บรรณานุกรม

ภาษาไทย

ตุ้ย ชุมสาย, ม.ล. สถิติศาสตร์และวิจัย, พิมพ์ครั้งที่สอง แก้ไขและเพิ่มเติม. ม.ป.พ., ๒๔๙๙.

อุทัย เดชตานนท์. "การศึกษาความสูญเปล่าทางการศึกษาอันเนื่องมาจากวันลาของครูโรงเรียนรัฐบาล สังกัดกรมวิสามัญในจังหวัดพระนคร ธนบุรี ปีพุทธศักราช ๒๕๐๘". วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต แผนก-วิชาบริหารการศึกษา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, ๒๕๐๘. (อัดสำเนา)

ภาษาอังกฤษ

Adam, Jow Kennedy. Basic Statistical Concepts. New York: McGraw-Hill Book Company Inc., 1955.

Alder, Henry L. and Roessler, Edward B. Introduction to Probability and Statistics. Sanfrancisco: W.H. Freeman and Company, C 1964.

Anderson, R. Land Bancroft, T.A. Statistical Theory in Research New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., C 1952.

Armor, Sidney J. Introduction to Statistical Analysis and Inference. New York: John Wiley & Sons, Inc.,C.1966.

Backhouse, J.K. Statistics an Introduction to Test of Significance. London: Longmans, Green & Co. Ltd., 1969.

Blalock Habert M.: Social Statistics. New York:McGraw-Hill Book Company Inc., C.1967.

Burke, C.J. "A Brief Notes on One-Tailed Test", Psychological Bulletin, Vol.50, Jan-Nov., 1953.

Burke, C.J. and Lewis Don. "Further Discussion of the Use and Misuse of the Chi-Square Test", Psychological Bulletin. Vol. 46, May, 1950.

Burmingham, Richard Steven and May, Donald Centis. Handbook of Probability and Statistics with Table. Ohio: Handbook Publisher, Inc., 1953.

Chapman, Douglas G. "The Comparative Study of Several One-Sided Goodness of Fit Test", The Annals of Mathematics. Vol. 29, 1958.

Clark, Charles E., An Introduction to Statistics. New York: John Wiley & Sons Inc., 1959.

Clifford J.M. "Small Expectations", Biometrics. Vol.22, Nos 1-4, 1966.

Cochran William G. "The X^2 Goodness of Fit", The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 35, 1952.

Cornell, Francis G. The Essential of Educational Statistics. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1956.

Cramer, Harold. Mathematical Methods of Statistics. Princeton: University Press, 1946.

Croxton, Frederick E. and Cowden, Dudley J. Applied General Statistics. New Delhi: Prentice-Hall of India (Private) Ltd., 1964.

__________________. Practical Bussiness Statistics. 3d ed., .r Jersy: Englewood Cliffs, Prentice-Hall, Inc., 1960.

Dalen, Deobold B. Van. Understanding Educational Research: An Introduction. New York: McGraw-Hill Book Company, C 1966.

Dixon, Wilfred J. and Massey Frank J. Introduction to Statistics Analysis. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., C 1957.

Dornbusch, Sanford M. and Schmid, Calvin F. A Premier of Social Statistics. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1955.

Edward, C. Bryant. Statistical Analysis. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1960.

Edward, Allen L. Statistical Method for the Behavioral Science. New York: Holt Rinehart and Winston, C 1954.

______________. "On the Use and Misuse of the Chi-Square Test The Case of the 2 x 2 Contingency Table", Psychological Bulletin. Vol.46, Jan., 1950.

Fisher, R.A., Sir. Statistical Methods for Research Worker. New York: Hafner Publushing Company Inc., 1958.

Fisher, R.A., Sir. Contribution to Mathematical Statistics. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1950.

Fraser, Donald A.S. Statistics an Introduction. New York: Wiley & Sons, Inc., 1958.

Freeman, Linteu C., Elementary Applied Statistics. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1960.

Fvenlyn, Fix and Others. Probability and Statistics, ("The Harold Cramer Volume"), New York: John Wiley & Sons Inc., 1959.

Garrett, Henry E., Statistics in Psychology and Education. 5th ed., Bombay: Vakils, Felfer and Simons Private Ltd., C 1966.

Goulden, Cyril H. Methods of Statistical Analysis. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1958.

Guenther William G. Concepts of Statistical Inference. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., C 1965.

Guilford, J.P. Fundamental Statistics in Psychology and Education. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc.,C 1956.

Harkness, W.L. and Katy L. "Comparison the Power Functions for the Test of Independence in 2 x 2 Contingency Tables", The Annals of Mathematical Statistics. Vol. 35, 1964.

Hays, William L. Statistics. New York: Holt Rinehart and Winston, C 1963.

Hoel, Paul G. Introduction to Mathematical Statistics. 3d ed., New York: John Wiley & Sons, Inc., C 1962.

Huntberger, David V. Elements of Statistical Inference. Boston: Allyn and Bacon, Inc., C 1961.

Johnson, Palmer O. Statistical Methods in Research, New York: Princeton-Hall, Inc., C 1949.

Jones, Lyle V. "Test of Hypothesis: One Sided VS Two Sided Alternatives", Psychological Bulletine, Vol.49, Nos 1 - 6, 1952.

Kendall, Maurie G. The Advanced Theory of Statistics. London: Charles Criffin & Company Limited, 1952.

Kendall Mauric G. and Buckland, William P. A Dictionary of Statistical Terms. 2d ed., New York: Hafner Publishing Company, 1960.

Kenney, J.F. and Keeping, E.S. Mathematics of Statistics. New York: D. Van Nostrand Company, Inc., C 1951.

Kyburg, Henry E. Probability Theory, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1969.

Lancaster, H.O. The Chi-Squared Distribution. New York: John Wiley & Sons, Inc., C 1969.

Lehmann, F.L. Testing Statistical Hypothesis. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1959.

Li, Jerome C.R. Statistical Inference. Michigan: Edwards Brothers, Inc., C 1964.

Lingquist, E.F. Design and Analysis of Experiments in Psychology and Education. Boston: Houghton Miffin Company, 1953.

McCallough, Celeste and Atta, Van Loche. Statistical Concepts: A Program for Self-Intruction. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 19

McNemar, Quinn. Psychological Statistics. 3d ed., New York: John Wiley & Sons, Inc., 1966.

Mendenhall, William. Introduction to Probability and Statistics California: Wadworth Publishing Company, Inc., 1969.

Mill, Frederick C. Statistics Methods. 3d ed., New York: Henry Holt and Company, C 1955.

Mood, Alexander M. and Graybill, Franklin A.,Introduction to the Theory of Statistics. 2d ed., New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., C 1963.

Parzen, E. Manuel. Modern Probability Theory and Its Application. New York: John Wiley & Sons, Inc., C 1960.

Pastore, Nicholas. "Some Coments on the Use and Misuse of the Chi-Square Test", Psychological Bulletin. Vol.49,Jan, 1950.

Pearson, Frank A. and Benneth R. <u>Statistical Methods</u>. New York: John Wiley & Sons, Inc., C 1942.

Peter, Charles C. and Voorhis Walter R. Van. <u>Statistical Procedures and Their Mathematical Bases</u>. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1940.

Peter, Charles C. "Misuse of Chi-Square", <u>Psychological Bulletin</u>. Vol.49, Dec., 1949.

Phillips, Jenne S. and Thompson, Richard F. <u>Statistics for Nurse</u>. New York: The Mcmillan Company, 1967.

Rahman, N.A. <u>A Course in Theoretical Statistics</u>. London: Griffin, 1968.

Rickermers, Albert D. and Todd, Hollis W. <u>Statistics an Introduction</u>. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1967.

Scott, William A. and Wertheimer Michale. <u>Introduction to Psychological Research</u>. New York: John Wilely & Sons, Inc., 1964.

Siegel Sidney. <u>Non Parametric</u>. Tokyo: Kogakusha Company, Ltd., C 1956.

Snedecor, George W. and Cochran, William G. <u>Statistical Methods</u>. Iowa: The Iowa State University Press, C 1956.

Spiegel, Murray R. <u>Theory and Problems of Statistics: Schaum's Outline Series</u>. New York: Schaum Publishing Co. 1961.

Steel, Robert G.D. and Tornes, James H. Principles and Procedure of Statistics. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1960.

Tate, Mule Wesley. Statistics in Educational and Psychology. New York: Mcmillan Company, 1965.

Wadworth, George P. and Bryan Joseph G. Introduction to Probability and Random Variable. New York: McGraw-Hill Company, 1960.

Watson, G.S."Some Result in Chi-Square Goodness of Fit Test", Biometrics.Vol.15, Nos. 1-4, 1959.

Waugh, Albert E. Elements of Statistical Method. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1952.

Weatherburn, C.E. Mathematical Statistics : A First Course in. Cambridge: University Press, 1957.

Wert, James E. and Others. Statistical Methods in Educational and Psychological Research. New York: Appleton Century-Crofts, Inc., C 1964.

Wilks, S. Samuel. Mathematical Statistics. New York: John Wiley & Sons, Inc., C 1962.

Winer, B.J. Statistical Principles in Experimental Design. New York: McGraw-Hill Book Company, 1962.

Yamane, Taro. Statistics: An Introductory Analysis. New York: Harper & Rows, Publishers, 1964.

Yule, G. Vandy and Kendall M.G. *An Introduction to the Theory of Statistics*. 14th ed., London: Charles Griffin & Co. Ltd., 1950.

ภ า ค ผ น ว ก

ภาคผนวก ก.

การเปลี่ยนรูปฟังชั่นแบบจาโคเบียน

(Jacobian Transformation)

การเปลี่ยนตัวแปร X และ Y ให้อยู่ในรูปโพล่าร์โคออร์ดิเนต มีสูตรดังนี้

$$X = r\cos\theta \qquad (๑)$$

$$Y = r\sin\theta \qquad (๒)$$

จาก (๑) $dX = -r\sin\theta d\theta + \cos\theta dr$

และ (๒) $dY = r\cos\theta d\theta + \sin\theta dr$

ดังนั้นถ้าเป็นสมการ $X = f(u,v)$, $Y = f(u, v)$

จะเปลี่ยน XY โคออร์ดิเนต ไปเป็น uv โคออร์ดิเนต ก็คือ

$$\iint_A \phi(X,Y)\,dX\,dY = \int_G \phi\left[f(u,v), g(u,v)\right] \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv \qquad (๓)$$

ค่า $\partial(X,Y)/\partial(u,v)$ เรียกว่า Jacobian Transformation ซึ่งนิยามโดยดีเทอร์มิแนนท์ (Determinant)

$$\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

ดังนั้นในกรณีที่เป็นโพล่าร์โคออร์ดิเนต (Polar Coordinates)

$$\frac{\partial(X,Y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

จาก (๓)

$$\iint \phi(X,Y)\,dX\,dY = \iint \phi(\underset{x}{r\cos\theta}, \underset{y}{r\sin\theta})\,r\,dr\,d\theta$$

ภาคผนวก ข.

การแจกแจงแบบมัลติโนเมียล

(Multinomial Distribution)

การแจกแจงของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นได้ ๒ อย่าง เรียกว่า การแจกแจงแบบทวินาม (Binomial Distribution) แต่ถ้ามีเหตุการณ์เกิดขึ้นมากกว่า ๒ อย่างเรียกว่า การแจกแจงแบบมัลติโนเมียล (Multinomial Distribution) ซึ่งเป็นไปตามกฎต่อไปนี้

๑. การทดลองประกอบด้วย n ครั้งที่คล้ายคลึงกัน

๒. ผลของการทดลองแต่ละการทดลองอยู่ใน ๑ ช่องของ k ช่องหรือจำนวนชั้น

๓. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ปรากฏในการทดลองครั้งหนึ่ง ที่อยู่ในแต่ละช่องของ i คือ $p_i (i=1, 2, ---, k)$ และเป็นอย่างเดียวกันทุก ๆ การทดลอง นั่นคือ

$$p_1 + p_2 + - - - + p_k = 1$$

๔. แต่ละการทดลองเป็นอิสระต่อกัน

๕. จำนวนการทดลอง $n_i (i=1, 2, ---, k)$ ปรากฏผลในช่อง i และ $n_1 + n_2 + - - - + n_k = n$

พิจารณาจำนวนชั้น k ชั้น ที่เป็นอิสระต่อกันมีความน่าจะเป็นในแต่ละชั้นเป็น $p_1, p_2, - - -, p_k$ ถ้ามีสิ่งที่สังเกตได้ n สิ่งที่ได้มาอย่างสุ่มและเป็นอิสระต่อกันแล้ว ความน่าจะเป็นที่ n_1 จะอยู่ในช่อง ๑, n_2 ในช่อง ๒ จนถึง n_k ในช่อง k ที่ $n_1 + n_2 + - - - + n_k = n$ กำหนดโดย

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! --- n_k!} (p_1)^{n_1} (p_2)^{n_2} - - - (p_k)^{n_k}$$

ภาคผนวก ค.

โมเม้นต์ (Moment)

การแจกแจงของสถิติมิใช่มีแต่การแจกแจงที่เกี่ยวข้องกับมัชฌิมหรือความแปรปรวนเท่านั้น ยังมีลักษณะอื่น ๆ อีกที่เรียกกันว่า โมเม้นต์ (Moment) ของการกระจาย ซึ่งหมายถึงค่าความคาดหวังของตัวแปรที่มีกำลังต่าง ๆ กัน โมเม้นต์แรกรอบจุดกำเนิดของฟังก์ชั่น g(x) คือ[1]

$$E\left\{ g(x)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dF(x) \qquad (๑)$$

ถ้า $g(x) = x^r$ (r เป็นค่าจำนวนเต็มบวก); สมการ (๑) จะเป็นโมเม้นต์ที่ r รอบจุดกำเนิด V_r และ $E(x) = V_1 =$ มัชฌิม

ถ้า $g(x) = (x-V_1)^r$; สมการ (๑) จะเป็นโมเม้นต์ที่ r รอบมัชฌิม r นั่นคือ

$$V_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r\,dF(x) \qquad (๒)$$

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x-V_1)^r\,dF(x) \qquad (๓)$$

และ $\mu_0 = 1;\ \mu_1 = 0$ เมื่อ $r = 2$

$$\mu_2 = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - V_1)^2\,dF(x)$$

โดยการกระจาย $(x - V_1)^r$ จะได้ว่า

$$\mu_2 = V_2 - V_1^2$$
$$\mu_3 = V_3 - 3V_2V_1 - 2V_1^3$$
$$\mu_4 = V_4 - 4V_3V_1 + 6V_2V_1^2 - 3V_1^4$$

---

[1] J.K.Kenney and E.S. Keeping, Mathematics Statistics, (New Jersey: D. Van Nostran Company, Inc., 1951), pp.26-27.

และในรูปทั่ว ๆ ไป

$$\mu_r = v_r - \binom{r}{1} v_{r-1} v_1 + \binom{r}{2} v_{r-2} v_1^2 - \cdots + \cdots + (-1)^k \binom{r}{k} v_{r-k} v_1^k + \cdots + (-1)^{r-1}\left\{\binom{r}{r-1} - 1\right\} v_1^r$$

จากคำจำกัดความ

$$M_x(t) = E(e^{tx})$$

$$M_{x^2}(t) = E(e^{tx^2})$$

$$M_{x^2-a}(t) = E(e^{t(x^2-a)}) = e^{-ta} E(e^{tx^2}) = e^{-ta} M_{x^2}(t)$$

$$M_{\frac{x^2-a}{b}}(t) = E\left(e^{t\left(\frac{x^2-a}{b}\right)}\right) = E\left(e^{t/b\,(x^2-a)}\right)$$

$$= M_{x^2-a}(t/b) = e^{-ta} M_{x^2}(t/b)$$

$$\left(e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$

โม้เม้นต์เจนเนอร์เรติงฟังก์ชั่น (Moment Generating Function)

โมเม้นต์เจนเนอร์เรติงฟังก์ชั่นคือ ค่าความคาดหวังของฟังก์ชั่นของตัวแปร x ใด ๆ ในรูป

$$E(e^{tx})$$

โมเม้นต์เจนเนอร์เรติง $g(x)$ กำหนดด้วย

$$M_{g(x)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tg(x)} f(x)\,dx$$

คุณสมบัติ[1]

๑. ถ้า c เป็นค่าคงที่ และ $h(x)$ เป็นฟังก์ชั่นของ x

---

[1] Paul G. Hoel, Introduction to Mathematical Statistics, 3d ed., (New York: John Wiley & Sons, Inc., C 1962), p.96.

$$M_{ch}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tch(x)} f(x)\,dx$$

$$= M_h(tc)$$

๒. ถ้า $g(x) = h(x) + c$ แล้ว

$$M_{h+c}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t[h(x)+c]} f(x)\,dx$$

$$= e^{tc} \int_{-\infty}^{\infty} e^{th(x)} f(x)\,dx$$

$$= e^{tc} M_h(t)$$

โมเม้นต์เจนเนอร์เรติงกับการแจกแจงไคสแควร์

ผลบวกกำลังสองของตัวแปรอิสระ n ตัวที่มีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ จะมีโมเม้นต์เจนเนอร์เรติงฟังก์ชั่นเท่ากับ $(1 - 2t)^{-n/2}$ และมีการแจกแจงเป็นไคสแควร์ (χ_n^2)

สมมุติให้ $Y = \Sigma x_i^2$; x_i แต่ละตัวมีการแจกแจงเป็นโค้งปกติและเป็นอิสระจากกันแล้ว

$$E(e^{Yt}) = \Pi E(e^{x_i^2 t}) = \left[E(e^{x^2 t}) \right]^n$$

แต่ $$E(e^{x^2 t}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2 t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x^2/2)}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{-(x^2/2)(1-2t)}\,dx$$

[1]Adams, Joe Kennedy, Basic Statistical Concepts. (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1955), p.250.

ให้ $W = X(1-2t)^{\frac{1}{2}}$ แล้ว

$$\frac{dx}{dW} = (1-2t)^{-\frac{1}{2}}$$

และ $$E(e^{x^2t}) = \frac{(1-2t)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(W^2/2)}\, dW$$

$$= (1-2t)^{-\frac{1}{2}}$$

เพราะว่า[1] $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2k}\, dt = (2\pi k)^{1/2}$$

ดังนั้น $$E(e^{Yt}) = \left[E(e^{x^2t})\right]^n = (1-2t)^{-n/2}$$

โมเม้นต์เจนเนอร์เรติงฟังก์ชั่นกับการแจกแจงแบบโค้งปกติ[2]

ในรูปของตัวแปรมาตรฐาน z ฟังก์ชั่นของความถี่ของโค้งปกติ คือ

$$f(Z) = (2\pi)^{-1/2} e^{-Z^2/2}$$

ดังนั้นโมเม้นต์เจนเนอร์เรติงฟังก์ชั่น คือ

$$M(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tZ} e^{-Z^2/2}\, dZ$$

---

[1] J.F. Kenney and E.S. Keeping, Mathematics of Statistics, (New Jersy: D. Van Nostrand Company, Inc., 1951), p.58.

[2] Ibid., p.74.

ถ้ากำหนดให้ $u = Z - t$; $du = dZ$ ดังนั้น

$$M(t) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t(u+t)}\, e^{-(u+t)^2/2}\, du$$

$$= (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t(u+t)}\, e^{-(u^2+2ut+t^2)/2}\, du$$

$$= (2\pi)^{-1/2}\, e^{t^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2}\, du$$

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2}\, du = (2\pi)^{1/2}\right]^{๑} = (2\pi)^{-1/2}\, e^{t^2/2}\, (2\pi)^{1/2} = e^{t^2/2}$$

เพราะฉะนั้นโมเม้นต์เจนเนอร์เรติงฟังก์ชั่นของการแจกแจงแบบโค้งปกติ คือ $e^{t^2/2}$ สำหรับทุกค่าของ t สามารถกระจายได้

$$M(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2^2\,2!} + \frac{t^6}{2^3\,3!} + \cdots$$

๑ภาคผนวก ง. หน้า ๑๓๑.

ภาคผนวก ง.

แกมมาฟังก์ชั่น (Gamma Function)

แกมมาฟังก์ชั่นเป็นฟังก์ชั่นที่ต่อเนื่อง ใช้สัญลักษณ์ Γ และ

$$\Gamma(n) = x^{n-1} e^{-x} dx \quad (n = \text{ค่าจำนวนเต็มบวก})$$

เรียกว่าแกมมาฟังก์ชั่น ที่มี n เป็นพารามิเตอร์ ถ้าอินทิเกรด (Integrate) จะได้

$$\Gamma(n) = -\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \qquad (๑)$$

$$= -\left[x^{n-1} e^{-x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x}(n-1)x^{n-2} dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-2} dx$$

$$= (n-1)\Gamma(n-1)$$

ถ้าอินทิเกรด (๑) ไปเรื่อย ๆ จะได้

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2) - - - 2.1.\Gamma(1)$$

และ

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx$$

$$= \left[-e^{-x}\right]_0^{\infty} = 1$$

ถ้ากำหนดให้ $x = Y^2$;

$$\Gamma(n) = 2\int_0^{\infty} Y^{2n-1} e^{-Y^2} dY$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\infty} e^{-Y^2} dY \qquad (๒)$$

แต่ (๒) เป็นค่าตัวแปรที่เป็นอิสระ ดังนั้น

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\infty} e^{-X^2} dX$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4\int_0^{\infty} e^{-X^2} dX \int_0^{\infty} e^{-Y^2} dY$$

$$= 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(X^2+Y^2)} dX\,dY$$

จากภาคผนวก ก. จะได้

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} d\theta = \pi$$

ดังนั้น $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = (\pi)^{\frac{1}{2}}$

และในรูปทั่ว ๆ ไป[1] $\int_0^{\infty} e^{-t^2/2k} dt = \frac{1}{2}(2\pi k)^{\frac{1}{2}}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2k} dt = (2\pi k)^{1/2}$$

---

[1] J.F. Kenney and E.S. Keeping, Mathematics of Statistics, (New Jersy: D.Van Nostrans Company, Inc., 1951), pp.56-58.

ดังนั้นสำหรับ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{1.3.5 - - - .(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n}$$

และถ้า n เป็นเลขคู่ แล้ว

$$\Gamma\frac{(n+1)}{2} = \frac{1.3.5. - - - .(n-1)\sqrt{\pi}}{2^{n/2}}$$

ฟังก์ชั่นการแจกแจงที่อยู่ในรูปของตัวแปรอิสระกำลังสอง และมีการแจกแจงเป็นโค้งปกติจะเรียกว่า การแจกแจงแบบแกมมา (Gamma Distribution) เมื่อ $\mu > 0$ จะความน่าจะเป็น

$$f(x) = \frac{x^{\mu-1} e^{-x}}{\Gamma(\mu)}$$

ใช้สัญลักษณ์ว่า $\Gamma(\mu)$ แทนความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบแกมมา ซึ่งบางครั้งจะเรียกว่าการแจกแจงชนิดที่สามของเปียร์สัน (Pearson Type III Distribution) และมีโมเม้นต์ r เท่ากับ

$$\mu_r = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty} x^{\mu+r-1} e^{-x}\, dx$$

$$= \frac{\Gamma(\mu+r)}{\Gamma(\mu)}$$

ซึ่งนิยามให้ $E(x) = \mu$, $\sigma^2(x) = \mu$

เป็นค่ามัชฌิมและค่าความแปรปรวนของการแจกแจงแบบแกมมา[1]

<u>คุณสมบัติการบวกของตัวแปรแกมมา</u>[2]

ผลบวกของตัวแปรแกมมาที่อิสระ ๒ ตัวที่มีพารามิเตอร์ l และ m จะเท่ากับตัวแปรแกมมาที่มีพารามิเตอร์ l + m

---

[1] Samuel S. Wilks, Mathematical Statistics, (New York: John Wiley & Sons, Inc., C 1962), p.171.

[2] C.E. Weatherburn, Mathematical Statistics: A First Course in (Cambridge: University Press, 1952), p.151.

ภาคผนวก จ.

ค่าของ χ^2 ที่ระดับความมีนัยสำคัญต่าง ๆ

เมื่อจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระมากกว่า ๓๐ การแจกแจงของไคสแควร์จะมีค่าโดยประมาณเป็นโค้งปกติ จึงอาศัยตารางในภาคผนวก ฉ. ได้ คือ $z = \sqrt{2X^2} - \sqrt{2df}$ หรือ $z = \sqrt{2X^2} - \sqrt{2df-1}$

จำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระ	ความน่าจะเป็น												
	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005
1	.0000393	.000157	.000982	.00393	.0158	.102	.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.0100	.0201	.0506	.103	.211	.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	.0717	.115	.216	.352	.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	.207	.297	.484	.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	.412	.554	.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	.676	.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.39	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.5

ภาคผนวก ฉ.

ตารางพื้นที่ใต้โค้งการแจกแจงปกติ

x หรือ	ทศนิยมตำแหน่งที่ 2 ของ z									
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998

ประวัติการศึกษา

นางสาว สำนวน มณีเรือง ได้รับปริญญาตรีการศึกษาจากวิทยาลัยวิชาการศึกษา เมื่อปีพุทธศักราช ๒๕๑๓ ปัจจุบันเป็นนิสิตปริญญาโท แผนกวิชาวิจัยการศึกษา บัณฑิต-วิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย