บทที่ 6

การปรับปรุงทฤษฎีนาฬิกาทราย

จากบทที่ 5 เราพบว่าสูตรของทฤษฎีนาฬิกาทรายจะให้ผลของการคำนวณที่ผิดพลาดไปจากผลที่ได้จากการทดลองมาก แม้ว่าเราจะปรับปรุงสูตรของทฤษฎีนาฬิกาทรายโดยการพิจารณาช่องว่างวงแหวนที่เกิดขึ้นรอบรูเข้าไปด้วย แต่สูตรที่ได้รับการปรับปรุงแล้วนี้ก็ยังให้ผลของการคำนวณที่ผิดไปจากผลที่ได้จากการทดลองถึง 45 %

ในบทนี้เราจะนำทฤษฎีนาฬิกาทรายมาเปลี่ยนแปลงสมมุติฐานบางประการ สูตรของทฤษฎีนาฬิกาทรายที่ได้รับการเปลี่ยนแปลงสมมุติฐานแล้วนี้จะมีรูปแบบของสูตรใกล้เคียงกับสมการที่เราสร้างขึ้นจากผลของการทดลอง

6.1 วิธีปรับปรุงสูตรของทฤษฎีนาฬิกาทราย

จากสมการของการเคลื่อนที่ในแนวรัศมี

$$\rho_f v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 \sigma_r)}{\partial r} + \frac{(\sigma_\theta + \sigma_\psi)}{r} - \rho_f g\cos\theta \quad (6.1.1)$$

สมมุติว่า $\underline{v} = (v,0,0)$

นั่นคือไม่มีการเคลื่อนที่ของเม็ดของแข็งในทิศทาง θ และ ψ และที่การเคลื่อนที่ที่คงที่ $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

เมื่อพิจารณาสภาวะที่มุมครึ่ง α มีค่าน้อย ดังนั้น $\cos\theta \simeq 1 \quad (0 \leq \theta \leq \alpha)$

<u>Imcompressibility</u>

จากบทที่ 5 หัวข้อ 5.2.1 เราพบว่า เม็ดของแข็งมีการเคลื่อนที่ในแนวรัศมีเท่านั้น

ดังนั้น $v = f(r)$

จากรูป 1.4.1

$$W = \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha} \rho_f v r^2 \sin\theta d\theta d\psi$$

$$W = 2\pi\rho_f v(1-\cos\alpha)r^2$$

ที่มุมครึ่งมีค่าน้อย $$1-\cos\alpha = 1-\left(1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}-\ldots\right)$$

$$= 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{2} \simeq \frac{1}{2}\sin^2\alpha$$

เพราะ $$\sin\alpha = \alpha-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}-\ldots = \alpha$$

$$W = \rho_f \pi \sin^2\alpha \, r^2 v$$

ให้ $$V = r^2 v \quad \text{(ขนาดของปริมาตรการไหล)} \quad (6.1.2)$$

$$W \simeq \rho_f \pi V \sin^2\alpha \qquad (6.1.3)$$

<u>สภาวะของความเค้นตรง</u>

ความเค้นหลัก 3 อัน มีชื่อดังนี้คือ σ_1 , σ_2 , σ_3 โดย $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ เนื่องจากเม็ดของแข็งอยู่ในสภาวะที่ถูกกระทำให้ไหลโดยผนังของกรวย (passive case)

ดังนั้น
$$\sigma_1 = \sigma_\theta$$
$$\sigma_2 = \sigma_\psi$$
$$\sigma_3 = \sigma_r$$

พิจารณาวงกลมของมอร์กับกฎการแตกหักของคูลอมบ์ สำหรับเม็ดของแข็งที่ไม่มีแรงเกาะระหว่างกัน (รูป 6.1.1) จะได้ว่า

$$\sigma_2 = 2r + \sigma_3 \qquad (6.1.4)$$

แต่ $$r = (\sigma_3 + r)\sin\phi$$

$$r = \sigma_3 \sin\phi \,/(1-\sin\phi\,)$$

จากสมการ (6.1.4)

$$\sigma_2 = \sigma_3(2\sin\phi/(1-\sin\phi)+1)$$

จากรูป 6.1.1 $\sigma_2 = K_2'\sigma_3$

โดย $K_2' = (1+\sin\phi)/(1-\sin\phi)$

ในทำนองเดียวกัน $K_1' = (1+\sin\beta')/(1-\sin\beta')$

และ $\sigma_1 = K_1'\sigma_3$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \sigma_1 = K_1'\sigma_3 \\ \sigma_\psi &= \sigma_2 = K_2'\sigma_3 \\ \sigma_r &= \sigma_3 \end{aligned} \qquad (6.1.5)$$

และ $K_1' > K_2' > 1$

จากสมการ (6.1.1),(6.1.2) และ(6.1.3) และกรณีที่ α มีค่าน้อย เราจะได้สมการดังต่อไปนี้คือ

$$\rho_f V r^{-2}\frac{d(Vr^{-2})}{dr} = -\frac{d\sigma_3}{dr} - \frac{2\sigma_3}{r} + \frac{(K_1'+K_2')\sigma_3}{r} - \rho_f g$$

จัดรูปใหม่ จะได้ว่า

$$\frac{d\sigma_3}{dr} = \frac{(K'-2)\sigma_3}{r} + \rho_f\left(\frac{2V^2}{r^5} - g\right) \qquad (6.1.6)$$

โดย $K' = K_1' + K_2'$ (6.1.7)

จากสมการ (6.1.6) จะได้ว่า

$$\frac{d\sigma_3}{dr} + \frac{\sigma_3}{r}(2-K') - \rho_f\left(\frac{2V^2}{r^5} - g\right) = 0$$

สมการนี้เป็นสมการเชิงเส้น ถ้าคูณสมการนี้ด้วย $r^{(2-K')}$ ตลอด จะได้ว่า

$$r^{(2-K')}\frac{d\sigma_3}{dr} + r^{(2-K')}\frac{\sigma_3}{r}(2-K') - \rho_f r^{(2-K')}\left(\frac{2V^2}{r^5} - g\right) = 0$$

$$r^{(2-K')}d\sigma_3 + r^{(1-K')}\sigma_3(2-K')dr - 2\rho_f V^2 r^{(-3-K')}dr + \rho_f g r^{(2-K')}dr = 0$$

อินทีเกรต

$$\int dr^{(2-K')}\sigma_3 - 2\rho_f V^2\int r^{(-3-K')}dr + \rho_f g\int r^{(2-K')}dr = A$$

นั่นคือ ความเค้นตรงมีค่าดังนี้คือ

$$\sigma_3(r) = -r^{(K'-2)}\rho_f\left(\frac{2V^2 r^{(-K'-2)}}{(K'+2)} - \frac{gr^{(3-K')}}{(K'-3)}\right) + A$$

A คือค่าคงที่ เราสามารถหา ค่าของ A ได้ดังนี้

- ที่แนวความโค้งแห่งการตกอย่างอิสระ เมื่อ $r = r_o$, $\sigma_3(r_o) = 0$
- ที่ระดับบนสุดของกรวยเม็ดของแข็งจะไหลอย่างอิสระ $r = r_1$, $\sigma_3(r_1) = 0$, $y = r_1/r_0$

ดังนั้น

$$\frac{2V^2 r_o^{(-K'-2)}(1-y^{(-K'-2)})}{(K'+2)} = \frac{gr_o^{(-K'+3)}(1-y^{(-K'+3)})}{(K'-3)}$$

$$V^2 = \frac{1}{2}gr_o^5\left(\frac{K'+2}{K'-3}\right)\left(\frac{1-y^{(-K'+3)}}{1-y^{(-K'-2)}}\right) \quad (6.1.8)$$

สำหรับ $K' = (K_1'+K_2') >> 3$ และ $r_1 >> r_o$ จากสมการ (6.1.8) จะได้ว่า

$$V^2 = \frac{1}{2}gr_o^5\left(\frac{K'+2}{K'-3}\right) \quad (6.1.9)$$

เนื่องจาก $D_o = 2r_o\sin\alpha$

ดังนั้น $r_o = D_o/(2\sin\alpha)$

นั่นคือ $V = \frac{1}{8} g^{1/2} \left(\frac{K'+2}{K'-3}\right) \frac{D_o^{5/2}}{\sin^{5/2}\alpha}$ (6.1.10)

แทนสมการ (6.1. 3) ลงในสมการ (6.1.10) จะได้สมการสำหรับคำนวณหาอัตรามวลการไหลของเม็ดของแข็งดังต่อไปนี้คือ

$$W = \frac{\rho_f \pi}{8} \left(\frac{K'+2}{K'-3}\right) \frac{g^{1/2} D_o^{5/2}}{\sin^{1/2}\alpha} \qquad (6.1.11)$$

พิจารณา $K' = K_1' + K_2'$

โดย $K_2' = (1+\sin\phi)/(1-\sin\phi)$

และ $K_1' = (1+\sin\beta')/(1-\sin\beta')$

เนื่องจากเม็ดของแข็งที่อยู่ในกรวย อยู่ในสภาวะที่ถูกกระทำให้ไหลโดยผนังของกรวย ดังนั้น ผนังของกรวยมีบทบาทสำคัญต่อเม็ดของแข็งที่กำลังไหล จึงมีเหตุผลพอสมควรที่เราจะสมมุติว่า

$1 < K_2' << K_1'$ นั่นคือ $\beta' >> \phi$

และ

$\beta' \longrightarrow \pi/2$ นั่นคือ $K_1' \longrightarrow \infty$ โดยที่เราไม่คำนึงถึงว่า ϕ อาจจะเป็นมุมแห่งความเสียดทานภายใน

ดังนั้น จากสมการ (6.1 11) เราจะได้ว่า

$$W = \rho_f \pi g^{1/2} D_o^{5/2} / (8\sin^{1/2}\alpha)$$

$$W = 0.39\, \rho_f g^{1/2} D_o^{5/2} / (\sin^{1/2}\alpha) \qquad (6.1.12)$$

เมื่อ พิจารณาช่องว่างวงแหวนรอบรู k จะได้สมการสำหรับคำนวณหาอัตรามวลการไหล ดังนี้คือ

$$W = 0.39\rho_f g^{1/2} (D_o - kd)^{5/2} / \sin^{1/2} \alpha \qquad (6.1.13)$$

จากผลของการทดลองในบทที่ 5 เราจะได้สมการสำหรับคำนวณหาอัตรามวลการไหลดังนี้คือ

ข้าวสาร ; $W = 0.35\rho_f g^{1/2} (D_o - 1.72d)^{5/2} / (\sin \alpha)^{1/2}$ (5.2.5.13)

ถั่วเขียว ; $W = 0.41\rho_f g^{1/2} (D_o - 1.04d)^{5/2} / (\sin \alpha)^{1/2}$ (5.2.5.14)

จากสมการ (6.1.13) ; C = 0.39 (สมการที่ได้รับการปรับปรุงแล้ว)

ข้าวสาร ; C = 0.35 (จากผลการทดลอง สมการ(5.2.5.13))

ถั่วเขียว ; C = 0.41 (จากผลการทดลอง สมการ(5.2.5.14))

จากผลของการเปรียบเทียบสูตรที่ได้รับการปรับปรุงนี้กับผลที่ได้จากการทดลองเราพบว่า

ข้าวสาร ; $\dfrac{W\,\text{(จากผลของการทดลอง สมการ(5.2.5.13))}}{W\,\text{(จากสมการที่ได้รับการปรับปรุงแล้ว สมการ(6.1.13))}} = 0.90$

ถั่วเขียว ; $\dfrac{W\,\text{(จากผลของการทดลอง สมการ(5.2.5.14))}}{W\,\text{(จากสมการที่ได้รับการปรับปรุงแล้ว สมการ(6.1.13))}} = 1.05$

โดย k ของข้าวสาร = 1.72 และ k ของถั่วเขียว = 1.04