกๆ อัน และการแจกแจงปกติสมมาตรรอบมัชฌิม จึงใช้ตารางความน่าจะเป็นสำหรับค่า z ที่เป็นบวก หาความน่าจะเป็นสำหรับค่า z ที่เป็นลบได้

ความน่าจะเป็นที่ตัวแปรปกติ x จะมีค่าในช่วงจาก a ถึง b หาได้จากตารางความน่าจะเป็นของการแจกแจงปกติมาตรฐานโดยที่

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$ [15]

<u>ตัวอย่าง</u> ถือว่าเกณฑ์ภาคเชาวน์ (I.Q.) ของคนทั่วไปมีการแจกแจงปกติ โดยมีมัชฌิม 100 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 10 ให้หาความน่าจะเป็นที่คนที่สุ่มมาแต่ละคนจะมีเกณฑ์ภาคเชาวน์

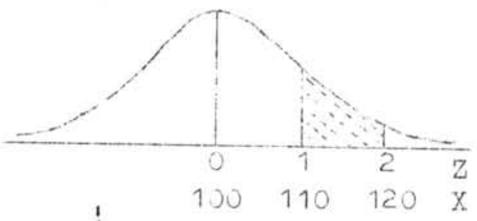
[15]Chao, <u>op.cit.</u>, p. 174.

ก. ระหว่าง 110-120

ข. ต่ำกว่า 90

ค. สูงกว่า 110

ก. $P(110 \leq X \leq 120) = P(\frac{110-100}{10} \leq Z \leq \frac{120-100}{10})$



$= P(1 \leq Z \leq 2)$

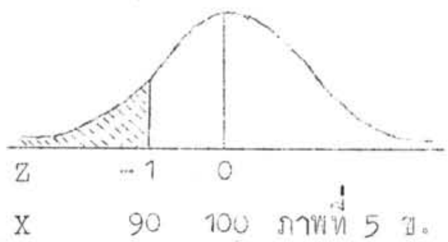
$= P(Z \leq 2) - P(Z \leq 1)$

$= 0.9772-0.8413$

ภาพที่ 5 ก.

$= 0.1359$

ข. $P(X \leq 90) = P(Z \leq \frac{90-100}{10})$



$= P(Z \leq -1)$

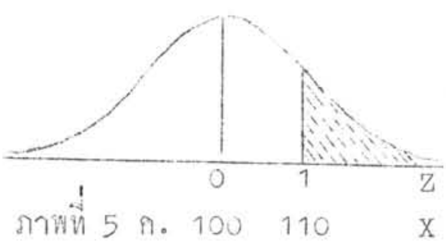
$= 1-P(Z \leq 1)$

$= 1.0.8413$

ภาพที่ 5 ข.

$= 0.1587$

$P(X \geq 110) = P(Z \geq \frac{110-100}{10})$



$= P(Z \geq 1)$

$= 1-P(Z \leq 1)$

$= 1-0.8413$

ภาพที่ 5 ค.

$= 0.1587$

ภาพที่ 5 การคำนวณความน่าจะเป็นของการแจกแจงปกติ

1.7 เกณฑ์ในการวัดความเป็นปกติของข้อมูล

วิธีการทางสถิติหลายวิธี ขึ้นอยู่กับ ข้อตกลงเบื้องต้นเกี่ยวกับความเป็นปกติของข้อมูล เกณฑ์การตัดสินความเป็นปกติของข้อมูลจึงน่าสนใจ เกณฑ์ที่สำคัญ ๆ ที่ใช้ตัดสินความเป็นปกติของข้อมูลมีดังต่อไปนี้

1.7.1 <u>ใช้ไคสแควทดสอบภาวะสารูปสนิทดีของการแจกแจงปกติ</u> (χ^2 Goodness of fit test of the Normal Distribution)

วิธีการ 1.1 นำข้อมูลมาจัดเป็นหมวดหมู่ ใส่ในตารางแจกแจงความถี่ คำนวณมัชฌิม และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูล

1.2 คำนวณความถี่ที่คาดหวัง (Expected frequency) ในแต่ละอันตรภาคชั้น โดยหาขีดจำกัดบนและล่างของแต่ละอันตรภาคชั้นเปลี่ยนเป็นคะแนนมาตรฐาน เปิดตารางพื้นที่ใต้โค้งปกติ จะได้ค่าความถี่สัมพัทธ์ (ความน่าจะเป็น) ที่ข้อมูลจะอยู่ในอันตรภาคชั้นนี้ คูณด้วยจำนวนข้อมูลทั้งหมด จะได้ความถี่ที่คาดหวังตามที่ต้องการ ถ้าอันตรภาคชั้นใดมีความถี่น้อยกว่า 5 ให้รวมเข้ากับอันตรภาคชั้นอื่น

1.3 ตั้งสมมุติฐานศูนย์ (Null Hypothesis) และสมมุติฐานสำรอง (Alternative Hypothesis)

1.4 กำหนดระดับความมีนัยสำคัญ และขอบเขตวิกฤต

1.5 สถิติที่ใช้ทดสอบคือ

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$$

โดยมีชั้นของความเป็นอิสระ (d.f.) = k-3

ในที่นี้ f_o = ความถี่ที่สังเกตได้(observed frequency)

f_e = ความถี่ที่คาดหวัง (expected frequency)

k = จำนวนอันตรภาคชั้น

<u>ตัวอย่าง</u> การทดสอบภาวะสารูปสนิทดีของการแจกแจงของคะแนนสอบของนักเรียน 500 คน ซึ่งมีมัชฌิมเป็น 51.33 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 14.46 [16]

คะแนน	ความถี่ที่สังเกตได้ f_o	ความถี่ที่คาดหวัง f_e	$f_o - f_e$	$(f_o - f_e)^2$	$(f_o - f_e)^2/f_e$
95-99	–	0.7			
90-94	3 } 7	1.4 } 5.5	1.5	2.25	0.41
85-89	4	3.4			
80-84	11	7.4	3.6	12.96	1.75
75-79	13	14.4	-1.4	1.96	0.14
70-74	18	24.9	-6.9	47.61	1.91
65-69	37	38.4	-1.4	1.96	0.05
60-64	50	52.4	-2.4	5.76	0.11
55-59	72	63.6	8.4	70.56	1.11
50-54	70	68.6	1.4	1.96	0.03
45-49	56	65.5	-9.5	90.25	1.38
40-44	58	55.9	2.1	4.41	0.08
35-39	50	42.2	7.8	60.84	1.44
30-34	30	28.3	1.7	2.89	0.10
25-29	13	16.9	-3.9	15.21	0.90
20-24	9	9.0	0.0	0.00	0.00
15-19	4	4.2			
10-14	2 } 6	1.8 } 7.0	-1.0	1.00	0.14
5-9	-	1.0			
รวม	500	500.0	0.0	—	9.55

ตารางที่ 1 การทดสอบภาวะสารูปสนิทดีของการแจกแจงปกติ

[16]Francis G. Cornell, <u>The Essentials of Educational Statistics</u> (New York: John Wiley & Sons, Inc., 1956), pp. 201-203.

คำนวณความถี่ที่คาดหวังดังตัวอย่างต่อไปนี้

ในอันตรภาคชั้น 60-64 ซึ่งมีความถี่ที่สังเกตได้ 50

ขีดจำกัดของคะแนนในอันตรภาคชั้นนี้เป็น 59.5-64.5

$$\therefore\ P(59.5 \leq X \leq 64.5) = P\left(\frac{59.5-51.33}{14.46} \leq Z \leq \frac{64.5-51.33}{14.46}\right)$$

$$= P(.565 \leq Z \leq .911)$$

$$= P(Z \leq .911) - P(Z \leq .565)$$

$$= .8189 - .7140$$

$$= .1049 = \text{ความถี่สัมพัทธ์}$$

$$\therefore\ \text{ความถี่ที่คาดหวัง} = .1049 \times 500 = 52.4$$

ความถี่ในอันตรภาคชั้น 3 ชั้นบนกับ 3 ชั้นล่าง น้อยกว่า 5 จึงรวมเข้าด้วยกัน

สมมุติฐาน H_o : การแจกแจงของคะแนนสอบชุดนี้เป็นปกติ

H_1 : การแจกแจงของคะแนนสอบชุดนี้เป็นปกติ

ระดับความมีนัยสำคัญ: $\alpha = .05$

ขอบเขตวิกฤต : $\chi^2_{(\text{ที่คำนวณได้})} \geq 21.026$ (d.f. 15-3 = 12)

การคำนวณ: $\chi^2 = \sum_{i=1}^{15} (\frac{f_o - f_e}{f_e})^2 = 9.55$

การตัดสินใจ $\chi^2 = 9.55 < 21.026$ จึงยอมรับสมมุติฐานสูญ สรุปได้ว่า การแจกแจงของคะแนนสอบชุดนี้เป็นปกติ

1.7.2 <u>ทดสอบความเบ้</u> (Test of skewness) [17]

ค่าที่ใช้วัดความเบ้ในการแจกแจงของประชากรก็อค่าเฉลี่ยของ $(X-\mu)^3$ ค่านี้เรียกว่า โมเมนต์ที่สามรอบมัชฌิม เมื่อหารด้วย σ^3 จะได้สัมประสิทธิ์ของความเบ้ (Coefficient of skewness) ใช้สัญลักษณ์ $\sqrt{\beta_1}$ หรือ γ_1

ค่าสถิติที่ใช้ประมาณค่าสัมประสิทธิ์ของความเบ้ คือ $\sqrt{b_1}$ หรือ g_1

---

[17] Snedecor and Cochran, <u>op.cit.</u>, p. 86.

$$\sqrt{b_1} = g_1 \quad = m_3/(\sqrt{m_2})^3$$

โดยที่ $$m_3 = \sum(X-\bar{X})^3/n$$

และ $$m_2 = \sum(X-\bar{X})^2/n$$

เราทราบว่า การแจกแจงปกติสมมาตรรอบมัชฌิม ดังนั้น พารามีเตอร์ γ_1 จะเป็นศูนย์ และค่าสถิติ g_1 ก็จะเข้าใกล้ศูนย์ ส่วนข้อมูลที่มีการแจกแจงเบ้ ค่า γ_1 หรือ g_1 จะไม่เป็นศูนย์ แต่อาจจะมีค่าเป็นบวกหรือลบ ถ้าเป็นบวก แสดงว่าเบ้ไปทางค่าสูง ถ้าเป็นลบแสดงว่าเบ้ไปทางค่าต่ำ

ในการตัดสินว่า สัมประสิทธิ์ของความเบ้ g_1 แตกต่างไปจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญหรือไม่ เราต้องทราบการแจกแจงตัวอย่าง (Sampling distribution) ของ g_1 ของกลุ่มตัวอย่างที่ได้จากประชากรปกติ การแจกแจงตัวอย่างของ g_1 ของกลุ่มตัวอย่างที่ได้จากประชากรปกติ จะเป็นปกติโดยประมาณ โดยมีมัชฌิมเป็น 0 และความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (Standard Error) เป็น $\sqrt{6/n}$ ดังนั้นค่า g_1 จะแตกต่างไปจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญถ้ามันมีค่ามากกว่า $2\sqrt{6/n}$

ข้อตกลงเบื้องต้นที่ว่า g_1 แจกแจงเป็นปกติสำหรับการทดสอบนี้ ถือว่าถูกต้อง เมื่อขนาดของกลุ่มตัวอย่าง (n) ตั้งแต่ 150 ขึ้นไป

สำหรับ n = 25 ถึง 200 ค่า g_1 ซึ่งมีนัยสำคัญที่ระดับ .05 กับ .01 ในการทดสอบทางเดียว ประมาณโดยใช้ตาราง (1)ในภาคผนวก ข.

1.7.3 <u>ทดสอบความโด่ง</u> (Test for kurtosis)[18]

ค่าที่ใช้วัดความโด่งของการแจกแจงของประชากรคือ ค่าเฉลี่ยของ$(X-\mu)^4$ หารด้วย σ^4 ใช้สัญญลักษณ์ β_2 สำหรับการแจกแจงปกติ $\beta_2 = 3$ ดังนั้น จึงกำหนดพารามีเตอร์ $\gamma_2 = \beta_2 - 3$ ใช้วัดความโด่งของการแจกแจงของข้อมูล

ถ้า $\gamma_2 = 0$ นั่นคือ $\beta_2 = 3$ แสดงว่าการแจกแจงของข้อมูลเป็นปกติ

ถ้า $\gamma_2 > 0$ นั่นคือ $\beta_2 > 3$ แสดงว่าการแจกแจงของข้อมูลเป็นเส้นโค้งสูงแหลม

---

[18] Ibid., pp. 86-87.

และถ้า $\gamma_2 < 0$ นั่นคือ $\beta_2 < 3$ แสดงว่า การแจกแจงของข้อมูลเป็นโค้งแบน ค่าสถิติที่ใช้ประมาณค่าความโค้งคือ g_2

$$g_2 = b_2 - 3 = (m_4/m_2^2) - 3$$

โดยที่ $m_4 = \sum(X-\bar{X})^4/n$ = โมเมนต์ตัวที่ 4 รอบมัชฌิมของกลุ่มตัวอย่าง ในการพิจารณาความมีนัยสำคัญของ g_2 ก็ต้องทราบถึงการแจกแจงของ g_2 การแจกแจงของ g_2 จะไม่เข้าใกล้ปกติ จนกว่า n จะมากกว่า 1000 สำหรับ n = 50ถึง1000 ค่า g_2 ซึ่งมีนัยสำคัญที่ระดับ .05 กับ .01 ประมาณโดยใช้ตาราง (2)ในภาคผนวก ข.

<u>ตัวอย่าง</u> การทดสอบความเบ้และความโค้งของคะแนนทางพลศึกษาของนักเรียน 36 คน[19]

คะแนน X	ความถี่ f	fX	$x=X-\bar{X}$	fx	fx^2	fx^3	fx^4
6	1	6	2.83	2.83	8.01	22.67	64.14
5	4	20	1.83	7.44	13.40	24.52	44.88
4	9	36	0.83	7.47	6.21	5.13	4.23
3	9	27	-0.17	-1.53	0.27	-0.05	0.01
2	12	24	-1.17	-14.04	16.44	-19.20	22.44
1	1	1	-2.17	-2.17	4.71	-10.22	22.17
รวม (Σ)	36	144	-	0.00 (ตรวจสอบ)	49.04	22.85	157.87

$$\bar{X} = \frac{144}{36} = 3.17$$

ตารางที่ 2 การทดสอบความเบ้และความโค้ง

<u>ทดสอบความเบ้</u>

$$g_1 = \frac{\Sigma fx^3/n}{(\sqrt{\Sigma fx^2/n})^3} = \frac{22.85/36}{(\sqrt{49.04/36})^3} = .40$$

---

[19]John G. Peatman, <u>Introduction to Applied Statistics</u> (New York: Harper & Row, 1964), p. 75.

จากตาราง (1) ในภาคผนวก ช. พบว่า ค่า g_1 = .40 ไม่มีนัยสำคัญที่ระดับ .05 จึงไม่มีหลักฐานพอที่จะสรุปว่า การแจกแจงของข้อมูลชุดนี้เบ้

ทดสอบความโด่ง

$$g_2 = \frac{\sum fx^4/n}{[\sum fx^2/n]^2} - 3 = \frac{157.87/36}{(49.04/36)^2} - 3 = -0.63$$

จากการประมาณโดยใช้ตาราง (2) ในภาคผนวก ช. พบว่า ค่า g_2 = -0.63 ไม่มีนัยสำคัญที่ระดับ .05 จึงไม่มีหลักฐานพอที่จะสรุปว่า การแจกแจงของข้อมูลชุดนี้โด่งหรือแบนกว่าการแจกแจงปกติ

1.7.4 <u>หาอัตราส่วนระหว่างส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยกับส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน</u> [20]

ตาราง (2) ในภาคผนวก ช. ใช้ประมาณค่าความมีนัยสำคัญของ g_2 ได้ดี เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดตั้งแต่ 200 ขึ้นไป ถ้ากลุ่มตัวอย่างขนาดเล็กจะใช้ได้ไม่ค่อยดี อาร์ ซี แกรี่ (R.C. Geary) จึงได้พัฒนาวิธีทดสอบความโด่งขึ้นมาอีกวิธีหนึ่งคือ

$$a = \frac{\text{ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย}}{\text{ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน}} = \frac{\sum|X-\bar{X}|/n}{\sqrt{\sum(X-\bar{X})^2/n}}$$

สามารถใช้ตาราง (2) ในภาคผนวก ช. ประมาณค่าความมีนัยสำคัญของ a ได้ สำหรับกลุ่มตัวอย่างมีขนาดตั้งแต่ 11 ขึ้นไป ถ้าประชากรมีการแจกแจงปกติ ค่า a ที่คำนวณได้จะเท่ากับ 0.7979 (ประมาณ $^4/_5$)

ข้อมูลซึ่งมีค่า g_2 เป็นบวก ค่า a จะมากกว่า 0.7979

ส่วนข้อมูลซึ่งมีค่า g_2 เป็นลบ ค่า a จะน้อยกว่า 0.7979

ข้อดีของการใช้ค่า a คือ คำนวณง่ายกว่า g_2 และใช้ตาราง (2) ในภาคผนวก ช. ประมาณค่าความมีนัยสำคัญได้เหมาะสม แม้เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก

จากตัวอย่างที่แล้ว ถ้าคำนวณค่า a จะได้

$$a = \frac{35.48/36}{\sqrt{49.04/36}} = 0.845$$

เมื่อประมาณโดยใช้ตาราง (2) ในภาคผนวก ช. พบว่า ค่า a ที่ได้ไม่มีนัยสำคัญที่ระดับ .05

---

[20] Snedecor and Cochran, <u>op.cit.</u>, p. 88.

พิสูจน์ว่า $\dfrac{\text{ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย}}{\text{ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน}}$ ของการแจกแจงปกติ $= 0.7979$ [21]

$$
\begin{aligned}
\text{ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย} &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x-\mu|\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\, dx \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |y|\, e^{-y^2/2\sigma^2}\, dy \\
&= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} y\, e^{-y^2/2\sigma^2}\, dy \\
&= \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-e^{-y^2/2\sigma^2}\right]_0^{\infty} \\
&= \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \\
&= (\text{ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน})(0.7979)
\end{aligned}
$$

2. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการใช้การแจกแจงปกติ

2.1 The Chebyshev Inequality[22]

กล่าวว่า "ความน่าจะเป็นที่ X จะแตกต่างไปจากค่าที่คาดหวัง $E(X) = \mu$ ของมันมากกว่า a เท่าของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ จะมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับส่วนกลับของa^2"

เมื่อเขียนเป็นสัญญลักษณ์ จะได้

$$P(|X-\mu| \geq a\sigma) \leq \frac{1}{a^2} \tag{1}$$

Inequality นี้ได้จากทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี ถ้าตัวแปรสุ่ม Y มีค่าไม่เป็นลบ และมีค่าที่คาดหวัง $E(Y)$ แล้ว สำหรับค่าสมมุติที่เป็นบวก K

$$P(Y \geq K) \leq \frac{E(Y)}{K} \tag{2}$$

---

[21] C.G. Paradine and B.H.P. Rivette, Statistics for Technologists (Princeton, New Jersey: D.Van Nostrand Company, Inc., 1953) p.82.

[22] Fisz, op.cit., pp.74-75.

<u>พิสูจน์</u> จะพิสูจน์ในกรณีที่ Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ถ้า Y เป็นตัวสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องก็อาจพิสูจน์ได้ทำนองเดียวกัน

$$E(Y) = \int_0^{\infty} yf(y)dy \geq \int_K^{\infty} yf(y)dy \geq K\int_K^{\infty} f(y)dy = KP(Y \geq K)$$

$$E(Y) \geq KP(Y \geq K) \quad \therefore \quad P(Y \geq K) \leq \frac{E(Y)}{K}$$

สมมุติว่า ตัวแปรสุ่ม X มีค่าที่คาดหวัง $E(X) = \mu$ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ

พิจารณาตัวแปรสุ่ม Y กำหนดให้ $Y = (X-\mu)^2$

จะเห็นได้ว่า Y มีคุณสมบัติตรงตามที่กำหนดในทฤษฎี เพราะ $Y \geq 0$ และมีค่าที่คาดหวัง

$$E(Y) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sigma^2$$

ให้ $K = a^2\sigma^2$

แทนค่า Y, E(Y) และ K ใน (2) ;

$$P\left[(X-\mu)^2 \geq a^2\sigma^2\right] \leq \frac{1}{a^2}$$

$$\therefore \quad P(|X-\mu| \geq a\sigma) \leq \frac{1}{a^2}$$

2.2 <u>The Law of Large Numbers</u>[23]

กล่าวว่า "ถ้ากลุ่มตัวอย่างสุ่มขนาด n ได้จากประชากรซึ่งมี density f(x) และมีค่าที่คาดหวังหรือมัชฌิม μ ความน่าจะเป็นที่มัชฌิมของกลุ่มตัวอย่าง(Sample Mean) $\bar{X}$ จะแตกต่างไปจาก μ น้อยกว่าค่าเล็ก ๆ ที่กำหนดใด ๆ จะสามารถทำให้เข้าใกล้ 1 ได้ตามที่ต้องการ"

อีกนัยหนึ่ง "สำหรับค่าเล็ก ๆ ϵ , δ ใด ๆ ที่เลือกมาโดยที่ $\epsilon > 0$, $0 < \delta < 1$ จะมีจำนวนเต็ม n ซึ่งถ้ากลุ่มตัวอย่างสุ่มขนาดเท่ากับหรือใหญ่กว่า n ได้จากประชากรที่มี density f(x) และมัชฌิมของกลุ่มตัวอย่างเท่ากับ $\bar{X}$ ความน่าจะเป็นที่ $\bar{X}$

---

[23]Mood and Graybill, <u>op.cit.</u>, pp. 147-149.

จะแตกต่างไปจาก μ น้อยกว่า $\in$ (แสดงว่า $\bar{X}$ เข้าใกล้ μ) จะมากกว่า $1-\delta$ (แสดงว่าความน่าจะเป็นเข้าใกล้ 1 ได้ตามที่ต้องการ)

<u>ทฤษฎี</u> ให้ f(x) เป็น density มีมัชฌิม μ และความแปรปรวน σ^2 ให้ $\bar{X}$ เป็นมัชฌิมของกลุ่มตัวอย่างสุ่มขนาด n ซึ่งได้จากประชากรที่มี density f(x) ให้ $\in$ กับ δ เป็นค่าเล็ก ๆ ที่กำหนดโดยที่ $\in > 0$ และ $0 < \delta < 1$ ถ้า n เป็นเลขจำนวนเต็มใด ๆ ซึ่งมีค่ามากกว่า $\sigma^2/\in^2\delta$ แล้ว

$$P(|\bar{X}-\mu| < \in) \geq 1-\delta \qquad (3)$$

<u>พิสูจน์</u> จาก Chebyshev Inequality

$$P(|X-\mu| \geq a\sigma) \leq \frac{1}{a^2}$$

เมื่อนำมาประยุกต์กับ $\bar{X}$ ซึ่งเป็นมัชฌิมของกลุ่มตัวอย่างขนาด n ที่ได้จากประชากรซึ่งมี density f(x) มีมัชฌิม μ และความแปรปรวน σ^2 เราทราบว่า $\mu_{\bar{X}} = \mu$ และ $\sigma^2_{\bar{X}} = \sigma^2/n$

ดังนั้นเราจะได้

$$P(|\bar{X}-\mu| \geq \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}) \leq \frac{1}{a^2} \qquad (4)$$

หรือเขียนอีกรูปหนึ่งได้เป็น

$$P(|\bar{X}-\mu| \leq \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}) \geq 1-\frac{1}{a^2} \qquad (5)$$

เลือกค่า a ให้ $\frac{1}{a^2} = \delta$ นั่นคือ $a^2 = \frac{1}{\delta}$, $a = \frac{1}{\sqrt{\delta}}$

เลือกค่า n ให้ $\frac{a\sigma}{\sqrt{n}} < \in$ นั่นคือ $n > \frac{\sigma^2}{\delta\in^2}$

แทนค่าใน (5);

$$\therefore \quad P(|\bar{X}-\mu| < \in) > 1-\delta$$

ทฤษฎีนี้เรียกว่า ทฤษฎีของคินท์ชีน (Khintchine's Theorem) สำหรับ Law of Large Numbers ตีพิมพ์เมื่อปี 1929 [24]

---

[24] Ya-lun Chou, <u>Statistical Analysis</u> (New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1969), p. 240.

2.3 The Central-limit Theorem[25]

ให้ f(x) เป็น density ซึ่งมีมัชฌิม μ และความแปรปรวน σ^2 ให้ $\bar{X}_n$ เป็นมัชฌิมของกลุ่มตัวอย่างขนาด n ซึ่งได้จากประชากรที่มี density f(x) ให้ Y_n เป็นตัวแปรสุ่มโดยที่

$$Y_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

density ของ Y_n จะเข้าใกล้การแจกแจงปกติ ซึ่งมีมัชฌิม 0 และความแปรปรวน 1 เมื่อ n เพิ่มขึ้นโดยไม่มีขีดจำกัด

หรือกล่าวอีกนัยหนึ่ง

ถ้าเราสุ่มตัวอย่างขนาด n จากประชากรซึ่งมีมัชฌิม μ และความแปรปรวน σ^2 และถ้า n มีขนาดใหญ่แล้ว การแจกแจงของมัชฌิมของกลุ่มตัวอย่างจะประมาณได้อย่างใกล้เคียงกับการแจกแจงปกติ ซึ่งมีมัชฌิม μ และความแปรปรวน σ^2/n

การพิสูจน์ทฤษฎีนี้ต้องใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ที่ยุ่งยากมาก จึงไม่อาจจะพิสูจน์ในที่นี้ได้ อย่างไรก็ตาม ในกรณีที่เราจำกัดโดยกำหนดให้การแจกแจงมี moment generating function เราอาจแสดงได้ว่า moment generating function ของมัชฌิมของกลุ่มตัวอย่างเข้าใกล้ moment generating function ของการแจกแจงปกติ ซึ่งเท่ากับเราได้วางโครงร่างในการพิสูจน์ทฤษฎีนี้

ให้ $Y = \frac{X' - \mu'}{\sigma'}$; X' มีการแจกแจงเป็นปกติ Moment generating function ของ Y จะเป็น

$$m_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} f(x'; \mu', \sigma'^2)\, dx' \qquad (1)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi}\,\sigma'} e^{t(x'-\mu')/\sigma'} e^{-\frac{1}{2}(x'-\mu')^2/\sigma'^2} \qquad (2)$$

$$= e^{\frac{1}{2}t^2} \qquad (3)$$

---

[25] Mood and Graybill, op.cit., pp. 149-152.

สมมุติให้ X มี density f(x) โดยมีมัชฌิม μ และความแปรปรวน σ^2 และมี moment generating function

moment generating function ของ $(X-\mu)/\sigma$ จะเป็น

$$m_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(x-\mu)/\sigma} f(x)dx \tag{4}$$

กลุ่มตัวอย่างขนาด n จะมีมัชฌิม $\bar{X}$ โดยมีการแจกแจงบางลักษณะ สมมุติให้มี density $g(\bar{x})$ ซึ่งเราทราบแล้วว่าจะต้องมีมัชฌิม μ และความแปรปรวน σ^2/n moment generating function สำหรับ $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ จะเป็น

$$m_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(t\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) g(\bar{x})dx \tag{5}$$

เราต้องการแสดงว่า $m_3(t)$ เข้าใกล้ $m_1(t)$ เมื่อ n ใหญ่

เราอาจกำหนด $m_3(t)$ ให้อยู่ในรูป $m_2(t)$

$m_3(t)$ เป็นค่าที่คาดหวัง

$$E\left[\exp\left(t\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right] = E\left[\exp\left(\frac{t}{n}\sum\frac{X_i-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right] \tag{6}$$

และเนื่องจากการแจกแจงร่วม (Joint distribution) ของ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็น $\prod_{i=1}^{n} f(x_i)$ เราจึงเขียนได้ว่า

$$\begin{aligned} M_3(t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{t}{\sqrt{n}}\sum\frac{x_i-\mu}{\sigma}} \prod_{i=1}^{n} f(x_i)\, dx_i \\ &= \prod_{i=1}^{n}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{t}{\sqrt{n}}\frac{x_i-\mu}{\sigma}} f(x_i)dx_i\right] \end{aligned} \tag{7}$$

จาก (4) เราจะเห็นว่า ตัวประกอบแต่ละตัวในผลคูณใน (7) เท่ากับ $m_2(t/\sqrt{n})$ ดังนั้น

$$m_3(t) = \left[m_2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n \tag{8}$$

derivativeตัวที่ r ของ $m_2(t/\sqrt{n})$ เมื่อ t = 0 จะเท่ากับ moment ตัวที่ r รอบมัชฌิม หารด้วย $(\sigma\sqrt{n})^r$ ดังนั้นเราอาจเขียนได้ว่า

$$m_2(t/\sqrt{n}) = 1+\frac{\mu_1}{\sigma}\frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2!}\frac{\mu_2}{\sigma^2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 + \frac{1}{3!}\frac{\mu_3}{\sigma^3}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3 + \ldots \tag{9}$$

แต่ $\mu_1 = 0$ และ $\mu_2 = \sigma^2$

$$\therefore \quad m_2(t/\sqrt{n}) = 1+\frac{1}{n}(\tfrac{1}{2}t^2+\frac{1}{3!\sqrt{n}}\frac{\mu_3}{\sigma^3}t^3+\frac{1}{4!\,n}\frac{\mu_4}{\sigma^4}t^4+\ldots) \qquad (10)$$

นั่นคือ $$m_3(t) = \left\{1+\frac{1}{n}(\tfrac{1}{2}t^2+\frac{1}{3!\sqrt{n}}\frac{\mu_3}{\sigma^3}t^3+\frac{1}{4!n}\frac{\mu_4}{\sigma^4}t^4+\ldots)\right\}^n \qquad (11)$$

จาก $$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{u}{n})^n = e^u$$

ให้ u แทนเทอมในวงเล็บใน (11) จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} m_3(t) = e^{\frac{1}{2}t^2} = m_1(t)$$

ดังนั้น เมื่อ $n\to\infty$ Z มี moment generating function เช่นเดียวกับ Y และย่อมมีการแจกแจงเป็นอย่างเดียวกัน

เพราะฉะนั้น เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่ เรากล่าวได้ว่า มัชฌิมของกลุ่มตัวอย่างมีการแจกแจงประมาณได้กับการแจกแจงปกติ ไม่ว่าการแจกแจงของประชากรจะเป็นอย่างไรก็ตาม ตามปกติการแจกแจงของมัชฌิมของกลุ่มตัวอย่างจะเข้าใกล้การแจกแจงปกติในช่วงรอบ ๆ มัชฌิมมากกว่าในระยะห่างจากมัชฌิมออกมา

ผู้ที่ตั้งชื่อทฤษฎีนี้ว่า Central Limit Theorem คือ จี.โพลยา (G. Polya) เมื่อปี 1920 ส่วนผู้ที่เสนอทฤษฎีนี้ขึ้นมาเป็นคนแรกคือ อับราฮัม เดอ มัว (Abraham De Moire, 1667-1754) เดอ มัว ได้อธิบายทฤษฎีนี้ไว้หลายแบบ แบบที่สำคัญอีกแบบหนึ่งอธิบายในรูปผลบวกของตัวแปรสุ่มอิสระที่มีการแจกแจงเหมือนกัน ดังนี้

ถ้า S เป็นผลบวกของตัวแปรสุ่มอิสระจำนวนมากที่มีการแจกแจงเหมือนกัน แต่ละตัวมีมัชฌิม μ และความแปรปรวน σ^2 แล้ว ตัวแปร $(S-n\mu)/\sigma\sqrt{n}$ จะแจกแจงเข้าใกล้การแจกแจงปกติมาตรฐาน เมื่อ n เข้าใกล้ ∞ ดังนั้นเมื่อ n ใหญ่ เราจึงสามารถประมาณความน่าจะเป็นของการแจกแจงของ S โดยอาศัยพื้นที่ใต้โค้งปกติได้ โดยที่

$$P(S \leq s) = P(Z \leq \frac{s-n\mu}{\sigma\sqrt{n}})$$ [26]

---

[26] Chou, <u>op.cit.</u>, pp. 242-243.

Central Limit Theorem เป็นทฤษฎีที่ช่วยเน้นความสำคัญของการแจกแจงปกติ ทำให้สามารถนำการแจกแจงปกติไปใช้ประโยชน์ได้อย่างกว้างขวาง เราสามารถประมาณค่าการแจกแจงอื่น ๆ ทั้งแบบต่อเนื่องและแบบไม่ต่อเนื่อง โดยใช้การแจกแจงปกติ ทั้งนี้มีข้อแม้ว่า ตัวแปรของการแจกแจงที่ต้องการประมาณค่า เป็นผลบวกของตัวแปรสุ่มอิสระที่มีการแจกแจงเหมือนกันและกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ

3. การใช้การแจกแจงปกติ

อาศัย Law of Large Numbers ซึ่งแสดงว่า ความถูกต้องในการประมาณค่ามัชฌิม (หรืออัตราส่วน) ของประชากร ด้วยมัชฌิม (หรืออัตราส่วน) ของกลุ่มตัวอย่างจะมีมากขึ้นเมื่อขนาดของกลุ่มตัวอย่างเพิ่มขึ้น กับ Central Limit Theorem ซึ่งอธิบายว่า การแจกแจงความน่าจะเป็นของค่าสถิติหลายค่าที่ได้จากกลุ่มตัวอย่าง หรือที่เรียกว่า การแจกแจงตัวอย่าง (Sampling Distribution) ของค่าสถิติ จะเป็นปกติหรือเข้าใกล้ปกติ เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ ไม่ว่าการแจกแจงของประชากรของกลุ่มตัวอย่างจะเป็นปกติหรือไม่ก็ตาม ทำให้เราสามารถประยุกต์ใช้การแจกแจงปกติในการศึกษาเรื่องราวของประชากรโดยอาศัยข้อมูลจากกลุ่มตัวอย่าง และใช้ในการประมาณค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงชนิดอื่น ได้หลายอย่าง

ปัญหามีว่า กลุ่มตัวอย่างควรจะมีขนาดเท่าใดจึงจะถือว่าใหญ่พอเพียงที่จะใช้การแจกแจงปกติได้เหมาะสม ปัญหานี้ไม่มีคำตอบที่แน่ชัดลงไป ขนาดกลุ่มตัวอย่างที่ถือว่าเหมาะสมขึ้นอยู่กับการแจกแจงของประชากร ความถูกต้องที่ต้องการในการประมาณ และขึ้นอยู่กับการประมาณในแต่ละกรณีโดยเฉพาะ จึงจะพิจารณาเป็นอย่าง ๆ ไป

3.1 ใช้ประมาณค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงตามทฤษฎีที่สำคัญบางอย่าง

การคำนวณความน่าจะเป็นของการแจกแจงตามทฤษฎีที่สำคัญ ๆ เป็นต้นว่า การแจกแจงทวินาม (Binomial Distribution) การแจกแจงปัวซอง (Poisson Distribution) และการแจกแจงแกมมา (Gamma Distribution) เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาด

ใหญ่ การคำนวณจะยุ่งยากมาก แต่จาก Central Limit Theorem เราทราบว่าเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ การแจกแจงตามทฤษฎีดังกล่าว จะเข้าใกล้การแจกแจงปกติ ดังนั้นปัญหาความยุ่งยากในการคำนวณจะหมดไป ถ้าเราใช้การแจกแจงปกติประมาณค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงตามทฤษฎีเหล่านั้น อย่างไรก็ตาม ในการประมาณค่าต้องคำนึงถึงความเหมาะสม ปัญหา และข้อจำกัดที่มีในแต่ละกรณีด้วย ผลที่ได้จึงจะน่าเชื่อถือ

3.1.1 ใช้ประมาณค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงทวินาม (The Normal Approximation to the Binomial Distribution)

การแจกแจงทวินามเกี่ยวข้องกับผลของการทดลองแบบทวินามซึ่งมีคุณสมบัติ ดังนี้

ก. การทดลองแต่ละครั้งให้ผลการทดลองอย่างหนึ่งในสองลักษณะ คือ สำเร็จ (Success) กับไม่สำเร็จ (Failure)

ข. ความน่าจะเป็นของการเกิด "สำเร็จ" คงที่ จากการทดลองครั้งหนึ่งไปสู่อีกครั้งหนึ่ง

ค. การทดลองแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกัน

ง. การทดลองทำซ้ำเป็นจำนวนจำกัด

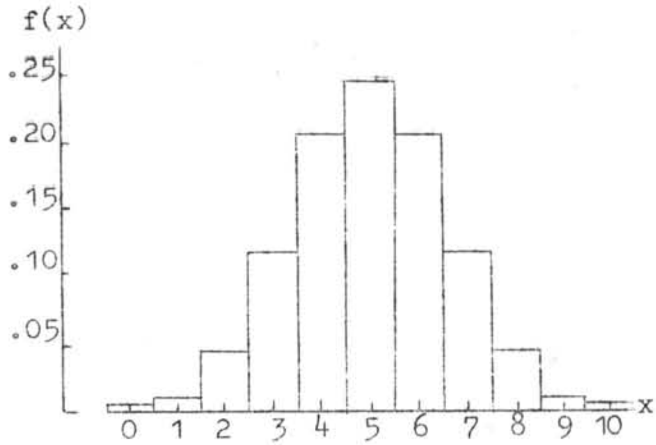
ถ้าการทดลองแบบทวินาม n ครั้งให้ผล "สำเร็จ" โดยมีความน่าจะเป็น p และให้ผล "ไม่สำเร็จ" โดยมีความน่าจะเป็น q = 1-p ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องแทนจำนวนครั้งของการเกิดผล "สำเร็จ" ในการทดลองแบบทวินาม n ครั้ง ซึ่งอาจมีค่า x=0, 1,....,n X จะมีการแจกแจงเป็นไป probability function ต่อไปนี้

$$P(X=x) = b(x;\, n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}\, p^x q^{n-x}$$ [27]

โดยมีมัชฌิม (Mean) = np และความแปรปรวน (Variance) = npq

---

[27] Meyer Dwass, Probability and Statistics (New York: W. A. Benjamin, Inc., 1973), p. 147.



ภาพที่ 6 แสดงการแจกแจงทวินาม $p=0.5,\ n=10$

เมื่อ n มีขนาดใหญ่ การคำนวณความน่าจะเป็นของ X ย่อมจะยุ่งยากมาก แต่อาศัย Central Limit Theorem เราอาจขจัดความยุ่งยากนี้ได้ โดยถือว่า X เป็นผลบวกของการทดลองทวินามที่เป็นอิสระ n ครั้ง เมื่อ n ใหญ่พอ ตัวแปรสุ่มทวินาม X จะแจกแจงเข้าใกล้ปกติ โดยมีมัชฌิม np และความแปรปรวน npq หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์

$$b(x;n,p) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{npq}\sqrt{2\pi}}e^{-(x-np)^2/2npq} \qquad ; \quad -\infty < x < \infty$$

ซึ่งเปลี่ยนให้อยู่ในรูปการแจกแจงปกติมาตรฐาน โดยให้ $z = \frac{x-np}{\sqrt{npq}}$ ทำให้สามารถใช้ตารางพื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐานประมาณค่าความน่าจะเป็นของ X ได้

เมื่อ $p=q=½$ การแจกแจงทวินาม จะมีลักษณะสมมาตร ดังนั้น การแจกแจงปกติจะให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นของการแจกแจงทวินามได้ดีที่สุดเมื่อ p เข้าใกล้ ½ สำหรับทุกค่าของ n ยิ่ง p เบี่ยงเบนจาก ½ ออกไปเท่าไร ค่า n ก็ต้องเพิ่มขึ้น การประมาณค่าจึงจะยังคงใช้ได้ดี ในการประมาณค่า นักสถิติส่วนมากยึด Rule of Thumb สำหรับกรณีนี้ว่า การประมาณค่าจะเหมาะสมต่อเมื่อ np และ nq $\geq$ 5 และจะเหมาะสมยิ่งขึ้นถ้า np และ nq $\geq$ 10 โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อ $p \neq q$ และใช้ประมาณค่าในการทดสอบด้านเดียว (one-tailed test) ทั้งนี้เพราะเมื่อ $p \neq q$ และ n เล็ก การแจกแจงทวินามจะเบ้ แต่เมื่อ n เพิ่มขึ้น การแจกแจงทวินามจะเข้าใกล้การแจกแจงปกติมากขึ้น แม้ว่า $p \neq q$ ก็ตาม[28]

---

[28]Henry E. Klugh, Statistics: The Essentials for Research (New York: John Willey & Sons,Inc., 1970), p. 146.

ลาร์สัน (Harold J. Larson)[29] ให้หลักกว้าง ๆ ว่า การประมาณค่าจะดีเมื่อ $n \geq 30$ และ np และ $nq \geq 5$

คอคแรน (William G. Cochran)[30] ให้หลักในการใช้การแจกแจงปกติประมาณค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงทวินามไว้ดังตารางที่ 3

ถ้า p เท่ากับ	ค่า np ที่เล็กที่สุด	ขนาดของกลุ่มตัวอย่าง n
0.5	15	30
0.4 หรือ 0.6	20	50
0.3 " 0.7	24	80
0.2 " 0.8	40	200
0.1 " 0.9	60	600
0.05 " 0.95	70	1400

ตารางที่ 3 ขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่เหมาะสมในการใช้การแจกแจงปกติประมาณค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงทวินาม.

มู้ด (Mood) กับ เกรย์บิล (Graybill)[31] กล่าวว่า ถ้า $npq > 25$ ความคลาดเคลื่อนในการประมาณค่าจะน้อยกว่า $0.15/\sqrt{npq}$ อย่างไรก็ตาม พึงระลึกไว้เสมอว่า สำหรับ n ที่กำหนด การประมาณค่าจะดีเมื่อ p เข้าใกล้ ½ มากกว่าเมื่อ p เข้าใกล้ 0 หรือ 1 ออสเทิล (Ostle)[32] กล่าวว่า ถ้า n ใหญ่พอ ($n \geq 100$) การประมาณค่าจะเป็นที่น่าพอใจสำหรับเกือบทุกค่าของ p แต่ถ้า p เข้าใกล้ 0 หรือ 1 มาก

---

[29] Harold J. Larson, Introduction to Probability Theory and Statistical Inference (New York: John Wiley & Sons, Inc., 1969), p. 191.

[30] William G. Cochran, Sampling Techniques (New York: John Wiley & Sons, Inc., 1966), p. 41.

[31] Mood and Graybill, op.cit., p. 156.

[32] Bernard Ostle, Statistics in Research (2d ed. Ames, Iowa: The Iowa State University Press, 1963), p. 78.

การประมาณค่าในส่วนปลาย (tails) ของการแจกแจงจะเชื่อมั่นได้น้อยกว่าการประมาณค่าในส่วนใกล้ศูนย์กลางของการแจกแจง ดังนั้น ในงานที่ต้องการความเชื่อมั่นมาก ๆ เมื่อค่า p น้อยมาก ปรากฏบ่อย ๆ ไม่ควรประมาณค่าความน่าจะเป็นด้วยการแจกแจงปกติ อาจประมาณด้วยการแจกแจงปัวซอง หรือคำนวณความน่าจะเป็นที่แท้จริงเลย

เนื่องจากการแจกแจงทวินาม เป็นการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง เมื่อประมาณด้วยการแจกแจงปกติ ซึ่งเป็นการแจกแจงแบบต่อเนื่อง เพื่อให้ได้ค่าประมาณที่ดียิ่งขึ้น จึงบวกหรือลบ ½ จากขีดจำกัดของช่วงที่ต้องการประมาณค่าความน่าจะเป็น จำนวน $\pm$ ½ เรียกว่า ค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง (Correction for continuity)

$$\therefore \quad Z = \frac{(x \pm \frac{1}{2})-np}{\sqrt{npq}}$$

ในการประมาณค่าความน่าจะเป็น เรากำหนดให้มัชฌิมและความแปรปรวนของการแจกแจงปกติที่ใช้ประมาณ เท่ากับมัชฌิมและความแปรปรวนของการแจกแจงทวินามที่ต้องการประมาณ นั่นคือ $\mu = np$ และ $\sigma^2 = npq$ ดังนั้น สำหรับจำนวนเต็ม a และ b $(a<b)$ ใด ๆ ในช่วง $(0,n)$ ค่าประมาณจะมีรูปดังต่อไปนี้

$$P\{a \le X \le b\} \cong P\left\{\frac{(a-\frac{1}{2})-np}{\sqrt{npq}} \le Z \le \frac{(b+\frac{1}{2})-np}{\sqrt{npq}}\right\}$$

$$P\{a < X \le b\} \cong P\left\{\frac{(a+\frac{1}{2})-np}{\sqrt{npq}} < Z \le \frac{(b+\frac{1}{2})-np}{\sqrt{npq}}\right\}$$

$$P\{a \le X < b\} \cong P\left\{\frac{(a-\frac{1}{2})-np}{\sqrt{npq}} \le Z < \frac{(b-\frac{1}{2})-np}{\sqrt{npq}}\right\}$$

หรือ

$$P\{a < X < b\} \cong P\left\{\frac{(a+\frac{1}{2})-np}{\sqrt{npq}} < Z < \frac{(b-\frac{1}{2})-np}{\sqrt{npq}}\right\}$$ [33]

<u>ตัวอย่าง</u> กลุ่มตัวอย่างสุ่มมีสมาชิก 100 จำนวน ได้จากประชากรทวินามซึ่งมี

$p = .2$ ให้หาค่า

ก. $P\{10 \le X \le 25\}$

---

[33] Ibid., p. 77.

ข. $P\{10 < X \leq 25\}$

ค. $P\{X > 26\}$ [34]

เนื่องจาก $np = 100(.2) = 20$, $nq = 100(1-0.2) = 80$ จึงใช้การแจกแจงปกติประมาณความน่าจะเป็นที่ต้องการได้

โดยที่ $\mu = np = 20$ $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100(.2)(.8)} = 4$

ก. $P\{10 \leq X \leq 25\}$

$$\begin{aligned}
&\cong P\left\{\frac{9.5-20}{4} \leq Z \leq \frac{25.5-20}{4}\right\} \\
&= P\{-2.62 \leq Z \leq 1.38\} \\
&= P(Z = 1.38)-P(Z =-2.62) \\
&= 0.9162 -0.0044 \\
&= 0.9118
\end{aligned}$$

$P\{10 < X \leq 25\}$

$$\begin{aligned}
&\cong P\left\{\frac{10.5-20}{4} < Z \leq \frac{25.5-20}{4}\right\} \\
&= P\{-2.37 < Z < 1.38)\} \\
&= P(Z = 1.38)-P(Z = -2.37) \\
&= 0.9162 -0.0089 \\
&= 0.9073
\end{aligned}$$

$P\{X > 26\}$

$$\begin{aligned}
&\cong P\left\{Z > \frac{26.5-20}{4}\right\} \\
&= P\{Z > 1.62\} \\
&= 1-P(Z = 1.62) \\
&= 1-0.9474 \\
&= 0.0526
\end{aligned}$$

---

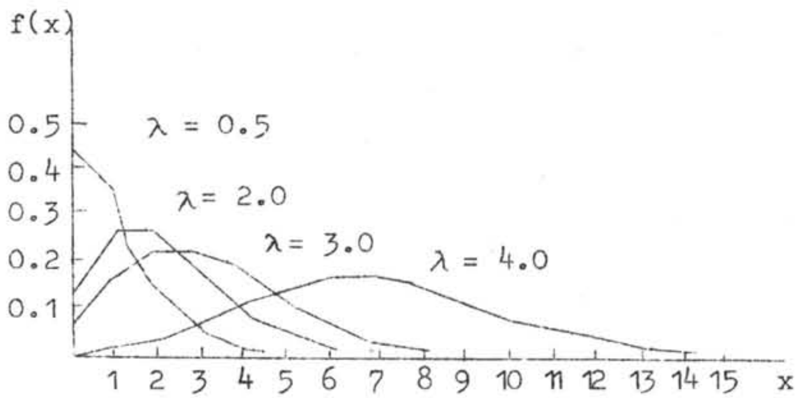
[34] *Ibid.*, p. 78.

3.1.2 <u>ใช้ประมาณค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงปัวซอง</u> (The Normal Approximation to the Poisson Distribution)

ตัวแปรสุ่มปัวซอง เกิดขึ้นเมื่อเราสนใจ จำนวนรวมการเกิดเหตุการณ์บางอย่างในช่วงที่กำหนด โดยมีอัตราการเกิดเหตุการณ์นั้นต่อช่วงเป็น λ เช่น จำนวนคำที่พิมพ์ผิดในหน้ากระดาษพิมพ์หน้าหนึ่ง จำนวนนักเรียนที่ป่วยเป็นไข้หวัดในเดือนหนึ่ง จำนวนรถที่มาถึงศูนย์บริการในช่วงเวลาที่กำหนด ฯลฯ ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มปัวซอง การแจกแจงของ X จะเป็นไปตาม Poisson Probability Function ต่อไปนี้

$$P(X=x) = f(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad ; \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

โดยมีมัชฌิม = λ และความแปรปรวน = λ[35]



ภาพที่ 7 แสดงการแจกแจงปัวซอง

เราอาจพิจารณาตัวแปรสุ่มปัวซองว่า เป็นผลบวกของการเกิดเหตุการณ์ในช่วงเล็กๆ ที่ไม่คาบเกี่ยวกัน ดังนี้

ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มปัวซองซึ่งเป็นอิสระ แต่ละตัวมีพารามิเตอร์ร่วม λ $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ จะเป็นตัวแปรปัวซองซึ่งมีพารามิเตอร์ $n\lambda$[36]

---

[35] Dwass, <u>op.cit.</u>, p. 166.

[36] Larson, <u>op.cit.</u>, p. 189.

อาศัย Central Limit Theorem เมื่อ n ใหญ่พอ Y จะแจกแจงเข้าใกล้ปกติ โดยมีมัชฌิม $n\lambda$ และความแปรปรวน $n\lambda$ จึงสามารถใช้การแจกแจงปกติประมาณค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงปัวซองได้ โดยที่

$$P(Y=t) \quad = \quad P\left(Z = \frac{t-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\right)$$

เนื่องจากการแจกแจงปัวซอง เป็นการแจกแจงไม่ต่อเนื่อง เพื่อให้การประมาณเหมาะสมยิ่งขึ้น จึงมีค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง เช่นเดียวกับเมื่อประมาณการแจกแจงทวินาม ด้วยการแจกแจงปกติ

การประมาณการแจกแจงปัวซองด้วยการแจกแจงปกติ จะดีขึ้นเมื่อ $n\lambda$ มีค่ามากขึ้น ดังนั้น ถ้า λ ซึ่งเป็นพารามีเตอร์ร่วมของตัวแปร X_i มีค่าน้อยแล้ว จำนวนตัวแปร X_i ซึ่งรวมเป็นตัวแปร Y จะต้องมีมากพอ นั่นคือ ถ้า λ เล็ก n ต้องใหญ่ แต่ถ้า λ ค่อนข้างใหญ่ n ก็ลดลงได้

การประมาณนี้ ถือว่าเหมาะสมเมื่อ $n\lambda \geq 10$ และการประมาณในส่วนใกล้ศูนย์กลางของการแจกแจง จะเชื่อถือได้มากกว่าในส่วนปลายของการแจกแจง[37]

ตัวอย่าง แผนกพยาบาลของมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง พบว่า มีนิสิตเป็นบาดทะยักโดยเฉลี่ยแล้ว 5 รายต่อเดือน และมีเหตุผลเพียงพอที่จะถือว่าการเป็นบาดทะยักของนิสิตในแต่ละเดือนใน 1 ปีการศึกษา ซึ่งมี 9 เดือน เป็นอิสระ ให้หาความน่าจะเป็นที่จะมีนิสิตเป็นบาดทะยักในปีการศึกษานี้

ก. 40 ถึง 50 ราย

ข. 45 ราย [38]

ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_9$ เป็นจำนวนนิสิตที่เป็นบาดทะยักในเดือนที่ 1 ถึง 9 แต่ละ X_i จะเป็นตัวแปรสุ่มปัวซอง ซึ่งมีพารามีเตอร์ร่วม = 5

---

[37] William S. Peters and George W. Summers, Statistical Analysis for Business Decisions (Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, Inc., 1968), p. 87.

[38] Larson, op.cit., p. 191.

ให้จำนวนนิสิตที่เป็นบาดทะยักในปีการศึกษานี้ $= Y = \sum_{i=1}^{9} X_i = 45$

Y ย่อมเป็นตัวแปรปัวซอง ซึ่งมีมัชฌิม = (9)(5) = 45 และความแปรปรวน = 45

ก) ความน่าจะเป็นที่จะมีนิสิตเป็นบาดทะยักในปีการศึกษานี้ ระหว่าง 40-50 คน เท่ากับ

$$
\begin{aligned}
P(40 \leq Y \leq 50) &= P\left(\frac{39.5-45}{45} \leq Z \leq \frac{50.5-45}{45}\right) \\
&= P(-.82 \leq Z \leq .82) \\
&= P(Z=.82)-P(Z=-.82) \\
&= .5878
\end{aligned}
$$

(เมื่อคำนวณจากการแจกแจงปัวซองโดยตรง จะได้ความน่าจะเป็น =.5879)

ข) ความน่าจะเป็นที่จะมีนิสิตเป็นบาดทะยัก 45 คนในปีการศึกษานี้เท่ากับ

$$
\begin{aligned}
P(Y=45) &= P\left(\frac{44.5-45}{45} \leq Z \leq \frac{45.5-45}{45}\right) \\
&= P(-.0745 \leq Z \leq .0745) \\
&= P(Z=.0745)-P(Z=-.0745) \\
&= .0558
\end{aligned}
$$

(เมื่อคำนวณจากการแจกแจงปัวซองโดยตรง จะได้ความน่าจะเป็น =.0594)

3.1.3 <u>ใช้ประมาณค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงแกมมา</u> (The Normal Approximation to the Gamma Distribution)

ตัวแปรสุ่ม x มีการแจกแจงแกมมา ถ้า density function ของมันเป็น

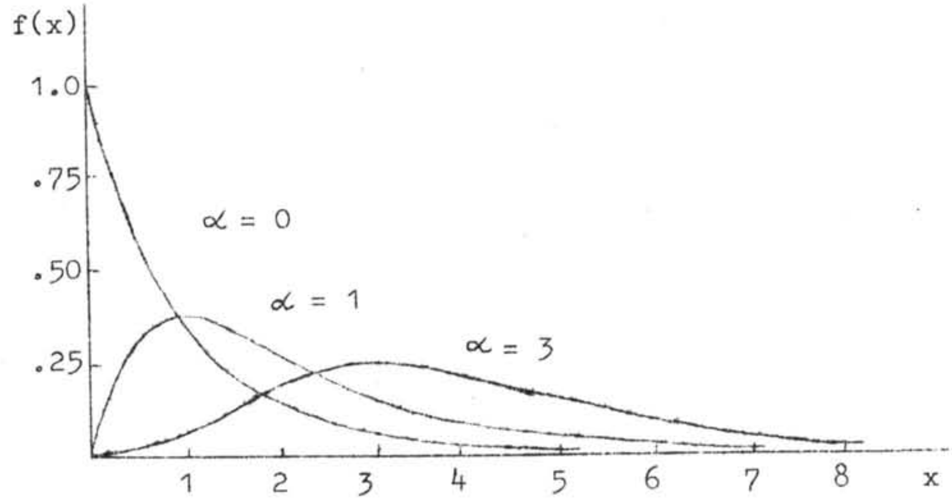
$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{x^{\alpha}e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}} \; ; \; 0 < x < \infty, \; \alpha > -1, \; \beta > 0$$

โดยมีมัชฌิม $= \beta(\alpha+1)$ และความแปรปรวน $\beta^2(\alpha+1)$

ถ้า $\alpha = 0$ จะได้

$$f(x;\beta) = \frac{e^{-x/\beta}}{\beta} \quad ; \quad 0 < x < \infty$$

เป็น density function ของการแจกแจงเอกซโปเนนเชียล (The Exponential Distribution) ซึ่งมีมัชฌิม = β และความแปรปรวน = β^2 [39]



ภาพที่ 8 แสดงการแจกแจงแกมมา

ดังนั้นเมื่อพิจารณาว่า ตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแกมมา แทนผลบวกของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเอกซโปเนนเชียล α ตัว เมื่อ α ใหญ่พอ ตาม Central Limit Theorem การแจกแจงแกมมาจะเข้าใกล้การแจกแจงปกติโดยมีมัชฌิม = $\beta(\alpha+1)$ และความแปรปรวน = $\beta^2(\alpha+1)$ ทำให้สามารถใช้การแจกแจงปกติประมาณค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงแกมมาได้ การประมาณค่าจะได้ผลดีเมื่อ $\alpha \geq 50$ [40]

เพื่อให้การประมาณการแจกแจงแกมมาด้วยการแจกแจงปกติได้ผลดียิ่งขึ้น ฟิชเชอร์ (Fisher) ได้เสนอวิธีเปลี่ยนตัวแปรแกมมา X เป็นตัวแปร Y โดยให้ $Y = 2\sqrt{X/\beta}$ เมื่อ $\alpha > 14$ ตัวแปร Y จะแจกแจงเข้าใกล้ปกติโดยมีมัชฌิม = $\sqrt{4\alpha+3}$ และความแปรปรวน=1

วิลสัน (Wilson) กับ ฮิลเฟอร์ที (Hilferty) ได้เปลี่ยนตัวแปรแกมมา X อีก

---

39 Ostle, op.cit., p. 39.

40 Paul L. Meyer, Introductory Probability and Statistical Applications (2d ed.; Massachusetts: Addison Wesley Publishing Company, 1970), p. 256.

วิธีหนึ่ง คือให้ $W = \{X/\beta(\alpha+1)\}^{\frac{1}{3}}$ ตัวแปร W ที่ได้จะแจกแจงเข้าใกล้ปกติยิ่งขึ้น โดยมีมัชฌิม = $(9\alpha+8)/(9\alpha+9)$ และความแปรปรวน = $1/9(\alpha+1)$

x	P(X=x) จากการแจกแจง			
	แกมมา	ปกติโดยตรง	ปกติ, เปลี่ยนตัวแปรแบบฟิชเชอร์.	ปกติ, เปลี่ยนตัวแปรแบบวิลสัน กับ ฮิลเฟอร์ที
8.180	.01	.025	.013	.0101
10.035	.05	.068	.055	.0497
11.135	.10	.112	.103	.0999
13.152	.25	.238	.247	.2498
15.668	.50	.467	.492	.5000
18.487	.75	.733	.746	.7501
21.293	.90	.907	.902	.9001
23.098	.95	.962	.953	.9501
26.744	.99	.996	.992	.9900

ตารางที่ 4 เปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรแกมมา X เมื่อ $\alpha=15, \beta=1$[41]

3.2 <u>ใช้ในการประมาณค่าทางสถิติ</u>

การประมาณค่าทางสถิติ (Statistical Estimation) เป็นวิธีการใช้ค่าสถิติ (Statistic) ซึ่งแสดงลักษณะของกลุ่มตัวอย่าง ประมาณค่าพารามีเตอร์ (Parameter) ซึ่งแสดงลักษณะของประชากร

ค่าสถิติ ที่ใช้ประมาณพารามีเตอร์ เรียกว่า **ตัวประมาณค่า** (Estimator)

ค่าที่ได้จากการใช้ตัวประมาณค่า เรียกว่า ค่าประมาณ (Estimate)

---

[41] George P. Wadsworth and Joseph G. Bryan, <u>Introduction to Probability and Random Variables</u> (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc.,1960), p. 112.

การประมาณค่า แบ่งเป็น 2 วิธี

1. การประมาณเป็นจุด (Point Estimation) เป็นการใช้เลขจำนวนเดียวหรือชุดเดียว แทนค่าพารามิเตอร์ ซึ่งเป็นไปได้ยากที่จะเท่ากับค่าพารามิเตอร์จริง ดังนั้นเพื่อให้การประมาณค่าน่าเชื่อถือยิ่งขึ้น จึงใช้

2. การประมาณเป็นอันตรภาค (Interval Estimation) เป็นการประมาณค่าโดยใช้ช่วงตัวเลขซึ่งสร้างขึ้นจากค่าประมาณเป็นจุด โดยมีเปอร์เซ็นต์ของความเชื่อมั่นว่าค่าพารามิเตอร์จะอยู่ภายในช่วงนี้ เช่นประมาณด้วยช่วง 125±15 หรือช่วง 30 % ถึง 40 % เป็นต้น

ช่วงที่ใช้ประมาณ เรียกว่า ช่วงแห่งความเชื่อมั่น (Confidence Interval)

ขีดจำกัดหรือจุดปลายสุดของช่วง เรียกว่า ขีดจำกัดแห่งความเชื่อมั่น (Confidence limit)

ความน่าจะเป็นที่ช่วง จะรวมเอาค่าพารามิเตอร์ไว้ เรียกว่า สัมประสิทธิ์แห่งความเชื่อมั่น (Confidence coefficient) หรือ ระดับความเชื่อมั่น (Level of confidence)

ความน่าจะเป็นที่ช่วงจะไม่รวมเอาค่าพารามิเตอร์ไว้ แทนด้วยสัญลักษณ์ α ดังนั้นระดับความเชื่อมั่นจะเท่ากับ $1-\alpha$ เสมอ

ในการสร้างช่วงแห่งความเชื่อมั่น ต้องอาศัยทฤษฎีการแจกแจงตัวอย่าง (Sampling Distribution) ของค่าสถิติที่ใช้เป็นตัวประมาณค่าเป็นจุด

ถ้า $\hat{\theta}$ เป็นค่าประมาณเป็นจุดซึ่งไม่เอนเอียง (Unbiased point estimator) ของพารามิเตอร์ θ มัชฌิมของการแจกแจงตัวอย่างของ $\hat{\theta}$ ที่ได้จากการสุ่มตัวอย่างขนาดเดียวกันอย่างอิสระ หลาย ๆ กลุ่มตัวอย่าง จากประชากรเดียวกัน จะเท่ากับ θ

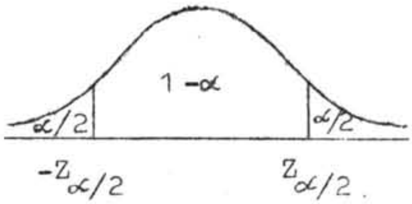
$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

ตาม Central Limit Theorem เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ $\hat{\theta}$ จะแจกแจงเป็นปกติหรือเข้าใกล้ปกติ จึงใช้การแจกแจงปกติในการสร้างช่วงแห่งความเชื่อมั่นของ θ รอบ $\hat{\theta}$ ได้ โดยที่ตัวแปรปกติมาตรฐาน

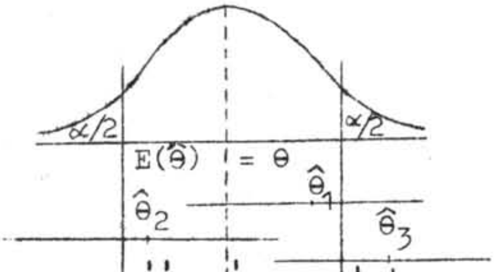
$$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sigma_{\hat{\theta}}}$$

$\sigma_{\hat{\theta}}$ คือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของการแจกแจงตัวอย่างของ $\hat{\theta}$ หรือเรียกว่า ความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (Standard Error) ของ $\hat{\theta}$

ให้ $Z_{\alpha/2}$ คือคะแนนปกติมาตรฐานซึ่งตัดพื้นที่ส่วนปลายโค้งปกติออกไปข้างละ $\alpha/2$ ความน่าจะเป็นที่ z จะมีค่าอยู่ระหว่าง $\pm Z_{\alpha/2}$ จะเท่ากับ $1-\alpha$



ภาพที่ 9 แสดงการหาช่วงแห่งความเชื่อมั่น



ภาพที่ 10 แสดงการที่ช่วงแห่งความเชื่อมั่นอาจจะรวมหรือไม่รวมพารามีเตอร์เอาไว้

$$P(-Z_{\alpha/2} < Z < Z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

$$\therefore \quad P\left(-Z_{\alpha/2} < \frac{\hat{\theta}-\theta}{\sigma_{\hat{\theta}}} < Z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left[(\hat{\theta}-Z_{\alpha/2}\,\sigma_{\hat{\theta}}) < \theta < (\hat{\theta}+Z_{\alpha/2}\,\sigma_{\hat{\theta}})\right] = 1-\alpha$$

$\therefore$ ช่วงแห่งความเชื่อมั่นของ θ รอบ $\hat{\theta}$ ที่ระดับความเชื่อมั่น $1-\alpha$ คือ

$$\hat{\theta} \pm Z_{\alpha/2}\,\sigma_{\hat{\theta}} = (\hat{\theta}-Z_{\alpha/2}\,\sigma_{\hat{\theta}},\ \hat{\theta}+Z_{\alpha/2}\,\sigma_{\hat{\theta}})$$

ในกรณีที่ต้องการสร้างช่วงแห่งความเชื่อมั่นแบบทางเดียว (One-sided confidence interval) ก็ทำได้ทำนองเดียวกัน โดยที่

$$P\left[\theta > (\hat{\theta}-Z_{\alpha}\,\sigma_{\hat{\theta}})\right] = 1-\alpha$$

และ $P\left[\theta < (\hat{\theta}+Z_{\alpha}\,\sigma_{\hat{\theta}})\right] = 1-\alpha$

อาจจะแปลความหมาย $P\left[(\hat{\theta}-Z_{\alpha/2}\,\sigma_{\hat{\theta}}) < \theta < (\hat{\theta}+Z_{\alpha/2}\,\sigma_{\hat{\theta}})\right]$ ได้ดังนี้

จาก Central Limit Theorem เราทราบว่าเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ $\hat{\theta}$ จะแจกแจงเข้าใกล้ปกติโดยมีมัชฌิม $E(\hat{\theta}) = \theta$ และความแปรปรวน $\sigma_{\hat{\theta}}$ ดังภาพที่ 10 ตัวแปรสุ่ม $\hat{\theta}$ จะมีค่าได้ต่าง ๆ กันหลายค่า สมมุติเราแทนด้วย $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \ldots$

เมื่อ $\hat{\theta} = \hat{\theta}_1$ ช่วงแห่งความเชื่อมั่นคือ $(\hat{\theta}_1-Z_{\alpha/2}\,\sigma_{\hat{\theta}},\ \hat{\theta}_1+Z_{\alpha/2}\,\sigma_{\hat{\theta}})$ จะรวมเอา θ ไว้ในช่วง

และเมื่อ $\hat{\theta} = \hat{\theta}_2$ ช่วงแห่งความเชื่อมั่นคือ $(\hat{\theta}_2 - z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}}, \hat{\theta}_2 + z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}})$ จะรวมเอา θ ไว้เช่นกัน

แต่เมื่อ $\hat{\theta} = \hat{\theta}_3$ ช่วงแห่งความเชื่อมั่นคือ $(\hat{\theta}_3 - z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}}, \hat{\theta}_3 + z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}})$ ไม่รวม θ ไว้ในช่วง ค่า $\hat{\theta}_3$ ตกอยู่นอกขอบเขต $\theta \pm z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}}$

ความน่าจะเป็นที่ $\hat{\theta}$ จะอยู่ในช่วง $\theta \pm z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}}$ เป็น $1-\alpha$ หมายความว่ามีโอกาส $(1-\alpha)100$ จาก 100 ครั้งที่ $\hat{\theta}$ จะอยู่ระหว่าง $\theta - z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}}$ ถึง $\theta + z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}}$ ทั้งนี้กำหนดให้ θ เป็นค่าที่แท้จริงของพารามีเตอร์

จะเห็นได้ว่า เมื่อเราสร้างช่วงแห่งความเชื่อมั่น $(\hat{\theta} - z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}}, \hat{\theta} + z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}})$ เราอาจคาดหวังว่าจะมี $(1-\alpha)100$ ช่วง จาก 100 ช่วงที่รวมเอา θ ไว้

แต่ในทางปฏิบัติ เราไม่ได้สุ่มตัวอย่างมาหลาย ๆ กลุ่ม เราสุ่มมาเพียงกลุ่มเดียวแล้วคำนวณค่า $\hat{\theta}$ ค่า $\hat{\theta}$ ที่คำนวณได้จากกลุ่มตัวอย่างเดียวนี้ย่อมเป็นค่าคงที่ ไม่ใช่ตัวแปร เมื่อนำมาสร้างช่วงแห่งความเชื่อมั่น ช่วงที่ได้ก็เป็นช่วงที่คงที่ จึงอาจจะรวมหรือไม่รวมเอา θ ไว้ก็ได้

3.2.1 การประมาณค่ามัชฌิมของประชากร (μ)

ค่าสถิติที่ใช้เป็นตัวประมาณค่า μ คือ $\bar{X}$ ซึ่งเป็นมัชฌิมของกลุ่มตัวอย่างขนาด n ที่สุ่มจากประชากรที่มีมัชฌิม μ ความแปรปรวน σ^2

ลักษณะการแจกแจงตัวอย่างของ $\bar{X}$

1. ถ้าประชากรแจกแจงปกติ $\bar{X}$ จะแจกแจงปกติสำหรับทุกค่าของ n
2. ถ้าประชากรไม่แจกแจงปกติ เมื่อ n มีขนาดใหญ่พอ $\bar{X}$ จะแจกแจงเข้าใกล้ปกติ
3. มัชฌิมของการแจกแจงตัวอย่างของ $\bar{X} = \mu_{\bar{X}} = \mu$
4. ความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน เท่ากับ

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ถ้าสุ่มตัวอย่างแบบแทนที่ (Sampling with replacement) จากประชากรขนาดจำกัด หรือสุ่มตัวอย่างจากประชากรขนาดไม่จำกัด

หรือ $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ ถ้าสุ่มตัวอย่างแบบไม่แทนที่ (Sampling without replacement) จากประชากรขนาดจำกัด

N คือ ขนาดของประชากร

$\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ เรียกว่า ค่าแก้สำหรับประชากรขนาดจำกัด (Finite population correction) เรียกย่อ ๆ ว่า fpc

ถ้า n เล็กเมื่อเทียบกับ N (เล็กกว่า 5%) จะทำให้ $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ มีค่าเข้าใกล้ 1 ก็ตัด fpc ทิ้งได้

ในกรณีที่การแจกแจงของประชากรไม่เป็นปกติ ขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่ใหญ่พอที่จะถือว่า การแจกแจงตัวอย่างของ $\bar{X}$ เข้าใกล้การแจกแจงปกตินั้น นักสถิติส่วนมากใช้ $n \geq 30$ แต่มีบางคนใช้ขนาดของกลุ่มตัวอย่างเล็กกว่านี้ คือ พีทแมน (John G. Peatman)[42] ใช้ $n \geq 25$ และปีเตอร์สกับซัมเมอร์ส (William S.Peters and George W.Summers)[43] ใช้ $n \geq 20$ อย่างไรก็ตาม ยิ่งขนาดของกลุ่มตัวอย่างเพิ่มขึ้นเท่าไร การแจกแจงตัวอย่างของ $\bar{X}$ ก็จะเข้าใกล้การแจกแจงปกติมากขึ้นเท่านั้น

เมื่อทราบว่า การแจกแจงตัวอย่างของ $\bar{X}$ เป็นปกติ หรือเข้าใกล้ปกติเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอเช่นนี้แล้ว ก็สามารถประยุกต์ใช้การแจกแจงปกติในการประมาณค่ามัชฌิมของประชากร (μ) จากมัชฌิมของกลุ่มตัวอย่าง ($\bar{X}$) ได้ ซึ่งแยกเป็น 2 กรณี

<u>กรณีที่ 1 เมื่อทราบความแปรปรวนของประชากร</u> (σ^2 known)

เมื่อการแจกแจงตัวอย่างของ $\bar{X}$ เป็นปกติ หรือเข้าใกล้ปกติ จะได้ว่า

$$P\left[(\bar{X}-Z_{\alpha/2}\,\sigma_{\bar{X}}) < \mu < (\bar{X}+Z_{\alpha/2}\,\sigma_{\bar{X}})\right] = 1-\alpha$$

$\therefore$ ช่วงแห่งความเชื่อมั่นของ μ รอบ $\bar{X}$ ที่ระดับความเชื่อมั่น $1-\alpha$ คือ

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\,\sigma_{\bar{X}} = (\bar{X}-Z_{\alpha/2}\,\sigma_{\bar{X}},\ \bar{X}+Z_{\alpha/2}\,\sigma_{\bar{X}})$$

---

[42] Peatman, op.cit., p. 176.

[43] Peters and Summers, op.cit., p. 161.

<u>ตัวอย่าง</u> นักวิจัยคนหนึ่งต้องการสร้างช่วงแห่งความเชื่อมั่นระดับ 99 % ของเกณฑ์ภาคเชาวน์เฉลี่ยของเด็กเกรด 5 จำนวน 35,000 คน ในรัฐของเขา โดยใช้แบบทดสอบของเวชเลอร์ (Wechsler Intelligence Scale for Children) ทุนในการวิจัยมีพอเพียงสำหรับการทดสอบเด็ก 900 คน เท่านั้น เมื่อทดสอบแล้วปรากฏว่า เกณฑ์ภาคเชาวน์เฉลี่ยของเด็ก 900 คนนี้ เป็น 103.72 เขามีเหตุผลเพียงพอที่จะเชื่อว่าความแปรปรวนของเกณฑ์ภาคเชาวน์ของเด็กเกรด 5 ในรัฐของเขาเท่ากับความแปรปรวนในเกณฑ์ปกติของแบบทดสอบซึ่งเท่ากับ 225 แต่เกณฑ์ภาคเชาวน์เฉลี่ยจะแตกต่างไปจากเกณฑ์ปกติ จึงต้องใช้เกณฑ์ภาคเชาวน์เฉลี่ยของเด็ก 900 คนนี้ เป็นค่าประมาณเกณฑ์ภาคเชาวน์เฉลี่ยของเด็กเกรด 5 ทั้งรัฐ แล้วสร้างช่วงแห่งความเชื่อมั่นระดับ 99 % ของเกณฑ์ภาคเชาวน์เฉลี่ยของเด็กในรัฐ[44]

ที่ระดับความเชื่อมั่น 99 % (หรือ 0.99)

$1-\alpha = 0.99, \quad \alpha = 0.01$

$Z_{\alpha/2} = Z_{.005} = 2.58$

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{900}} = 0.5$

∴ ช่วงแห่งความเชื่อมั่นระดับ 99 % ของเกณฑ์ภาคเชาวน์เฉลี่ยของเด็กเกรด 5 ในรัฐ คือ

$$\bar{X} \pm 2.58\,\sigma_{\bar{X}} = 103.72 \pm 2.58\,(0.5)$$

$$= 103.72 \pm 1.29$$

$$= (102.43,\ 105.01)$$

---

[44] Gene V. Glass and Julian C. Stanley, <u>Statistical Methods in Education and Psychology</u> (Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1970), p. 260.

กรณีที่ 2 เมื่อไม่ทราบความแปรปรวนของประชากร (σ^2 unknown)

ถ้ากลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่าง

$$= s^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2/(n-1)$$

จะเป็นค่าประมาณที่ดีของ σ^2;

$$\hat{\sigma}^2 = s^2$$

$$\hat{\sigma}^2_{\bar{X}} = \frac{\hat{\sigma}^2}{n} = \frac{s^2}{n}$$

$$\therefore \hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

ช่วงแห่งความเชื่อมั่นของ μ ที่ระดับความเชื่อมั่น $1-\alpha$ จะเป็น

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} = \left(\bar{X}-Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

แต่ถ้ากลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก ต้องประมาณโดยอาศัยการแจกแจงที (t-distribution)

ขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่ใหญ่พอที่จะใช้การแจกแจงปกติในการประมาณค่า μ ได้เหมาะสม เมื่อต้องประมาณค่า σ^2 จากกลุ่มตัวอย่างนั้น ฮิวส์ (Hughes) กับ กรอวิก (Grawoig)[45] แนะนำให้ใช้ $n>30$ ฟรอยด์ (Freund)[46] ใช้ $n \geq 30$ ยามาเน (Taro Yamane)[47] ใช้ $n \geq 50$ เฮย์ (William L. Hays)[48] แนะนำว่า ถ้าประชากรแจกแจงเป็นปกติ ขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่เหมาะสมในกรณีนี้คือ $n \geq 40$ แต่ถ้าจะให้ถูกต้องจริง ๆ ควรใช้ $n > 100$ ปีเตอร์ส (Peters) กับ ซัมเมอร์ (Summers)[49] แนะนำว่า ถ้าประ

---

[45] Ann Hughes and Dennis Grawoig, Statistics: A Foundation for Analysis (Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1971), p. 175.

[46] John E. Freund, Paul E. Livermore and Irwin Miller, Manual of Experimental Statistics (Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall., Inc., 1960), p. 10.

[47] Yamane, op.cit., p. 502.

[48] Hays, op.cit., p. 303.

[49] Peters and Summers, op.cit., pp. 161-162.

ชากรแจกแจงเป็นปกติ ขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่ถือว่าใหญ่พอในกรณีนี้คือ $n > 30$ แต่ถ้าไม่ทราบการแจกแจงของประชากร ต้องใช้ $n \geq 100$

<u>ตัวอย่าง</u> สมมุติว่า ต้องการหาช่วงแห่งความเชื่อมั่นระดับ 95 % ของเกณฑ์ภาคเชาวน์เฉลี่ยของนิสิตในมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง สุ่มตัวอย่างนิสิตมา 100 คน ใช้แบบทดสอบวัดเกณฑ์ภาคเชาวน์ของนิสิตกลุ่มนี้ ปรากฏว่าเกณฑ์ภาคเชาวน์เฉลี่ยของนิสิตกลุ่มนี้เป็น 110 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 20 [50]

ถือว่าการแจกแจงของเกณฑ์ภาคเชาวน์ของนิสิตเป็นปกติ และกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอที่จะใช้การแจกแจงปกติ ในการประมาณเกณฑ์ภาคเชาวน์เฉลี่ยของนิสิตทั้งมหาวิทยาลัยได้เหมาะสม เมื่อต้องประมาณค่าความแปรปรวนของประชากรจากกลุ่มตัวอย่าง

ที่ระดับความเชื่อมั่น 95 %

$$\alpha = .05 \quad \therefore \quad Z_{\alpha/2} = Z_{.025} = 1.96$$

$\therefore$ ช่วงแห่งความเชื่อมั่นระดับ 95 % ของเกณฑ์ภาคเชาวน์เฉลี่ยของนิสิตมหาวิทยาลัยนี้คือ

$$\begin{aligned} \bar{X} \pm 1.96\frac{s}{\sqrt{n}} &= 110 \pm 1.96 \left(\frac{20}{\sqrt{100}}\right) \\ &= 110 \pm 3.92 \\ &= (106.08,\ 113.92) \end{aligned}$$

<u>กำหนดขนาดกลุ่มตัวอย่างที่เหมาะสมในการประมาณค่ามัชฌิมของประชากร</u>

ให้ E แทนความคลาดเคลื่อนสูงสุดที่จะยอมให้มีได้ในการประมาณค่า นั่นคือ

E = ความแตกต่างสูงสุดระหว่าง μ กับ $\bar{X}$

$$\mu \pm Z_{\alpha/2}\,\sigma_{\bar{X}} = \mu \pm E$$

$$E = Z_{\alpha/2}\,\sigma_{\bar{X}}$$

---

[50] Yamane, <u>op.cit.</u>, p. 526.

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore \quad n = \frac{Z^2_{\alpha/2}\,\sigma^2}{E^2}$$ [51]

<u>ตัวอย่าง</u> ต้องการประมาณเกณฑ์ภาคเชาว์เฉลี่ยของเด็กเกรด5ในรัฐ โดยที่ความคลาดเคลื่อนไม่เกิน ± 1.5 ที่ระดับความเชื่อมั่น 0.99 ทราบว่าความแปรปรวนของเกณฑ์ภาคเชาว์ของเด็กเกรด 5 ตามเกณฑ์ปกติของแบบทดสอบที่จะใช้เป็น 225 ให้หาขนาดกลุ่มตัวอย่างที่เหมาะสมที่ระดับความเชื่อมั่น 0.99

$$\alpha = 0.01, \quad Z_{\alpha/2} = Z_{.005} = 2.58$$

ขนาดกลุ่มตัวอย่างที่เหมาะสมคือ

$$n = \frac{Z^2_{\alpha/2}\sigma^2}{E^2} = \frac{(2.58)^2(225)}{(1.5)^2}$$

$$= 665.64 \cong 666$$

<u>การประมาณค่าความแตกต่างระหว่างมัชฌิมของประชากร 2 กลุ่ม</u> $(\mu_1-\mu_2)$

ให้ X_1 และ X_2 เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งมีมัชฌิม μ_1 และ μ_2 และความแปรปรวน σ_1^2 และ σ_2^2 ตามลำดับ กลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่ม ขนาด n_1 และ n_2 สุ่มมาอย่างอิสระจากประชากร X_1 และ X_2 คำนวณมัชฌิมของกลุ่มตัวอย่างได้ $\bar{X}_1$ และ $\bar{X}_2$ ตามลำดับ ความแตกต่างระหว่างมัชฌิมของกลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่มนี้จะเป็น $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ ซึ่งจะใช้ในการประมาณค่าความแตกต่างระหว่างมัชฌิมของประชากร 2 กลุ่ม $(\mu_1-\mu_2)$

ลักษณะการแจกแจงตัวอย่างของ $\bar{X}_1-\bar{X}_2$

1. ถ้าประชากร X_1 และ X_2 แจกแจงปกติ $\bar{X}_1$ และ $\bar{X}_2$ ต่างก็จะแจกแจงปกติ และ $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ ก็จะแจกแจงปกติด้วย ไม่ว่า n_1 และ n_2 จะเป็นเท่าไรก็ตาม
2. ถ้าประชากร X_1 และ X_2 แจกแจงไม่ปกติ $\bar{X}_1$ และ $\bar{X}_2$ จะแจกแจงเข้าใกล้ปกติ เมื่อ n_1 และ n_2 ใหญ่พอ ดังนั้น $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ จะแจกแจงเข้าใกล้ปกติเมื่อ

---

[51] Hughes and Grawoig, <u>op.cit.</u>, p. 182.

กลุ่มตัวอย่างทั้ง 2 กลุ่มมีขนาดใหญ่พอ ขนาดกลุ่มตัวอย่างที่ถือว่าใหญ่พอนี้ พิจารณาเช่นเดียวกับเมื่อประมาณค่ามัชฌิมของประชากร ซึ่งตามปกติจะใช้ $n_1 \geq 30$ และ $n_2 \geq 30$

3. มัชฌิมของการแจกแจงตัวอย่างของ $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ แทนด้วยสัญลักษณ์ $\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$ จะเท่ากับผลต่างระหว่างมัชฌิมของประชากร

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \mu_1-\mu_2$$

4. ความแปรปรวนของการแจกแจงตัวอย่างของ $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ จะเท่ากับ

$$\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sigma^2_{\bar{X}_1}+\sigma^2_{\bar{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

นั่นคือ ความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน $= \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

เมื่อการแจกแจงตัวอย่างของ $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ เป็นปกติหรือเข้าใกล้ปกติ จะได้ว่า

$$P\left[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} < \mu_1-\mu_2 < (\bar{X}_1-\bar{X}_2)+Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right] = 1-\alpha$$

$\therefore$ ช่วงแห่งความเชื่อมั่นของ $\mu_1-\mu_2$ ที่ระดับความเชื่อมั่น $1-\alpha$ คือ

$$(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\pm Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \left\{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}, (\bar{X}_1-\bar{X}_2)+Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right\}$$

<u>ตัวอย่าง</u> สุ่มตัวอย่างคะแนนทดสอบซึ่งวัดด้วยแบบทดสอบมาตรฐานชุดเดียวกันจากคะแนนทดสอบของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ในรัฐ 2 รัฐ มารัฐละ 144 คน คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มที่หนึ่งเป็น $\bar{X}_1 = 88$ ของกลุ่มที่สองเป็น $\bar{X}_2 = 85$ ถือว่าทราบความแปรปรวนของคะแนนทดสอบของนักเรียนชั้นนี้ในรัฐที่หนึ่งเป็น 47 รัฐที่สองเป็น 34 ให้หาขีดจำกัดของความเชื่อมั่นของความแตกต่างจริงระหว่างคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายทุกคนในรัฐ 2 รัฐนี้ ที่ระดับ 95 % และ 99 %[52]

---

[52]Chao, <u>op.cit.</u>, p. 209.

ที่ระดับความเชื่อมั่น 95 %

$$\alpha = .05; \quad Z_{\alpha/2} = Z_{.025} = 1.96$$

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = 88-85 = 3$$

$$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{47}{144} + \frac{34}{144}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

∴ ขีดจำกัดของความเชื่อมั่นของ $\mu_1 - \mu_2$ ที่ระดับ 95 % คือ

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = 3 \pm 1.96(3/4)$$
$$= 3 \pm 1.47$$
$$= (1.53\ ,\ 4.47)$$

ที่ระดับความเชื่อมั่น 99 %

$$\alpha = .01; \quad Z_{\alpha/2} = Z_{.005} = 2.58$$

∴ ขีดจำกัดของความเชื่อมั่นของ $\mu_1 - \mu_2$ ที่ระดับ 99 % คือ

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = 3 \pm 2.58(3/4)$$
$$= 3 \pm 1.935$$
$$= (1.165,\ 4.935)$$

3.2.2 <u>การประมาณค่าสัดส่วนของประชากร</u> (π)

สัดส่วนของประชากร (π) เป็นผลหารระหว่างจำนวนสมาชิกที่มีลักษณะที่สนใจกับจำนวนสมาชิกทั้งหมดของประชากร

$$\pi = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} \quad ; \quad \begin{array}{ll} X_i = 1 & \text{ถ้ามีลักษณะที่สนใจ} \\ X_i = 0 & \text{ถ้าไม่มีลักษณะที่สนใจ} \end{array}$$

ตัวประมาณค่า π คือสัดส่วนของกลุ่มตัวอย่าง (p)

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{Y}{n}$$

จะเห็นได้ว่า Y เป็นจำนวนรวมของการเกิดผล "สำเร็จ" ในการทดลองทวินาม n ครั้ง (ในที่นี้ก็คือจำนวนรวมของสมาชิกที่มีลักษณะที่สนใจจากสมาชิกทั้งหมด n) จึงอาจจะพิจารณา p ว่าเป็นสัดส่วนของจำนวนผล "สำเร็จ" ในการทดลองทวินาม n ครั้ง

ลักษณะการแจกแจงตัวอย่างของ p

1. ถ้ากลุ่มตัวอย่างสุ่มมาอย่างอิสระ คือสุ่มแบบแทนที่จากประชากรขนาดจำกัดหรือสุ่มจากประชากรขนาดไม่จำกัด p จะแจกแจงทวินามโดยมีมัชฌิม

$$\mu_p = E(p) = \frac{n\pi}{n} = \pi$$

และความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน

$$\sigma_p = \sqrt{Var(p)} = \sqrt{\frac{n\pi(1-\pi)}{n^2}} = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$$

ดังนั้นเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ การแจกแจงตัวอย่างของ p ย่อมเข้าใกล้การแจกแจงปกติ

2. ถ้ากลุ่มตัวอย่างสุ่มมาอย่างไม่อิสระ คือสุ่มแบบไม่แทนที่จากประชากรขนาดจำกัด p จะแจกแจงแบบไฮเปอร์จีออเมตริก (Hypergeometric Distribution)[53] โดยมีมัชฌิม $\mu_p = \pi$

และความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน $\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

อย่างไรก็ตาม ถ้ากลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็กเมื่อเทียบกับประชากร (กลุ่มตัวอย่างเล็กกว่า 5 % ของประชากร) $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ จะเข้าใกล้ 1 จึงอาจจะตัดทิ้งได้ กล่าวได้ว่าถ้ากลุ่มตัวอย่างขนาดเล็กได้จากประชากรขนาดใหญ่ เราอาจจะถือว่า กลุ่มตัวอย่างสุ่มมาอย่างอิสระ การแจกแจงตัวอย่างของ p ย่อมเข้าใกล้การแจกแจงทวินาม นั่นก็คือเข้าใกล้การแจกแจงปกติ เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ

การพิจารณาขนาดกลุ่มตัวอย่างที่ถือว่าใหญ่พอสำหรับการใช้การแจกแจงปกติเป็นค่าประมาณการแจกแจงตัวอย่างของ p ก็เช่นเดียวกับเมื่อใช้การแจกแจงปกติเป็นค่าประมาณ

---

[53] ดูที่ภาคผนวก ค.

การแจกแจงทวินาม หลักเกณฑ์ทั่ว ๆ ไปคือ $n\pi$ และ $n(1-\pi) \geq 5$

เนื่องจาก $\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$ แต่ค่า π เราไม่ทราบ จึงต้องประมาณ σ_p จากกลุ่มตัวอย่าง โดยที่

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}} = \sqrt{\frac{pq}{n-1}}$$

เมื่อกลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่ เพื่อความสะดวกจะใช้

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอสำหรับการใช้การแจกแจงปกติเป็นค่าประมาณการแจกแจงตัวอย่างของ p จะได้ความสัมพันธ์

$$P\left[(p-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}) < \pi < (p+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}})\right] = 1-\alpha$$

$\therefore$ ช่วงแห่งความเชื่อมั่นของ π ที่ระดับความเชื่อมั่น $1-\alpha$ คือ

$$p \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = (p-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}},\ p+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}})$$

ถ้า n เล็ก เพื่อให้การประมาณค่าถูกต้องยิ่งขึ้น อาจจะใช้ค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง (Correction for continuity) เช่นเดียวกับเมื่อประมาณการแจกแจงทวินามด้วยการแจกแจงปกติ แต่ค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่องในกรณีนี้จะเป็น $\pm\frac{1}{2n}$ เพราะสัดส่วน p ได้จากการหารจำนวนการเกิดผล "สำเร็จ" ด้วย n ดังนั้นเราจะได้

$$P\left[(p-\frac{1}{2n})-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} < \pi < (p+\frac{1}{2n})+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right] = 1-\alpha$$

หรือ $$P\left[p-(\frac{1}{2n}+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}) < \pi < p+(\frac{1}{2n}+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}})\right] = 1-\alpha$$

$\therefore$ ช่วงแห่งความเชื่อมั่นของ π ที่ระดับความเชื่อมั่น $1-\alpha$ คือ

$$p \pm (\frac{1}{2n}+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}) = (p-\frac{1}{2n}-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}},\ p+\frac{1}{2n}+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}})$$

จะเห็นได้ว่า เมื่อใช้ค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง ช่วงแห่งความเชื่อมั่นของ π จะกว้างขึ้นเล็กน้อย

<u>ตัวอย่าง</u> สุ่มตัวอย่างนักศึกษาในวิทยาลัยครูแห่งหนึ่งมา 100 คน เพื่อสำรวจความคิดเห็นเกี่ยวกับการเรียนภาคฤดูร้อน ปรากฏว่ามี 20 คนที่เห็นด้วยกับการเรียนภาคฤดูร้อน ให้ประมาณสัดส่วนนักศึกษาในวิทยาลัยครูแห่งนี้ ที่เห็นด้วยกับการเรียนภาคฤดูร้อน กำหนดให้ระดับความเชื่อมั่นเป็น 95%

ที่ระดับความเชื่อมั่น 95 % (หรือ .95) $\alpha = 0.05$

$$\therefore \quad Z_{\alpha/2} = Z_{.025} = 1.96$$

$$p = \frac{20}{100} = 0.2$$

$$q = 1-p = 1-0.2 = 0.8$$

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{(.2)(.8)}{100}} = 0.04$$

$\therefore$ ช่วงแห่งความเชื่อมั่นของสัดส่วนของนักศึกษาที่เห็นด้วยกับการเรียนภาคฤดูร้อน (π) ที่ระดับความเชื่อมั่น 95 % คือ

$$p \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 0.2 \pm 1.96(0.04)$$

$$= 0.2 \pm 0.0784$$

$$= (0.1216,\ 0.2784)$$

ถ้าใช้ค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง คือ $\frac{1}{2n} = \frac{1}{2(100)} = 0.0005$

ช่วงแห่งความเชื่อมั่นของ π จะเป็น

$$p \pm \left(\frac{1}{2n} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = 0.2 \pm (0.0005 + 0.0784)$$

$$= (0.1211,\ 0.2789)$$

ค่าที่ได้ต่างไปจากเมื่อไม่ใช้ค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่องเพียงเล็กน้อย

<u>กำหนดขนาดกลุ่มตัวอย่างที่เหมาะสมในการประมาณค่าสัดส่วนของประชากร</u>

ให้ E แทนความคลาดเคลื่อนสูงสุดที่จะยอมให้มีได้ในการประมาณค่า

$$\therefore \quad E = Z_{\alpha/2}\,\sigma_p = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$$

$$n = \frac{Z^2_{\alpha/2}\,\pi(1-\pi)}{E^2}$$

$\pi(1-\pi)$ จะมีค่าสูงสุดเมื่อ $\pi = ½$

$$\therefore\ n = \frac{Z^2_{\alpha/2}}{4E^2}$$ [54]

ตัวอย่าง ถ้าต้องการประมาณสัดส่วนของนักศึกษาในวิทยาลัยครูแห่งหนึ่งที่เห็นด้วยกับการเรียนภาคฤดูร้อน โดยให้ความคลาดเคลื่อนไม่เกิน 5 % ที่ระดับความเชื่อมั่น 95 % ขนาดกลุ่มตัวอย่างที่เหมาะสมหาได้ดังนี้

ที่ระดับความเชื่อมั่น 95 % $\alpha = 0.05$

$$Z_{\alpha/2} = Z_{.025} = 1.96$$

$$E = 5\,\% = 0.05$$

$$\therefore\ n = \frac{Z^2_{\alpha/2}}{4E^2} = \frac{(1.96)^2}{4(.05)^2} = 384.16 \cong 385$$

นั่นคือต้องสุ่มตัวอย่างนักศึกษามาอย่างน้อย 385 คน.

การประมาณค่าความแตกต่างระหว่างสัดส่วนของประชากร 2 กลุ่ม $(\pi_1-\pi_2)$

กลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่ม กลุ่มแรกมีขนาด n_1 ได้จากประชากรทวินามซึ่งมีสัดส่วน π_1 กลุ่มที่ 2 มีขนาด n_2 ได้จากประชากรทวินามซึ่งมีสัดส่วน π_2 ประชากรทวินาม 2 กลุ่มนี้เป็นอิสระต่อกัน ความแตกต่างระหว่างสัดส่วนของกลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่มนี้คือ p_1-p_2 จะใช้เป็นค่าประมาณความแตกต่างระหว่างสัดส่วนของประชากร $(\pi_1-\pi_2)$

ลักษณะการแจกแจงตัวอย่างของ p_1-p_2

1. มัชฌิมของการแจกแจงตัวอย่างของ $p_1-p_2 = \mu_{p_1-p_2} = \pi_1-\pi_2$
2. ความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน $= \sigma_{p_1-p_2} = \sqrt{\dfrac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \dfrac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$

[54]Hughes and Grawoig, op.cit., p. 216.

3. เมื่อกลุ่มตัวอย่างทั้ง 2 กลุ่มมีขนาดใหญ่พอ การแจกแจงตัวอย่างของ p_1-p_2 จะเข้าใกล้การแจกแจงปกติ ขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่ถือว่าใหญ่พอในกรณีนี้ กลาส (Gene V. Glass) กับ แสตนเลย์ (Julian C. Stanley) แนะนำให้ใช้ n_1 และ $n_2 \geq 100$ [55]

เนื่องจาก $\sigma_{p_1-p_2}$ ติดค่า π_1 และ π_2 ซึ่งไม่ทราบ จึงต้องประมาณ $\sigma_{p_1-p_2}$ โดยใช้

$$\hat{\sigma}_{p_1-p_2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} = \sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}}$$

เมื่อทั้ง n_1 และ n_2 มีขนาดใหญ่พอที่จะทำให้การแจกแจงตัวอย่างของ p_1-p_2 เข้าใกล้การแจกแจงปกติ จะได้ความสัมพันธ์

$$P\left[(p_1-p_2)-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}} < \pi_1-\pi_2 < (p_1-p_2)+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}}\right] = 1-\alpha$$

∴ ช่วงแห่งความเชื่อมั่นของ $\pi_1-\pi_2$ ที่ระดับความเชื่อมั่น $1-\alpha$ คือ

$$(p_1-p_2)\pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}}$$

$$= \left[(p_1-p_2)-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}},\ (p_1-p_2)+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}}\right]$$

<u>ตัวอย่าง</u> สุ่มตัวอย่างนักเรียนจากโรงเรียน ก.มา 125 คน และจากโรงเรียน ข.มา 100 คน ทำการทดสอบนักเรียนทั้ง 2 กลุ่ม โดยใช้แบบทดสอบชุดเดียวกัน ปรากฏว่านักเรียนจากโรงเรียน ก.สอบตก 50 คน และจากโรงเรียน ข.สอบตก 25 คน จงประมาณความแตกต่างระหว่างสัดส่วนของนักเรียนในโรงเรียนทั้งสองที่สอบไม่ผ่านแบบทดสอบชุดนี้

---

[55]Glass and Stanley, <u>op.cit.</u>, p. 325.

ให้ π_1 = สัดส่วนของนักเรียนในโรงเรียน ก.ที่สอบไม่ผ่านแบบทดสอบชุดนี้
และ π_2 = สัดส่วนของนักเรียนในโรงเรียน ข.ที่สอบไม่ผ่านแบบทดสอบชุดนี้

$$p_1 = \frac{50}{125} = 0.4 \quad , \quad q_1 = 1-0.4 = 0.6$$

$$p_2 = \frac{25}{100} = 0.25 \quad , \quad q_2 = 1-0.25 = 0.75$$

$$\hat{\sigma}_{p_1-p_2} = \sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{(.4)(.6)}{125} + \frac{(.25)(.75)}{100}}$$
$$= 0.0616$$

เลือกระดับความเชื่อมั่น 0.95 ; $\alpha = 0.05$

$$Z_{\alpha/2} = Z_{.025} = 1.96$$

∴ ความแตกต่างระหว่างสัดส่วนของนักเรียนในโรงเรียน ก. กับโรงเรียน ข. ที่สอบไม่ผ่านแบบทดสอบชุดนี้ ที่ระดับความเชื่อมั่น 0.95 จะเป็น

$$(p_1-p_2) \pm Z_{\alpha/2}\,\hat{\sigma}_{p_1-p_2} = (0.4-0.25) \pm (1.96)(0.0616)$$
$$= 0.15 \pm 0.1207$$
$$= (0.0293,\ 0.2707)$$

3.2.3 การประมาณค่าความแปรปรวนของประชากร (σ^2)

ความแปรปรวนของประชากร $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2/N$

ตามปกติเราจะไม่ทราบค่า ต้องประมาณจากความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่าง (s^2)

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2/(n-1)$$

ลักษณะการแจกแจงตัวอย่างของ s^2

การแจกแจงตัวอย่างของ s^2 เป็นการแจกแจงไคสแควร์ (χ^2-distribution) ทั้งนี้กำหนดว่า กลุ่มตัวอย่างได้มาอย่างสุ่มจากประชากรปกติ เมื่อจำนวนชั้นของความเป็น

อิสระ (degree of freedom) เพิ่มขึ้น การแจกแจงไคสแควจะเข้าใกล้การแจกแจงปกติ นั่นคือ เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ($n \geq 100$) การแจกแจงตัวอย่างของ s^2 จะเข้าใกล้การแจกแจงปกติ โดยมีมัชฌิม $= \mu_{s^2} = \sigma^2$

และความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน $= \sigma_{s^2} = \sigma^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ [56]

สังเกตว่า ค่า σ_{s^2} ติดค่า σ^2 ซึ่งไม่ทราบ จึงต้องใช้ค่าประมาณ $\hat{\sigma}_{s^2} = s^2\sqrt{\frac{2}{n-1}}$ ดังนั้น สำหรับกลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่ จะได้ความสัมพันธ์

$$P\left[(s^2 - Z_{\alpha/2}s^2\sqrt{\frac{2}{n-1}}) < \sigma^2 < (s^2 + Z_{\alpha/2}s^2\sqrt{\frac{2}{n-1}})\right] = 1-\alpha$$

∴ ช่วงแห่งความเชื่อมั่นของ σ^2 ที่ระดับความเชื่อมั่น $1-\alpha$ คือ

$$s^2 \pm Z_{\alpha/2}\, s^2\sqrt{\frac{2}{n-1}} = (s^2 - Z_{\alpha/2}s^2\sqrt{\frac{2}{n-1}}, s^2 + Z_{\alpha/2}\, s^2\sqrt{\frac{2}{n-1}})$$

<u>ตัวอย่าง</u> สุ่มตัวอย่างเกณฑ์ภาคเชาวน์ของนิสิตมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งมา 200 คน คำนวณความแปรปรวนได้เป็น 100 ให้หาช่วงแห่งความเชื่อมั่นของความแปรปรวนของเกณฑ์ภาคเชาวน์ของนิสิตมหาวิทยาลัยนี้ที่ระดับความเชื่อมั่น 0.99

ที่ระดับความเชื่อมั่น 0.99 ; $\alpha = 0.01$

$$Z_{\alpha/2} = Z_{.005} = 2.58$$

∴ ช่วงแห่งความเชื่อมั่นที่ต้องการ คือ

$$\begin{aligned} s^2 \pm Z_{\alpha/2}\, s^2\sqrt{\frac{2}{n-1}} &= 100 \pm (2.58)(100)\sqrt{\frac{2}{200-1}} \\ &= 100 \pm 25.8 \\ &= (74.2\ ,\ 125.8) \end{aligned}$$

---

[56] Chou, <u>op.cit.</u>, pp. 260-261.

3.2.4 การประมาณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร (σ)

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน มีค่าเท่ากับ รากที่สองของความแปรปรวน ใช้เป็นมาตราวัดการกระจายของข้อมูลที่ดีที่สุด ทำให้ทราบลักษณะการกระจายของประชากร ซึ่งจะช่วยให้ตัดสินปัญหาได้ถูกต้องยิ่งขึ้น

ตามปกติ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร เราไม่ทราบ เช่นเดียวกับความแปรปรวนของประชากร ต้องประมาณจากส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง (s)

ลักษณะการแจกแจงตัวอย่างของ s

เมื่อประชากรเป็นปกติ เช่นเดียวกับ s^2 การแจกแจงตัวอย่างของ s จะเป็นการแจกแจงไคสแควร์ ดังนั้นเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ ($n \geq 100$) การแจกแจงตัวอย่างของ s จะเข้าใกล้การแจกแจงปกติ โดยมีมัชฌิม $= \mu_s = \sigma$
และความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน $= \sigma_s = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$ [57]

ค่า σ_s ติดค่า σ ซึ่งไม่ทราบ ต้องใช้ค่าประมาณ $\hat{\sigma}_s = \frac{s}{\sqrt{2n}}$

สำหรับกลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่ เราจึงได้ความสัมพันธ์

$$P\left(s-Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{2n}} < \sigma < s+Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{2n}}\right) = 1-\alpha$$

$\therefore$ ช่วงแห่งความเชื่อมั่นของ σ ที่ระดับความเชื่อมั่น $1-\alpha$ คือ

$$s \pm Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{2n}} = \left(s-Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{2n}},\ s+Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{2n}}\right)$$

ตัวอย่าง ให้ $n = 120$, $s = 15$ จงหาช่วงแห่งความเชื่อมั่นของ σ ที่มีสัมประสิทธิ์แห่งความเชื่อมั่น 0.99 [58]

[57] Peatman, op.cit., p. 213.
[58] Ibid., p. 214.

$\alpha = 0.01 \, , \; Z_{\alpha/2} = Z_{.005} = 2.58$

∴ ช่วงแห่งความเชื่อมั่นของ σ ที่มีสัมประสิทธิ์แห่งความเชื่อมั่น 0.99 คือ

$$s \pm Z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{2n}} = 15 \pm (2.58)\left(\frac{15}{\sqrt{240}}\right)$$
$$= 15 \pm 2.5$$
$$= (12.5 \, , \, 17.5)$$

3.2.5 <u>การประมาณค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบผลคูณของประชากร</u> (Population Product-moment Correlation Coefficient, ρ)

ให้ ρ_{XY} เป็นสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบผลคูณระหว่างตัวแปร X กับ Y ซึ่งมีการแจกแจงปกติแบบสองตัวแปร (Bivariate Normal Distribution)[59]

สุ่มตัวอย่างขนาด n จากประชากรซึ่งแจกแจงปกติแบบสองตัวแปร และมีสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ ρ_{XY} คำนวณสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y ในกลุ่มตัวอย่างให้เป็น r_{XY} r_{XY} จะใช้เป็นตัวประมาณค่า ρ_{XY}

<u>ลักษณะการแจกแจงตัวอย่างของ r_{XY}</u>

เมื่อ $\rho_{XY} = 0$ และ $n \geq 30$ การแจกแจงตัวอย่างของ r_{XY} จะเข้าใกล้ปกติ

โดยมีมัชฌิม $= \mu_{r_{XY}} = \rho_{XY} = 0$

และความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน $= \sigma_{r_{XY}} = \sqrt{\frac{1-\rho^2_{XY}}{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}}$

$|\rho_{XY}|$ ไม่เกิน 0.25 และ n ใหญ่ การแจกแจงตัวอย่างของ r_{XY} จะยังคงประมาณได้กับการแจกแจงปกติ[60]

แต่เมื่อ $|\rho_{XY}|$ มีค่าเกิน 0.25 แม้ n จะใหญ่ การแจกแจงตัวอย่างของ r_{XY} จะเบ้

---

[59] ดูที่ภาคผนวก ง.

[60] Peatman, <u>loc.cit.</u>

อย่างไรก็ตาม อาศัยวิธีการของฟิชเชอร์ เปลี่ยน r_{XY} และ ρ_{XY} เป็น Z(Fisher's Z transformation) ตามสูตร

$$Z_r = \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+r_{XY}}{1-r_{XY}}\right)$$

$$\text{และ}\quad Z_\rho = \xi = \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+\rho_{XY}}{1-\rho_{XY}}\right)$$

ฟิชเชอร์ ได้แสดงให้เห็นว่า สำหรับค่า ρ_{XY} ใด ๆ ไม่ว่า n จะมีขนาดเท่าใด การแจกแจงตัวอย่างของ Z_r จะเข้าใกล้การแจกแจงปกติ โดยมีมัชฌิม

$$= \mu_{Z_r} = \xi = \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+\rho_{XY}}{1-\rho_{XY}}\right)$$

และความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน $= \sigma_{Z_r} = \sqrt{\frac{1}{n-3}}$ [61]

การเปลี่ยน r_{XY} เป็น Z_r ตามวิธีของฟิชเชอร์ ทำให้สามารถแก้ปัญหาในการสร้างช่วงแห่งความเชื่อมั่นของ ρ_{XY} รอบ r_{XY} สำหรับทุกค่าของ ρ_{XY} และ n (แต่จะได้ผลดีเมื่อ $|\rho_{XY}|$ เล็กลง และ n เพิ่มขึ้น) โดยเปลี่ยน r_{XY} เป็น Z_r สร้างช่วงแห่งความเชื่อมั่นของ ξ ก่อน แล้วจึงเปลี่ยนกลับเป็นช่วงแห่งความเชื่อมั่นของ ρ_{XY} ทั้งนี้มีข้อตกลงเบื้องต้นที่เข้มงวดคือ X กับ Y จะต้องแจกแจงปกติแบบสองตัวแปร ในกรณีที่เราไม่ทราบว่าการแจกแจงของ X กับ Y เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นนี้หรือไม่ เพื่อความปลอดภัย ต้องใช้กลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่[62]

เมื่อเปลี่ยน r_{XY} เป็น Z_r แล้ว เราจะได้ตัวแปรปกติมาตรฐาน

$$Z = \frac{Z_r - \xi}{\sqrt{\frac{1}{n-3}}}$$

จึงได้ความสัมพันธ์

$$P\left[Z_r \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{n-3}} < \xi < Z_r + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{n-3}}\right] = 1-\alpha$$

---

[61] Hays, op.cit., p. 530.
[62] Ibid., p. 531.

$\therefore$ ช่วงแห่งความเชื่อมั่นของ ζ ที่ระดับความเชื่อมั่น $1-\alpha$ คือ

$$z_r \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{n-3}} = \left(z_r - z_{\alpha/2}\ \frac{1}{n-3},\ z_r + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{n-3}}\right)$$

เปลี่ยนกลับเป็นค่า r_{XY} ก็จะได้ช่วงแห่งความเชื่อมั่นของ ρ_{XY} ที่ระดับความเชื่อมั่น $1-\alpha$

ในทางปฏิบัติ การเปลี่ยน r_{XY} เป็น z_r หรือเปลี่ยนกลับจาก z_r เป็น r_{XY} ทำได้สะดวก เพราะฟิชเชอร์ได้สร้างตารางแสดงค่า z_r ที่สัมพันธ์กับค่า r_{XY} แต่ละค่า ไว้เรียบร้อยแล้ว [ตาราง (6) ภาคผนวก ช.] การเปลี่ยน ρ_{XY} เป็น z_ρ หรือ z_ρ เป็น ρ_{XY} ก็ใช้ตารางเดียวกัน

<u>ตัวอย่าง</u> กลุ่มตัวอย่างขนาด $n = 84$ ได้มาอย่างสุ่มจากประชากรที่แจกแจงปกติแบบสองตัวแปร สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของกลุ่มตัวอย่าง $= r = .245$ ให้หาช่วงแห่งความเชื่อมั่นของ ρ ซึ่งมีสัมประสิทธิ์แห่งความเชื่อมั่น .95 [63]

จากตาราง (6) ภาคผนวก ช.

$$r = .245 \quad \text{จะได้} \quad z_r = .250$$

ต้องการสัมประสิทธิ์แห่งความเชื่อมั่น .95

$$\alpha = .05; \quad z_{\alpha/2} = z_{.025} = 1.96$$

ช่วงแห่งความเชื่อมั่นของ ζ ซึ่งมีสัมประสิทธิ์แห่งความเชื่อมั่น .95 คือ

$$z_r \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{n-3}} = .250 \pm 1.96\sqrt{\frac{1}{84-3}}$$

$$= .250 \pm .218$$

$$= (.032,\ .468)$$

เปลี่ยนกลับเป็นค่า r จะได้ช่วง $(.032,\ .436)$

---

[63] Glass and Stanley, <u>op.cit.</u>, p. 268.

$\therefore$ ช่วงแห่งความเชื่อมั่นของ ρ ซึ่งมีสัมประสิทธิ์แห่งความเชื่อมั่น .95 คือ

$$(.032, \quad .436)$$

3.3 ใช้ในการทดสอบสมมุติฐานทางสถิติ

สมมุติฐานทางสถิติ (Statistical Hypothesis) คือข้อความที่สมมุติขึ้นมาเกี่ยวกับพารามิเตอร์และ (หรือ) ลักษณะของประชากร ที่ต้องสมมุติก็เพราะเราไม่แน่ใจเกี่ยวกับค่าพารามิเตอร์และ(หรือ)ลักษณะของประชากรนั้น ถ้าจะให้แน่ใจก็ต้องศึกษาจากประชากรทั้งหมด แต่ในทางปฏิบัติโดยทั่วไปเราไม่อาจทำได้ ดังนั้นจึงต้องมีวิธีการในการตัดสินใจว่าจะยอมรับหรือปฏิเสธสมมุติฐานโดยอาศัยข้อมูลจากกลุ่มตัวอย่าง วิธีการดังกล่าวเรียกว่า การทดสอบสมมุติฐาน (Hypothesis Testing) ในระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด เราจะยอมรับสมมุติฐาน ถ้าข้อมูลจากกลุ่มตัวอย่างสนับสนุนให้ยอมรับ หรือปฏิเสธสมมุติฐานถ้าข้อมูลจากกลุ่มตัวอย่างสนับสนุนให้ปฏิเสธ

สมมุติฐานที่จะทดสอบเรียกว่า สมมุติฐานสูญ (Null Hypothesis) ซึ่งตั้งขึ้นโดยถือว่า สมมุติฐานทางสถิตินั้นจริง ใช้สัญญลักษณ์ H_o เช่น $H_o: \mu = \mu_o$ (μ_o เป็นค่าคงที่ค่าหนึ่ง) , $H_o: \pi_1 = \pi_2$

สมมุติฐานที่ตรงกันข้ามกับสมมุติฐานที่จะทดสอบเรียกว่า สมมุติฐานสำรอง (Alternative Hypothesis) ใช้สัญญลักษณ์ H_1 เช่น $H_1: \mu \neq \mu_o$, $H_1: \pi_1 > \pi_2$

สมมุติฐานสำรองตั้งขึ้นมาเพื่อเป็นทางเลือก หมายความว่า ถ้าปฏิเสธสมมุติฐานสูญ เราจะยอมรับสมมุติฐานสำรอง หรือถ้ายอมรับสมมุติฐานสูญ เราจะปฏิเสธสมมุติฐานสำรอง

เนื่องจากการตัดสินใจยอมรับหรือปฏิเสธสมมุติฐานขึ้นอยู่กับข้อมูลจากกลุ่มตัวอย่าง จึงไม่อาจตัดสินใจด้วยความมั่นใจได้ เพราะมีโอกาสที่จะตัดสินใจผิดได้เสมอ ดังในตารางที่5

การตัดสินใจ \ ตามที่เป็นจริง	H_o ถูก (H_1 ผิด)	H_o ผิด (H_1 ถูก)
ยอมรับ H_o (ปฏิเสธ H_1)	ตัดสินใจถูก $P = 1-\alpha$	เกิดความคลาดเคลื่อนแบบที่ II $P = \beta$
ปฏิเสธ H_o (ยอมรับ H_1)	เกิดความคลาดเคลื่อนแบบที่ I $P = \alpha$	ตัดสินใจถูก $P = 1-\beta$

ตารางที่ 5 การตัดสินใจในการทดสอบสมมุติฐาน

จะเห็นได้ว่า โอกาสที่จะตัดสินใจผิดมีอยู่ 2 ทาง ทางแรก เมื่อปฏิเสธสมมุติฐานที่ถูก ทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนแบบที่ I (Type I error) มีความน่าจะเป็นเท่ากับ α กับอีกทางหนึ่ง เมื่อยอมรับสมมุติฐานที่ผิด ทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนแบบที่ II (Type II error) มีความน่าจะเป็นเท่ากับ β ที่เป็นเช่นนี้เพราะในการใช้ข้อมูลจากกลุ่มตัวอย่างนั้น เป็นไปได้ที่ค่าสถิติจากกลุ่มตัวอย่างจะแตกต่างไปจากค่าที่คาดหวังตามสมมุติฐานสูญมากจนทำให้เราตัดสินใจปฏิเสธสมมุติฐานสูญ ทั้ง ๆ ที่ตามที่เป็นจริง สมมุติฐานสูญนั้นถูก ในทำนองเดียวกัน เป็นไปได้ที่ค่าสถิติจากกลุ่มตัวอย่างจะใกล้เคียงกับค่าที่คาดหวังตามสมมุติฐานสูญทำให้เราตัดสินใจยอมรับสมมุติฐานสูญ ทั้ง ๆ ที่สมมุติฐานสูญผิด

ความน่าจะเป็นในการปฏิเสธสมมุติฐานที่ถูก (เกิดความคลาดเคลื่อนแบบที่ I) $= \alpha$ เราเรียกว่า ขนาด (size) ของการทดสอบสมมุติฐาน หรือ<u>ระดับความมีนัยสำคัญ</u> (Level of significance) ที่ใช้คำว่า มีนัยสำคัญ เพราะความแตกต่างระหว่างค่าจากตัวอย่างกับค่าตามสมมุติฐานมีมากจนถือว่า มีนัยสำคัญ หมายความว่า มีมากเกินกว่าที่จะถือว่าเกิดขึ้นโดยบังเอิญ

ความน่าจะเป็นในการปฏิเสธสมมุติฐานที่ผิด $= 1-\beta$ เรียกว่า <u>อำนาจ</u>(Power) ของการทดสอบสมมุติฐาน

ในการทดสอบสมมุติฐาน เราพยายามป้องกันความคลาดเคลื่อนที่จะเกิดขึ้นทั้ง 2 แบบ สำหรับความคลาดเคลื่อนแบบที่ I เราป้องกันได้โดยลดความน่าจะเป็นในการปฏิเสธสมมุติฐานที่ถูก (ลดα) จะทำให้ความน่าจะเป็นในการยอมรับสมมุติฐานที่ถูกมีมากขึ้น แต่ในขณะเดียวกัน ความน่าจะเป็นในการยอมรับสมมุติฐานที่ผิดก็จะเพิ่มขึ้น (β เพิ่ม) ในทางตรงกันข้าม ถ้าป้องกันความคลาดเคลื่อนแบบที่ II โดยลดขนาดความน่าจะเป็นในการยอมรับสมมุติฐานที่ผิด (ลดβ) ก็จะทำให้ความน่าจะเป็นในการปฏิเสธสมมุติฐานที่ถูกเพิ่มขึ้น (α เพิ่ม) อย่างไม่มีทางเลี่ยง การป้องกันความคลาดเคลื่อนทั้ง 2 แบบในเวลาเดียวกัน จึงไม่อาจทำได้ ดังนั้น ในทางปฏิบัติ ต้องพิจารณาว่า ความคลาดเคลื่อนแบบไหนสำคัญกว่า แล้วหาทางป้องกันความคลาดเคลื่อนแบบนั้น วิธีการที่ยอมรับกันว่าดีที่สุดในหมู่นักสถิติ คือ กำหนดขนาดความน่าจะเป็นในการเกิดความคลาดเคลื่อนแบบที่I (Fix α) แล้วเลือกการทดสอบที่จะทำให้อำนาจของการทดสอบสมมุติฐานมีมากที่สุด (Maximize $1-\beta$)

การกำหนดขนาดความน่าจะเป็นในการเกิดความคลาดเคลื่อนแบบที่ I หรือที่เรียกว่า ระดับความมีนัยสำคัญ นั้น ขึ้นอยู่กับความเสียหายที่จะเกิดขึ้นเนื่องจากการปฏิเสธสมมุติฐานที่ถูก ถ้าความเสียหายร้ายแรงมาก ก็กำหนดระดับความมีนัยสำคัญให้น้อย ๆ เช่น กำหนดให้เป็น .01, .005 หรือ .001 ถ้าความเสียหายไม่ร้ายแรงนัก ก็กำหนดระดับความมีนัยสำคัญให้มากขึ้นกว่ากรณีแรกได้ เช่น กำหนดให้เป็น .10 หรือ .05

<u>ลำดับขั้นในการทดสอบสมมุติฐาน</u>

ขั้นที่ 1 ตั้งสมมุติฐานสูญ และสมมุติฐานสำรอง
เช่น ต้องการทดสอบว่า ค่าพารามิเตอร์ θ เท่ากับค่าที่กำหนด θ_0

สมมุติฐานสูญ $H_0: \theta = \theta_0$

สมมุติฐานสำรอง H_1: ก. $\theta \neq \theta_0$ สำหรับการทดสอบสองทาง

ข. $\theta > \theta_0$
หรือ ค. $\theta < \theta_0$ } สำหรับการทดสอบทางเดียว

การตั้งสมมุติฐานสำรองจะเป็นแบบทางเดียวหรือสองทาง ขึ้นอยู่กับความสนใจในปัญหา และขึ้นอยู่กับความรู้ทางทฤษฎี หรือผลงานวิจัยครั้งก่อน ๆ เกี่ยวกับปัญหานั้น ถ้าสนใจว่า ค่าสถิติที่ได้จากกลุ่มตัวอย่าง จะแตกต่างไปจากค่าที่คาดหวังตามสมมุติฐานสูญหรือไม่โดยไม่คำนึงถึงทิศทางของความแตกต่าง ก็ตั้งสมมุติฐานสำรองเป็นแบบสองทาง แต่ถ้าสนใจทิศทางของความแตกต่างด้วย ว่าค่าสถิติมากกว่าหรือน้อยกว่าค่าที่คาดหวังตามสมมุติฐานสูญ ก็ตั้งสมมุติฐานสำรองเป็นแบบทางเดียว ซึ่งต้องอาศัยความรู้ทางทฤษฎีหรือผลงานวิจัยครั้งก่อน ๆ เป็นเครื่องช่วย

การทดสอบสมมุติฐานในกรณีที่ตั้งสมมุติฐานสำรองเป็นแบบสองทาง เรียกว่า การทดสอบแบบไม่มีทิศทาง (Non-directional test) หรือการทดสอบสองทาง (Two-tailed test) ส่วนการทดสอบสมมุติฐานในกรณีที่ตั้งสมมุติฐานสำรองเป็นแบบทางเดียว เรียกว่า การทดสอบทางเดียว (One-tailed test)

ขั้นที่ 2 กำหนดข้อตกลงเบื้องต้น ซึ่งจำเป็นสำหรับการหาการแจกแจงตัวอย่างของสถิติ ที่ใช้ประมาณค่าพารามิเตอร์ตามสมมุติฐานที่ตั้งไว้

ขั้นที่ 3 กำหนดระดับความมีนัยสำคัญ ใช้สัญญลักษณ์ α อาจจะให้ α= .10,.05, .01 หรือ .001 แล้วแต่ความเหมาะสม

ขั้นที่ 4 กำหนดสถิติที่จะใช้ทดสอบ สำหรับการใช้การแจกแจงปกติทดสอบสมมุติฐาน นั้น สถิติที่ใช้ อาจเขียนในรูปทั่วไป ได้เป็น

$$Z = \frac{\hat{\theta}-\theta}{\sigma_{\hat{\theta}}} \quad ; \quad \theta = \text{ค่าพารามีเตอร์}$$

$\hat{\theta}$ = ค่าที่ได้จากกลุ่มตัวอย่าง

$\sigma_{\hat{\theta}}$ = ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ $\hat{\theta}$

ค่า Z ที่ได้เรียกว่า อัตราส่วนวิกฤต (Critical ratio) เพราะใช้เป็นตัวกำหนดความมีนัยสำคัญทางสถิติของความแตกต่างระหว่างค่าจากกลุ่มตัวอย่างกับค่าที่คาดหวังตามสมมุติฐานสูญ

ขั้นที่ 5 บอกการแจกแจงตัวอย่างของสถิติที่ใช้ทดสอบ ในที่นี้คือ Z ถ้าสมมุติฐานสูญจริง การแจกแจงตัวอย่างของ Z จะเป็นปกติมาตรฐาน โดยมีมัชฌิมเท่ากับ 0 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 1

ถ้าสมมุติฐานสำรองจริง การแจกแจงตัวอย่างของ Z จะยังคงเป็นปกติหรือเข้าใกล้ปกติ โดยมัชฌิมจะเปลี่ยนไป แต่ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานยังคงเท่ากับ 1

ขั้นที่ 6 กำหนดขอบเขตวิกฤต (Critical Region) ซึ่งเป็นขอบเขตที่จะปฏิเสธสมมุติฐานสูญ ถ้าอัตราส่วนวิกฤตที่คำนวณได้ตกอยู่ในขอบเขตนี้ การกำหนดขอบเขตวิกฤตกำหนดตามระดับความมีนัยสำคัญ และค่าที่แสดงขอบเขตวิกฤตเรียกว่า ค่าวิกฤต (Critical Value) ที่ระดับความมีนัยสำคัญ α สำหรับการทดสอบสองทาง จะปฏิเสธสมมุติฐานสูญต่อเมื่อ อัตราส่วนวิกฤต $Z \geq Z_{\alpha/2}$ หรือ $Z \leq -Z_{\alpha/2}$

และสำหรับการทดสอบทางเดียว จะปฏิเสธสมมุติฐานสูญต่อเมื่อ $Z \geq Z_{\alpha}$ (ถ้า $H_1:\theta > \theta_o$) หรือ $Z \leq -Z_{\alpha}$ (ถ้า $H_1:\theta < \theta_o$)

ภาพที่ 11 แสดงค่าวิกฤตและขอบเขตวิกฤต(ส่วนที่แรเงา) ก.สำหรับการทดสอบสองทาง ข.และ ค.สำหรับการทดสอบทางเดียว $H_1:\theta>\theta_o$ และ $H_1:\theta<\theta_o$ ตามลำดับ

ขั้นที่ 7 การคำนวณ สุ่มตัวอย่างจากประชากร คำนวณค่าสถิติ ความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน และอัตราส่วนวิกฤต

ขั้นที่ 8 การตัดสินใจ พิจารณาอัตราส่วนวิกฤตที่คำนวณได้

ถ้าอัตราส่วนวิกฤต ตกอยู่ในขอบเขตวิกฤต จะตัดสินใจปฏิเสธสมมุติฐานสูญ

ถ้าอัตราส่วนวิกฤต ตกอยู่นอกขอบเขตวิกฤต (ตกอยู่ในขอบเขตการยอมรับ) อาจจะตัดสินใจยอมรับสมมุติฐานสูญ หรือสรุปว่า ไม่มีหลักฐานเพียงพอที่จะปฏิเสธสมมุติฐานสูญ

อาศัย Central Limit Theorem เราทราบว่า การแจกแจงตัวอย่างของค่าสถิติหลายค่า จะเป็นปกติหรือเข้าใกล้ปกติ เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ ดังนั้น เราจึงสามารถนำการแจกแจงปกติมาใช้ในการทดสอบสมมุติฐานได้อย่างกว้างขวาง ไม่ว่าจะเป็นสมมุติฐานเกี่ยวกับมัชฌิมของประชากร สัดส่วนของประชากร และอื่น ๆ การพิจารณาความเหมาะสม ในการใช้ ก็ใช้หลักเช่นเดียวกับเมื่อใช้การแจกแจงปกติเป็นค่าประมาณการแจกแจงชนิดอื่น และเมื่อใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์

3.3.1 <u>การทดสอบมัชฌิมของประชากร</u> (μ)

ต้องการทดสอบสมมุติฐานว่ามัชฌิมของประชากรมีค่าเท่ากับที่กำหนดไว้จริงหรือไม่

<u>สมมุติฐานที่จะทดสอบคือ</u>

H_o: $\mu_1 = \mu_o$

H_1: ก) $\mu_1 \neq \mu_o$ สำหรับการทดสอบสองทาง

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{ข)}\ \mu_1 > \mu_o \\ \text{หรือ} & \text{ค)}\ \mu_1 < \mu_o \end{array}\right\}\ \text{สำหรับการทดสอบทางเดียว}$$

<u>ข้อตกลงเบื้องต้นในการทดสอบ</u>

กลุ่มตัวอย่างขนาด n ได้มาอย่างสุ่มจากประชากรที่มีมัชฌิม μ และความแปรปรวน σ^2 เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ ตาม Central Limit Theorem การแจกแจงตัวอย่างของมัชฌิมของกลุ่มตัวอย่าง ($\bar{X}$) จะเป็นปกติหรือเข้าใกล้ปกติ โดยมีมัชฌิม $\mu_{\bar{X}} = \mu$

และความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ถ้าสุ่มตัวอย่างแบบแทนที่จากประชากรขนาดจำกัดหรือสุ่มจากประชากรขนาดไม่จำกัด หรือ $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ ถ้าสุ่มตัวอย่างแบบไม่แทนที่ จากประชากรขนาดจำกัด แต่ถ้า n เล็ก เมื่อเทียบกับ N (เล็กกว่า 5 %) ก็ตัด $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ ทิ้งได้ ดังกล่าวแล้วในตอนประมาณค่ามัชฌิมของประชากร ดังนั้น สำหรับกลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่ สถิติที่ใช้ทดสอบมัชฌิมของประชากร คือ

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad (1)$$

ถ้าไม่ทราบค่า σ เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ ให้ใช้ค่าประมาณ $\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$

จะได้

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\hat{\sigma}_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \qquad (2)$$

<u>ขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่ถือว่าใหญ่พอ</u>

พิจารณาเช่นเดียวกับเมื่อประมาณค่ามัชฌิมของประชากร โดยใช้การแจกแจงปกติ นั่นคือ

1. เมื่อทราบค่า σ ถ้าประชากรแจกแจงปกติ ใช้ n ได้ทุกขนาด แต่ถ้าไม่ทราบการแจกแจงของประชากร นักสถิติส่วนมากใช้ $n \geq 30$

2. เมื่อไม่ทราบค่า σ ต้องใช้ค่าประมาณ $\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$ ถ้าประชากรแจกแจงปกติ ใช้ $n \geq 30$ แต่ถ้าไม่ทราบการแจกแจงของประชากร ควรใช้ $n \geq 100$ ไม่เช่นนั้นควรทดสอบด้วยสถิติที (t-test)

<u>ตัวอย่าง</u> แบบทดสอบที่ใช้คัดเลือกนิสิตปีที่ 1 เข้าเรียนในมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง สร้างขึ้นโดยมีมัชฌิมเท่ากับ 73 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 12 สุ่มตัวอย่างคะแนนของนิสิตปีที่ 1 ซึ่งวัดโดยใช้แบบทดสอบนี้มา 16 คน พบว่ามีมัชฌิมเท่ากับ 66 อยากทราบว่า กลุ่มตัวอย่างนี้เป็นกลุ่มตัวอย่างที่สุ่มจากประชากรซึ่งมีมัชฌิมเท่ากับ 73 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 12 หรือไม่[64]

---

[64] Cornell, <u>op.cit.</u>, p. 124.

สมมุติฐาน $H_0 : \mu = 73$

$H_1 : \mu \neq 73$

ระดับความมีนัยสำคัญ : $\alpha = .05$

สถิติที่ใช้ทดสอบ : ใช้สูตร (1)

ขอบเขตของวิกฤต : จะปฏิเสธสมมุติฐานสูญ ถ้า $Z \geq 1.96$ หรือ $Z \leq -1.96$

การคำนวณ : แทนค่าในสูตร (1) จะได้ $Z = -2.33$

การตัดสินใจ : $Z=-2.33 < -1.96$ แสดงว่า $\bar{X}=66$ แตกต่างไปจาก $\mu = 73$ อย่างมีนัยสำคัญ จึงปฏิเสธสมมุติฐานสูญ สรุปว่า กลุ่มตัวอย่างนี้ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างที่สุ่มจากประชากรซึ่งมีมัชฌิมเท่ากับ 73 และความแปรปรวนเท่ากับ 12

การทดสอบความแตกต่างระหว่างมัชฌิมของประชากร 2 กลุ่ม ($\mu_1 - \mu_2$)

สมมุติฐานที่จะทดสอบคือ

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = D_0$ (ตามปกติเราทดสอบ $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ นั่นคือ $H_0 : \mu_1 = \mu_2$)

H_1 : ก) $\mu_1 - \mu_2 \neq D_0$ สำหรับการทดสอบสองทาง

ข) $\mu_1 - \mu_2 > D_0$
หรือ ค) $\mu_1 - \mu_2 < D_0$ } สำหรับการทดสอบทางเดียว

ข้อตกลงเบื้องต้นในการทดสอบ

กลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่ม ขนาด n_1 กับ n_2 ได้จากประชากรที่มีมัชฌิม μ_1 กับ μ_2 และความแปรปรวน σ_1^2 กับ σ_2^2 ตามลำดับ n_1 กับ n_2 มีขนาดใหญ่พอที่จะทำให้การแจกแจงตัวอย่างของมัชฌิมของกลุ่มตัวอย่าง X_1 กับ X_2 เป็นปกติ หรือเข้าใกล้ปกติ ซึ่งจะทำให้การแจกแจงตัวอย่างของ $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ เป็นปกติหรือเข้าใกล้ปกติ ด้วย โดยมีมัชฌิม $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$ และความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

<u>สถิติที่ใช้ทดสอบ</u>

$$Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-D_o}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \qquad (3)$$

ถ้าไม่ทราบ σ_1^2 กับ σ_2^2 ต้องใช้ค่าประมาณ $\hat{\sigma}_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$

จะได้
$$Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-D_o}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}} \qquad (4)$$

<u>ขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่เหมาะสม</u>

พิจารณาโดยใช้หลักเช่นเดียวกับในการทดสอบมัชฌิมของประชากร ดังนี้

1. เมื่อทราบค่า σ_1 และ σ_2 ถ้าประชากรแจกแจงปกติ ใช้ n_1 และ n_2 ได้ทุกขนาด แต่ถ้าไม่ทราบการแจกแจงของประชากร ใช้ n_1 และ $n_2 \geq 30$
2. เมื่อต้องใช้ค่าประมาณ $\hat{\sigma}_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$ ถ้าประชากรแจกแจงปกติ ใช้ n_1และ$n_2 \geq 30$ แต่ถ้าไม่ทราบการแจกแจงของประชากร ควรใช้ n_1 และ $n_2 \geq 100$ ไม่เช่นนั้นควรทดสอบด้วยสถิติที (t-test)

<u>ตัวอย่าง</u> สุ่มตัวอย่างผลการสอบวิชาสถิติของนิสิตคณะเศรษฐศาสตร์กับนิสิตคณะบัญชีในมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง ปรากฏว่า ได้ข้อมูลดังต่อไปนี้

	คณะเศรษฐศาสตร์	คณะบัญชี
จำนวนนิสิต	$n_1 = 60$	$n_2 = 40$
คะแนนเฉลี่ย	$\bar{X}_1 = 81$	$\bar{X}_2 = 79$
ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	$s_1 = 5$	$s_2 = 4$

อยากทราบว่านิสิตคณะเศรษฐศาสตร์เรียนวิชาสถิติเก่งกว่านิสิตคณะบัญชีจริงหรือไม่[65]

---

[65]ลิขิต เทอดสถีรศักดิ์, <u>หลักสถิติ</u> (พิมพ์ครั้งที่ 2 ; พระนคร : สื่อมการพิมพ์, 2513), หน้า 345.

สมมุติฐาน $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$

ระดับความมีนัยสำคัญ : $\alpha = .01$

สถิติที่ใช้ทดสอบ : ใช้สูตร (4)

ขอบเขตวิกฤต : จะปฏิเสธสมมุติฐานสูญต่อเมื่อ $Z \geq 2.33$

การคำนวณ : แทนค่าในสูตร (4) จะได้ $Z = 2.19$

การตัดสินใจ : $Z=2.19<2.33$ ไม่ปฏิเสธสมมุติฐานสูญ สรุปได้ว่า ยังไม่มีหลักฐานเพียงพอที่จะลงความเห็นว่านิสิตคณะเศรษฐศาสตร์เรียนวิชาสถิติเก่งกว่านิสิตคณะบัญชี

3.3.2 การทดสอบสัดส่วนของประชากร (π)

สมมุติฐานที่จะทดสอบ

$H_0 : \pi = \pi_0 \quad (0 \leq \pi_0 \leq 1)$

$H_1 :$ ก. $\pi \neq \pi_0$ สำหรับการทดสอบสองทาง

ข. $\pi > \pi_0$

หรือ ค. $\pi < \pi_0$ } สำหรับการทดสอบทางเดียว

ข้อตกลงเบื้องต้น

กลุ่มตัวอย่างสุ่มขนาด n ได้จากประชากรซึ่งมีสมาชิก 2 พวก คือ พวกที่มีลักษณะที่สนใจกับพวกที่ไม่มีลักษณะที่สนใจ สัดส่วนของจำนวนสมาชิกที่มีลักษณะที่สนใจในประชากรเป็น π ในกลุ่มตัวอย่างเป็น p เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ การแจกแจงตัวอย่างของ p จะเข้าใกล้ปกติโดยมีมัชฌิม $\mu_p = \pi$ และความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน $\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$ (รายละเอียดเกี่ยวกับการแจกแจงตัวอย่างของ p ดูในเรื่องการประมาณสัดส่วนของประชากร)

สถิติที่ใช้ทดสอบ

$$Z = \frac{(p \pm \frac{1}{2n}) - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} \qquad (5)$$

$\pm \frac{1}{2n}$ เป็นค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง ทั้งนี้เนื่องจากการแจกแจงตัวอย่างของ p ไม่ต่อเนื่องทำนองเดียวกับเมื่อใช้การแจกแจงปกติ เป็นค่าประมาณการแจกแจงทวินาม เราใช้ $\pm\frac{1}{2}$ เป็นค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง แต่ในกรณีของอัตราส่วน อัตราส่วน p ได้จากการหารมัชฌิมของการแจกแจงทวินาม np ด้วย n ค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่องจึงกลายเป็น $\pm \frac{1}{2n}$

ถ้า $p > \pi$ ให้ใช้ $-\frac{1}{2n}$

$p < \pi$ ให้ใช้ $+\frac{1}{2n}$

อย่างไรก็ตาม เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ($n \geq 100$) ค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่องจะมีค่าน้อยมาก ก็อาจจะตัดทิ้งได้[66]

<u>ขนาดกลุ่มตัวอย่างที่ถือว่าใหญ่พอ</u>

ใช้หลักเดียวกับเมื่อประมาณค่าอัตราส่วนของประชากร โดยใช้การแจกแจงปกติ หลักเกณฑ์ทั่ว ๆ ไปคือ $n\pi$ และ $n(1-\pi) \geq 5$

<u>ตัวอย่าง</u> สมมุติทำการสำรวจความคิดเห็นของนักในโรงเรียนมัธยมศึกษาแห่งหนึ่งเกี่ยวกับการสอบ สุ่มตัวอย่างนักเรียนโรงเรียนนี้มา 100 คน ปรากฏว่ามี 60 คนที่เห็นด้วยกับการสอบแบบปรนัย อีก 40 คนไม่เห็นด้วย จะสรุปได้หรือไม่ว่า จำนวนนักเรียนที่เห็นด้วยกับการสอบแบบปรนัยมีมากกว่า 50 % ที่ระดับความเชื่อมั่น 95 %

สมมุติฐาน $H_0 : \pi = .5$

$H_1 : \pi > .5$

ระดับความมีนัยสำคัญ : $\alpha = .05$

สถิติที่ใช้ทดสอบ : ใช้สูตร (5)

ขอบเขตวิกฤต : จะปฏิเสธสมมุติฐานสูญ ถ้า $z \geq 1.64$

การคำนวณ : $p = \frac{60}{100} = .6, \quad n = 100$

แทนค่าในสูตร (5) จะได้ $z = 1.9$

---

[66] Yamane, <u>op.cit.</u>, p. 572.

การตัดสินใจ : $Z = 1.9 > 1.64$ จึงปฏิเสธสมมุติฐานสูญ สรุปได้ว่า จำนวนนักเรียนในโรงเรียนนี้ ที่เห็นด้วยกับการสอบแบบปรนัยมีมากกว่า 50 %

<u>การทดสอบความแตกต่างระหว่างสัดส่วนของประชากร 2 กลุ่ม ใช้กลุ่มตัวอย่างอิสระ</u>

<u>สมมุติฐานที่จะทดสอบ</u>

$H_0 : \pi_1 - \pi_2 = D_0$ (ตามปกติเราจะทดสอบ $H_0 : \pi_1 - \pi_2 = 0$
นั่นคือ $H_0 : \pi_1 = \pi_2$)

H_1 : ก) $\pi_1 - \pi_2 \neq D_0$ สำหรับการทดสอบสองทาง

ข) $\pi_1 - \pi_2 > D_0$
หรือ ค) $\pi_1 - \pi_2 < D_0$ } สำหรับการทดสอบทางเดียว

<u>ข้อตกลงเบื้องต้น</u>

กลุ่มตัวอย่างอิสระ 2 กลุ่ม ขนาด n_1 กับ n_2 สุ่มมาจากประชากรซึ่งมีสัดส่วน π_1 และ π_2 ตามลำดับ ทั้ง n_1 และ n_2 มีขนาดใหญ่พอที่จะทำให้การแจกแจงตัวอย่างของความแตกต่างระหว่างสัดส่วนของกลุ่มตัวอย่าง $p_1 - p_2$ เข้าใกล้ปกติโดยมีมัชฌิม $\mu_{p_1-p_2} = \pi_1 - \pi_2$ และความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน $\sigma_{p_1-p_2} = \sqrt{\dfrac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \dfrac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$

ขนาด n_1 และ n_2 ที่ถือว่าใหญ่พอในกรณีนี้ ก็ใช้หลักทั่ว ๆ ไปคือ $n_1\pi_1, n_1(1-\pi_1)$, $n_2\pi_2$ และ $n_2(1-\pi_2) \geq 5$ นอกจากนี้ กลาส (Gene V. Glass) กับ สแตนเลย์ (Julian C. Stanley)[67] ยังแนะนำให้ใช้ n_1 และ $n_2 \geq 100$

<u>สถิติที่ใช้ทดสอบ</u>

$$Z = \frac{(p_1 - p_2) - D_0}{\sqrt{\dfrac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \dfrac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}} \qquad (6)$$

---

[67]Glass and Stanley, <u>op.cit.</u>, p. 325.

ตามปกติจะไม่ทราบค่า π_1 และ π_2 จึงต้องประมาณค่า $\sigma_{p_1-p_2}$ จาก p_1 และ p_2 ดังนี้

กรณีที่ 1) $D_o = 0$ นั่นคือ $\pi_1 = \pi_2 = \pi$

ค่าประมาณที่ดีที่สุดของ π คือ

$$\hat{p} = \frac{n_1p_1+n_2p_2}{n_1+n_2}$$

$$\therefore \quad \hat{\sigma}_{p_1-p_2} = s_{p_1-p_2} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n_1} + \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n_2}}$$

$$= \sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

สถิติที่ใช้ทดสอบจะเป็น

$$Z = \frac{p_1-p_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \qquad (7)$$

กรณีที่ 2) $D_o \neq 0$ นั่นคือ $\pi_1 \neq \pi_2$ ต้องประมาณค่าแยกกัน

p_1 เป็นค่าประมาณไม่เอนเอียงของ π_1

และ p_2 เป็นค่าประมาณไม่เอนเอียงของ π_2

$$\therefore \quad \hat{\sigma}_{p_1-p_2} = s_{p_1-p_2} = \frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_1}{n_2}$$

สถิติที่ใช้ทดสอบจะเป็น

$$Z = \frac{(p_1-p_2)-D_o}{\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}}} \qquad (8)$$

<u>ตัวอย่าง</u> ในการศึกษาเรื่องความขัดแย้งระหว่างพ่อแม่กับลูก พบว่าใน 100 ครอบครัว ซึ่งพ่อแม่ฝ่ายใดฝ่ายหนึ่งหรือทั้งสองฝ่ายไม่ไว้วางใจกัน มี 85 ครอบครัว ที่พ่อแม่ขัดแย้งกับลูก ส่วนในอีก 100 ครอบครัว ซึ่งพ่อแม่ไว้วางใจกัน มี 30 ครอบครัวที่พ่อแม่ขัดแย้งกับลูก อยากทราบว่า ความขัดแย้ง

ระหว่างพ่อแม่กับลูกของครอบครัวที่พ่อแม่ไม่ไว้วางใจกัน กับครอบครัวที่พ่อแม่ไว้วางใจกัน แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญหรือไม่[68]

สมมุติฐาน $H_0 : \pi_1 = \pi_2$

$H_1 : \pi_1 \neq \pi_2$

ระดับความมีนัยสำคัญ : $\alpha = .01$

สถิติที่ใช้ทดสอบ : ใช้สูตร (7)

ขอบเขตวิกฤต : จะปฏิเสธสมมุติฐานสูญ ถ้า $z \geq 2.58$ หรือ $z \leq -2.58$

การคำนวณ : $p_1 = \frac{85}{100} = .85, \quad q_1 = 1-.85 = .15$

$p_2 = \frac{30}{100} = .30, \quad q_2 = 1-.30 = .70$

$n_1 = n_2 = 100$

$\hat{p} = \frac{n_1p_1+n_2p_2}{n_1+n_2} = \frac{85+30}{200} = .575$

$\hat{q} = 1-.575 = .425$

แทนค่าในสูตร (7) จะได้ $z = 7.86$

การตัดสินใจ : $z = 7.86 > 2.58$ จึงปฏิเสธสมมุติฐานสูญ และลงความเห็นว่า ความขัดแย้งระหว่างพ่อแม่กับลูกของครอบครัวที่พ่อแม่ไม่ไว้วางใจกัน กับครอบครัวที่พ่อแม่ไว้วางใจกัน แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

---

[68] Lillian Cohen, Statistical Methods for Social Scientists (Englewood Cliffs, New Jersey:Prentice-Hall, Inc.,1954), p. 119.

การทดสอบความแตกต่างระหว่างสัดส่วนของประชากร 2 กลุ่ม ใช้กลุ่มตัวอย่างไม่อิสระ

สมมุติฐานที่จะทดสอบ

$$H_o : \pi_1 = \pi_2$$
$$H_1 : \pi_1 \neq \pi_2$$

ข้อตกลงเบื้องต้น

กลุ่มตัวอย่างสุ่ม 2 กลุ่ม มีขนาด n ทั้งคู่ ได้จากประชากรซึ่งมีสัดส่วน π_1 และ π_2 ตามลำดับ แต่กลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่มนี้ไม่เป็นอิสระ ดังนั้น สมาชิกในกลุ่มตัวอย่างที่ 1 กับกลุ่มตัวอย่างที่ 2 อาจอยู่ในลักษณะที่ถูกจับคู่ เป็นคู่แฝด หรือเป็นค่าสังเกตที่ได้จากการสังเกต "ก่อน" กับ "หลัง" การทดลอง ที่ใช้กันมากคือกลุ่มตัวอย่างทั้งสองเป็นกลุ่มตัวอย่างเดียวกัน แต่ถูกสังเกตคนละเวลา ค่าสังเกตที่ได้ในช่วงเวลาที่ 1 จัดเป็นกลุ่มตัวอย่างที่ 1 และค่าสังเกตที่ได้ในช่วงเวลาที่ 2 จัดเป็นกลุ่มตัวอย่างที่ 2 ดังในตารางที่ 6

ความถี่

		กลุ่มตัวอย่างที่ 2 ไม่ใช่	กลุ่มตัวอย่างที่ 2 ใช่	
กลุ่มตัวอย่างที่1	ใช่	A	B	A+B
	ไม่ใช่	C	D	C+D
		A+C	B+D	n

อัตราส่วน

		กลุ่มตัวอย่างที่ 2 ไม่ใช่	กลุ่มตัวอย่างที่ 2 ใช่	
กลุ่มตัวอย่างที่1	ใช่	$a=\frac{A}{n}$	$b=\frac{B}{n}$	p_1
	ไม่ใช่	$c=\frac{C}{n}$	$d=\frac{D}{n}$	q_1
		q_2	p_2	1.0

ตารางที่ 6 ค่าสังเกตของกลุ่มตัวอย่างกลุ่มเดียวแต่คนละช่วงเวลา

ใช่ หมายความว่า สมาชิกของกลุ่มตัวอย่างมีลักษณะที่สนใจ

ไม่ใช่ หมายความว่า สมาชิกของกลุ่มตัวอย่างไม่มีลักษณะที่สนใจ

สมาชิกที่มีลักษณะที่สนใจในการสังเกตครั้งแรกแต่กลับไม่มีลักษณะที่สนใจในการสังเกตครั้งหลังนับเป็น A

สมาชิกที่มีลักษณะที่สนใจในการสังเกตครั้งแรกและมีลักษณะที่สนใจในการสังเกตครั้งหลังนับเป็น B

สมาชิกที่ไม่มีลักษณะที่สนใจในการสังเกตครั้งแรกและไม่มีลักษณะที่สนใจในการสังเกตครั้งหลังนับเป็น C

สมาชิกที่ไม่มีลักษณะที่สนใจในการสังเกตครั้งแรกแต่กลับมีลักษณะที่สนใจในการสังเกตครั้งหลังนับเป็น D

จำนวนรวมของสมาชิกที่มีลักษณะที่สนใจในการสังเกตครั้งแรก $= A+B$

$$\therefore \quad p_1 = \frac{A+B}{n}$$

จำนวนรวมของสมาชิกที่มีลักษณะที่สนใจในการสังเกตครั้งหลัง $= B+D$

$$\therefore \quad p_2 = \frac{B+D}{n}$$

ให้สังเกตว่า p_1 จะต่างจาก p_2 ต่อเมื่อ A ต่างไปจาก D เท่านั้น

จำนวนสมาชิกที่เปลี่ยนลักษณะทั้งหมด เท่ากับ A+D

A เปลี่ยนจากมีลักษณะที่สนใจไปสู่ ไม่มี ลักษณะที่สนใจ

D เปลี่ยนจากไม่มีลักษณะที่สนใจไปสู่ มี ลักษณะที่สนใจ

ตามสมมุติฐานสูญ เราคาดหวังว่า จำนวนสมาชิกที่เปลี่ยนจากมีลักษณะที่สนใจไปสู่ไม่มีลักษณะที่สนใจ จะเท่ากับจำนวนสมาชิกที่เปลี่ยนจากไม่มีลักษณะที่สนใจไปสู่มีลักษณะที่สนใจ $= \frac{A+D}{2}$

จะเห็นได้ว่า การเปลี่ยนจากไม่มีลักษณะที่สนใจไปสู่มีลักษณะที่สนใจของสมาชิก จำนวน A+D เป็นไปตามการแจกแจงทวินาม ซึ่งมีมัชฌิม $\frac{A+D}{2}$ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sqrt{(A+D)(.5)(.5)}$ นั่นคือ $n=A+D$ และ $p=\frac{1}{2}$ ดังนั้น การทดสอบความมีนัยสำคัญของความแตกต่างระหว่าง D(หรือ A) กับ $\frac{A+D}{2}$ จะบอกให้เราทราบว่า D แตกต่างจาก A อย่างมีนัยสำคัญหรือไม่

<u>สถิติที่ใช้ทดสอบ</u>

ถ้า $A+D < 10$ จะทดสอบโดยใช้การแจกแจงทวินามโดยตรง

แต่ถ้า $A+D \geq 10$ จะใช้การแจกแจงปกติเป็นค่าประมาณ นั่นคือสถิติที่ใช้ทดสอบจะเป็น

$$Z = \frac{D-(A+D)/2}{\sqrt{(A+D)(.5)(,5)}} = \frac{.5D-.5A}{.5\sqrt{A+D}} = \frac{D-A}{\sqrt{A+D}} \tag{9}$$

ถ้า A+D ไม่ใหญ่นัก คืออยู่ในระหว่าง 10 ถึง 20 การประมาณค่าทำให้ดีขึ้นได้โดยมีค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง เอา 1 ลบออกจากค่าสัมบูรณ์ (Absolute value) ของ D-A

$$\therefore \quad Z = \frac{|D-A| - 1}{\sqrt{A+D}} \tag{10}$$

ถ้าต้องการคำนวณในรูปในอัตราส่วน ก็เอา n หารทั้งเศษและส่วน จะได้

$$Z = \frac{\frac{D}{n} - \frac{A}{n}}{\frac{A}{n^2} + \frac{D}{n^2}} = \frac{d-a}{\sqrt{\frac{a}{n}+\frac{d}{n}}} = \frac{d-a}{\sqrt{(a+d)/n}} \qquad (11)$$

และถ้ามีค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง ซึ่งจะเท่ากับ $\frac{1}{n}$ จะได้

$$Z = \frac{|d-a|-\frac{1}{n}}{\sqrt{(a+d)/n}} \qquad (12)$$

ให้สังเกตว่า เนื่องจาก $p_1=a+b$ และ $p_2=b+d$

$$\therefore \quad p_2-p_1 = d-a$$

แสดงว่า การทดสอบความมีนัยสำคัญของความแตกต่างระหว่าง D กับ A ย่อมเป็นการทดสอบความมีนัยสำคัญของความแตกต่างระหว่างอัตราส่วน p_2 กับ p_1 ด้วย[69]

<u>ตัวอย่าง</u> สุ่มตัวอย่างคนมา 60 คน เพื่อศึกษาว่า การเห็นด้วยกับการไม่เห็นด้วยในการลงโทษ จะเปลี่ยนไปหรือไม่ หลังจากที่ให้ฟังปาฐกถาชักจูงเกี่ยวกับการยกเลิกการลงโทษ ความคิดเห็นของคน 60 คนนี้ ก่อนให้ฟังปาฐกถาจัดเป็นกลุ่มตัวอย่างที่ 1 และความคิดเห็นหลังจากฟังปาฐกถา จัดเป็นกลุ่มตัวอย่างที่ 2 ข้อมูลที่ได้ปรากฏดังในตารางที่ 7 จงสรุปผลการศึกษาครั้งนี้ [70]

---

[69] Quinn McNemar, Psychological Statistics (3d ed.; New York: John Wiley & Sons, Inc., 1962), pp. 52-55.

[70] Glass and Stanley, op.cit., p. 328.

		กลุ่มตัวอย่างที่ 1 ก่อนฟังปาฐกถา		
		ไม่เห็นด้วย	เห็นด้วย	
กลุ่มตัวอย่างที่ 2 หลังจากฟังปาฐกถา	เห็นด้วย	10 (A)	16 (B)	26
	ไม่เห็นด้วย	8 (C)	26 (D)	34
		18	42	60=n

ตารางที่ 7 การทดสอบความแตกต่างระหว่างสัดส่วนของประชากร 2 กลุ่ม ใช้กลุ่มตัวอย่างไม่อิสระ

สมมุติฐาน H_o : $\pi_1 = \pi_2$

H_1 : $\pi_1 \neq \pi_2$

ระดับความมีนัยสำคัญ : $\alpha = .05$

สถิติที่ใช้ทดสอบ : ใช้สูตร (9)

ขอบเขตวิกฤต : จะปฏิเสธสมมุติฐานสูญ ถ้า $Z \geq 1.96$ หรือ $Z \leq -1.96$

การคำนวณ : แทนค่าในสูตร (9) จะได้ $Z = 2.67$

การตัดสินใจ : $Z = 2.67 > 1.96$ เพราะฉะนั้น จึงปฏิเสธสมมุติฐานสูญ สรุปว่า การเห็นด้วยกับการไม่เห็นด้วยในการลงโทษ หลังจากที่ให้ฟังปาฐกถาชักจูงเกี่ยวกับการยกเลิกการลงโทษ จะเปลี่ยนไปอย่างมีนัยสำคัญ

3.3.3 <u>การทดสอบสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบผลคูณของประชากร (ρ)</u>

ในการทดสอบสมมุติฐาน $H_o : \rho = 0$ เราสุ่มตัวอย่างขนาด n จากประชากรซึ่งมีการแจกแจงปกติแบบสองตัวแปร คำนวณสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบผลคูณระหว่างตัวแปรทั้งสองในกลุ่มตัวอย่างได้เป็น r แล้วทดสอบความมีนัยสำคัญของ r วิธีการทดสอบที่เหมาะสมที่สุดคือ ทดสอบโดยใช้สถิติที (t-test)

$$t = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}}$$; จำนวนชั้นของความเป็นอิสระ=n-2[71]

เมื่อ $n \geq 30$ การแจกแจงตัวอย่างของ r จะเข้าใกล้การแจกแจงปกติโดยมีมัชฌิม $= \mu_r = 0$ และความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน $\sigma_r = \sqrt{\frac{1-\rho^2}{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n-1}}$ จึงใช้ตัวแปรปกติมาตรฐาน

$$Z = \frac{r}{\sqrt{\frac{1}{n-1}}}$$ ทดสอบแทนสถิติที่ได้[72]

และถ้า $\rho \neq 0$ แต่ $|\rho| \leq 0.25$ และ n มีขนาดใหญ่ การแจกแจงตัวอย่างของ r จะยังคงประมาณได้กับการแจกแจงปกติ จึงทดสอบความมีนัยสำคัญของ r โดยอาศัยการแจกแจงปกติได้[73]

แต่เมื่อ $|\rho| > 0.25$ แม้ n จะใหญ่ การแจกแจงตัวอย่างของ r จะเบ้ วิธีการดังกล่าวมาแล้ว ย่อมไม่เหมาะที่จะใช้ทดสอบความมีนัยสำคัญของ r วิธีการที่ถูกต้องคือเปลี่ยน r และ ρ เป็น Z ตามวิธีของฟิชเชอร์ (Fisher's Z transformation) ตามสูตร

$$Z_r = \tfrac{1}{2} \log_e\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$$

$$\text{และ } Z_\rho = \xi = \tfrac{1}{2} \log_e\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)$$

การแจกแจงตัวอย่างของ Z_r จะเข้าใกล้ปกติสำหรับทุกค่าของ ρ และ n โดยมีมัชฌิม $\mu_{Z_r} = \xi$ และความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน $\sigma_{Z_r} = \sqrt{\frac{1}{n-3}}$ ทำให้สามารถทดสอบสมมุติฐาน ไม่ว่าจะเป็น $H_o : \rho = 0$ หรือ $H_o : \rho = \rho_o$ โดยอาศัยการแจกแจงปกติได้อย่างเหมาะสม

<u>สมมุติฐานที่จะทดสอบ</u>

$$H_o : \rho = \rho_o \quad (1 \leq \rho_o \leq -1)$$

$$H_1 : \rho \neq \rho_o$$

---

[71]Klugh, <u>op.cit.</u>, p. 201.

[72]A.C. Rosander, <u>Elementary Principles of Statistics</u> (Princeton, New Jersey: D Van Nostrand Company, Inc., 1951), p. 458.

[73]Peatman, <u>op.cit.</u>, p. 214.

<u>ข้อตกลงเบื้องต้น</u>

กลุ่มตัวอย่างสุ่มขนาด n ได้มาจากประชากรซึ่งมีการแจกแจงปกติแบบสองตัวแปร และสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบผลคูณระหว่างตัวแปรทั้งสองในประชากรเท่ากับ ρ

ในกรณีที่เราไม่ทราบว่าการแจกแจงของประชากรเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นนี้หรือไม่ เพื่อความปลอดภัย ต้องใช้กลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่

<u>สถิติที่ใช้ทดสอบ</u>

$$Z = \frac{Z_r - \zeta}{\sqrt{\frac{1}{n-3}}} \tag{13}$$

Z_r และ ζ เป็นค่าที่สัมพันธ์กับ r และ ρ ตามวิธีของฟิชเชอร์ตามลำดับ ซึ่งจะหาได้จากตารางการเปลี่ยน r เป็น Z_r ของฟิชเชอร์ (ตาราง (6) ภาคผนวก ข.)

<u>ตัวอย่าง</u> สมมุติว่าเรามีแบบวัดบุคลิกภาพชุดหนึ่ง ซึ่งได้ใช้วัดบุคลิกภาพของนิสิตปีที่ 2 ในมหาวิทยาลัยมาแล้วเป็นพัน ๆ คน และหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างคะแนนบุคลิกภาพที่ได้จากแบบวัดบุคลิกภาพชุดนี้ กับแต้มเฉลี่ยในมหาวิทยาลัย ได้เป็น .30 ต่อมาเราทำให้แบบวัดบุคลิกภาพชุดนี้สั้นลง แล้วใช้วัดบุคลิกภาพของนิสิตชั้นปีที่ 2 จำนวน 228 คน ปรากฏว่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างคะแนนบุคลิกภาพกับแต้มเฉลี่ยในมหาวิทยาลัยเป็น .39 อยากทราบว่ามีหลักฐานเพียงพอที่จะปฏิเสธสมมุติฐานที่ว่า กลุ่มตัวอย่างนิสิต 228 คนนี้ สุ่มมาจากประชากรซึ่งมีสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ .30 หรือไม่ ให้ใช้ระดับความมีนัยสำคัญ .05[74]

สมมุติฐาน $H_0 : \rho = .30$

$H_1 : \rho \neq .30$

ระดับความมีนัยสำคัญ : $\alpha = .05$

สถิติที่ใช้ทดสอบ : ใช้สูตร (13)

---

[74]Klugh, <u>op.cit.</u>, p. 202.

ขอบเขตวิกฤต : จะปฏิเสธสมมุติฐานสูญ ถ้า $Z \geq 1.96$ หรือ $Z \leq -1.96$

การคำนวณ : จากตาราง (6) ภาคผนวก ข.

$$\rho = .30, \quad \xi = Z_{\rho} = .310$$
$$r = .39, \quad Z_r = .412$$

แทนค่าในสูตร (13) จะได้ $Z = 1.53$

การตัดสินใจ : $Z = 1.53 < 1.96$ ไม่ปฏิเสธสมมุติฐานสูญ แสดงว่า ยังไม่มีหลักฐานเพียงพอที่จะปฏิเสธสมมุติฐานที่ว่า กลุ่มตัวอย่างนิสิต 226 คนนี้สุ่มมาจากประชากรซึ่งมีสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ .30

<u>การทดสอบความแตกต่างระหว่างสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบผลคูณของประชากร 2 กลุ่ม ($\rho_1-\rho_2$) ใช้กลุ่มตัวอย่างอิสระ</u>

เมื่อต้องการทดสอบว่า สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบผลคูณระหว่างตัวแปร X กับตัวแปร Y ในประชากรที่ 1 (ρ_1) กับในประชากรที่ 2 (ρ_2) มีค่าเท่ากันหรือไม่ เช่น ต้องการเปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างคะแนนทัศนคติ (X) กับคะแนนสัมฤทธิ์ผลทางการเรียน(Y) ของเด็กชาย (ประชากรที่ 1) กับของเด็กหญิง (ประชากรที่ 2) ว่าจะเหมือนกันหรือต่างกัน วิธีการทดสอบก็คล้ายกับการทดสอบสมมุติฐาน $H_o : \rho = \rho_o$ คือสุ่มตัวอย่างขนาด n_1 จากประชากรที่ 1 และขนาด n_2 จากประชากรที่ 2 คำนวณสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบผลคูณของกลุ่มตัวอย่างได้เป็น r_1 และ r_2 ตามลำดับ เปลี่ยน r_1 เป็น Z_{r_1} และ r_2 เป็น Z_{r_2} ตามวิธีของฟิชเชอร์ การแจกแจงตัวอย่างของ $Z_{r_1}-Z_{r_2}$ จะเข้าใกล้ปกติโดยมีมัชฌิม $\mu_{Z_{r_1}-Z_{r_2}} = \xi_1-\xi_2$ และความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน $\sigma_{Z_{r_1}-Z_{r_2}} = \sqrt{\frac{1}{n_1-3}+\frac{1}{n_2-3}}$ แสดงว่า เราสามารถใช้การแจกแจงปกติในการทดสอบความมีนัยสำคัญของ $\xi_1-\xi_2$ ซึ่งก็คือความมีนัยสำคัญของ $\rho_1-\rho_2$ นั่นเอง

<u>สมมุติฐานที่จะทดสอบ</u> $H_o : \rho_1 = \rho_2$

$H_1 : \rho_1 \neq \rho_2$

ข้อตกลงเบื้องต้น

กลุ่มตัวอย่างสุ่ม 2 กลุ่ม ขนาด n_1 และ n_2 สุ่มมาอย่างอิสระจากประชากรซึ่งมีสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบผลคูณเป็น ρ_1 และ ρ_2 ตามลำดับ ประชากรทั้ง 2 กลุ่มมีการแจกแจงปกติแบบสองตัวแปรและเป็นอิสระ

สถิติที่ใช้ทดสอบ

$$Z = \frac{Z_{r_1} - Z_{r_2}}{\sqrt{\frac{1}{n_1-3} + \frac{1}{n_2-3}}} \qquad (14)$$

ตัวอย่าง ในการศึกษาเรื่องความสัมพันธ์ระหว่างความคับข้องใจกับการก้าวร้าวในเด็กเล็กกับเด็กโต ใช้กลุ่มตัวอย่างเด็กจากโรงเรียนเด็กเล็ก 103 คน และกลุ่มตัวอย่างเด็กจากโรงเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น 153 คน คำนวณสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างความคับข้องใจกับการก้าวร้าวของกลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่มนี้ได้เป็น .82 และ .60 ตามลำดับ อยากทราบว่าความสัมพันธ์ระหว่างความคับข้องใจกับการก้าวร้าวในเด็กเล็กกับในเด็กโตต่างกันหรือไม่[75]

ให้สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างความคับข้องใจกับการก้าวร้าวในเด็กเล็ก (เรียนชั้นเด็กเล็ก) เป็น ρ_1 และในเด็กโต (เรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น) เป็น ρ_2

สมมุติฐาน $H_0 : \rho_1 = \rho_2$

$H_1 : \rho_1 \neq \rho_2$

ระดับความมีนัยสำคัญ : $\alpha = .01$

สถิติที่ใช้ทดสอบ : ใช้สูตร (14)

ขอบเขตวิกฤต : จะปฏิเสธสมมุติฐานสูญ ถ้า $Z \geq 2.58$ หรือ $Z \leq -2.58$

---

[75]Cohen, op.cit., p. 152.

การคำนวณ : จากตาราง (6) ภาคผนวก ช.

$r_1 = .82, \quad Z_{r_1} = 1.157$

$r_2 = .60 \quad Z_{r_2} = .693$

$n_1 = 103, \quad n_2 = 153$

แทนค่าในสูตร (14) จะได้ $Z = 3.5$

การตัดสินใจ : $Z = 3.5 > 2.58$ เพราะฉะนั้น จึงปฏิเสธสมมุติฐานสูญ สรุปว่า ความสัมพันธ์ระหว่างความกับข้องใจกับการก้าวร้าวในเด็กเล็กกับในเด็กโตต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

<u>การทดสอบความมีนัยสำคัญของ $\rho_{XY}-\rho_{XZ}$ ใช้กลุ่มตัวอย่างไม่อิสระ</u>

ใช้ในกรณีที่ต้องการทดสอบว่า ตัวแปร X มีความสัมพันธ์กับตัวแปร Y และตัวแปร Z เท่ากันหรือไม่ เช่น ต้องการทำนายความสำเร็จในการเรียน, X (วัดด้วยแต้มเฉลี่ย) มีตัวทำนายที่มีอำนาจ 2 ตัวคือ Y กับ Z เพื่อการประหยัดต้องการใช้ตัวทำนายตัวเดียว (Y หรือ Z) วิธีการที่ฉลาดก็คือ รวบรวมข้อมูล คำนวณค่า r_{XY}, r_{XZ} แล้วทดสอบความมีนัยสำคัญของ $\rho_{XY}-\rho_{XZ}$ (ถือว่าค่าที่ได้จากกลุ่มตัวอย่าง $r_{XY}-r_{XZ}$ แทนค่าจริงของ $\rho_{XY}-\rho_{XZ}$) ถ้าสรุปผลการทดสอบได้ว่า $\rho_{XY} = \rho_{XZ}$ อาจจะเลือกใช้ Y หรือ Z เป็นตัวทำนายก็ได้ แต่ถ้าสรุปผลการทดสอบได้ว่า $\rho_{XY} \neq \rho_{XZ}$ ก็เลือกใช้ตัวทำนายตัวที่มีความสัมพันธ์กับ X สูงกว่า

<u>สมมุติฐานที่จะทดสอบ</u>

$$H_o : \rho_{XY} = \rho_{XZ}$$
$$H_1 : \rho_{XY} \neq \rho_{XZ}$$

<u>ข้อตกลงเบื้องต้น</u>

กลุ่มตัวอย่างสุ่มขนาด n ได้มาจากประชากรซึ่งมีตัวแปร X,Y และ Z โดยที่ X กับ Y, X กับ Z และ Y กับ Z แต่ละคู่มีการแจกแจงปกติแบบสองตัวแปร จะเห็นได้ว่าค่า r_{XY}, r_{XZ} และ r_{YZ} ที่คำนวณได้จากกลุ่มตัวอย่างจะไม่อิสระ

สถิติที่ใช้ทดสอบ

$$Z = \frac{\sqrt{n}(r_{XY}-r_{XZ})}{(1-r_{XY}^2)^2+(1-r_{XZ}^2)^2-2r_{YZ}^3-(2r_{YZ}-r_{XY}r_{XZ})(1-r_{XY}^2-r_{XZ}^2-r_{YZ}^2)} \quad (15)$$ [76]

n = ขนาดของกลุ่มตัวอย่าง

r_{XY} = สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบผลคูณระหว่าง X กับ Y ในกลุ่มตัวอย่าง

r_{XZ} = สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบผลคูณระหว่าง X กับ Z ในกลุ่มตัวอย่าง

r_{YZ} = สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบผลคูณระหว่าง Y กับ Z ในกลุ่มตัวอย่าง

หรืออาจจะทดสอบโดยใช้สถิติที่

$$t = \frac{(r_{XY}-r_{XZ})\sqrt{(n-3)(1+r_{YZ})}}{\sqrt{2(1-r_{XY}^2-r_{XZ}^2-r_{YZ}^2+2r_{XY}r_{XZ}r_{YZ})}}$$ [77]

โดยมีชั้นของความเป็นอิสระ = n-3

ตัวอย่าง สมมุติว่า ความสำเร็จในการเรียนในมหาวิทยาลัย, X (วัดด้วยแต้มเฉลี่ยตอนปลายปีแรก) อาจทำนายได้โดยใช้แบบทดสอบชุด Y หรือแบบทดสอบชุด Z เนื่องจากเวลามีน้อย จะใช้แบบทดสอบได้ชุดเดียวเท่านั้น จึงสุ่มตัวอย่างนิสิตปีที่ 1 มา 100 คน นิสิตทั้ง 100 คนนี้ ได้ผ่านการทดสอบทั้งแบบทดสอบชุด Y และแบบทดสอบชุด Z มาแล้วในชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย คำนวณค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่าง X, Y, Z ในกลุ่มตัวอย่าง ได้เป็น $r_{XY} = .56$, $r_{XZ} = .43$ และ $r_{YZ} = .52$ ต้องการทดสอบสมมุติฐานสูญที่ว่า $\rho_{XY} = \rho_{XZ}$ ที่ระดับความมีนัยสำคัญ .05 [78]

สมมุติฐาน $H_0 : \rho_{XY} = \rho_{XZ}$

$H_1 : \rho_{XY} \neq \rho_{XZ}$

---

[76] Glass and Stanley, op.cit., p. 313.
[77] Klugh, op.cit., p. 205.
[78] Glass and Stanley, op.cit., p. 314.

ระดับความมีนัยสำคัญ : $\alpha = .05$

สถิติที่ใช้ทดสอบ : ใช้สูตร (15)

ขอบเขตวิกฤต : จะปฏิเสธสมมุติฐานสูญ ถ้า $Z \geq 1.96$ หรือ $Z \leq -1.96$

การคำนวณ : แทนค่าในสูตร (15) จะได้ $Z = 1.60$

การตัดสินใจ : $Z = 1.60 < 1.96$ จึงไม่ปฏิเสธสมมุติฐานสูญ สรุปได้ว่าแบบทดสอบชุด Y กับแบบทดสอบชุด Z มีประสิทธิภาพในการทำนายผลการเรียนไม่แตกต่างกัน เว้นแต่ว่ากลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่กว่านี้จะทำให้ผลสรุปครั้งนี้เปลี่ยนไป

3.3.4 <u>การทดสอบความมีนัยสำคัญของสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อื่น ๆ</u>

ก. <u>สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบลำดับที่ของสเปียร์แมน, r_r</u>

(Spearman's Rank Correlation Coefficient)

r_r ใช้วัดความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร X กับตัวแปร Y แทน r_{XY} เมื่อเรียงลำดับค่าตัวแปรทั้งคู่ ในกลุ่มตัวอย่างขนาด n จาก 1 ถึง n

$$r_r = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$$

n = จำนวนสมาชิกในกลุ่มตัวอย่าง

d = ผลต่างระหว่างลำดับที่ในแต่ละคู่ของตัวแปร

ถ้า ρ_r = สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบลำดับที่ของสเปียร์แมนในประชากร = 0 และ $n \geq 25$ การแจกแจงตัวอย่างของ r_r จะเข้าใกล้การแจกแจงปกติ โดยมีมัชฌิม $= \mu_{r_r} = 0$ และความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน $= \sigma_{r_r} = \frac{1}{\sqrt{n-1}}$ ดังนั้นจึงทดสอบความมีนัยสำคัญของ r_r โดยใช้ตัวแปรปกติมาตรฐาน

$$Z = \frac{r_r - 0}{\sigma_{r_r}} = \frac{r_r}{1/\sqrt{n-1}} \qquad (16)$$ [79]

---

[79] Peatman, <u>op.cit.</u>, p. 312.

<u>ตัวอย่าง</u> จงทดสอบความมีนัยสำคัญของ $r_r = .87$ ซึ่งคำนวณจากกลุ่มตัวอย่างที่มีสมาชิก $n = 37$

สมมุติฐาน $H_0 : \rho_r = 0$

$H_1 : \rho_r \neq 0$

ระดับความมีนัยสำคัญ : $\alpha = .05$

สถิติที่ใช้ทดสอบ : ใช้สูตร (16)

ขอบเขตวิกฤต : จะปฏิเสธสมมุติฐานสูญ ถ้า $z \geq 1.96$ หรือ $z \leq 1.96$

การคำนวณ : แทนค่าในสูตร (16) จะได้ $z = 5.22$

การตัดสินใจ : $z = 5.22 > 1.96$ จึงปฏิเสธสมมุติฐานสูญ แสดงว่าค่า r_r มีนัยสำคัญ นั่นคือ ρ_r ไม่เป็นศูนย์

ข. <u>สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบลำดับที่ของเคนดอล, τ</u>

(Kendall's Tau Rank Correlation Coefficient)

τ ใช้วัดความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร 2 ตัว ในกรณีที่ไม่ทราบว่าตัวแปรทั้งคู่มีการแจกแจงปกติแบบสองตัวแปรหรือไม่ ตัวแปร 2 ตัวนี้ เป็นลำดับที่ของสมาชิกในกลุ่มตัวอย่างกลุ่มเดียว ซึ่งได้จากผู้ตัดสิน 2 คน

$$\tau = \frac{S}{n(n-1)/2}$$

n = จำนวนสมาชิกในกลุ่มตัวอย่าง

S = ความแตกต่างระหว่างผลบวกของจำนวนลำดับที่ที่สอดคล้องกันกับผลบวกของจำนวนลำดับที่ที่ไม่สอดคล้องกัน

ถ้า τ ในประชากรเป็นศูนย์ และ $n > 10$ การแจกแจงตัวอย่างของ τ จะเข้าใกล้การแจกแจงปกติ โดยมีมัชฌิม $= \mu_\tau = 0$ และความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน $= \sigma_\tau = \sqrt{\frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}}$ ดังนั้นจึงสามารถทดสอบความมีนัยสำคัญของ τ โดยใช้ตัวแปรปกติมาตรฐาน

$$z = \frac{\tau - \mu_\tau}{\sigma_\tau} = \frac{\tau}{\sqrt{2(2n+5)/9n(n-1)}} \qquad (17)$$

หรืออาจทดสอบในรูปของ S

$$Z = \frac{S}{\sigma_S} = \frac{S}{\sqrt{n(n-1)(2n+5)/18}} \qquad (18)$$

การทดสอบจะได้ผลดียิ่งขึ้น ถ้ามีค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง โดยลบค่าสัมบูรณ์ของ τ ด้วย $1/\binom{n}{2}$ หรือลบค่าสัมบูรณ์ของ S ด้วย 1 [80]

<u>ตัวอย่าง</u> $n = 12$, $\tau = .67$ ต้องการทดสอบความมีนัยสำคัญของ τ

สมมุติฐาน $H_0 : \tau = 0$

$H_1 : \tau \neq 0$

ระดับความมีนัยสำคัญ : $\alpha = .05$

สถิติที่ใช้ทดสอบ : ใช้สูตร (17)

ขอบเขตวิกฤต : จะปฏิเสธสมมุติฐานสูญ ถ้า $Z \geq 1.96$ หรือ $Z \leq -1.96$

การคำนวณ : แทนค่าในสูตร (17) จะได้ $Z = 3.05$

การตัดสินใจ : $Z = 3.05 > 1.96$ จึงปฏิเสธสมมุติฐานสูญ แสดงว่าค่า τ มีนัยสำคัญ นั่นคือค่า τ ในประชากรไม่เป็นศูนย์

ค. <u>สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ไฟ, ϕ</u> (Phi Correlation Coefficient)

ϕ ใช้หาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร 2 ตัว ซึ่งต่างก็แบ่งออกเป็น 2 พวก (Dichotomy) ได้ทั้งคู่ ถ้าค่า ϕ ในประชากรเป็นศูนย์ เมื่อเราสุ่มตัวอย่างขนาด n จากประชากรนี้มาคำนวณค่า ϕ ในกลุ่มตัวอย่าง สำหรับ n ใหญ่ $(n > 30)$ การแจกแจงตัวอย่างของ $\sqrt{n}\phi$ จะเข้าใกล้การแจกแจงปกติโดยมีมัชฌิม = 0 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน = 1 ดังนั้น เมื่อต้องการทดสอบความมีนัยสำคัญของ ϕ จึงทดสอบโดยใช้ตัวแปรปกติมาตรฐาน

$$Z = \sqrt{n}\phi \qquad (19)$$ [81]

(อาจจะทดสอบโดยใช้ $\chi^2_{(1)} = n\phi^2$ ซึ่งนิยมใช้กันมาก)

<u>ตัวอย่าง</u> $n = 100$; $\phi = .60$ ค่า ϕ ในประชากรเป็นศูนย์หรือไม่ [82]

สมมุติฐาน $H_0 : \phi = 0$

$H_1 : \phi \neq 0$

ระดับความมีนัยสำคัญ : $\alpha = .05$

---

[80] Hays, <u>op.cit.</u>, p. 651.
[81] Peatman, <u>op.cit.</u>, p. 270.
[82] <u>Ibid.</u>

สถิติที่ใช้ทดสอบ : ใช้สูตร (18)

ขอบเขตวิกฤต : จะปฏิเสธสมมุติฐานสูญ ถ้า $z \geq 1.96$ หรือ $z \leq -1.96$

การคำนวณ : แทนค่าในสูตร (18) จะได้ $z = 6.0$

การตัดสินใจ : $z = 6.0 > 1.96$ จึงปฏิเสธสมมุติฐานสูญ นั่นคือไม่ยอมรับว่า ρ ในประชากรเป็นศูนย์

ง. สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เตตระคอริค, r_{tet}
(Tetrachoric Correlation Coefficient)

r_{tet} ใช้วัดความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร 2 ตัว ซึ่งต่างก็แจกแจงปกติและแบ่งออกเป็น 2 พวก (Dichotomy) ถ้า r_{tet} ในประชากรเป็นศูนย์ การแจกแจงตัวอย่างของ r_{tet} ที่คำนวณจากกลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่ $(n>30)$ จะเข้าใกล้การแจกแจงปกติ โดยมีมัชฌิม = 0 และความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน = $\sigma_{r_{tet}} = \sqrt{\frac{p_x p_y q_x q_y}{n}} \quad \frac{1}{U_x U_y}$

ทั้งนี้ n = ขนาดของกลุ่มตัวอย่าง

$p_x = n_x/n$ = สัดส่วนของจำนวนสมาชิกของตัวแปร X ที่มีลักษณะที่สนใจ

$p_y = n_y/n$ = สัดส่วนของจำนวนสมาชิกของตัวแปร Y ที่มีลักษณะที่สนใจ

$q_x = 1-p_x$

$q_y = 1-p_y$

U_x = ค่าออร์ดิเนตของโค้งปกติที่จุดเหนือพื้นที่ p_x [ดูที่ตาราง (5) ภาคผนวก ช.]

U_y = ค่าออร์ดิเนตของโค้งปกติที่จุดเหนือพื้นที่ p_y

ดังนั้น เมื่อ $n > 30$ และ p_x กับ p_y ไม่ต่างกันมาก จึงสามารถทดสอบความมีนัยสำคัญของ r_{tet} โดยใช้ตัวแปรปกติมาตรฐาน

$$z = \frac{r_{tet}}{\sigma_{r_{tet}}} = \frac{r_{tet}}{\sqrt{p_x p_y q_x q_y}} \cdot \sqrt{n} \cdot U_x U_y \qquad (20)$$ [83]

---

[83] Ibid., p. 311.

<u>ตัวอย่าง</u> สมมุติว่า ข้อมูลในตารางที่ 8 รวบรวมได้จากการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร X กับตัวแปร Y ซึ่งต่างก็แจกแจงปกติ และแบ่งออกได้เป็น 2 พวก (dichotomy) คำนวณ r_{tet} ได้เท่ากับ .81 จงทดสอบความมีนัยสำคัญของ r_{tet} [84]

		X = 0	X = 1	
Y	1	4	19	23
	0	21	6	27
		25	25	50=n

ตารางที่ 8 การทดสอบความมีนัยสำคัญของ r_{tet}

สมมุติฐาน $H_o : r_{tet} = 0$

$H_1 : r_{tet} \neq 0$

ระดับความมีนัยสำคัญ : $\alpha = .01$

สถิติที่ใช้ทดสอบ : ใช้สูตรที่ (20)

ขอบเขตวิกฤต : จะปฏิเสธสมมุติฐานสูญ ถ้า $z \geq 2.58$ หรือ $z \leq -2.58$

การคำนวณ : $p_x = \frac{25}{50} = .50,\quad q_x = .50,\quad U_x = .3989$

$p_y = \frac{23}{50} = .46,\quad q_y = .54,\quad U_y = .3970$

แทนค่าในสูตรที่ (20) จะได้ $z = 3.64$

การตัดสินใจ : $z = 3.64 > 2.58$ จึงปฏิเสธสมมุติฐานสูญ แสดงว่า r_{tet} ในประชากรไม่เป็นศูนย์

จ. <u>สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ไบซีเรียล, r_{bis}</u> (Biserial Correlation Coefficient)

มีตัวแปรปกติซึ่งแบ่งได้เป็น 2 พวก (dichotomy) อยู่ชุดหนึ่ง

---

[84]Glass and Stanley, <u>op.cit.</u>, p. 319.

เราวัดความสัมพันธ์ระหว่างพวก 2 พากในตัวแปรนี้โดยใช้ r_{bis} การแจกแจงตัวอย่างของ r_{bis} ที่คำนวณจากกลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่ (n>30) จะเข้าใกล้การแจกแจงปกติ โดยมีมัชฌิม = 0 และความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน $= \sigma_{r_{bis}} = \frac{\sqrt{n_1 n_o}}{Un\sqrt{n}}$

ทั้งนี้ n = ขนาดของกลุ่มตัวอย่าง

n_1 = จำนวนสมาชิกของกลุ่มตัวอย่างที่มีลักษณะที่สนใจ

n_o = จำนวนสมาชิกของกลุ่มตัวอย่างที่ไม่มีลักษณะที่สนใจ $= n - n_1$

U = ค่าออร์ดิเนตของโค้งปกติที่จุดเหนือพื้นที่ n_1/n

ดังนั้นเมื่อ $n > 30$ และ n_1/n และ $n_o/n > .10$ จึงสามารถทดสอบความมีนัยสำคัญของ r_{bis} โดยใช้ตัวแปรปกติมาตรฐาน

$$Z = \frac{r_{bis}}{\sigma_{r_{bis}}} = \frac{r_{bis}}{\sqrt{n_1 n_o}} \cdot Un\sqrt{n} \qquad (21)$$ [85]

<u>ตัวอย่าง</u> สมมุติกลุ่มตัวอย่างสุ่มมีสมาชิก 36 จำนวน เป็น $n_1 = 16$ และ $n_o = 20$ ถ้า $r_{bis} = -.145$ อยากทราบว่า r_{bis} ในประชากรเป็นศูนย์หรือไม่[86]

สมมุติฐาน $H_0 : r_{bis} = 0$

$H_1 : r_{bis} \neq 0$

ระดับความมีนัยสำคัญ : $\alpha = .05$

สถิติที่ใช้ทดสอบ : ใช้สูตรที่ (21)

ขอบเขตวิกฤต : จะปฏิเสธสมมุติฐานสูญ ถ้า $Z \geq 1.96$ หรือ $Z \leq -1.96$

การคำนวณ : $\frac{n_1}{n} = \frac{16}{36} = .4444, \quad U = .3951$

แทนค่าในสูตร (21) จะได้ $Z = -.69$

การตัดสินใจ : $Z = -.69$ อยู่ในขอบเขตการยอมรับ จึงไม่มีหลักฐาน

---

[85] Peatman, <u>op.cit.</u>, p. 310.

[86] Glass and Stanley, <u>op.cit.</u>, p. 320.

เพียงพอที่จะปฏิเสธสมมุติฐานสูญ นั่นคือยอมรับว่า r_{bis} ในประชากรเป็นศูนย์

3.4 ใช้เป็นค่าประมาณการทดสอบแบบไม่มีพารามิเตอร์บางอย่าง

การทดสอบสมมุติฐานซึ่งมีข้อตกลงเบื้องต้นเกี่ยวกับการแจกแจงของประชากร และกำหนดลักษณะการแจกแจงตัวอย่างของสถิติที่ใช้ทดสอบ ดังกล่าวมาแล้ว เรียกว่า การทดสอบแบบมีพารามิเตอร์ (Parametric Test) แต่ในกรณีที่ไม่อาจเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นของการทดสอบแบบมีพารามิเตอร์ เราจะใช้การทดสอบแบบไม่มีพารามิเตอร์ (Nonparametric Test) ซึ่งเป็นการทดสอบสมมุติฐานโดยไม่กำหนดลักษณะการแจกแจงตัวอย่างของสถิติที่ใช้ทดสอบ อย่างไรก็ตาม เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ อาศัย Central Limit Theorem การแจกแจงตัวอย่างของสถิติที่ใช้ทดสอบแบบไม่มีพารามิเตอร์บางอย่างจะเข้าใกล้การแจกแจงปกติ จึงอาจใช้การแจกแจงปกติเป็นค่าประมาณการทดสอบได้ การทดสอบดังกล่าวได้แก่

3.4.1 การทดสอบเครื่องหมาย (Sign Test)

เมื่อต้องการเปรียบเทียบกลุ่มตัวอย่างที่จับคู่กัน 2 กลุ่ม ที่ได้รับทรีตเมนท์ (Treatment) ต่างกัน ถ้าเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นที่ว่า มัชฌิมของกลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่มนี้ แจกแจงปกติ และเป็นอิสระ โดยมีความแปรปรวนเท่ากัน เราจะทดสอบโดยใช้การแจกแจงที (t-distribution) แต่ถ้าไม่เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นนี้ ต้องใช้การทดสอบแบบไม่มีพารามิเตอร์ชนิดที่เรียกว่า การทดสอบเครื่องหมาย (Sign Test) ทดสอบสมมุติฐานสูญที่ว่า มัธยฐาน (median) ของความแตกต่างระหว่างกลุ่ม 2 กลุ่มเป็นศูนย์ การทดสอบเครื่องหมายนี้ใช้กับข้อมูลที่ไม่ได้วัดขนาดจริง แต่วัดเป็นลำดับที่ก็ได้

ในการทดสอบเครื่องหมาย เราบันทึกเครื่องหมาย + หรือ - แสดงความแตกต่างระหว่างค่าสังเกตของสมาชิกในกลุ่มตัวอย่างที่จับคู่กัน 2 กลุ่ม เป็นคู่ ๆ ไปทีละคู่ ถ้าค่าสังเกตของทั้งคู่เท่ากันก็ตัดทิ้ง สิ่งที่เราสนใจคือ จำนวนความแตกต่างที่เป็น + (หรือจำนวนความแตกต่างที่เป็น -) ให้เป็น x ถ้าทรีตเมนท์ที่ให้แก่กลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่ม ไม่แตกต่างกัน เราคาดหวังว่า จำนวนเครื่องหมาย + จะเท่ากับจำนวนเครื่องหมาย - เท่ากับ $\frac{n}{2}$ หรืออีกนัยหนึ่ง สัดส่วนของเครื่องหมาย + เท่ากับสัดส่วนของเครื่องหมาย - นั่นคือ $p(+) = p(-) = 0.5$

จะเห็นได้ว่า การเกิดเครื่องหมาย + (หรือ -) มีลักษณะเป็นการแจกแจงทวินาม โดยมี $p = q = 0.5$ จึงทดสอบสมมุติฐานสูญที่ว่า $p(+)$ หรือ $p(-) = 0.5$ โดยใช้การแจกแจงทวินาม และเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้น การคำนวณความน่าจะเป็นจากการแจกแจงทวินามจะยุ่งยาก ก็ประมาณโดยใช้การแจกแจงปกติ ดังนั้นเมื่อ $n \geq 10$ เราจึงประมาณการทดสอบเครื่องหมายโดยใช้ตัวแปรปกติมาตรฐาน

$$Z = \frac{|x/n-p|-1/2n}{\sqrt{pq/n}} \qquad (22)$$ [87]

x = จำนวนเครื่องหมาย + (หรือ -)

n = จำนวนคู่ของสมาชิกในกลุ่มตัวอย่าง

$p = q = 0.5$

$\frac{1}{2n}$ = ค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง

<u>ตัวอย่าง</u> ต้องการหาอิทธิพลของประสบการณ์เกี่ยวกับความคับข้องใจที่จะมีต่ออายุทางสังคม (Social age) ของเด็ก สุ่มตัวอย่างเด็กที่ยังไม่เข้าเรียนมาจำนวนหนึ่ง ให้ผู้สังเกตที่มีความชำนาญในด้านการกำหนดอายุทางสังคมของเด็ก เป็นผู้กำหนดอายุทางสังคมของเด็กในช่วงเวลาที่เด็กเล่นอย่างอิสระ แล้วจับคู่เด็กที่มีอายุทางสังคมเท่ากัน จะได้กลุ่มเด็ก 2 กลุ่มที่มีอายุทางสังคมเท่ากันเป็นคู่ ๆ นำมาทดลองแยกกันโดยให้เล่นของเล่นที่กำหนด กลุ่มแรกได้รับความคับข้องใจโดยที่เมื่อเล่นของเล่นนั้นแล้วชั่วระยะหนึ่ง ก็จะถูกแย่งของเล่นไป ส่วนกลุ่มหลังไม่ได้รับความคับข้องใจแต่อย่างใด ภายหลังการทดลองมีการกำหนดอายุทางสังคมของเด็กทั้ง 2 กลุ่มนี้ใหม่ในช่วงเวลาที่เด็กเล่นอย่างอิสระ สมมุติว่าใช้เด็ก 20 คู่ ข้อมูลที่ได้ดังในตารางที่ 9 จงสรุปผลการทดลอง[88]

---

[87] Hays, <u>op.cit.</u>, p. 626.

[88] <u>Ibid.</u>, p. 627.

คู่ที่	คับข้องใจ	ไม่คับข้องใจ	เครื่องหมายแสดงความแตกต่าง
1	32	36	+
2	35	34	-
3	33	34	+
4	36	40	+
5	44	42	-
6	41	40	-
7	32	35	+
8	38	40	+
9	37	38	+
10	35	35	0
11	29	35	+
12	34	32	-
13	50	51	+
14	40	38	-
15	39	42	+
16	31	33	+
17	47	46	-
18	41	42	+
19	30	29	-
20	35	35	0

ตารางที่ 9 การทดสอบเครื่องหมาย

สมมุติฐาน H_o : $p = .5$

H_1 : $p \neq .5$

(p = สัดส่วนของความแตกต่างที่เป็น + ในประชากร)

ระดับความมีนัยสำคัญ : $\alpha = .05$

สถิติที่ใช้ทดสอบ : ใช้สูตรที่ (22)

ขอบเขตวิกฤต : จะปฏิเสธสมมุติฐานสูญ ถ้า $Z \geq 1.96$ หรือ $Z \leq -1.96$

การคำนวณ : $x = 11, \quad n = 18$

แทนค่าในสูตรที่ (22) จะได้ $Z = .70$

การตัดสินใจ : $Z = .70$ ตกอยู่ในขอบเขตการยอมรับ แสดงว่าความแตกต่างไม่มีนัยสำคัญ ลงความเห็นว่า ไม่มีหลักฐานเพียงพอที่จะสรุปว่า ความคับข้องใจมีอิทธิพลต่ออายุทางสังคมของเด็ก

3.4.2 การทดสอบลำดับที่ซึ่งมีเครื่องหมาย(Wilcoxon Signed-Rank Test)

วิลค็อกสัน เป็นผู้พัฒนาวิธีการทดสอบนี้ขึ้นมา ใช้สำหรับเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างกลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่มที่จับคู่กัน เช่นเดียวกับการทดสอบเครื่องหมาย แต่พิจารณาขนาดของความแตกต่างในแต่ละคู่ด้วย

ในการทดสอบ จะเริ่มด้วยการหาขนาดของความแตกต่างในแต่ละคู่ ถ้าไม่ต่างกันก็ตัดทิ้ง จัดลำดับขนาดของความแตกต่างที่ได้โดยไม่คิดเครื่องหมาย เรียงลำดับจากค่าตัวเลขน้อยไปหามาก ถ้าขนาดของความแตกต่างซ้ำกัน ก็ให้ลำดับที่เป็นค่าเฉลี่ยของลำดับที่ที่ควรจะเป็น แล้วใส่เครื่องหมายแสดงความแตกต่างที่ลำดับที่ หาผลบวกของลำดับที่ที่มีเครื่องหมาย+ และผลบวกของลำดับที่ที่มีเครื่องหมาย - ผลบวกอันไหนมีค่าน้อยกว่า จะเป็นค่าสถิติที่ใช้ทดสอบ เรียกว่า สถิติ T ความมีนัยสำคัญของ T เมื่อ n ไม่เกิน 25 ดูได้จากตารางเฉพาะ อย่างไรก็ตาม เมื่อ $n \geq 8$ การแจกแจงตัวอย่างของ T จะเข้าใกล้การแจกแจงปกติโดยมีมัชฌิม $= \mu_T = \frac{n(n+1)}{4}$ และความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน $= \sigma_T = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}$ ดังนั้น เมื่อ $n \geq 8$ จึงสามารถประมาณการทดสอบลำดับที่ซึ่งมีเครื่องหมาย โดยใช้ตัวแปรปกติมาตรฐาน

$$Z = \frac{T-\mu_T}{\sigma_T} = \frac{T-n(n+1)/4}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}} \qquad (23)$$ [89]

[89] Chao, op.cit., p. 437.

<u>ตัวอย่าง</u> นักจิตวิทยาผู้หนึ่ง ต้องการทดสอบว่า การได้หยุดพักจะทำให้ประสิทธิภาพในการทำงานดีขึ้นหรือไม่ จึงสุ่มตัวอย่างคนงานจากบริษัทแห่งหนึ่งมา 22 คน รวบรวมข้อมูลเกี่ยวกับผลงานต่อสัปดาห์ของคนงาน 22 คนนี้ ใน 2 ระยะ คือระยะ 1 สัปดาห์ก่อนการหยุดพัก แทนด้วย X และระยะ 1 สัปดาห์หลังการหยุดพัก แทนด้วย Y จงสรุปผลที่ได้จากข้อมูลต่อไปนี้[90]

ตารางที่ 10 การทดสอบลำดับที่ซึ่งมีเครื่องหมาย

คนงาน	X	Y	ความแตกต่าง Y - X	ลำดับที่	ลำดับที่ซึ่งมีเครื่องหมาย ลบ	บวก
1	83	79	-4	12	-12	
2	85	87	+2	4		+4
3	75	70	-5	15	-15	
4	91	93	+2	4		+4
5	80	85	+5	15		+15
6	75	75	0	—		
7	90	80	-10	19	-19	
8	65	71	+6	17		+17
9	78	80	+2	4		+4
10	85	88	+3	8		+8
11	83	82	-1	1.5	-1.5	
12	75	71	-4	12	-12	
13	78	75	-3	8	-8	
14	80	85	+5	15		+15
15	82	86	+4	12		+12
16	88	85	-3	8	-8	
17	85	82	-3	8	-8	
18	80	87	+7	18		+18
19	78	78	0	—		
20	81	84	+3	8		
21	70	85	+15	20		+20
22	80	81	+1	1.5		+1.5
			รวม		-83.5	126.5

[90] Ibid., p. 438.

สมมุติฐาน H_o : การได้หยุดพักไม่ทำให้ประสิทธิภาพในการทำงานดีขึ้น (นั่นคือการได้หยุดพักไม่ทำให้ผลงานของคนงานเพิ่มขึ้น)

H_1 : การได้หยุดพักทำให้ประสิทธิภาพในการทำงานดีขึ้น

ระดับความมีนัยสำคัญ : $\alpha = .05$

สถิติที่ใช้ทดสอบ : ใช้สูตรที่ (23)

ขอบเขตวิกฤต : จะปฏิเสธสมมุติฐานสูญ ถ้า $Z \geq 1.96$ หรือ $Z \leq -1.96$

การคำนวณ : $T = 83.5$ $n = 20$

แทนค่าในสูตรที่ (23) จะได้ $Z = -0.83$

การตัดสินใจ : $Z = -0.83$ ตกอยู่ในขอบเขตการยอมรับ จึงไม่ปฏิเสธสมมุติฐานสูญ สรุปว่า การได้หยุดพักไม่ทำให้ประสิทธิภาพในการทำงานดีขึ้น

3.4.3 <u>การทดสอบกายู</u> (Mann-Whitney U Test)

การทดสอบกายู ใช้เปรียบเทียบกลุ่มตัวอย่างอิสระ 2 กลุ่ม เพื่อดูว่ามาจากประชากรเดียวกันหรือไม่ โดยพิจารณาจากลำดับที่ของค่าสังเกตของสมาชิกในกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่ม วิธีการทดสอบมีดังนี้

1. จัดลำดับที่ของค่าสังเกตของสมาชิกในกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่ม เรียงจากน้อยไปหามาก ถ้ามีค่าสังเกตซ้ำก็ให้ลำดับเป็นค่าเฉลี่ย

2. รวมลำดับที่ของแต่ละกลุ่มแยกกัน ของกลุ่มที่ 1 ซึ่งมีสมาชิก n_1 ให้เป็น $\sum R_1$ และของกลุ่มที่ 2 ซึ่งมีสมาชิก n_2 ให้เป็น $\sum R_2$

3. หาค่าสถิติ จาก $U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - \sum R_1$

และ $U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - \sum R_2$

เปรียบเทียบค่า U_1 กับ U_2 ค่าใดน้อยกว่า ค่านั้นจะเป็นค่าสถิติ U

4. หาความมีนัยสำคัญของค่าสถิติ U จากตารางเฉพาะซึ่งมีไว้สำหรับ $n \leq 20$

ในกรณีที่กลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่ คือทั้ง n_1 และ $n_2 \geq 8$ การแจกแจงตัวอย่างของ U จะเข้าใกล้การแจกแจงปกติโดยมีมัชฌิม $= \mu_U = \frac{n_1 n_2}{2}$ และความคลาดเคลื่อน-

มาตรฐาน = $\sigma_U = \sqrt{\frac{n_1 n_2(n_1+n_2+1)}{12}}$ จึงสามารถทดสอบความมีนัยสำคัญของ U (จะใช้ U_1 หรือ U_2 ก็ได้) โดยใช้ตัวแปรปกติมาตรฐาน

$$Z = \frac{U-\mu_U}{\sigma_U} = \frac{U-n_1 n_2/2}{\sqrt{n_1 n_2(n_1+n_2+1)/12}} \qquad (24)$$ [91]

<u>ตัวอย่าง</u> สุ่มตัวอย่างนิสิตมา 2 กลุ่ม กลุ่มแรก 11 คน ให้เรียนภาษาอังกฤษตามโปรแกรมใหม่ กลุ่มที่สอง 10 คน ให้เรียนภาษาอังกฤษตามโปรแกรมมาตรฐานเดิม เมื่อจบหลักสูตร ทดสอบนิสิตทั้ง 2 กลุ่ม โดยใช้แบบทดสอบมาตรฐานชุดเดียวกัน ปรากฏว่าได้คะแนนดังในตารางที่ 11 อยากทราบว่าคะแนนของนิสิต 2 กลุ่มนี้แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญหรือไม่

กลุ่มที่ 1		กลุ่มที่ 2	
คะแนน	ลำดับที่	คะแนน	ลำดับที่
31	7	27	3
28	4	45	17
42	14	30	6
36	10	53	21
29	5	41	13
51	20	39	12
34	9	48	18
25	1	43	15
44	16	26	2
33	8	37	11
49	19		
รวม	$113 = \sum R_1$		$118 = \sum R_2$

ตารางที่ 11 การทดสอบค่ายู

[91] Hughes and Grawoig, <u>op.cit.</u>, p. 412.

สมมุติฐาน H_0 : คะแนนของนิสิต 2 กลุ่มไม่แตกต่างกัน

H_1 : คะแนนของนิสิต 2 กลุ่ม แตกต่างกัน

ระดับความมีนัยสำคัญ : $\alpha = .05$

สถิติที่ใช้ทดสอบ : ใช้สูตรที่ (24)

ขอบเขตวิกฤต : จะปฏิเสธสมมุติฐานสูญ ถ้า $Z \geq 1.96$ หรือ $Z \leq -1.96$

การคำนวณ : $U = n_1 n_2 - \frac{n_1(n_1-1)}{2} - \sum R_1$

$= (11)(10) - \frac{11(11-1)}{2} - 113 = 63$

$n_1 = 11,\ n_2 = 10$

แทนค่าในสูตรที่ (24) จะได้ $Z = 0.56$

การตัดสินใจ : ค่า Z ที่ได้ ตกอยู่ในขอบเขตการยอมรับ จึงไม่ปฏิเสธสมมุติฐานสูญ ลงความเห็นว่า ไม่มีหลักฐานเพียงพอที่จะสรุปว่าคะแนนของนิสิต 2 กลุ่มแตกต่างกัน

3.4.4 <u>การทดสอบความสุ่ม</u> (Run Test)

ถ้าเครื่องหมายแสดงความแตกต่างระหว่างกลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่ม เรียงลำดับเป็น ++--+++--- กลุ่มของเครื่องหมายเหมือนกันที่ปรากฏเราเรียกว่า รัน (Run) แทนด้วย r ในที่นี้ r = 4 ต่างจาก +---+-++-+- ซึ่งมี r = 8 ถ้าต้องการทราบว่าการปรากฏของ + กับ - เป็นไปอย่างสุ่มหรือไม่ ก็พิจารณาจากจำนวน r ถ้า r มากไปหรือน้อยไป แสดงว่า การปรากฏของ + กับ - ไม่เป็นไปอย่างสุ่ม ความรู้ในเรื่อง รัน (Run) จึงสามารถนำไปใช้ทดสอบความสุ่มได้ดังนี้

1. เมื่อต้องการทดสอบว่า กลุ่มตัวอย่างสุ่ม 2 กลุ่ม มาจากประชากรที่มีการแจกแจงเหมือนกัน เราจะเรียงลำดับขนาดของสมาชิกของกลุ่มตัวอย่างทั้ง 2 กลุ่ม เป็นชุดเดียวกัน แล้วนับจำนวน r จากการปรากฏของสมาชิกของกลุ่มตัวอย่างที่ 1 กับกลุ่มตัวอย่างที่ 2 ถ้า r ที่ได้น้อยกว่าที่คาดหวังว่าจะเกิดโดยบังเอิญในกรณีที่ประชากรของกลุ่มตัวอย่างทั้ง 2 กลุ่ม แจกแจงเหมือนกัน ก็จะปฏิเสธสมมุติฐาน

2. เมื่อต้องการทดสอบว่า สมาชิกของกลุ่มตัวอย่างกลุ่มหนึ่งได้มาอย่างสุ่มจากประ

ชากร ขั้นแรกจะเรียงค่าสังเกตของสมาชิกของกลุ่มตัวอย่างตามลำดับที่ได้มา หามัธยฐาน แล้วพิจารณาว่า ค่าสังเกตค่าใดน้อยกว่ามัธยฐาน ให้เป็น - ค่าใดมากกว่ามัธยฐานให้เป็น + นับจำนวน r จากการปรากฏของ - กับ + ถ้า r ที่ได้น้อยกว่าที่คาดหวังว่าจะเกิดโดยบังเอิญ ก็จะปฏิเสธสมมุติฐาน

ให้ n_1 เป็นจำนวนเครื่องหมาย + ทั้งหมด (หรือจำนวนสมาชิกของกลุ่มตัวอย่างที่ 1) และ n_2 เป็นจำนวนเครื่องหมาย - ทั้งหมด (หรือจำนวนสมาชิกของกลุ่มตัวอย่างที่ 2) ความมีนัยสำคัญของ r เมื่อ n_1 และ $n_2 \leq 20$ ดูได้จากตารางเฉพาะ อย่างไรก็ตาม เมื่อ n_1 และ $n_2 > 10$ การแจกแจงตัวอย่าง r จะเข้าใกล้การแจกแจงปกติ

โดยมีมัชฌิม $= \mu_r = \dfrac{2n_1n_2}{n_1+n_2} + 1$

และความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน $= \sigma_r = \sqrt{\dfrac{2n_1n_2(2n_1n_2-n_1-n_2)}{(n_1+n_2)^2\,(n_1+n_2-1)}}$ ดังนั้น เมื่อ n_1 และ $n_2 > 10$ จึงสามารถประมาณการทดสอบความสุ่มโดยใช้ตัวแปรปกติมาตรฐาน

$$Z = \frac{|r-\mu_r| - \frac{1}{2}}{\sigma_r} = \frac{\left|r-\left(\dfrac{2n_1n_2}{n_1+n_2}+1\right)\right| - \frac{1}{2}}{\sqrt{\dfrac{2n_1n_2(2n_1n_2-n_1-n_2)}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)}}} \qquad (25)$$ [92]

$\frac{1}{2}$ เป็นค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง

<u>ตัวอย่าง</u> จงทดสอบผลการสอบวิชาสถิติของนักเรียน 2 ห้อง ว่ามีความแตกต่างกันหรือไม่

ห้อง ก. 62 79 21 58 77 76 83 91 68 54 95 72 88 84 35

ห้อง ข. 27 12 81 81 79 65 79 56 64 92 [93]

---

[92] *Ibid.*, p. 421.

[93] ลิขิต เหตุสถิรศักดิ์, เรื่องเดิม, หน้า 292.

เรียงลำดับคะแนนทั้งหมด แล้วหาจำนวน r ได้ดังนี้

คะแนน	12	21	27	35	54	56	58	62	64	65	68	72	76	77	79
ห้อง	ข	ก	ข	ก	ก	ข	ก	ก	ข	ข	ก	ก	ก	ก	ก
คะแนน	79	79	81	81	83	84	88	91	92	95					
ห้อง	ข	ข	ข	ข	ก	ก	ก	ก	ข	ก					

$r = 12, \quad n_1 = 15, \quad n_2 = 10$

สมมุติฐาน H_0 : ผลการสอบวิชาสถิติของนักเรียน 2 ห้อง ไม่แตกต่างกัน

H_1 : ผลการสอบวิชาสถิติของนักเรียน 2 ห้อง แตกต่างกัน

ระดับความมีนัยสำคัญ : $\alpha = .05$

สถิติที่ใช้ทดสอบ : ใช้สูตรที่ (25)

ขอบเขตวิกฤต : จะปฏิเสธสมมุติฐานสูญ ถ้า $Z \geq 1.96$ หรือ $Z \leq -1.96$

การคำนวณ : แทนค่าในสูตร (25) จะได้ $Z = 0.2$

การตัดสินใจ : ค่า Z ที่ได้ ตกอยู่ในขอบเขตการยอมรับ จึงไม่ปฏิเสธสมมุติฐานสูญ สรุปว่า ผลการสอบวิชาสถิติของนักเรียน 2 ห้อง ไม่แตกต่างกัน

4. ความเหมาะสม ปัญหา และข้อจำกัดในการใช้การแจกแจงปกติ

เท่าที่ศึกษาความหมาย ลักษณะ และคุณสมบัติของการแจกแจงปกติ การใช้การแจกแจงปกติในด้านต่าง ๆ รวมทั้งหลักฐานที่เกี่ยวข้อง พอจะสรุปความเหมาะสม ปัญหา และข้อจำกัดในการใช้การแจกแจงปกติได้ดังนี้

1. เมื่อใช้ประมาณค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงทวินาม (Binomial Distribution) มีปัญหาที่สำคัญ 3 ประการ คือ

ก. รูปร่างของการแจกแจง การแจกแจงทวินามจะสมมาตรต่อเมื่อ $p=q=\frac{1}{2}$ การประมาณค่าจึงเหมาะสมต่อเมื่อ p และ q ไม่เบี่ยงเบนไปจาก ½ มากนัก และกลุ่มตัวอย่างต้องมีขนาดใหญ่พอ นักสถิติส่วนมากยึดหลักว่า np และ nq จะต้องไม่น้อยกว่า 5 (หรือ

ถ้าจะให้ดียิ่งขึ้น np และ nq จะต้องไม่น้อยกว่า 10) การประมาณจึงจะถือว่าเหมาะสม แต่ถ้า p และ q เข้าใกล้ 0 หรือ 1 มาก แม้กลุ่มตัวอย่างจะมีขนาดใหญ่ก็ไม่เหมาะที่จะประมาณค่าความน่าจะเป็นด้วยการแจกแจงปกติ ควรจะประมาณด้วยการแจกแจงปัวซอง (Poisson Distribution) หรือคำนวณความน่าจะเป็นจากการแจกแจงทวินามโดยตรง

ข. ความไม่ต่อเนื่องของค่าตัวเลขของข้อมูล การแจกแจงทวินามเป็นการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง แต่การแจกแจงปกติเป็นการแจกแจงแบบต่อเนื่อง ดังนั้นเพื่อให้การประมาณค่าได้ผลดี จึงต้องมีค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง (Correction for continuity) โดยเอา $\frac{1}{2}$ บวกหรือลบขีดจำกัดของช่วงที่ต้องการประมาณค่า แต่ถ้ากลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่มาก($n \geq 100$) ค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่องก็ไม่จำเป็น

ค. ช่วงที่ต้องการประมาณค่า การประมาณค่าในช่วงรอบ ๆ มัชฌิมของการแจกแจงจะเชื่อถือได้มากกว่าการประมาณค่าในช่วงที่อยู่ห่างมัชฌิมของการแจกแจง โดยเฉพาะเมื่อ p และ q เข้าใกล้ 0 และ 1 มาก

2) เมื่อใช้ประมาณค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงปัวซอง (Poisson Distribution) มีปัญหาที่สำคัญ 3 ประการคือ

ก. รูปร่างของการแจกแจง การแจกแจงปัวซองจะเข้าใกล้การแจกแจงปกติต่อเมื่อมัชฌิมของการแจกแจง (λ) มีค่าไม่ต่ำเกินไป และกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ ดังนั้นการประมาณค่าจะเหมาะสมต่อเมื่อ $n\lambda$ มีค่าไม่น้อยกว่า 10

ข. ความไม่ต่อเนื่องของค่าตัวเลขของข้อมูล การแจกแจงปัวซองเป็นการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง แต่การแจกแจงปกติเป็นการแจกแจงแบบต่อเนื่อง เพื่อให้การประมาณค่าได้ผลดี จึงต้องมีค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง โดยเอา $\frac{1}{2}$ บวกหรือลบขีดจำกัดของช่วงที่ต้องการประมาณค่า แต่ถ้ากลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่มาก ($n \geq 100$) ก็ไม่จำเป็นต้องมีค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง

ค. ช่วงที่ต้องการประมาณค่า การประมาณค่าในช่วงรอบ ๆ มัชฌิมของการแจกแจงจะเชื่อถือได้มากกว่าการประมาณค่าในช่วงที่อยู่ห่างมัชฌิมของการแจกแจง

3) เมื่อใช้ประมาณค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงแกมมา (Gamma Distribution) มีปัญหาที่สำคัญ 2 ประการ คือ

ก. รูปร่างของการแจกแจง การแจกแจงแกมมาจะเข้าใกล้การแจกแจงปกติ ต่อ

เมื่อ α ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ตัวหนึ่งของการแจกแจงแกมมามีค่ามากพอเท่านั้น การประมาณค่าถือว่าเหมาะสม ถ้า α มีค่าไม่ต่ำกว่า 50 ถ้า α เล็ก การแจกแจงแกมมาจะเบ้ ย่อมไม่เหมาะที่จะประมาณค่าความน่าจะเป็นด้วยการแจกแจงปกติ อย่างไรก็ตาม ถ้าใช้การเปลี่ยนตัวแปรแกมมาตามวิธีของฟิชเชอร์หรือวิธีของวิลสันกับฮิลเฟอร์ที่ ค่า α มากกว่า 14 ก็ถือว่าเหมาะสมสำหรับการประมาณค่าความน่าจะเป็นด้วยการแจกแจงปกติ

ข. ช่วงที่ต้องการประมาณค่า การประมาณค่าในช่วงรอบ ๆ มัชฌิมของการแจกแจง จะเชื่อถือได้มากกว่าการประมาณค่าในช่วงที่อยู่ห่างมัชฌิมของการแจกแจง

4) เมื่อใช้ในการประมาณค่า และ(หรือ)ทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับมัชฌิมของประชากร (μ) หรือความแตกต่างระหว่างมัชฌิมของประชากร ($\mu_1 - \mu_2$) มีปัญหาเกี่ยวกับการแจกแจงของประชากรและการทราบหรือไม่ทราบค่าความแปรปรวนของประชากร (σ^2) ดังนี้

ก. ถ้าประชากรแจกแจงปกติและทราบค่า σ^2 จะใช้การแจกแจงปกติได้อย่างเหมาะสมสำหรับกลุ่มตัวอย่างทุกขนาด

ข. ถ้าประชากรแจกแจงปกติ แต่ไม่ทราบค่า σ^2 หรือประชากรไม่แจกแจงปกติ แต่ทราบค่า σ^2 จะใช้การแจกแจงปกติได้เหมาะสมต่อเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดไม่ต่ำกว่า 30

ค. ถ้าประชากรไม่แจกแจงปกติและไม่ทราบค่า σ^2 จะใช้การแจกแจงปกติได้เหมาะสมต่อเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดไม่ต่ำกว่า 100

5) เมื่อใช้ประมาณค่า และ(หรือ)ทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับสัดส่วนของประชากร (π) หรือความแตกต่างระหว่างสัดส่วนของประชากร ($\pi_1 - \pi_2$) โดยที่กลุ่มตัวอย่างอิสระ มีปัญหาเช่นเดียวกับเมื่อใช้ประมาณค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงทวินาม เพราะการแจกแจงตัวอย่างของสัดส่วนของกลุ่มตัวอย่าง (p) มีลักษณะเป็นการแจกแจงทวินาม ดังนั้น การใช้การแจกแจงปกติ จะเหมาะสมต่อเมื่อสัดส่วนของประชากรไม่เบี่ยงเบนไปจาก $\frac{1}{2}$ มากนัก และกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ หลักที่ใช้กันทั่วไปคือ $n\pi$ และ $n(1-\pi)$ จะต้องไม่ต่ำกว่า 5 นอกจากนี้ เพื่อให้ได้ผลดียิ่งขึ้น ควรจะมีค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง โดยเอา $\frac{1}{2n}$ บวกหรือลบสัดส่วนของกลุ่มตัวอย่าง ($p \pm \frac{1}{2n}$) แต่ถ้ากลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่มาก ($n \geq 100$) ค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่องก็ไม่จำเป็น

6) เมื่อใช้ทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับความแตกต่างระหว่างสัดส่วนของประชากรโดยที่กลุ่มตัวอย่างไม่อิสระ มีข้อจำกัดคือ จำนวนสมาชิกที่เปลี่ยนลักษณะทั้งหมดของกลุ่มตัวอย่าง (A+D) จะต้องไม่ต่ำกว่า 10 และถ้า A+D อยู่ในระหว่าง 10 ถึง 20 ควรจะมีค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง โดยเอา 1 ลบออกจากค่าสัมบูรณ์ของความแตกต่างระหว่างจำนวนสมาชิกที่เปลี่ยนลักษณะของกลุ่มตัวอย่างหนึ่งกับจำนวนสมาชิกที่เปลี่ยนลักษณะของอีกกลุ่มตัวอย่างหนึ่ง (|D-A|-1)

7) เมื่อใช้ในการประมาณค่าความแปรปรวนของประชากร (σ^2) หรือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร (σ) โดยที่ประชากรแจกแจงปกติ มีปัญหาคือ การแจกแจงตัวอย่างของความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่าง (s^2) และการแจกแจงตัวอย่างของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง (s) มีลักษณะเป็นการแจกแจงไคสแคว (χ^2-Distribution) ดังนั้น การประมาณค่าโดยการแจกแจงปกติจะเหมาะสมต่อเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดไม่ต่ำกว่า 100 ไม่เช่นนั้นต้องประมาณโดยใช้การแจกแจงไคสแคว

8) เมื่อใช้ในการประมาณค่า และ(หรือ)ทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบผลคูณของประชากร (ρ) หรือความแตกต่างระหว่างสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบผลคูณของประชากร ($\rho_1-\rho_2$) โดยที่กลุ่มตัวอย่างอิสระ เราเปลี่ยนสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบผลคูณของประชากร (ρ) และสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบผลคูณของกลุ่มตัวอย่าง (r) ให้เป็น Z_ρ และ Z_r ตามลำดับ ตามวิธีของฟิชเชอร์ (Fisher's Z transformation)จะทำให้การแจกแจงตัวอย่างของ Z_r เข้าใกล้การแจกแจงปกติสำหรับทุกค่าของ ρ และทุกขนาดของกลุ่มตัวอย่าง จึงใช้การแจกแจงปกติได้เหมาะสม ไม่ว่าค่า ρ หรือขนาดของกลุ่มตัวอย่างจะเป็นเท่าใดก็ตาม แต่จะใช้ได้ผลดีกว่า ถ้า ρ เข้าใกล้ 0 และกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ทั้งนี้ มีข้อจำกัดคือ ประชากรจะต้องแจกแจงปกติแบบสองตัวแปร (Bivariate Normal Distribution) ถ้าไม่แน่ใจในลักษณะการแจกแจงของประชากร ต้องใช้กลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่

9) เมื่อใช้ในการทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับความแตกต่างระหว่างสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบผลคูณของประชากร ($\rho_{XY}-\rho_{XZ}$) โดยที่กลุ่มตัวอย่างไม่อิสระ ไม่ต้องเปลี่ยนสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบผลคูณของกลุ่มตัวอย่าง (r_{XY} กับ r_{XZ}) ให้เป็น Z_r ตามวิธีของ-

ฟิชเชอร์ แต่มีข้อจำกัดคือ กลุ่มตัวอย่างต้องสุ่มมาจากประชากรซึ่งมีตัวแปร X,Y และ Z โดยที่ X กับ Y , X กับ Z และ Y กับ Z แต่ละคู่มีการแจกแจงปกติแบบสองตัวแปร

10) เมื่อใช้ในการทดสอบความมีนัยสำคัญของสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อื่น ๆ บางตัว ได้แก่ r_r, τ, $\emptyset$, r_{tet} และ r_{bis} มีข้อจำกัดดังนี้

ก. การทดสอบความมีนัยสำคัญของ r_r ใช้ได้ต่อเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดไม่ต่ำกว่า 25

ข. การทดสอบความมีนัยสำคัญของ τ ใช้ได้ต่อเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดมากกว่า 10

ค. การทดสอบความมีนัยสำคัญของ ϕ ใช้ได้ต่อเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดไม่ต่ำกว่า 30

ง. การทดสอบความมีนัยสำคัญของ r_{tet} ใช้ได้ต่อเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดมากกว่า 30 และ p_x กับ p_y ไม่ต่างกันมาก (p_x กับ p_y เป็นสัดส่วนของจำนวนสมาชิกที่มีลักษณะที่สนใจของตัวแปร X กับตัวแปร Y ซึ่งเราหาความสัมพันธ์ตามลำดับ)

จ. การทดสอบความมีนัยสำคัญของ r_{bis} ใช้ได้ต่อเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดมากกว่า 30 และ n_1/n กับ n_o/n มีค่ามากกว่า 0.1 (n_1 = จำนวนสมาชิกของกลุ่มตัวอย่างที่มีลักษณะที่สนใจ, n_o = จำนวนสมาชิกของกลุ่มตัวอย่างที่ไม่มีลักษณะที่สนใจ = $n-n_1$)

11) เมื่อใช้เป็นค่าประมาณการทดสอบแบบไม่มีพารามีเตอร์บางอย่าง มีข้อจำกัดเกี่ยวกับขนาดของกลุ่มตัวอย่าง ดังนี้

ก. การทดสอบเครื่องหมาย (Sign Test) ใช้การแจกแจงปกติประมาณได้ต่อเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดไม่ต่ำกว่า 10

ข. การทดสอบลำดับที่ซึ่งมีเครื่องหมาย (Wilcoxon Signed-Rank Test) ใช้การแจกแจงปกติประมาณได้ต่อเมื่อ กลุ่มตัวอย่างมีขนาดไม่ต่ำกว่า 8

ค. การทดสอบคายู (Mann-Whitney U Test) ใช้การแจกแจงปกติประมาณได้ต่อเมื่อ กลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มมีขนาดไม่ต่ำกว่า 8

ง. การทดสอบความสุ่ม (Run Test) ใช้การแจกแจงปกติประมาณได้ต่อเมื่อกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มมีขนาดมากกว่า 10

5.ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงปกติกับการแจกแจงอื่นๆซึ่งได้มาจากการแจกแจงปกติ.

การแจกแจงซึ่งได้มาจากการแจกแจงปกติ (Derived Distributions) ที่สำคัญ ๆ ได้แก่

5.1 การแจกแจงไคสแคว (χ^2-Distribution

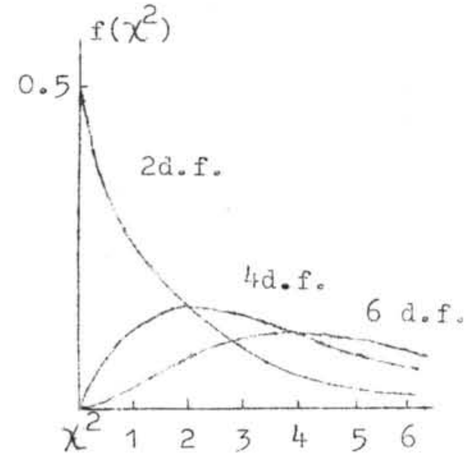
5.2 การแจกแจงเอฟ (F-Distribution)

5.3 การแจกแจงที ("Student's" t-Distribution)

5.1 การแจกแจงไคสแคว (χ^2-Distribution)

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งแจกแจงปกติ โดยมีมัชฌิม μ และความแปรปรวน σ^2 ดังนั้น ตัวแปรมาตรฐาน $z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ย่อมแจกแจงปกติมาตรฐานโดยมีมัชฌิม 0 และความแปรปรวน 1

$z^2 = \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}$ จะไม่แจกแจงปกติมาตรฐาน แต่จะแจกแจงแบบไคสแคว โดยมีชั้นของความเป็นอิสระ (Degree of freedom, d.f. หรือใช้สัญลักษณ์ ν) เป็น 1 .



ภาพที่ 12 การแจกแจงไคสแคว

ตัวแปร z^2 จึงเรียกว่า ตัวแปรไคสแคว ซึ่งมีชั้นของความเป็นอิสระเท่ากับ 1

เมื่อ $n = 1 = \nu$; $\chi^2_{(1)} = z^2 = \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}$

$$n = 2 = \nu \ ; \ \chi^2_{(2)} = Z_1^2 + Z_2^2 = \frac{(X_1-\mu)^2}{\sigma^2} + \frac{(X_2-\mu)^2}{\sigma^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$$

$$\therefore \ \chi^2_{(n)} = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \qquad = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \tag{1}$$

ในกรณีที่แทน μ ใน (1) ด้วย $\bar{X}$ จะได้ว่า $\chi^2_{(n-1)} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$

ทั้งนี้เนื่องจาก $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} \tag{2}$$

และ $\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} \left\{(X_i-\bar{X})-(\bar{X}-\mu)\right\}^2$

$$\therefore \quad \chi^2_{(n)} = \frac{1}{\sigma^2}\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(\bar{X}-\mu) + \sum_{i=1}^{n}(\bar{X}-\mu)^2\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} + \frac{n(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2}$$

จาก (2); $\chi^2_{(n)} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} + \frac{(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2/n}$

$$= \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} + \chi^2_{(1)}$$

$$\chi^2_{(n)} - \chi^2_{(1)} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

$$\therefore \ \chi^2_{(n-1)} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \tag{3}$$

จะเห็นได้ว่า เมื่อแทน μ ด้วยค่าสถิติ $\bar{X}$ ขั้นของความเป็นอิสระ จะลดจาก n เหลือ n-1

การแจกแจงของตัวแปร $\chi^2_{(n)}$ จะเป็นไปตาม density function

$$f(\chi^2) = \frac{(\chi^2)^{(n/2)-1} e^{-\chi^2/2}}{2^{(n/2)}\Gamma(n/2)} \; ; \; \begin{matrix} \chi^2 > 0 \\ n = 1, 2, \ldots \end{matrix}$$

โดยมีมัชฌิม = n และความแปรปรวน = 2n [94]

เมื่อ n มีขนาดใหญ่มาก ๆ อาศัย Central Limit Theorem การแจกแจงไคสแควจะเข้าใกล้การแจกแจงปกติ จึงอาจใช้ตารางพื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐาน หาค่าความน่าจะเป็นของ $\chi^2_{(n)}$ เมื่อ n ใหญ่พอ $(n > 30)$ [95] โดยที่ตัวแปรปกติมาตรฐาน

$$Z = \frac{\chi^2_{(n)} - n}{\sqrt{2n}}$$

และเมื่อ $n > 100$ ค่า $\chi^2_{(n)}$ ในตารางไคสแควไม่มี ก็อาจประมาณได้จาก

$$\chi^2_{(n,\alpha)} = \tfrac{1}{2}(Z_\alpha + \sqrt{2n-1})^2$$

Z_α เป็นคะแนนปกติมาตรฐานซึ่งตัดพื้นที่ส่วนปลายโค้งปกติออกไป α [96]

ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงปกติกับการแจกแจงไคสแคว ที่สำคัญจึงมี 2 ประการ คือ

1. ตัวแปร $\chi^2_{(n)}$ เป็นผลบวกของตัวแปรปกติมาตรฐานอิสระ n ตัว
2. เมื่อ n ใหญ่พอ การแจกแจงไคสแควจะเข้าใกล้การแจกแจงปกติ โดยมีมัชฌิม = n และความแปรปรวน = 2n

5.2 <u>การแจกแจงเอฟ</u> (F-Distribution)

ให้ตัวแปรสุ่มอิสระ X_1 กับ X_2 ต่างก็แจกแจงปกติโดยมีมัชฌิม μ_1 กับ μ_2 และความแปรปรวน σ_1^2 กับ σ_2^2 ตามลำดับ ถ้าสุ่มตัวอย่างจาก X_1 มา n_1 และจาก X_2

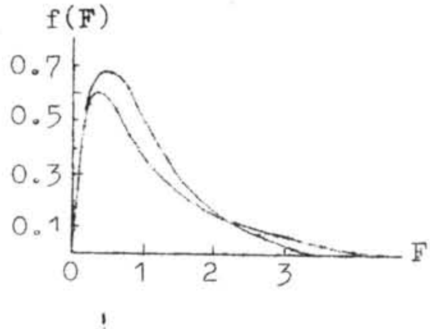
---

[94] D. Ransom Whitney, Elements of Mathematical Statistics (New York: Henry Holt and Company, Inc., 1959). p. 41.

[95] Walker and Lev, op.cit., p. 183.

[96] Chao, op.cit., p. 274.

มา n_2 โดยที่ความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่าง s_1^2 กับ s_2^2 เป็นค่าประมาณไม่เอนเอียงของ σ_1^2 กับ σ_2^2 ตามลำดับ



ภาพที่ 13 การแจกแจงเอฟ

จาก (3) , $\chi^2_{(n-1)} = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$

เราจะได้ $s_1^2 = \dfrac{\sigma_1^2\chi^2_{(n_1-1)}}{n_1-1}$

และ $s_2^2 = \dfrac{\sigma_2^2\chi^2_{(n_2-1)}}{n_2-1}$

เรานิยามตัวแปร F โดยให้ $F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2}$ ภายใต้สมมุติฐาน $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

ดังนั้น

$$F_{(n_1-1),(n_2-1)} = \frac{\sigma_1^2\chi^2_{(n_1-1)}/(n_1-1)}{\sigma_2^2\chi^2_{(n_2-1)}/(n_2-1)}$$

$$= \frac{\chi^2_{(n_1-1)}/(n_1-1)}{\chi^2_{(n_2-1)}/(n_2-1)}$$

$$\therefore \quad F_{\nu_1,\nu_2} = \frac{\chi^2_{(\nu_1)}/\nu_1}{\chi^2_{(\nu_2)}/\nu_2} \quad ; \nu_1 = n_1-1 \text{ และ } \nu_2 = n_2-1$$

การแจกแจงของตัวแปร F จะเป็นไปตาม density function

$$f(F) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\nu_1/2} \frac{F^{(\nu_1-2)/2}}{(1+\nu_1 F/\nu_2)^{(\nu_1+\nu_2)/2}} \; ; \; F > 0$$

ν_1 = ชั้นของความเป็นอิสระของตัวตั้ง = 1, 2, ...

ν_2 = ชั้นของความเป็นอิสระของตัวหาร = 1, 2, ...

มัชฌิมของการแจกแจงของ F = $\frac{\nu_1}{\nu_2-2}$ และความแปรปรวน = $\frac{\nu_2^2(\nu_1+2)}{\nu_1(\nu_2-2)(\nu_2-4)}$ [97]

การแจกแจงเอฟ จึงมีความสัมพันธ์กับการแจกแจงปกติ ตรงที่ ตัวแปร F = $\frac{s_1^2}{s_2^2}$ s_1^2 กับ s_2^2 เป็นความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่ม ที่สุ่มมาอย่างอิสระจากประชากรปกติ และการแจกแจงเอฟ มีความสัมพันธ์กับการแจกแจงไคสแคว ตรงที่ $F_{\nu_1,\nu_2} = \frac{\chi^2_{(\nu_1)}/\nu_1}{\chi^2_{(\nu_2)}/\nu_2}$

ถ้า $\nu_1 = n$ และ $\nu_2 = \infty$ จะได้

$$F_{n,\infty} = \frac{\chi^2_{(n)}/n}{\chi^2_{(\infty)}/\infty} = \chi^2_{(n)}/n = \sum_{i=1}^{n} z_i^2/n$$

และถ้า $\nu_1 = 1$ และ $\nu_2 = \infty$ จะได้

$$F_{1,\infty} = \chi^2_{(1)} = z^2$$

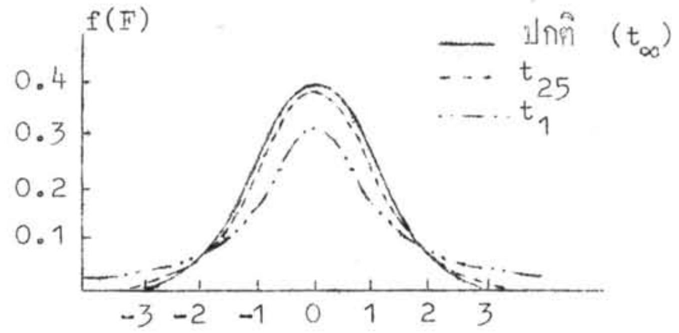
5.3 <u>การแจกแจงที</u> ("Student's" t-Distribution)

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งแจกแจงปกติโดยมีมัชฌิม μ และความแปรปรวน σ^2 สุ่มตัวอย่างขนาด n จาก X โดยที่มัชฌิมของกลุ่มตัวอย่างเท่ากับ $\bar{X}$ และความแปรปรวนเท่ากับ $s_{\bar{X}}^2$ เรานิยามตัวแปร t โดยให้

$$t = \frac{\bar{X}-\mu}{s_{\bar{X}}}$$

---

[97] Ostle, <u>op.cit.</u>, p. 40.



ภาพที่ 14 การแจกแจงทีกับการแจกแจงปกติมาตรฐาน

จาก (3) เราจะได้ $s_{\bar{X}}^2 = \dfrac{\sigma_{\bar{X}}^2 \chi^2_{(n-1)}}{n-1}$

นั่นคือ $s_{\bar{X}} = \dfrac{\sigma_{\bar{X}}\sqrt{\chi^2_{(n-1)}}}{\sqrt{n-1}} = \sigma_{\bar{X}}\sqrt{\chi^2_{(n-1)}/(n-1)}$

$$\therefore \quad t = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}\sqrt{\chi^2_{(n-1)}/(n-1)}} = \frac{Z}{\sqrt{\chi^2_{(n-1)}/(n-1)}}$$

$\therefore \quad t_\nu = t = \dfrac{Z}{\sqrt{\chi^2_{(\nu)}/\nu}}$; $\nu = n-1$ = ชั้นของความเป็นอิสระ

ตัวแปร t มีการแจกแจงเป็นไปตาม density function

$$f(t) = \frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})(1+\frac{t^2}{\nu})^{\frac{\nu+1}{2}}} \quad ; \quad -\infty < t < \infty, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

โดยมีมัชฌิม = 0 และความแปรปรวน = $\dfrac{\nu}{\nu-2}$ สำหรับ $\nu > 2$ [98]

เมื่อ ν มีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือ กลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้น การแจกแวงทีจะเข้าใกล้การแจกแจงปกติ และเมื่อ $n \to \infty$ การแจกแจงทีจะเป็นเช่นเดียวกับการแจกแจงปกติ ดังนั้น สำหรับกลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่พอ เราอาจใช้การแจกแจงปกติเป็นค่าประมาณการแจกแจงที ได้ โดยที่ตัวแปรปกติมาตรฐาน $Z = \dfrac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$

---

[98] Whitney, op.cit., p. 45.

ถ้าประชากรแจกแจงปกติ ซึ่งเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นของการแจกแจงที การประมาณค่านี้จะเหมาะสมเมื่อ $n > 30$ แต่ถ้าไม่ทราบการแจกแจงของประชากร ต้องใช้ $n \geq 100$ [99]

ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงที กับการแจกแจงปกติ จึงมี 3 ประการ คือ

1. การแจกแจงของประชากรต้องเป็นปกติ

2. ตัวแปร $t_\nu = \dfrac{Z}{\sqrt{\chi^2_{(\nu)}/\nu}}$

3. เมื่อ ν ใหญ่ (n ใหญ่) การแจกแจงทีจะเข้าใกล้การแจกแจงปกติ

และเมื่อ $n \longrightarrow \infty$ (นั่นคือ $\nu \longrightarrow \infty$)

$$t_\infty = \frac{Z}{\sqrt{\chi^2_{(\infty)}/\infty}} = Z$$

แสดงว่า เมื่อ $n \longrightarrow \infty$ การแจกแจงที จะเป็นเช่นเดียวกับการแจกแจงปกติ

การแจกแจงที มีความสัมพันธ์กับการแจกแจงไคสแคว โดยที่ $t_\nu = \dfrac{Z}{\sqrt{\chi^2_{(\nu)}/\nu}}$ เมื่อ ν (หรือ n) $\longrightarrow \infty$ เราได้ว่า

$$t_\infty = Z = \sqrt{Z^2}$$

$$\therefore \quad t_\infty = \sqrt{\chi^2_{(1)}}$$

และการแจกแจงที มีความสัมพันธ์กับการแจกแจงเอฟ โดยที่

$$t^2_\nu = \frac{Z^2}{\chi^2_{(\nu)}/\nu} = \frac{\chi^2_{(1)}/1}{\chi^2_{(\nu)}/\nu}$$

$$\therefore \quad t^2_\nu = F_{1,\nu}$$

จะเห็นได้ว่า การแจกแจงไคสแคว การแจกแจงเอฟ และการแจกแจงที ต่างก็มีรากฐานมาจากการแจกแจงปกติ เมื่อนำเอาการแจกแจงเหล่านี้ไปใช้ จึงต้องมีข้อตกลงเบื้องต้นว่า ประชากรแจกแจงปกติ

---

[99]Peters and Summers, op.cit., p. 162.