บทที่ ๓

การสังเคราะห์และผลการสังเคราะห์ข้อมูล

๑. ประวัติและพัฒนาการของไคสแควร์

โคแครน (William G. Cochran) กล่าวว่า ไค (Chi) เป็นคำที่มาจากอักษรกรีก (χ) แรกทีเดียวไม่ได้เรียกว่าไคสแควร์[1] เพราะในปีคริสตศักราช ๑๘๗๖ เฮลเมอรท (Robert Fricdrich Helmert) ชาวเยอรมันได้ค้นพบการแจกแจงที่เป็นโค้งปกติและเรียกว่า การแจกแจงแบบเฮลเมอร์ท (Helmert's Distribution) ดังนี้[2]

สมมุติว่า $x_1, x_2, ---, x_n$ เป็นกลุ่มที่ได้จากการสังเกต (Observation) ที่อิสระจากการแจกแจงปกติ (Normal Population) ที่มีมัชฌิม (Mean) เท่ากับ μ และค่าความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 แล้ว การแจกแจงความน่าจะเป็น (Probability Distribution) ของ x_i ใด ๆ คือ

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x_i-\mu)^2/2\sigma^2} dx_i \quad \text{ซึ่ง} \quad -\infty < x_i < \infty$$
$$\text{และ} \quad 0 < \sigma < \infty$$

ถ้าเราแปลง x_i ให้เป็นค่ามาตรฐาน $z_i = (x_i-\mu)/\sigma$ แล้ว z_i แต่ละตัวจะเป็นหน่วยที่เป็นอิสระที่มีการแจกแจงความน่าจะเป็น

---

[1] William G. Cochran, " χ^2 Test of Goodness of Fit", The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 23, (1952), p.316.

[2] N.A. Rahman, A Course in Theoretical Statistics, (London: Griffin, 1968), pp. 375 - 77.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z_i^2} dZ_i \quad \text{สำหรับ} \quad -\infty < Z_i < \infty$$

การแจกแจงนี้เป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นโค้งปกติ และเขาก็หยุดงานไว้เพียงนี้ การกระจายที่เฮลเมอร์ท์ค้นพบนี้ได้ถูกละเลยเป็นเวลา ๒๐ ปีเศษ

ต่อมาในปีคริสตศักราช ๑๙๐๐ เปียร์สัน (Karl Pearson) ได้ค้นพบใหม่และผลงานชิ้นนี้นับว่าเป็นรากฐานสำหรับสถิติแผนใหม่ เขาเริ่มจากการพิสูจน์ว่าถ้ากลุ่มของตัวแปรที่สัมพันธ์กัน Z_i (Correlated Variates) n ตัว ที่มีมัชฌิมเท่ากับศูนย์ มีการแจกแจงที่มีเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นมีจำนวนมากกว่า ๒ และมีการแจกแจงความน่าจะเป็นเป็น

$$dF = (2\pi)^{-\frac{1}{2}n} \exp(\tfrac{1}{2}Q)\, dZ_1 dZ_2 \cdots dZ_n$$

แล้ว กำลังสองของ Q นี้เขาให้ชื่อว่าเป็นการแจกแจง χ^2 ที่มีจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระ n การพิสูจน์ใช้วิธีทางเรขาคณิตดังนี้[2]

ถ้า x เป็นค่าใด ๆ ที่เบี่ยงเบนจาก มัชฌิมประชากรที่มีการแจกแจงเป็นโค้งปกติแล้ว

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_x^2} = \sum_{i=1}^{n} (z_i^2)$$

โดยที่ x อาจเป็นมาตรการเดี่ยว (Single Measure) เป็นมัชฌิมของกลุ่มตัวอย่าง เป็นสัดส่วนหรือเป็นค่าสถิติอื่น ๆ ที่มีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ

---

[1] Charles C. Peter and Walter Van Voorhis, Procedures and Their Mathematical Bases, (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1940), pp.404-24.

[2] Rahman, op.cit., p.376.

สมมุติว่าพิจารณาค่าของ x หนึ่งค่าในแต่ละครั้ง ค่าของ χ^2 แต่ละค่าก็จะเป็น x^2/σ^2_x เหมือนกัน และถ้าเขียน z_1^2 แทน x^2/σ^2_x ความน่าจะเป็น ของค่า z_1 หนึ่งค่าที่จะอยู่ในพิสัย (range) dZ_1 จะเป็น

$$dF = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z_1^2}{2}} dZ_1$$

โอกาสที่จะเป็นไปได้ของการได้ค่า χ เท่ากับหรือมากกว่าระดับความมีนัยสำคัญ จะเป็นการหาความน่าจะเป็นของฟังก์ชั่นการแจกแจงโค้งปกติ เป็น

$$P = \int_{Z_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z_1^2}{2}} dZ_1$$

ค่านี้เราอาจหาได้จากตารางพื้นที่ใต้โค้งปกติ ภาคผนวก ฉ.

ถ้าต้องการหาค่าของ χ ๒ ค่าที่เป็นอิสระต่อกันพร้อมกัน ความน่าจะเป็น ที่ตัวแปรสองตัวนี้จะปรากฏพร้อมกันในพื้นที่ที่เพิ่มขึ้น (Elemental Area) $dZ_1 dZ_2$ ก็คือผลคูณของความน่าจะเป็นของแต่ละกลุ่มตัวอย่าง

$$dF = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z_1^2}{2}} dZ_1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z_1^2}{2}} dZ_2\right)$$

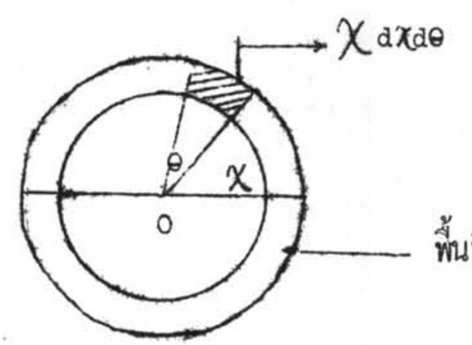
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 e^{-\frac{1}{2}(z_1^2+z_2^2)} dZ_1 dZ_2$$

และความน่าจะเป็นของการได้ค่า χ ในกลุ่มตัวอย่าง ที่เท่ากับหรือมากกว่าสองค่านี้คือ

$$\text{(A)} \qquad P = \int_{Z_1}^{\infty}\int_{Z_2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 e^{-\frac{1}{2}(z_1^2+z_2^2)} dZ_1 dZ_2$$

พิจารณาถ้า $\chi^2 = z_1^2 + z_2^2$ และต้องการคำนวณหาความน่าจะเป็น จะได้ค่าของ

χ^2 ที่คล้ายคลึงกัน ถึงแม้ว่า z_1 และ z_2 อาจแปรไปจากกลุ่มตัวอย่างหนึ่งไปอีกกลุ่มหนึ่ง และสมการนี้จะเป็นสมการวงกลม มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด และรัศมีเท่ากับ χ ดังนั้น พื้นที่ใด ๆที่แทนความน่าจะเป็นร่วม (Joint Probability) อาจเป็นตำแหน่งใด ๆ ในเขตวงกลมนี้ การหาพื้นที่ (Double Integral) จำเป็นต้องเปลี่ยนให้เป็น โพล่าร์ โคออร์ดิเนต (Polar Coordinate) เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณ



รูปที่ ๑ แสดงพื้นที่ที่เพิ่มเมื่อรัศมีเพิ่ม

ดังนั้นพื้นที่แรก (Elemental Area) ในรูปโพลาร์โคออร์ดิเนตจะเป็น $\chi d\chi d\theta$[๑] และถ้าแทนที่ $z_1^2 + z_2^2$ ด้วย χ^2 จะได้

$$dF = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \chi d\chi d\theta$$

ถ้าต้องการหาความน่าจะเป็น ทั้งหมดของ χ ภายในวงกลมจะต้องอินทิเกรท (Integrate) ประพจน์ (Expression) ข้างต้นเทียบกับมุม θ จาก 0 ถึง 2π มี $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\chi e^{-\frac{1}{2}\chi^2} d\chi$ เป็นค่าคงที่ เพราะฉะนั้น

---

[๑] ดูภาคผนวก ก. หน้า ๑๒๔

$$dF = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \chi\, e^{-\frac{1}{2}\chi^2}\, d\chi \Big[\theta\Big]_0^{2\pi}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \chi\, e^{-\frac{\chi^2}{2}}\, d\chi (2\pi)$$

(B) $$= \chi e^{-\frac{\chi^2}{2}}\, d\chi$$

พิจารณา Probability density Function ของ χ^2

ให้ $g(x) = x^2$ และ $Y = \chi^2 = X^2$

$$F_{X^2}(y) = 0 \qquad \text{สำหรับ} \quad y < 0 \qquad (๑)$$

เมื่อ $y \geqslant 0$

$$F_{X^2}(y) = P\left[X^2 \leqslant y\right] = P\left[-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}\right]$$

$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) + p_X(-\sqrt{y}) \qquad (๒)$$

จาก (๑) ถ้า X เป็น Probability Density Function $f_X(.)$แล้ว ฟังก์ชั่นการแจกแจง $F_{X^2}(\cdot)$ ของ X^2 การประเมินค่าของ $f_{X^2}(y)$ ที่ y เป็นเลขจำนวนจริง ๑ ค่า โดยการดิฟเฟอเรนชิเอท(Differentiate) (๑) และ (๒) เทียบกับ y จะได้

$$f_{X^2}(y) = \left[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right] \frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad \text{สำหรับ } y > 0 \quad (๓)$$
$$= 0 \qquad \text{สำหรับ } y < 0$$

การดิฟเฟอเรนชิเอท ฟังก์ชั่นของฟังก์ชั่น (Chain rule)

$$\frac{d}{dy} F_X(\sqrt{y}) = \lim_{h\to 0} \frac{F_X(\sqrt{y+h}) - F_X(\sqrt{y})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{F_X(\sqrt{y+h}) - F_X(\sqrt{y})}{\sqrt{y+h} - \sqrt{y}} \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{y+h} - \sqrt{y}}{h}$$

$$= F_{X}'(\sqrt{y}) \frac{d}{dy} \sqrt{y}$$

ถ้า X เป็นจำนวนเต็ม (Discrete) X^2 จะเป็นจำนวนเต็มด้วย ดังนั้นฟังก์ชั่นการแจกแจง $F_{X^2}(.)$ ทั้งหมดในรูปของผลบวก Probability Density Probability ของ X^2 สำหรับ y ที่เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ กำหนดด้วย

$$P_{X^2}(y) = p_X(\sqrt{y})+p_X(-\sqrt{y}) \qquad \text{สำหรับ } y \geqslant 0$$

จากสูตร (B) กำลังของ χ ใน (B) นั้นน้อยกว่าตัวแปรอยู่ ๑ เสมอ ถ้าดำเนินวิธีการเดียวกันสำหรับตัวแปร ๓ ตัว จะได้

$$dF = k\,\chi^2 e^{-\frac{1}{2}\chi^2}\,d\chi$$

ซึ่งมี k เป็นค่าคงที่ และกำลังของ χ นั้นเป็น ๒ เมื่อจำนวนตัวแปรที่เป็นอิสระมากกว่า ๓ ถึง n จะกำหนดสมการ[๑]

$$\chi^2 = Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+ - - - +Z_n^2$$

และมีความน่าจะเป็นในทรงตัน

$$dF = k\,\chi^{n-1} e^{-\chi^2/2}\,d\chi$$

เมื่อ k เป็นค่าคงที่เท่ากับ

---

[๑]Charles C. Peter and Walter Van Voorhis, Procedures and Their Mathematical Bases, (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1940), p.424.

$$\frac{1}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!\ 2^{(n/2)}}$$

หรือ

$$df = \frac{1(\chi^2)^{(n/2-1)}}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!\ 2^{(n/2)}}\ e^{-\chi^2/2}$$

หลังจากนี้เปียร์สัน (Karl Pearson) ได้เสนอการทดสอบสภาวะสารูปสนิทดี ที่ข้อมูลจัดแยกออกจากกันโดยเริ่มจากการทราบความถี่ที่คาดหวัง m_i ล่วงหน้า และ x_i ใด ๆ ที่ได้จากการสังเกตจะมีการแจกแจงแบบมัลติโนเมียล[๑] (Multinomial Distribution) เปียร์สันยอมรับว่า x_i นั้นอาจมีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ ณ ตรงจุดนี้เขายอมรับว่าค่า E_i นั้นใหญ่พอ ในทุก ๆ ช่อง ผลงานตอนแรกของเปียร์สันทำให้ทราบว่าตัวอย่างมีขนาดใหญ่ x^2 จะมีการแจกแจงแบบ χ^2 df = k-1

ฟิชเชอร์ (R.A.Fisher) ได้หลีกเลี่ยงความยุ่งยากในงานของเปียร์สัน โดยชี้ให้เห็นว่าถ้ายอมรับว่าสิ่งที่สังเกตได้ x_i มีการแจกแจงแบบพัวซอง (Poisson Distribution)

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{e^{-m_i}\ m_i^{x_i}}{x_i!} = e^{-n} \prod_{i=1}^{k} \frac{m_i^{x_i}}{x_i!}\ ;\ \varepsilon m_i = n$$

มี m_i เป็นความถี่ที่คาดหวังหรือมัชฌิม และเมื่อขนาดของกลุ่มตัวอย่าง n ใหญ่มาก

$$Y_i = \frac{x_i - m_i}{\sqrt{m_i}}$$

จะมีการแจกแจงโค้งปกติ และการแจกแจงแบบพัวซอง มีมัชฌิม m_i และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ $\sqrt{m_i}$ ดังนั้นการแจกแจง X^2 คือ $Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_k^2$; Y_i มีการแจกแจงอย่างอิสระ แต่มีเงื่อนไขว่า

---

[๑] ดูภาคผนวก ข. หน้า ๑๒๕.

$$\sum_{i=1}^{k} Y_i \sqrt{m_i} = \sum_{i=1}^{k} (x_i - m) = 0$$

เปียร์สันยังคิดถึงกรณีที่ m_i ขึ้นอยู่กับตัวพารามิเตอร์ที่ประมาณจากกลุ่มตัวอย่าง ค่าความถี่ที่คาดหวัง m_i' ที่ได้จากกลุ่มตัวอย่าง มีความแตกต่าง

$$X^2 - X'^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^2}{m_i} - \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^2}{m_i'}$$

ที่มีค่าเป็นบวก เมื่อเราสามารถปรับการประมาณค่าพารามิเตอร์ให้เหมาะกับกลุ่มตัวอย่างชนิดต่าง ๆ ค่าความแตกต่างนี้จะมีค่าบวกที่น้อยมาก และจะนับ X'^2 มีการแจกแจงเหมือน χ^2 ที่มี $df = k-1$

๒. การแจกแจงของไคสแควร์

การแจกแจงที่แท้จริงของ χ^2 นั้นเป็นการแจกแจงที่ต่อเนื่อง (Continuous) แต่เมื่อนำไปใช้นั้นใช้กับการแจกแจงของข้อมูลที่ไม่ต่อเนื่อง เป็นความถี่ คุณภาพ ทำให้โค้งขาดตอนซึ่งก็ถือว่ามีการแจกแจงแบบไคสแควร์ การกระจายของไคสแควร์นั้นขึ้นอยู่กับจำนวนชั้น แห่งความเป็นอิสระ ถ้าจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระมากก็จะมีการแจกแจงที่เบ้น้อย

สมการส่วนโค้งการกระจายของไคสแควร์เป็นดังนี้[1]

$$Y = \frac{1}{[(n-2)/2]!\, 2^{n/2}} (\chi^2)^{\frac{n-2}{2}} e^{-\chi^2/2} \qquad (๒)$$

n คือจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระ

[1] Quinn McNemar, Psychological Statistics, (New York:John Wiley & Sons, Inc., 1949), pp.194-95.

เนื่องจากความโค้งของการกระจาย ขึ้นอยู่กับจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระ การกระจายของไคสแควร์จึงแตกต่างกันไปตามจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระ แต่เท่าที่ปรากฏนั้นจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระยากที่จะเกิดในการปฏิบัติจริง ดังนั้นเราจะเกี่ยวข้องกับการกระจายที่เป็นไปได้เท่านั้น

ส่วนโค้งการกระจายของไคสแควร์นั้นวาดให้เกิดขึ้นตามชนิดของจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระมีค่าของไคสแควร์จะเป็นแอบซิสซา (Absisca) และออร์ดิเนต Y (Ordinate) จะเท่ากับ (สมการ ๒)

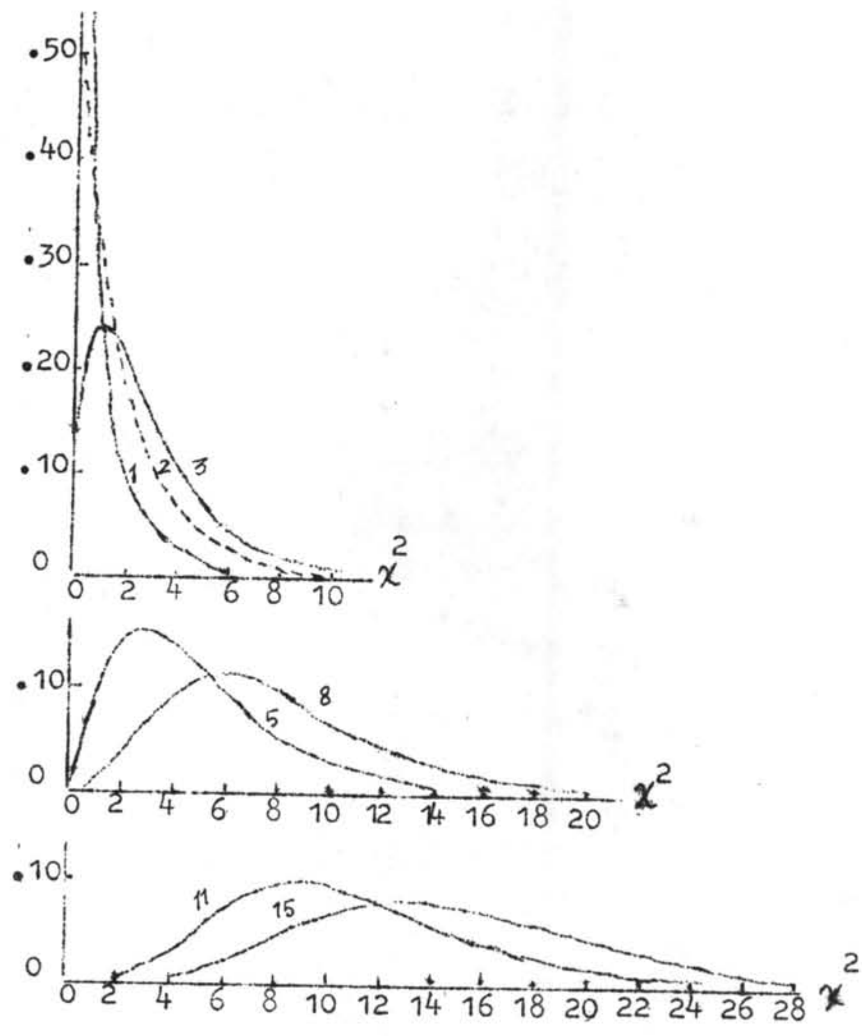
เมื่อจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ ๑ ส่วนโค้งจะเริ่มจากส่วนสูงสุดค่อย ๆ ลาดเข้าหาออร์ดิเนต (Ordinate) ลดลงไปเรื่อย ๆ จนถึงค่าอนันต์ (Infinity) ความสูงของ Y ที่ $\chi^2=$ ๑.๒ จะเท่ากับ .๙๒ และที่ $\chi^2=$.๐๑ ค่าของ Y จะมากกว่า ๔ เท่าของ .๙๒ และถ้าค่าของ $\chi^2=$ ๑.๐๐ แล้วความสูงจะมีค่า = .๒๔๒

ส่วนโค้งเมื่อลาดต่ำมาถึง $\chi^2=$ ๖.๒๕ ความสูงจะประมาณ .๐๐๗ โดยไม่คำนึงถึงจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระ และส่วนโค้งทางด้านขวามือนั้นจะลาดสู่แกน x เรื่อย ๆ แต่ไม่ตัดแกน x ถ้าเราให้พื้นที่ใต้โค้งมีค่าเท่ากับหนึ่งแล้ว พื้นที่ระหว่างออร์ดิเนตกับแอบซิสซา ๒ จุดนั้น สามารถคำนวณออกมาเป็นสัดส่วนได้ เช่น เมื่อ จำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ ๑. .๙๙ ของพื้นที่จะมากกว่าค่าของไคสแควร์ที่เท่ากับ .๐๐๐๑๕๗ และ .๐๕ ของพื้นที่เท่านั้นที่มากกว่า ๓.๘๔ หรืออาจกล่าวได้ว่าความน่าจะเป็นที่ค่าของ χ^2 จะมากกว่า ๓.๘๔ นั้นเท่ากับ .๐๕ ถ้าค่า $\chi^2=$ ๖.๖๓ ความน่าจะเป็น จะ เท่ากับ .๐๑ และความน่าจะเป็นเท่ากับ .๐๐๑ ที่ $\chi^2=$ ๑๐.๘๒๗ สำหรับจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ ๑

และเมื่อ จำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ ๒ ส่วนโค้งจะเริ่มจากความสูง .๕๐ และค่อย ๆ ลดต่ำลงด้วยความชันที่น้อยกว่าส่วนโค้งที่มีจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ ๑ และค่าของ ไคสแควร์ จะปรากฏขึ้นบ่อยครั้ง

สำหรับจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ ๓ การกระจายของส่วนโค้งเริ่มต้นจากความสูงเท่ากับศูนย์ และมีความสูงอยู่ที่ค่า $\chi^2=$ ๑ จากนั้นส่วนโค้งจะลาดต่ำลงมา

เมื่อ จำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระมีจำนวนมากขึ้น ส่วนโค้งจะเบ้น้อยและจะมามีตำแหน่งทางขวามากขึ้น ๆ จนกระทั่งเป็นรูปใกล้เคียงกับโค้งปกติ



รูปที่ ๒ แสดงการแจกแจง χ^2 ที่ df. ต่าง ๆ กัน

ทฤษฎีบทที่ ๑ ถ้า $\chi_1^2, \chi_2^2, ---, \chi_k^2$ คำนวณจากข้อมูลเดียวกันและเป็นอิสระต่อกัน จำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระ $n_1, n_2, ---, n_k$ แล้วผลรวมของไคสแควร์จะมีการกระจายเป็นไคสแควร์ และจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ $n_1 + n_2 + --- + n_k$ และส่วนกลับของมันก็เป็นจริงด้วย

พิสูจน์ จากโมเม้นต์เจนเนอร์เรติงฟังก์ชั่น[๑]

$$M\chi^2(t) = M\chi_1^2(t)\, M\chi_2^2(t) --- M\chi_k^2(t)$$
$$= (1-2t)^{-n_1/2}(1-2t)^{-n_2/2}---(1-2t)^{-n_k/2}$$
$$= (1-2t)^{-(n_1+n_2+---+n_k)/2}$$

ซึ่งคือโมเมนต์ฟังก์ชั่นสำหรับไคสแควร์ที่มีจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ $n_1 + n_2 + --- + n_k$

หรือ

จากแกมมาฟังก์ชั่นเราได้ว่า[๒]

$\frac{1}{2}\chi_1^2, \frac{1}{2}\chi_2^2, --- \frac{1}{2}\chi_k^2$ เป็นตัวแปรแกมมาที่เป็นอิสระและมีพารามิเตอร์เป็น $\frac{1}{2}n_1, \frac{1}{2}n_2, --- \frac{1}{2}n_k$

ดังนั้นตามทฤษฎีผลบวกของแกมมาฟังก์ชั่น

$\frac{1}{2}(\chi_1^2 + \chi_2^2 + --- + \chi_k^2)$ เป็นตัวแปรแกมมา (Gamma Variate) ที่มีพารามิเตอร์ $\frac{1}{2}(n_1 + n_2 + --- + n_k)$

เพราะฉะนั้น $\chi_1^2 + \chi_2^2 + --- + \chi_k^2$ มีการแจกแจงเป็นไคสแควร์ที่มีจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระ $n_1 + n_2 + --- + n_k$

---

[๑]ดูภาคผนวก ค. หน้า ๑๒๖.

[๒]ดูภาคผนวก ง. หน้า ๑๓๑.

ทฤษฎีบทที่ ๒ ก. ถ้า x มีการแจกแจงเป็นไคสแควร์และจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ n แล้ว มัชฌิมจะเท่ากับ n $(E(x) = n)$[1]

พิสูจน์ เพราะว่า $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi f_x(\chi)\, d\chi$

$$= \int_0^{\infty} Y \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} Y^{(n/2-1)} e^{-Y/2}\, dY$$

$Y^{n/2}$

กำหนดให้ $Y/2 = Z$; $dY = 2dZ$; แล้ว

$$E(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} 2^{n/2} \cdot \int_0^{\infty} Z^{[(n/2)+1]-1} e^{-Z}\, 2dZ$$

แต่ $\int_0^{\infty} \chi^{p-1} e^{-\chi}\, d\chi = \Gamma(P)$

เพราะฉะนั้น $E(x) = \frac{2\Gamma[(n/2)+1]}{\Gamma(n/2)} = \frac{2(n/2+1-1)\Gamma(n/2)}{\Gamma(n/2)}$

$$= 2 \cdot \frac{n}{2} \qquad = n$$

ข. ถ้า x มีการแจกแจงเป็นไคสแควร์และจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ n แล้ว ค่าความแปรปรวนจะเท่ากับ 2n $(D^2(x)=2n)$[๒]

พิสูจน์ เพราะว่า $E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^2 f_x(\chi)\, d\chi$

$$= \int_0^{\infty} \frac{Y^2\, Y^{n/2-1}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} e^{-Y/2}\, dY$$

---

[1] Henry E.Kyburg, Probability Theory, (New Jersy:Prentic-Hall, Inc., 1969), p.153.

[2] Ibid., p.154.

กำหนดให้ $Y/2 = Z$; $dY = 2dZ$ แล้ว

$$E(x^2) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \cdot \frac{2^{(n/2)+1}}{} \cdot 2\int_0^{\infty} Z^{[(n/2)+2]-1} e^{-Z}\, dZ$$

$$= \frac{4\Gamma[(n/2)+2]}{\Gamma(n/2)}$$

$$= \frac{4(n/2+1)\{\Gamma(n/2)+1\}}{\Gamma(n/2)}$$

$$= \frac{4(n/2+1)(n/2+1-1)\Gamma(n/2)}{\Gamma(n/2)}$$

$$= 4(\frac{n^2}{4} + \frac{n}{2}) \quad = n^2 + 2n$$

แต่ $D^2(x) = n^2 + 2n - E(x)^2$; (ทฤษฎีบทที่ ๒ $E(x)=n$)

$$= 2n$$

ทฤษฎีบทที่ ๓ เมื่อจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระมีขนาด n ใหญ่ แล้ว $\sqrt{2\chi^2}$ จะมีการแจกแจงประมาณโค้งปกติ μ-$\sqrt{2n}$ และความแปรปรวนเท่ากับ ๑

พิสูจน์ จากภาคผนวก ค, โมเม้นต์เจนเนอร์เรติงฟังชั่นของ χ^2 คือ $(1-2t)^{-n/2}$ และโมเมนต์เจนเนอร์เรติงฟังชั่นค่ามาตรฐานของ $(\chi^2-n)/\sqrt{2n}$ เป็นดังนี้[1]

$$M_{(\chi^2-n)/\sqrt{2n}}(t) = E(e^{t(\chi^2-n)/\sqrt{2n}})$$

$$= E(e^{t/\sqrt{2n}(\chi^2-n)})$$

---

[1] I.F.Kenney and E.S.Keeping, Mathematic of Statistics, (2nd ed, New Jersy: D Van Nostrand Company, Inc., c1951), p.99.

$$= M_{\chi^2 - n}(t/\sqrt{2n})$$
$$= e^{-tn} \quad M_{\chi^2}(t/\sqrt{2n})$$

ดังนั้น $e^{-tn/\sqrt{2n}}\left(1-\frac{2t}{\sqrt{2n}}\right)^{-n/2} = \left\{e^{t\sqrt{2/n}}\left(1-\sqrt{\frac{2}{n}}\,t\right)\right\}^{-n/2}$

ถ้ากระจาย $e^{t\sqrt{2/n}}$ จะได้

$$e^{t\sqrt{2/n}} = 1 + t\sqrt{2/n} + \frac{t^2}{2}\frac{2}{n} + \frac{t^3}{3}\left(\frac{2}{n}\right)^{3/2} + ---$$

และคูณกัน $(1-\sqrt{\frac{2}{n}}\,t)$ ได้ดังนี้

$$\left\{e^{t\sqrt{2/n}}\left(1-\sqrt{\frac{2}{n}}\,t\right)\right\}^{-n/2} = \left\{1-\frac{t^2}{n}-\left(\frac{2}{n}\right)^{3/2}\frac{t^3}{3}- ---\right\}^{-n/2} \dots (i)$$

เมื่อ n มีขนาดใหญ่ (มากกว่า ๓๐) สมการ (i) จะมีค่าเท่ากับ $e^{t^2/2}$ ซึ่งเป็นโมเม้นต์เจนเนอร์เรติงฟังก์ชั่นของการแจกแจงแบบโค้งปกติ

ดังนั้น $(\chi^2-n)/\sqrt{2n}$ จะมีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ มัชฌิมเท่ากับศูนย์และความแปรปรวนเท่ากับ ๑

๒.๑ คุณสมบัติของไคสแควร์[1]

๑. การกระจายของไคสแควร์ตามทฤษฎีเป็นการกระจายที่ต่อเนื่อง

๒. ความโค้งจะขยายจาก $0 \longrightarrow +\infty$

๓. ค่าออร์ดิเนต (Ordinate) สูงสุด (Mode) จะอยู่ที่ $\chi^2=n-1$ โดยที่ n คือจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระ

๔. ลักษณะของส่วนโค้งจะเบ้ไปทางขวามือ

๕. เป็นส่วนโค้งแบบเปียร์สันชนิดที่สาม (Pearson Type III Curve)

๖. จะเข้าใกล้โค้งปกติที่มีมัชฌิมเท่ากับ ๐ และความแปรปรวนเท่ากับ ๑ สำหรับจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ ๑ เมื่อจำนวนกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่ และเมื่อจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระมากกว่าหรือเท่ากับ ๓๐

๗. การกระจายเป็นไปตามกฎของการแจกแจงแบบมัลติโนเมียล (Multinomial Distribution)

---

[1] A.C. Rosander, Elementary Principles of Statistics, (New York: D.Van Nostrand Company, Inc., c1951), pp.480-82.

๓. จำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระ (Degree of Freedom)

จำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระ อาจหมายถึง จำนวนตัวแปร (Variates) ที่เป็นอิสระนี้เนื่องมาจากทางวิชาเรขาคณิตและเครื่องจักรกล[1] ใช้การกำหนดตำแหน่งของจุดหรือวัตถุด้วยจำนวนตัวแปรที่ทำหน้าที่อย่างเป็นอิสระ ที่เรียกว่า โคออร์ดิเนต (Coordinate) สำหรับแต่ละโคออร์ดิเนตที่เป็นอิสระจะสมนัย (Correspond) กับจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระและข้อบังคับใด ๆ ในวัตถุจะลดจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระลง ฉะนั้น ฟิชเชอร์ (R.A. Fisher) จึงนำมาใช้ในความหมายที่เป็นอิสระในการใส่จำนวนความถี่ที่เราคาดหวัง ถ้าจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระมากขึ้นค่าของไคสแควร์ก็มากขึ้นด้วย หลักในการกำหนดจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระมีดังนี้[2]

๑. เมื่อแต่ละมาตรการ (Each Measure) ในกลุ่มตัวอย่างที่เบี่ยงเบนไปจากมัชฌิมประชากร และมาตรการเหล่านี้เป็นอิสระ ในการคิดค่าใด ๆ ในกลุ่มตัวอย่างที่มี n มาตรการนี้ถือว่า มีจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระ คือ n

๒. ถ้าแต่ละค่าเบี่ยงเบนไปจากมัชฌิมของกลุ่มตัวอย่าง (Sample Mean) ที่มี n ค่า ก็อาจกำหนดมาตรการที่ n จากผลต่างของมาตรการทั้งหมด และมาตรการ n-1 จำนวน ฉะนั้นจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระจึงเหลือเพียง n-1

๓. ในระบบที่ผลรวมของแถวหรือสดมภ์ (Marginal Total) คงที่ จำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระคือ $(r - 1)(c - 1)$ เมื่อ r คือ จำนวนแถว และ c คือ จำนวนสดมภ์

๔. สำหรับข้อมูลที่จำเป็นต้องใช้ค่าประมาณ (Estimate) k ค่า ในการหาความถี่ที่คาดหวัง จำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระคือ n-k

---

[1] Henry E.Kyburg, Probability Theory, (New York: Prentice-Hall, Inc., 1969), p.167.

[2] Charles C. Peter and Walter R.Van Voorhis, Statistical Procedure and Their Mathematical Bases, (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1940), p.413.

๔. ข้อตกลงเบื้องต้นที่จำเป็นของไคสแควร์โดยทั่วไป (General Assumption)

ฟิลลิปส์ (Jenne S. Phillips) ได้รวบรวมข้อตกลงเบื้องต้นของไคสแควร์ไว้ดังนี้

๑. สิ่งที่สังเกตได้ที่ใช้ไคสแควร์ทดสอบเป็นความถี่หรือจำนวนเต็ม (Frequency or Discrete) ที่เป็นอิสระจากกันและสิ่งที่สังเกตได้นี้จะอยู่ในชั้นใดชั้นเดียวเท่านั้น

๒. ต้องแบ่งจำนวนชั้นของความถี่เพื่อไม่ทำให้เกิดความถี่ที่คาดหวังน้อยจนเกินไป

๓. ความถี่ของสิ่งที่ไม่ปรากฏ (Non - Occurrence) ของลักษณะที่ไม่ใช้ในการทดสอบ จะต้องนำมาพิจารณาในการวิเคราะห์ข้อมูลด้วย เช่น ในการเพาะเมล็ดพืชชนิดหนึ่ง ถ้าต้องการทดสอบว่าจำนวนเมล็ดพืชที่ขึ้นมีการกระจายเป็นทฤษฎีทวินาม หรือไม่ ก็ต้องนับความถี่ของจำนวนเมล็ดที่ไม่ขึ้นด้วย

๔. ความถี่ที่คาดหวังไม่ควรน้อยกว่า ๑๐ แต่นอกจากถ้าจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระมีมากและค่าความถี่ที่คาดหวังไม่น้อยกว่า ๕ ก็อาจใช้การทดสอบนี้ได้[1]

๕. ถ้าความถี่ที่คาดหวังในแต่ละชั้นน้อยกว่า ๑๐ (บางครั้งก็ใช้ ๕ เป็นค่าต่ำสุด) เราสามารถรวมความถี่นั้นกับช่องอื่น ๆ แต่ถ้าความถี่ที่คาดหวังของชั้นต่าง ๆ มีค่าน้อยกว่า ๑๐ เกิน ๒๐ % ของจำนวนชั้นทั้งหมด ก็ไม่ควรใช้ไคสแควร์ทดสอบ[2]

๖. ผลบวกของความถี่ที่คาดหวังจะต้องเท่ากับผลบวกของความถี่ที่ได้จากการสังเกต

---

[1] Jenne S. Phillips and Richard F. Thompson, Statistics for Nurese, (New York: The Macmillan Company, 1967), pp.209-25.

[2] William G. Cochran, " χ^2 Goodness of Fit", The Annals of Mathematics Statistics, Vol.23 (1952), pp.332-34.

๕. การทดสอบทางสถิติของไคสแควร์

ไคสแควร์ใช้สำหรับทดสอบความเบี่ยงเบนระหว่างความถี่ที่สังเกตได้กับความถี่ที่คาดหวังว่าแตกต่างกันอย่างไร ข้อมูลที่ทดสอบเป็นความถี่ คุณภาพ การจัดอันดับนำมาจัดจำพวก หรือจำนวนชั้น จะได้สิ่งที่สังเกตได้จำนวนหนึ่ง การทดสอบไคสแควร์ปัญหาจะเกี่ยวข้องกับจำนวนสิ่งที่สังเกตได้ในแต่ละชนิด และทดสอบสมมุติฐานสูญว่าจำนวนสิ่งที่สังเกตได้นั้นมีค่าพอจะเปรียบเทียบได้กับความถี่ที่คาดหวังหรือไม่ ทั้งนี้การทดสอบจะต้องเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้น

๕.๑ สมมุติฐานทางสถิติและการทดสอบ

สมมุติฐานหมายความถึงประโยคหรือประพจน์ที่อาจอธิบายถึงความจริงที่สังเกตได้[๑] ขั้นสำคัญในงานวิจัยก็คือ การทดสอบสมมุติฐาน และการทดสอบนี้ตามความรู้สึกมักจะหวังว่าสมมุติฐานนั้นเป็นจริง

ความจริงกับสมมุติฐานมีความสัมพันธ์กัน ความจริงเป็นแนวในการตั้งสมมุติฐาน และสมมุติฐานเป็นเครื่องมืออธิบายความจริง

ความจำเป็นของสมมุติฐานในการทดสอบทางสถิติเนื่องมาจากขาดความรู้เกี่ยวกับประชากร การจะรู้เรื่องประชากรหรือพารามิเตอร์จำเป็นต้องอาศัยกลุ่มตัวอย่างแต่บางครั้งมีความคลาดเคลื่อนในกลุ่มตัวอย่างเกิดขึ้น จำเป็นต้องใช้การทดสอบสมมุติฐานที่ประกอบด้วยเหตุผลน่าเชื่อถือเพื่ออ้างถึงประชากร วิธีที่มีประโยชน์และประสบผลมากในการทดสอบสมมุติฐานขึ้นอยู่กับข้อตกลงเบื้องต้นว่า สมมุติฐานภายใต้การทดสอบเป็นจริง[๒]

---

[1] Merle W. Tate, Statistics in Education and Psychology, (New York: The Mcmillan Company, c 1965), p.222.

[2] Charles E. Clark, An Introduction to Statistics, (New York: John Wiley & Sons, Inc., c 1953), p.178.

(ไคสแควร์ทดสอบภายใต้สมมุติฐานที่เป็นจริง) สมมุติฐานมีลักษณะเป็น "ถ้า .....แล้ว" (If ----Then) ถ้าความคาดหวังนั้นเป็นไปตาม "ถ้า" สมมุติฐานก็เป็นจริง "ถ้าไม่" เป็นไปตามที่คาดหวังก็ปฏิเสธ

ในวิชาสถิติ สมมุติฐานที่ทดสอบภายใต้ข้อตกลงเบื้องต้นว่าสมมุติฐานนั้นเป็นจริง เรียกว่า "สมมุติฐานสูญ (Null Hypothesis) สมมุติฐานสูญยอมรับว่าพารามิเตอร์นั้นมีค่าที่แน่นอน และทดสอบสมมุติฐานว่าค่าที่ได้จากกลุ่มตัวอย่างแตกต่างไปจากพารามิเตอร์หรือไม่ ถ้าแตกต่างก็ปฏิเสธ ถ้าไม่แตกต่างก็ยอมรับค่านั้น เช่น ต้องการทราบว่าเกณฑ์ภาคเชาวน์ (I.Q.) ของคนที่มีอาชีพในท้องถิ่นแห่งหนึ่งเท่ากับ ๑๐๐ หรือไม่ สมมุติฐานสูญ คือ มัชฌิมประชากรเท่ากับ ๑๐๐ วิธีการเริ่มจากการสุ่มหยิบกลุ่มตัวอย่างคนในอาชีพนั้นอย่างสุ่มและคำนวณมัชฌิม แล้วทดสอบตามระเบียบวิธีทางสถิติเพื่อดูว่าความแตกต่างนั้นเป็นไปโดยบังเอิญ (Chance) หรือไม่ ถ้าแตกต่างอย่างบังเอิญก็ยอมรับว่ากลุ่มคนอาชีพนั้นมีเกณฑ์ภาคเชาวน์เฉลี่ย ๑๐๐ หรือแตกต่างจริง (Non-Change) ก็ปฏิเสธสมมุติฐานสูญว่าเกณฑ์ภาคเชาวน์เฉลี่ยไม่เท่ากับ ๑๐๐

กล่าวโดยทั่วไปการทดสอบสมมุติฐานสูญ ก็คือ การกำหนดว่าความคลาดเคลื่อนระหว่างค่าพารามิเตอร์กับค่าที่ประมาณจากกลุ่มตัวอย่างเป็นไปโดยบังเอิญหรือไม่ ความคลาดเคลื่อนกำหนดเป็นความน่าจะเป็น (Probability) ถ้าความน่าจะเป็นของการเกิดสมมุติฐานสูญน้อยแสดงว่าความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นมาก ความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนเรียกว่าระดับความมีนัยสำคัญ (Level of Significance) มีต่าง ๆ กัน เช่น ถ้ายอมรับสมมุติฐานว่าเป็นจริง ที่ระดับความมีนัยสำคัญ .๑๐ หมายความว่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนจะเกิดขึ้นไม่มากกว่า ๑๐ ครั้ง ใน ๑๐๐ ครั้งในทางปฏิบัติมักใช้ระดับความมีนัยสำคัญที่ ๑๐ %, ๕ % หรือต่ำกว่านี้ ขึ้นอยู่กับผู้วิจัยจะเลือกใช้ที่ระดับความมีนัยสำคัญหนึ่งอาจเหมาะกับงานวิจัยอย่างหนึ่งแต่ไม่เหมาะกับอีกงานหนึ่ง

๕.๒ ความคลาดเคลื่อนในการทดสอบสมมุติฐาน

สมมุติฐานที่เกี่ยวข้องกับพารามิเตอร์อาจจะผิดหรือถูกก็ได้ เพราะไม่

สามารถทำการสำรวจประชากรทั้งหมดได้ เมื่อกระทำกับกลุ่มตัวอย่างจึงมีความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมุติฐานที่เป็นจริง หรือยอมรับสมมุติฐานที่ผิดก็ได้

การทดสอบสมมุติฐาน จึงเกี่ยวข้องกับผล ๔ ประการคือ

๑. ยอมรับสมมุติฐานที่ถูก
๒. ปฏิเสธสมมุติฐานที่ผิด
๓. ปฏิเสธสมมุติฐานที่ถูก
๔. ยอมรับสมมุติฐานที่ผิด

จุดมุ่งหมายของการทดสอบสถิติคือ ข้อ ๑ และ ๒ การปฏิเสธสมมุติฐานที่เป็นจริงเรียกว่า ความคลาดเคลื่อนชนิดที่หนึ่ง α (Type - One Error) และการยอมรับสมมุติฐานที่ผิดเรียกว่า ความคลาดเคลื่อนชนิดที่สอง β (Type - Two Error) เช่น ความแตกต่างระหว่างมัชฌิม ๒ ค่า $\mu_1 - \mu_2 = 0$ และการทดสอบทางสถิติได้ผลว่าค่ามัชฌิมนั้นมีนัยสำคัญคือ สรุปว่ามัชฌิม ๒ ค่านั้นไม่เท่ากัน เราก็ปฏิเสธสมมุติฐานที่เป็นจริง จึงเกิดความคลาดเคลื่อนชนิดหนึ่งขึ้น ในทางตรงข้ามถ้าค่ามัชฌิม ๒ ค่านั้นแตกต่างกันจริง $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ แต่ผลการทดสอบทางสถิติไม่มีนัยสำคัญ คือทดสอบได้ว่าค่ามัชฌิม ๒ ค่านั้นเท่ากัน แสดงว่าเรายอมรับความคลาดเคลื่อนชนิดสอง

๕.๓ การทดสอบไคสแควร์ชนิดทางเดียวและสองทาง (One-Tailed And Two-Tailed Test)

ในบางโอกาสเมื่อใช้ไคสแควร์ทดสอบข้อมูล ความคิดเกี่ยวกับทิศทาง (Direction) ซึ่งเป็นการทดสอบชนิดทางเดียวมีความหมายน้อยมาก เช่น การทดสอบสภาวะสารูปสนิทดี และในการทดสอบความเป็นอิสระ เรามักไม่คำนึงถึงทิศทางของความแตกต่าง[1]

---

[1] George A. Ferguson, Statistical Analysis in Psychology and Education, (New York: McGraw-Hill Book Company, 1966), pp.210-11.

การทดสอบข้อมูลโดยค่าสถิติโดยทั่วไปนั้น มักจะตั้งสมมุติฐานสูญ (Null Hypothesis) ตรงข้ามกับสมมุติฐานสำรอง (Alternative Hypothesis) เช่น $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ และ $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ หมายความว่าถ้าไม่ยอมรับ H_1 แสดงว่ามีความแตกต่างระหว่างมัชฌิม ๒ ค่านั้น และความแตกต่างนั้นไม่มีทิศทาง จึงยอมรับ H_1 เป็นความแตกต่างชนิดไม่มีทิศทาง (Nondirectional) การทดสอบชนิดนี้เรียกว่าการทดสอบชนิดสองทาง การทดสอบชนิดสองทางมักเกี่ยวข้องกับค่าความแตกต่างสัมบูรณ์ (Absolute Magnitude) นั่นคือ ค่าความแตกต่างนั้นไม่คำนึงถึงเครื่องหมาย ภายใต้สถานการณ์เดียวกัน เราอาจทดสอบสมมติฐานที่คำนึงถึงความแตกต่างของทิศทาง ถ้าเกี่ยวข้องกับทิศทางของความแตกต่าง เราอาจทดสอบสมมติฐาน $H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0$ และ $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$ หรือ $H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 0$ และ $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$ การทดสอบชนิดนี้เรียกว่าการทดสอบชนิดทางเดียว[1]

การทดสอบทางสถิติเป็นระเบียบวิธีทางวิทยาศาสตร์เพื่อค้นหาข้อสรุปเกี่ยวกับสมมติฐานในสาขาวิชาสังคมศาสตร์ สมมุติฐานมักได้มาจากทฤษฎีบางทฤษฎี การเลือกตั้งสมมุติฐานจึงมีความสำคัญมาก การตั้งสมมุติฐานสูญ (Null Hypothesis) ส่วนใหญ่มักจะเป็นสมมุติฐานที่ไม่มีความแตกต่าง เพราะจะทำให้ได้ผลที่แน่นอนประการเดียว และสมมุติฐานสำรอง (Alternative Hypothesis) มักจะเป็นสมมุติฐานที่ไม่ใช่สมมติฐานสูญ แม้ว่าการใช้ไคสแควร์ทดสอบจะแพร่หลาย แต่การตั้งสมมุติฐานสำรองมักจะไม่ใคร่มีผู้ใดกล่าวถึงมากนัก การตั้งสมมุติฐานสำรองจึงเป็นไปอย่างเลื่อนลอย ภายหลังนักวิจัยและนักสถิติจึงตั้งสมมุติฐานสำรองขึ้นตามหลักการและความสนใจในปัญหาของเขา

โจนส์ (Lyle V. Jones) กล่าวว่านักวิจัยในวิชาจิตวิทยาใช้การตั้งสมมุติฐานสูญตรงข้ามสมมติฐานสำรองที่เป็นสองทาง ในกรณีที่เป็นการทดสอง มักใช้สมมุติฐานสำรอง

- - - -

[1] *Ibid.*, p.165.

แบบทางเดียว[๑]

เบิร์ก (C.J. Burke) ยอมรับว่าสมมติฐานต่าง ๆ ใน การวิจัยทางจิตวิทยาเป็นชนิดทางเดียว แต่มิได้หมายความว่าการทดสอบทางเดียวนั้นควรใช้ในการทดลอง เขาชี้ให้เห็นว่า

๑. ผู้ทดลองที่ทำการทดลองวางแผนงานจากผลการทดลองครั้งก่อน การตั้งสมมติฐานสำรองเป็นชนิดทางเดียวได้

๒. การตัดสินใจใช้สมมติฐานสำรองชนิดทางเดียว จากเรื่องราวทางจิตวิทยานั้นยังเป็นเรื่องที่ไม่กำหนดตายตัว[๒]

เท็ต (Merle W. Tate) กล่าวว่าการทดสอบสมมติฐานชนิดทางเดียวที่ใช้กันในงานวิจัยทางจิตวิทยาและการศึกษาเป็นเรื่องที่สับสน และเขาเสนอแนะว่าการใช้การทดสอบชนิดสองทางเหมาะสมกับการวิจัยมากกว่า[๓]

การตั้งสมมติฐานสำรองสำหรับไคสแควร์นั้นมีปัญหามาก เพราะในการใช้ไคสแควร์ทดสอบข้อมูลนั้น เมื่อครั้งที่ คาร์ล เปียร์สัน ค้นพบการกระจายของไคสแควร์นั้นก็ไม่ได้กล่าวถึงการตั้งสมมติฐานสำรอง นักสถิติหลายคนก็ใช้การทดสอบโดยไม่ตั้งสมมติฐานสำรอง และอีกหลายคนที่กล่าวว่าใช้ชนิดทางเดียวและสองทางได้ แต่ถ้าพิจารณาเหตุผลต่อไปนี้

---

[1] Lyle V. Jones, "Test of Hypothesis: One Sided VS Two Sided Alternatives, Psychological Bulletin Vol.49 Nos 1-6 (1952), pp.43-46.

[2] C.J. Burke, "A Brief Note on One-Tailed Test", Psychological Bulletin, Vol.50, Jan-Nov. 1953, pp.381-84.

[3] Merile N. Tate, Statistics in Education and Psychology, (New York: The Mcmillan Company, 1965), p.229.

๑. ลักษณะสูตร $X^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{O_i - E_i}{E_i}\right)^2$ ค่าของไคสแควร์นั้นเป็นค่ากำลังสอง จึงเป็นค่าสถิติที่ไม่สามารถบอกทิศทางได้ และค่าสถิติที่ไม่คำนึงถึงทิศทางนั้นเรียกว่า การทดสอบชนิดสองทาง

๒. การทดสอบไคสแควร์ที่ใช้กับการทดสอบสภาวะสารูปสนิทดี (Goodness of Fit) มีสมมุติฐานสูญว่า: การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่างนั้นเป็นโค้งปกติ (หรือพัวซองหรือการแจกแจงแบบทวินาม) เราไม่สามารถตั้งสมมุติฐานเป็นชนิดทางเดียวได้ การปฏิเสธสมมุติฐานสูญคือ. การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่างนั้นไม่เป็นโค้งปกติ นั่นคือเราตั้งสมมุติฐานสำรองชนิดสองทาง

๓. การทดสอบความเป็นอิสระ (Test of Independence) ก็เช่นกัน เราต้องการทราบว่าตัวแปรสองตัว หรือมากกว่าสองนั้นมีความสัมพันธ์กันหรือไม่ เราไม่สามารถตั้งสมมุติฐานสำรองชนิดทางเดียวได้ เพราะเมื่อปฏิเสธสมมุติฐานสูญที่ว่าตัวแปรทั้งสองตัวนั้นไม่มีความสัมพันธ์กันก็เท่ากับเราตั้งสมมุติฐานสำรองว่าตัวแปรทั้งสองมีความสัมพันธ์กัน หรือในการทดสอบความน่าจะเป็นในตารางการณ์จร $P_1 = P_2 = P_3 = \cdots = P_k$ ไคสแควร์ สามารถทดสอบได้โดยการตั้งสมมติฐานสำรองชนิดสองทางเท่านั้น คือ $P_1 \neq P_2 \neq P_3 \neq \cdots \neq P_k$ ไม่สามารถทดสอบได้ว่า $P_1 \geqslant P_2 \geqslant P_3 \geqslant \cdots \geqslant P_k$ การทดสอบจึงควรเป็นการทดสอบชนิดสองทาง

๔. การทดสอบความเป็นเอกพันธุ์ของข้อมูล (Test of Homogeneity) ในการทดสอบสำหรับกลุ่มตัวอย่าง ๒ กลุ่มนั้น ไคสแควร์ก็ใช้ทดสอบได้ แต่ปัญหาว่าการตั้งสมมุติฐานสำรองว่าจะเป็นทางเดียวหรือสองทางทั้งนี้ขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์และลักษณะของการวิจัย พิจารณาการทดสอบความเป็นเอกพันธุ์สำหรับ k กลุ่มตัวอย่าง การตั้งสมมุติฐานสูญจะเป็น กลุ่มตัวอย่าง k กลุ่มนั้นหยิบมาจากประชากรเดียวกัน และสมมุติฐานสำรองว่า กลุ่มตัวอย่าง k กลุ่มนั้นหยิบมาจากกลุ่มประชากรที่แตกต่างกัน ไม่มีกรณีใดที่จะตั้งสมมุติฐานสำรองอื่นได้ ดังนั้นการทดสอบไคสแควร์สำหรับความเป็นเอกพันธุ์ของข้อมูลจึงควรเป็นแบบสองทาง

ทฤษฎีทางสถิติมักจะเกี่ยวข้องกับปัญหาการลดและควบคุมความคลาดเคลื่อนทั้งสองชนิดนี้ ถ้าต้องการลดความคลาดเคลื่อนชนิดที่หนึ่งโดยมีขนาดของกลุ่มตัวอย่างเท่าเดิมจะเป็นการเพิ่มความคลาดเคลื่อนชนิดที่สอง ที่ระดับความมีนัยสำคัญที่ .๐๑ จะสามารถลดความคลาดเคลื่อนการปฏิเสธสมมุติฐานที่เป็นจริงได้มากกว่าที่ระดับ .๐๕ ถ้าใช้ที่ระดับ .๐๕ ผู้วิจัยจะมีโอกาสปฏิเสธสมมุติฐานที่เป็นจริงได้ไม่มากกว่า ๕ ครั้งใน ๑๐๐ ครั้ง

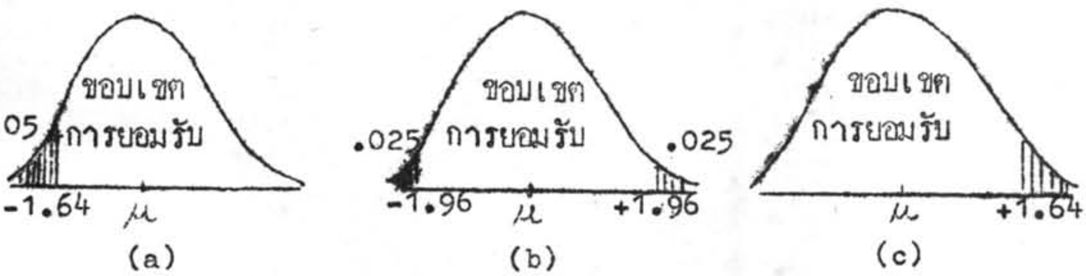
ความพยายามที่จะควบคุมความคลาดเคลื่อนชนิดที่หนึ่ง เป็นวิธีการที่จำกัดการปฏิเสธสมมุติฐานที่เป็นจริง การเลือกความน่าจะเป็นขึ้นอยู่กับธรรมชาติของปัญหา ถ้าการปฏิเสธสมมุติฐานที่เป็นจริงแล้วผลที่ได้เกี่ยวข้องกับเรื่องร้ายแรง มีความสำคัญก็ควรตั้งระดับความมีนัยสำคัญให้ต่ำ อาจเป็น .๐๑, .๐๐๕ หรือน้อยกว่านั้น ถ้าการปฏิเสธสมมุติฐานที่เป็นจริงแล้วผลที่เกิดไม่ค่อยสำคัญนัก อาจตั้งค่าของความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนให้สูงก็ได้ เช่น .๑๐, .๐๕ เช่น การทดลองใช้วิธีการสอนฟิสิกส์แบบใหม่กับกลุ่มนักเรียน ถ้าผลของวิธีสอนนั้นจำเป็นต้องมีการเปลี่ยนแปลงที่สิ้นเปลืองค่าใช้จ่าย เช่น ขนาดห้องเรียน ตารางสอน เครื่องมือ เจ้าหน้าที่ กว่าแบบเก่าอาจเลือกความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนในการปฏิเสธสมมุติฐานที่ระดับความมีนัยสำคัญต่ำ[1] การลดความคลาดเคลื่อนชนิดที่หนึ่ง เป็นการเพิ่มความคลาดเคลื่อนชนิดที่สอง แต่ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับราคา ความไว้วางใจ เงิน ความปลอดภัย ความสูญเปล่าในอนาคต การควบคุมความคลาดเคลื่อนชนิดสองไม่เพียงแต่ลดความคลาดเคลื่อนชนิดหนึ่งเท่านั้น แต่ต้องกระทำไปพร้อม ๆ กันทั้งสองอย่าง ในบางกรณีความคลาดเคลื่อนอันใดอันหนึ่งอาจมีความสำคัญกว่ากัน เช่น ถ้าปฏิเสธสมมุติฐานสูญ แล้วอาจจะนำไปสู่ผลที่จะใช้ยาไม่มีคุณภาพก็ต้องใช้ระดับความมีนัยสำคัญให้น้อย (.๐๑) ในกรณีที่ให้เกิดความคลาดเคลื่อนชนิดสอง

---

[1] Merle W. Tate, Statistics in Education and Psychology, (New York: The Macmillan Company, c 1965), p.223.

ไม่ได้ควรตั้งระดับความมีนัยสำคัญให้สูง (.๑๐) หรือเลือกใช้สถิติทดสอบให้เหมาะสม[1]

เมื่อกำหนดความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนชนิดที่หนึ่งแล้วก็ควรพิจารณาความคลาดเคลื่อนชนิดที่สองด้วย ถ้าสมมุติฐานนั้นผิด ค่าพารามิเตอร์มักจะมากกว่าหรือน้อยกว่าที่ตั้งไว้ ตัวอย่าง เช่น การจัดขอบเขตของการปฏิเสธ (Region of Rejection) และขอบเขตของการยอมรับ ของมัชฌิม (ดังในรูปที่ ๓) ความน่าจะเป็นของการปฏิเสธสมมติฐานว่ามัชฌิมเป็นจริงเท่ากับ .๐๕ ความน่าจะเป็นวัดได้ ๓ ลักษณะ (a) และ (c) เป็นการทดสอบสมมุติฐานชนิดทางเดียว (b) เป็นการทดสอบสมมุติฐานชนิดสองทาง



รูปที่ ๓ แสดงขอบเขตการปฏิเสธชนิดสองทางและทางเดียว

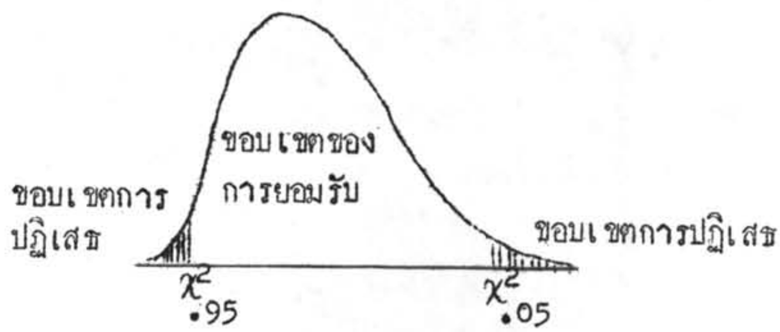
ดังนั้นในการตั้งสมมุติฐานสำรองของการทดสอบไคสแควร์ ถ้าผู้วิจัยมีเหตุผลในการทำนายงานวิจัยล่วงหน้าจากทฤษฎี หลักการ และการทดสอบนั้นมีนัยสำคัญสูงมาก ก็ตั้งสมมุติฐานสำรองชนิดทางเดียวได้เป็นกรณีพิเศษ ส่วนกรณีทั่ว ๆ ไปควรใช้การทดสอบชนิดสองทาง

---

[1] Jenne S. Phillips and Richard F. Thompson, Statistics for Nurse, (New York: The Macmillan Company, 1967), p.109.

๕.๔ ขอบเขตการปฏิเสธ (Region of Rejection)

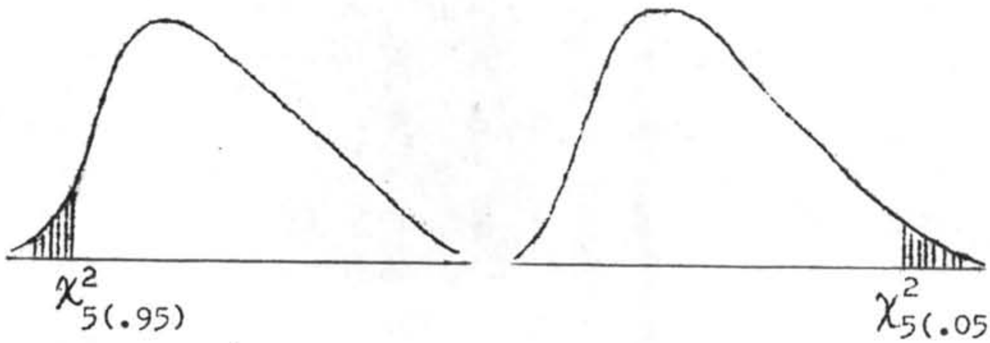
การทดสอบไคสแควร์โดยปกติมักจะใช้การทดสอบชนิดสองทาง ประกอบด้วยขอบเขตของการปฏิเสธ ๒ แห่ง คือ ทางด้านขวามือและซ้ายมือของโค้งการแจกแจง



รูปที่ ๔ แสดงขอบเขตการทดสอบชนิดสองทาง

ขอบเขตของการปฏิเสธจะประกอบด้วยค่าของ x^2 ที่มากกว่าหรือน้อยกว่าค่าของ χ^2 คือ ถ้าเป็นการทดสอบชนิดสองทางขอบเขตของการปฏิเสธ ก็คือ $x^2_k \geqslant \chi^2_{k(\alpha/2)}$ หรือ $x^2_k \leq \chi^2_{k(1-\alpha/2)}$ ค่าของ x^2 ที่อยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่งจะได้รับการปฏิเสธ เช่น สมมุติว่า ต้องการทดสอบว่า σ^2 = ๒๒ หรือไม่ โดยมีจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระ = ๑๕ แบ่งเขตของการปฏิเสธออกเป็น ๒ ส่วนเท่ากัน ถ้าเป็นที่ระดับความมีนัยสำคัญ .๑๐ จากตารางภาคผนวก จ. ด้านแถวบนเป็นค่าความน่าจะเป็นหรือระดับความมีนัยสำคัญด้านสดมภ์ซ้ายสุดเป็นจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระ df ดูด้านสดมภ์ที่ df = ๑๕ และด้านแถวที่ความน่าจะเป็น = .๙๕ จะได้ค่า $\chi^2_{15(.95)}$ = ๗.๒๖ และที่ความน่าจะเป็น =.๐๕ จะได้ $\chi^2_{15(.05)}$ = ๒๕.๐ ดังนั้นขอบเขตของการปฏิเสธ คือ $x^2_5 \geqslant \chi^2_{5(.05)}$ = ๒๕.๐ หรือ $x^2_5 \leqslant \chi^2_{5(.95)}$ = ๗.๒๖ อันใดอันหนึ่ง

ถ้าเป็นการทดสอบชนิดทางเดียว ค่าของ χ^2 จะปรากฏอยู่ทางซ้ายหรือขวามือของการกระจายขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ของผู้วิจัย ดูรูปที่ ๕



รูปที่ ๕ แสดงการทดสอบแบบทางเดียว

ถ้าต้องการทดสอบ σ^2 = ๒๒ เป็นชนิดทางเดียว คือ σ^2 < ๒๒ ขอบเขตของการปฏิเสธจะอยู่ด้านซ้ายมือ คือ $x_5^2 \leqslant \chi^2_{5(.95)}$ = ๓.๒๖ หรือถ้าต้องการทดสอบ σ^2 > ๒๒ ขอบเขตของการปฏิเสธจะอยู่ด้านขวามือ คือ $x_5^2 \geqslant \chi^2_{5(.05)}$ = ๒๕.๐

๖. การทดสอบไคสแควร์ที่มีพารามิเตอร์

โดยปกติการใช้ไคสแควร์ทดสอบสัมพันธ์กับการเปรียบเทียบการแจกแจงของข้อมูลที่ต่อเนื่อง แต่ในทางปฏิบัติมักนำไปใช้กับข้อมูลที่ไม่ต่อเนื่องได้ ทั้งนี้เพราะจากการทดสอบข้อมูลที่ใช้สูตร (๑)

$$X^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

ซึ่งเป็นผลบวกของกำลังสองของความแตกต่างระหว่างความถี่ที่สังเกตได้กับความถี่ที่คาดหวังหารด้วยความถี่ที่คาดหวังและจากการกระจายที่แท้จริง จากสูตร (๒)

$$\frac{1}{2^{n/2}(\frac{n}{2} - 1)!} (\chi^2)^{(n/2-1)} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} d\chi^2$$

มีค่าความน่าจะเป็นใกล้เคียงกันมาก เปียร์สัน (Karl Pearson) ได้แสดงให้เห็นว่าค่าที่ได้จากสูตร (๑) และ (๒) มีสหสัมพันธ์อยู่ระหว่าง .๙๓ - .๙๙ นับว่าสูงมาก[๑]

ฉะนั้น จึงนำไคสแควร์ไปใช้ได้อย่างกว้างขวาง ไม่ว่าข้อมูลเหล่านั้นจะเป็นความถี่ที่ต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่องก็ได้ หลักใหญ่ก็คือการเปรียบเทียบความแตกต่างของความถี่ที่คาดหวังกับความถี่ที่ได้จากการสังเกตนั่นเอง ในที่นี้ค่าความถี่ที่คาดหวังจะเป็นตัวพารามิเตอร์ และความถี่ที่สังเกตได้จะเป็นค่าประมาณจากพารามิเตอร์ ถ้าสองค่านี้ใกล้เคียงกันการทดสอบก็ไม่มีนัยสำคัญ

ปัญหาเกี่ยวกับการใช้ไคสแควร์ไม่มีมากนัก นับว่าไคสแควร์เป็นเครื่องมือที่นักวิจัยทั้งหลายรู้จักดี โดยเฉพาะนักจิตวิทยาและนักการศึกษา นักชีววิทยาที่จำเป็นต้องเกี่ยวข้องกับข้อมูลที่เป็นปริมาณและคุณภาพ กล่าวได้ว่า สามารถใช้ไคสแควร์ได้ในการวิจัยเกือบทุกแบบ เป็นเครื่องมือทางสถิติสำหรับทดสอบข้อมูลการวิจัย เช่น ปัญหาในการสุ่ม ความเป็นโค้งปกติ

การทดสอบว่าข้อมูลสองข้อมูลมาจากกลุ่มประชากรอย่างเดียวกันหรือไม่ นักวิจัยก็จำเป็นต้องใช้สถิติทดสอบ และสถิติที่สะดวกต่อการใช้ก็คือไคสแควร์นั่นเอง ใช้มากกับข้อมูลในรูปของความถี่หรือที่จัดเป็นความถี่ได้ ทั้งนี้ รวมทั้งสัดส่วนและความน่าจะเป็นด้วย ประโยชน์ที่สำคัญคือสามารถทดสอบคุณสมบัติหลายประการของข้อมูลได้ในคราวเดียวกัน

---

[1]Charles, C. Peter and Walter Van Voorhis, Procedures and Their Mathematical Bases, (New York : McGraw-Hill Book Company, Inc., 1940), p.413.

สูตรโดยทั่วไปของไคสแควร์ก็คือ ผลบวกของอัตราส่วนระหว่างกำลังสองของผลต่างของความถี่ที่ได้จากการสังเกตและความถี่ที่คาดหวัง ต่อความถี่ที่คาดหวังตามสมมุติฐาน

$$\chi^2_{[df]} = \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{(fo_i - fe_i)^2}{fe_i} \right]$$

fo_i = ความถี่ที่ได้จากการสังเกต

fe_i = ความถี่ตามความคาดหวัง

df = จำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระ

ในตอนแรก เราอาจเข้าใจว่า $\sum_i (fo_i - fe_i)$ นั้นจะบ่งถึงความแตกต่างของความถี่ที่ได้จากการสังเกตกับความถี่ที่คาดหวังได้ แต่ถ้าพิจารณา

$$\sum_i (fo_i - fe_i) = \sum_i fo_i - \sum_i fe_i$$

$$= N - N = 0$$

ซึ่งความแตกต่างนี้ไม่สามารถชี้ให้เห็นความแตกต่างหรือความสอดคล้องกันได้ ถ้ายกกำลังสอง

$$\sum_i (fo_i - fe_i)^2$$

จะบอกขนาดของความสอดคล้องได้ จะมีค่าเป็นศูนย์เมื่อความเหมาะสมหรือความสอดคล้องระหว่างความถี่ที่ได้จากการสังเกตกับความถี่ที่คาดหวังมีความถูกต้องสอดคล้องกันจริง ๆ และดัชนีที่ดีที่สุดที่จะบอกถึงความสอดคล้องก็คือ $\sum_i \frac{(fo_i - fe_i)^2}{fe_i}$

แต่เป็นที่น่าสังสัยว่าทำไม ถึงไม่ยกกำลังสองที่ส่วนด้วย เนื่องจากเหตุผลต่อไปนี้[1]

---

[1] J.K. Backhouse, Statistics an Introduction to Test of Significance, (London: Longman, Green & Co Ltd., 1967), pp.141-43.

จุดประสงค์ก็เพื่อแสดงว่า

$$X^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(fo_i - fe_i)^2}{fe_i}$$

เป็นผลบวกค่าประมาณของตัวแปร k ตัวที่ได้มาจากโค้งปกติ ซึ่ง

$$\frac{fo_i - fe_i}{\sqrt{fe_i}}$$

มีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ มัชฌิมเท่ากับ ๐ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ ๑
กำหนดให้ $\sum_{1}^{k} o = n$ และถ้า n นั้นแปรไป จะได้ค่าของมัชฌิม

$$\mu_n = \text{มัชฌิมของ } \sum_{i}^{k} f_{o_i}$$

$$= \sum^{k} \text{(มัชฌิมของ } f_o)$$

$$= \sum_{1}^{k} f_{e_i}$$

แต่ถ้า Pr เป็นความน่าจะเป็นที่แต่ละสมาชิกของ n ตัว จะอยู่ในช่องที่ r

$$p_r = \frac{f e_r}{\sum_{1}^{k} f_{e_r}}$$

ดังนั้น $\mu_n p_r = f_{e_r}$ (๑)

และเมื่อกำหนด e และค่าของ r คงที่ ก็จะเกิดการแจกแจงแบบทวินามที่มีมัชฌิม np_r และความแปรปรวนคือ $np_r q_r$ (q_r = ความน่าจะเป็นของการไม่เกิด)
ดังนั้น ค่า กำลังสองของความเบี่ยงเบนของ fe จาก $\mu_n p_r$ คือ σ_n^2

$$np_r q_r + (np_r - \mu_n p_r)^2 = np_r q_r + p_r^2 (n - \mu_n)^2 \quad (๒)$$

เมื่อ n แปรไปและให้ $\sigma_{f_o}^2$ เป็นความแปรปรวนของ f_o ดังนั้น

$$\sigma_{f_o}^2 = \mu_n p_r q_r + p_r^2 \sigma_n^2 \quad (๓)$$

โดยที่ σ^2_n เป็นความแปรปรวนของ n คือ $(n - \mu_n)^2$ เมื่อ

$$n = fo_1 + fo_2 + --- + fo_k \quad \sum_1^k fo_i$$

และความถี่เหล่านี้เป็นอิสระดังนั้น

จาก (3) แทนใน (4)

$$\sigma^2_n = \sigma^2_{fo_1} + \sigma^2_{fo_2} + --- + \sigma^2_{fo_k} \quad ----(4)$$

แทนค่าใน (๓)

$$\sigma^2_n = \sum_1^k (\mu_n p_r q_r + p_r^2 \sigma_n^2)$$

$$= \mu_n \sum_1^k p_r q_r + \sigma^2_n \sum_1^k p_r^2$$

$$\sigma^2_n - \sigma^2_n \sum p_r^2 = \mu_n \sum p_r q_r$$

$$\sigma^2_n = \sigma^2_n \sum_1^k p_r \quad (\because \sum_1^k p_r = 1)$$

เติมเข้า

$$\sigma^2_n \left\{ \sum (p_r - p_r^2) \right\} = \mu_n \sum p_r q_r$$

ดังนั้น

$$\sigma^2_n \sum p_r q_r = \mu_n \sum p_r q_r \qquad (q_r = 1 - p_r)$$

$$\sigma^2_n = \mu_n$$

แทนค่าใน ๓

$$\sigma^2_{fo} = \mu_n p_r q_r + p_r^2 \sigma^2_n \quad \mu_n \quad p_r(1-p_r) + p_r^2 = p_r - p_r^2 + p_r^2$$

$$\sigma^2_{fo} = \mu_n(p_r q_r + p_r^2) = \mu_n p_r$$

$$= fe$$

จะได้ $\frac{fo - fe}{\sqrt{fe}}$ อยู่ในรูป $\frac{x - \mu}{\sigma}$ มีมัชฌิม ๐ และ $\sigma^2 = ๑$

๖.๑ การทดสอบความเป็นอิสระ (Test of Independence)

จำนวนความถี่ที่ใช้ในการทดสอบไคสแควร์นั้น จำเป็นต้องจัดให้อยู่ในจำพวกที่เหมาะสม โดยที่ความถี่นั้นบ่งถึงลักษณะต่าง ๆ การจัดจำพวกมีความจำเป็นในการทดสอบความเป็นอิสระมากเพราะการทดสอบความเป็นอิสระข้อมูลที่เป็นความถี่จะบรรจุอยู่ในตารางชนิดต่าง ๆ ตารางนี้ประกอบด้วยจำนวนแถวและจำนวนสดมภ์ ซึ่งเรียกว่าตารางการณ์จร (Contingency) ถ้าประกอบด้วย จำนวนแถว ๒ แถว และจำนวนสดมภ์

๒ สดมภ์ เรียกว่า ตารางการณ์จร ๒x๒ (Fourfold Table) ถ้าจำนวนแถวเป็น ๒ แถว จำนวนสดมภ์มี k สดมภ์เรียกว่า ตารางการณ์จร ๒ x k หรือถ้าจำนวนแถว k แถวและจำนวนสดมภ์ k สดมภ์ เรียกว่า ตารางการณ์จร k x k

การจัดจำพวก หมายถึง การจัดให้แต่ละสมาชิกที่เป็นตัวแปรจำนวนเต็ม (Discrete) หรือความถี่ให้อยู่ในพวกหรือชนิด (Categories) ที่เหมาะสมตามคุณสมบัติต่อไปนี้ [๑]

๑. มีความหมายที่เด่นชัด (Well-Defined) หมายถึงแต่ละชนิดนั้นต้องมีความมุ่งหมายที่แน่นอน ป้องกันการซ้ำซาบ เกี่ยวกันในแต่ละชนิด

๒. มีความเป็นอิสระต่อกัน (Mutually Exclusive)

๓. การจัดจำพวกจะต้องยึดหลักใดหลักหนึ่งในการจัดเท่านั้น (Univocal) หมายความว่า ถ้าจะยึดหลักใดเป็นเกณฑ์ในการจัด ก็ต้องยึดหลักนั้นตลอดไป เช่น ถ้าจะจัดนักเรียนในห้องเรียนโดยถือคะแนนการทดสอบภาษาอังกฤษเป็นหลัก จะไม่นำคะแนนวิชาคณิตศาสตร์มาเกี่ยวข้องด้วย

๔. แต่ละสมาชิกนี้จะต้องจัดได้หมด (Exhaustive) ในการจัดจำพวกมักจะมีหมวดอื่น ๆ เพื่อให้แต่ละสมาชิกอยู่ในชนิดต่าง ๆ ตารางการณ์จรอาจแยกบรรจุข้อมูลได้หลายแบบ คือ [๒]

ก. ดับเบิ้ล ไดโคโตมี (Double Dichotomy) คือตัวแปรแต่ละตัวแยกออกเป็น ๒ ลักษณะ แต่ละลักษณะแยกออกจากกัน เช่น ตอบใช่ ตอบไม่ใช่ การโยนเหรียญที่เกิดหัวและก้อย หรือการแบ่งเป็นชายและหญิงก็มีลักษณะเป็นไดโคโตมี ตารางจะเป็นชนิด ๒ x ๒

---

[1] J.P. Guilford, Fundamental Statistics in Psychology and Education, (4th ed., New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1965), p.10.

[2] H.O. Lancaster, The Chi-Squared Distribution, (New York: John Wiley & Sons, Inc., c 1969), pp.212 - 215.

ข. การทดสอบเปรียบเทียบ (Comparative Trial) ตารางจะบรรจุข้อมูลที่ได้จากการทดลอง จัดจำพวกตามผลที่เกิดจากการทดลอง เช่น การให้การปฏิบัติทดลองในการรักษาโรคจัดจำพวกเป็น รักษาให้หายได้ และยากที่จะรักษา หรือในการบันทึกการให้กำเนิดเด็กเพศชายหญิงในแม่วัยต่าง ๆ จะเป็นตารางการณ์จรชนิด 2 x k การทดลองเปรียบเทียบนี้ จะกำหนดค่าสุดท้าย (Marginal Total) ในแถวและสดมภ์ล่วงหน้า

๖.๑.๑ การทดสอบความเป็นอิสระในตารางการณ์จร

การใช้ไคสแควร์ทดสอบความเป็นอิสระในตารางการณ์จร ความถี่ที่คาดหวังได้มาจากข้อมูล ความถี่ที่คาดหวัง แต่ละช่องในตารางคือความถี่ที่คาดหวังจะได้ถ้าตัวแปร ๒ ตัว นี้เป็นอิสระจริง ไคสแควร์จะวัดความแตกต่างระหว่างความถี่ที่คาดหวังและความถี่ที่ได้จากการสังเกตถ้าค่าของไคสแควร์มีนัยสำคัญที่ระดับความเชื่อมั่น ซึ่งมักจะใช้ที่ระดับความมีนัยสำคัญ ๕ % หรือ ๑ % ก็จะปฏิเสธสมมุติฐานว่า ไม่มีความแตกต่างระหว่างความถี่ที่คาดหวังและความถี่ที่สังเกตได้ และยอมรับสมมุติฐานสำรองว่าตัวแปร ๒ ตัว นั้น มีความสัมพันธ์กัน เช่น เรามีความเชื่อว่าบุคคลที่มีระดับการศึกษาแตกต่างกัน จะมีความคิดเห็นต่อคำถามการหยั่งความคิดเห็นแตกต่างกัน เมื่อได้กลุ่มตัวอย่างแล้วจัดจำพวกตามลักษณะคำตอบที่ได้มา และตามระดับการศึกษาเป็นชั้น ๆ ไป จึงจะสามารถทดสอบความมีนัยสำคัญว่า ระดับของการศึกษานั้นเป็นอิสระจากการตอบคำถามหยั่งความคิดเห็น

วิธีการ

สมมติฐานสูญ อาจทดสอบได้จากค่า x^2 ดังนี้

$$x^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} \frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

เมื่อ O_{ij} คือจำนวนกรณีที่สังเกตได้ในแถวที่ i สดมภ์ที่ j

E_{ij} คือจำนวนกรณีที่คาดหวังจะเกิดภายใต้สมมติฐานสูญ ในแถวที่ i สดมภ์ที่ j

$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}$ เป็นสัญญลักษณ์แสดงการบวกทุกแถวและทุกสดมภ์ นั่นคือบวกทุก ๆ ช่องในตาราง ค่า X^2 ที่ได้จากสูตร (๑) มีการแจกแจงเป็นไคสแควร์ โดยประมาณ ขณะที่ $(r-1) + (c-1) = r + c - 2$ ตัวพารามิเตอร์ที่เป็นอิสระที่เป็นค่าประมาณมาจาก rc ช่อง จากหน้า (๒๓) ดังนั้น จำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ

$rc - (r + c - 2) - 1 = rc - r - c + 1 = (r-1)(c-1)$

การคำนวณความถี่ที่คาดหวัง (E_{ij}) ในแต่ละช่อง ให้คูณผลรวมของด้านข้างสุดท้ายทั้ง ๒ ด้านของช่องรวมนั้น แล้วหารด้วยจำนวนกรณีทั้งหมด N

วิธีการทดสอบความเป็นอิสระ

๑. จัดความถี่ที่สังเกตได้ลงในช่องตารางการณ์จร r x c ตามลักษณะการจัดจำพวก

๒. กำหนดจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระและคำนวณความถี่ที่คาดหวัง

๓. ถ้ามีจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ ๑ (ตาราง ๒x๒) คำนวณ X^2

$$X^2 = \frac{N\,(ad - bc)^2}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)} \qquad (๓)$$

สำหรับ ความถี่ a, b, c, d ในแต่ละช่องของตารางการณ์จร ๒ x ๒ และ N เป็นจำนวนทั้งหมด ในกรณีที่ความถี่ที่คาดหวังในแต่ละช่องมีค่าน้อยมาก คือน้อยกว่า ๕ และต้องการความน่าจะเป็นอย่างถูกต้อง การใช้การทดสอบความน่าจะเป็นอย่างถูกต้องของ

ฟิชเชอร์[๑] (Fisher's Exact Probability)

$$P = \frac{(A+B)!(C+D)!(A+C)!(B+D)!}{N!A!B!C!D!}$$

๔. ถ้ามีจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระมากกว่า ๑ กำหนดความถี่ที่คาดหวังในแต่ละช่อง และคำนวณ χ^2 โดยใช้

$$X^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

๕. กำหนดความมีนัยสำคัญของ X^2 ที่คำนวณได้

๖.๑.๒ ข้อตกลงเบื้องต้นในการทดสอบความเป็นอิสระ

๑. เนื่องจากความน่าจะเป็นอย่างถูกต้อง (Exact Probability) นั้นถูกประมาณว่าเป็นไปตามกฎมัลติโนเมียล (Multinomial Rule) สิ่งที่ได้จากการสังเกตแต่ละชนิด ต้องเป็นอิสระต่อกันเพราะสิ่งที่ได้ จากการสังเกตแต่ละชนิดบางครั้งอาจได้รับการกระทำซ้ำอันเนื่องมาจากธรรมชาติของข้อมูลหรือการทดลองนั้น ๆ

๒. ในตารางของความถี่ร่วม (Joint Frequency) สิ่งที่ได้จากการสังเกตแต่ละชนิดจะต้องอยู่ในแถวเดียวสดมภ์เดียว

๓. จำนวนความถี่ที่คาดหวังในแต่ละช่องไม่ควรน้อยกว่า ๕ สำหรับตารางการณ์จรที่มีจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระมากกว่าหนึ่งขึ้นไป และในกรณีที่มีจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระเพียง ๑ จำนวนความถี่ที่คาดหวังไม่ควรต่ำกว่า ๑๐

---

[1] Sidney Siegel, Non Parametric, (New York:McGraw-Hill Book Company, Inc.,c 1956),pp.96-104.

๖.๑.๓ ตาราง ๒x๒ (Fourfold Table)

ตาราง ๒ x ๒ นี้ สิ่งที่สังเกตได้ (Observations) จะแบ่งออกเป็น ๒ จำพวก มี ๒ แถว และ ๒ สดมภ์ จะมีช่องทั้งหมด ๔ ช่องด้วยกัน แต่ละช่องจะบรรจุข้อมูลที่เป็นความถี่หรือความน่าจะเป็น

		A		
		a_1	a_2	
B	b_1	n_{11}	n_{12}	$n_{1.}$
	b_2	n_{21}	n_{22}	$n_{2.}$
		$n_{.1}$	$n_{.2}$	n

ตารางที่ ๑ ตารางการณ์จรชนิด ๒ x ๒

ลักษณะตารางการณ์จรชนิด ๒ x ๒ n_{11}, n_{12} เป็นความถี่หรือความน่าจะเป็นของ b_1 รวมเป็น $n_{1.}$ และ n_{21}, n_{22} เป็นความถี่ในแถว b_2 รวม $n_{2.}$ ในด้านสดมภ์ มี n_{11}, n_{21} เป็นความถี่หรือความน่าจะเป็นของ a_1 รวม $n_{.1}$ และ n_{12}, n_{22} เป็นความถี่ของ a_2 รวม $n_{.2}$

หรือ

a	b	a+b
c	d	c+d
a+c	b+d	N

ตารางที่ ๒ ความถี่ในตารางการณ์จร ๒ x ๒

ตารางชนิดนี้ ไม่จำเป็นต้องคำนวณความถี่ที่คาดหวัง สามารถคำนวณได้จากความถี่ที่สังเกตได้ทันที โดยใช้สูตร (๓)

$$X^2 = \frac{N\,(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

ตัวอย่างที่ ๑ โรงพยาบาลแห่งหนึ่งได้ทดสอบความแข็งแรงของขาและหลังของเด็กอายุ ๖ ขวบ จำนวน ๒๑๘ คน (เด็กหญิง ๑๑๐ คนและเด็กชาย ๑๐๘ คน) ได้ผลดังนี้ เด็กผู้หญิง ๒๓ คน และเด็กผู้ชาย ๔๔ คน รวม ๖๗ คน ไม่ผ่านการทดสอบ ที่เหลืออีก ๑๕๑ คน ผ่านการทดสอบนี้ ความแข็งแรงของขาและหลังจะขึ้นอยู่กับเพศของเด็กหรือไม่ (ระดับความมีนัยสำคัญ .๐๕)[๑]

วิธีทำ

๑. สมมุติฐาน H_0 : ความแข็งแรงของขาและหลังไม่มีความสัมพันธ์กับเพศของเด็กอายุ ๖ ขวบ

H_1 : ความแข็งแรงของขาและหลังมีความสัมพันธ์กับเพศของเด็ก

๒. การทดสอบทางสถิติ : ใช้ X^2 ทดสอบ เนื่องจากข้อมูลบรรจุในตารางการณ์จรเป็นความถี่ที่เป็นอิสระจากกันเป็นแบบไดโคโตมี

๓. การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่าง: X^2 ที่คำนวณได้จากสูตร (๓) มีการแจกแจงโดยประมาณเป็น χ^2 ; df = ๑

---

[๑]ประคอง กรรณสูต, สถิติศาสตร์ประยุกต์สำหรับครู, (พิมพ์ครั้งที่สอง, พระนคร: ไทยวัฒนาพานิช, ๒๕๑๓), หน้า ๑๒๖.

๔. ขอบเขตการปฏิเสธ : เนื่องจากเป็นการทดสอบชนิดสองทาง ขอบเขตการปฏิเสธ ประกอบด้วยว่า $x^2_{1(\alpha/2)} \leq$ หรือ $X^2 \leq \chi^2_{1(1-\alpha/2)}$

๕. การตัดสิน

	ผ่านการทดสอบ	ไม่ผ่านการทดสอบ	รวม
ผู้หญิง	87 (a)	23 (b)	110 (a + b)
ผู้ชาย	64 (c)	44 (d)	108 (c + d)
รวม	151 (a + c)	67 (b + d)	218 (N)

ตารางที่ ๓ ข้อมูลการทดสอบความเป็นอิสระในตารางการณ์จร ๒x๒

ค่าของ X^2 หาได้จากสูตร (๓)

$$X^2 = \frac{N(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$$= \frac{๒๑๘(๘๗ \times ๔๔ - ๒๓ \times ๖๔)}{๑๑๐ \times ๑๐๘ \times ๑๕๑ \times ๖๗}$$

$$= \frac{๒๑๘ \times ๕๕๕๐๗๓๖}{๑๒๐๑๘๘๗๖๐}$$

$$= \frac{๑๒๑๐๐๖๐๔๔๘}{๑๒๐๑๘๘๗๖๐}$$

$$= ๑๐.๐๘$$

จากตารางภาคผนวก จ. การทดสอบเป็นชนิด ๒ ทาง ค่าของ $\chi^2_{1(.025)} = ๕.๐๒ < x^2_1 = ๑๐.๐๘$ และ $\chi^2_{1(.005)} = ๗.๘๘ < \chi^2_1 = ๑๐.๐๘$ การทดสอบจึงมีนัยสำคัญที่ระดับ .๐๕ และ .๐๑ สรุปว่า ความแข็งแรงของขาและหลังมีความสัมพันธ์กับเพศของเด็กอายุ ๖ ขวบ

เนื่องจากค่า χ^2 จากตารางนั้นเป็นค่าที่ได้จากการคำนวณ χ^2 ที่มีการกระจายต่อเนื่อง แต่เรามักนำมาใช้กับข้อมูลที่เป็นความถี่และจำนวนเต็ม (Discreete) ดังนั้นเพื่อให้เกิดการต่อเนื่องจึงให้ใช้ค่าแก้ของเยท (Yate's Correction) เนื่องจากมีแนวโน้มภายใต้การประมาณค่าความน่าจะเป็นที่ทำให้การปฏิเสธสมมติฐานสูญมีมากขึ้น จึงจำเป็นต้องใช้ค่าแก้และใช้สำหรับไคสแควร์ที่มีจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ ๑ เท่านั้น[๑]

โคแครน (William G.Cochran) ได้ให้ข้อเสนอแนะการตัดสินใจใช้ x^2 สำหรับความถี่ที่บรรจุในตาราง ๒ x ๒ ดังนี้[๒]

๑. เมื่อ $N > ๔๐$ ใช้ x^2 ที่มีค่าแก้ของเยท คือสูตร

$$x^2 = \frac{N\left(|ad - bc| - \frac{N}{2}\right)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} \qquad (๔)$$

๒. เมื่อ N อยู่ระหว่าง ๒๐ และ ๔๐ ใช้สูตร (๑) ได้ เมื่อความถี่ที่คาดหวังมากกว่า ๕ แต่ถ้าน้อยกว่า ๕ หรือ เมื่อ N น้อยกว่า ๒๐ ควรใช้ความน่าจะเป็นอย่างถูกต้องของฟิชเชอร์ (Fisher's Exact Test) ทดสอบ[๓]

------

[1] Taro Yamane, Statistics an Introduction Analysis, (New York: Harper & Row, 1967), p.618.

[2] William G. Cochran, " 2 Test of Goodness of Fit", The Annals of Mathematical Statistics, Vol.23, 1952, p.334.

[3] R.A. Fisher, Sir, Statistical Methods for Research Workers, (New York: Hafner Publishing Company Inc., 1958) pp.96-98.

๓. ในกรณีที่มีการคำนวณไคสแควร์ที่มีจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ ๑ หลายค่าแยกกันจะไม่ใช้ค่าแก้ของ เยท เพราะเมื่อนำมารวมกันแล้วจะทำให้ค่านั้นมีการประมาณที่ต่ำไป (Underestimate)

จากตัวอย่างที่ ๑ มีจำนวน N ทั้งหมด ๒๑๘ > ๔๐ ควรใช้ค่าแก้ของเยทได้ (วิธีการทดสอบเหมือนเดิม)

$$X^2 = \frac{N\left(|ad - bc| - \frac{N}{2}\right)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$$= \frac{\text{๒๑๘}\left(\text{๘๗} \times \text{๔๔} - \text{๒๓} \times \text{๖๔} - \frac{\text{๒๑๘}}{\text{๒}}\right)^{\text{๒}}}{\text{๑๑๐} \times \text{๑๐๘} \times \text{๑๔๑} \times \text{๖๗}}$$

$$= \frac{\text{๒๑๘}(\text{๒,๒๔๗})^{\text{๒}}}{\text{๑๒๐,๑๘๘,๘๖๐}} = \frac{\text{๒๑๘(๕,๐๔๙,๒๐๙}}{\text{๑๒,๐๑๘๘,๘๖๐}}$$

$$= \frac{\text{๑,๑๐๐,๗๒๗,๕๖๒}}{\text{๑๒๐,๑๘๘,๘๖๐}} = \text{๙.๑๖}$$

จากตารางภาคผนวก จ. ค่า $\chi^2_{1(.025)} = \text{๕.๐๒} < X^2_1 = \text{๙.๑๖}$ (การทดสอบชนิดสองทาง และ $\chi^2_{1(.005)} = \text{๗.๘๘} < X^2_1 = \text{๙.๑๖}$ การทดสอบมีนัยสำคัญที่ .๐๕ และ .๐๑ ดังนั้นตาม H_1: สรุปว่า ความแข็งแรงของขาและหลังมีความสัมพันธ์กับเพศของเด็กอายุ ๖ ขวบ

๖.๑.๔ ตารางการณ์จร r x c

การทดสอบไคสแควร์ไม่จำกัดอยู่แต่ในตาราง ๒ x ๒ ซึ่งเป็นทฤษฎีทวินาม (Binomial) แต่สามารถใช้ทดสอบกับกลุ่มตัวอย่างที่สิ่งที่ได้จากการสังเกตแบ่งออกเป็น ๓ ชนิด หรือมากกว่า ๓ ขึ้นไป พิจารณากลุ่มตัวอย่างที่สิ่งที่สังเกตได้มีเกณฑ์ในการจัดจำพวก ๒ เกณฑ์ A และ B ซึ่งมี r ชนิด สำหรับเกณฑ์ A และ C ชนิดสำหรับเกณฑ์ B เราสามารถสร้างเป็นตารางการณ์จร ดังตารางต่อไปนี้

		เกณฑ์ B								
		B_1	B_2	B_3	-	B_j	-	B_k		
เกณฑ์ A	A_1	n_{11}	n_{21}	n_{13}	-	n_{1j}	-	n_{1k}		$n_{1.}$
	A_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	-	n_{2j}	-	n_{2k}		$n_{2.}$
	A_3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	-	n_{3j}	-	n_{3k}		$n_{3.}$
	-	-	-	-	-	-	-	-		-
	A_i	n_{i1}	n_{i2}	n_{i3}	-	n_{ij}	-	n_{ik}		$n_{i.}$
	-	-	-	-	-	-	-	-		-
	A_r	n_{r1}	n_{r2}	n_{r3}	-	n_{rj}	-	n_{rk}		$n_{r.}$
		$n_{.1}$	$n_{.2}$	$n_{.3}$	-	$n_{.j}$	-	$n_{.k}$		n

ตารางที่ ๔ ลักษณะตารางการจัดรชนิด R x C

จำนวนสิ่งที่สังเกตได้ ในชนิดที่ i ของเกณฑ์ A ได้จากการรวมทุก C สดมภ์

$$n_{i.} = \sum_{j=1}^{C} n_{ij}$$

และจำนวนสิ่งที่สังเกตได้ในชนิดที่ j ของเกณฑ์ B ได้จากการรวมทุก r แถว

$$n_{.j} = \sum_{i=1}^{r} n_{ij}$$

ถ้าบวกทุก ๆ ช่องในตาราง

$$n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{C} n_{ij}$$

ในลักษณะเช่นนี้เราสามารถกำหนดได้ว่า เกณฑ์การจัดจำพวก ๒ เกณฑ์นั้นมีความสัมพันธ์กันหรือไม่ นั่นคือทดสอบว่าเป็นอิสระต่อกันหรือไม่ โดยการเปรียบเทียบความถี่ที่

คาดหวังและความถี่ที่สังเกตได้ จากสูตร (๑)

$$X^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

การหาความถี่ที่คาดหวัง

ความน่าจะเป็นของสิ่งที่สังเกตได้ที่อยู่ในชนิดที่ i ของ เกณฑ์ A นั้น สมมุติให้เป็น p_i

$$p_i = \frac{n_i}{n}$$

และ $$\sum_{i=1}^{r} p_i = \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i}{n} = ๑๐๐ \quad \text{---------} \quad (๕)$$

ในทำนองเดียวกันความน่าจะเป็นของสิ่งที่สังเกตได้ในชนิดที่ j ของ เกณฑ์ B นั้น สมมุติให้เป็น p_j

$$p_j = \frac{n_j}{n}$$

และ $$\sum_{j=1}^{k} p_j = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j}{n} = ๑๐๐ \quad \text{----------} \quad (๖)$$

เมื่อยอมรับว่าเกณฑ์ในการวัดจำพวก ๒ เกณฑ์นั้น มีความเป็นอิสระต่อกันแล้ว ความน่าจะเป็น p_{ij} ของสิ่งที่สังเกตได้ ในช่องที่ ij ของตารางจะเป็น

$$p_{ij} = p_i \cdot p_j$$

$$= \frac{n_i \cdot n_j}{n^2}$$

ถ้าคูณ p_{ij} ด้วย n เราจะได้ค่าความถี่ที่คาดหวัง

$$n_{ij} = np_i p_j$$

$$= \frac{n_{i\cdot} \, n_{\cdot j}}{n}$$

หรือ $$E_{ij} = \frac{n_i \cdot n_{\cdot j}}{n} \quad \text{----------} \quad (๗)$$

และ $\sum_{j=1}^{k} E_{ij} = n_{\bullet i}$

$\sum_{i=1}^{r} E_{ij} = n_{\bullet j}$ --------------- (๘)

ตัวอย่างที่ ๒ จากการวิจัยของ อุทัย เดชตานนท์[๑] เกี่ยวกับวันลาของครูโรงเรียนรัฐบาล เพื่อจะดูว่าจำนวนครูที่ลาป่วยและลากิจนั้นขึ้นอยู่กับเหตุผลในการเข้ามามีอาชีพเป็นครูหรือไม่

	ลาป่วย	ลากิจ	รวม
ชอบอาชีพครู	181	103	284
รับทุน	113	70	183
ไม่ทราบว่าจะมีอาชีพใดดี	35	21	56
ทำชั่วคราว	17	12	29
รวม	346	206	552

ตารางที่ ๔ ข้อมูลการทดสอบความเป็นอิสระในตารางการณ์จร ๔x๒

วิธีทำ

๑. สมมติฐาน H_o: การลาของครูไม่มีความสัมพันธ์กับเหตุผลในการเข้ามามีอาชีพเป็นครู

---

[๑]อุทัย เดชตานนท์, "การศึกษาความสูญเปล่าทางการศึกษาอันเนื่องมาจากวันลาของครูโรงเรียนรัฐบาลสังกัดกรมวิสามัญในจังหวัดพระนครธนบุรี ปีพุทธศักราช ๒๕๐๘" (<u>วิทยานิพนธ์มหาบัณฑิต</u> แผนกวิชาบริหารการศึกษา จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย ๒๕๐๙), หน้า ๖๐.

H_1 : การลาของครูสัมพันธ์กับเหตุผลในการเข้ามามีอาชีพเป็นครู

๒. การทดสอบทางสถิติ : ใช้ X^2 ทดสอบ เนื่องจากข้อมูลบรรจุในตารางการณ์จรเป็นความถี่ที่เป็นอิสระ

๓. การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่าง : X^2 ที่คำนวณได้จากสูตร (๑) มีการแจกแจงกลุ่มตัวอย่างซึ่งประมาณค่าการแจกแจง χ^2 ที่ df= (๔-๑) (๒-๑) = ๓

๔. ขอบเขตของการของการปฏิเสธ : เขตการปฏิเสธประกอบด้วยค่า X^2 ทั้งหมดที่มีค่ามาก $X^2 \geqslant \chi^2_{3(\alpha/2)}$ หรือ $X^2 \leqslant \chi^2_{3(1-\alpha/2)}$

๕. การตัดสิน

ค่า X^2 หาได้จากสูตร (๑)

$$X^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

และค่าความถี่ที่คาดหวังในแต่ละช่องจากสูตร (๘)

$$E_{ij} = \frac{n_{i.}\,n_{.j}}{n}$$

ดังนี้

$$E_{11} = \frac{๓๔๖ \times ๒๘๔}{๕๕๒} = ๑๗๘.๐๑ \qquad E_{12} = \frac{๒๐๖ \times ๒๘๔}{๕๕๒} = ๑๐๕.๙๙$$

$$E_{21} = \frac{๓๔๖ \times ๑๘๓}{๕๕๒} = ๑๑๔.๑๕ \qquad E_{22} = \frac{๒๐๖ \times ๑๘๓}{๕๕๒} = ๖๘.๒๙$$

$$E_{31} = \frac{๓๔๖ \times ๕๖}{๕๕๒} = ๓๕.๑๐ \qquad E_{32} = \frac{๒๐๖ \times ๕๖}{๕๕๒} = ๒๐.๙๐$$

$$E_{41} = \frac{๓๔๖ \times ๒๙}{๕๕๒} = ๑๘.๑๘ \qquad E_{42} = \frac{๒๐๖ \times ๒๙}{๕๕๒} = ๑๐.๘๒$$

	ลาป่วย		ลากิจ		รวม
ชอบอาชีพครู	181	178.01	103	105.99	284
รับทุน	113	118.15	70	68.41	183
ไม่ทราบว่าจะมีอาชีพใดดี	35	35.10	21	20.90	56
ทำชั่วคราว	17	18.18	12	10.82	29
รวม		346		206	552

ตารางที่ ๖ ความถี่ที่คาดหวังของข้อมูลในตารางการณ์จร ๔x๒

ค่า X^2 ที่คำนวณจากสูตร (๑)

$$X^2 = \frac{(\text{๑๘๑}-\text{๑๗๘.๐๑})^{\text{๒}}}{\text{๑๗๘.๐๑}} + \frac{(\text{๑๐๓}-\text{๑๐๕.๙๙})^{\text{๒}}}{\text{๑๐๕.๙๙}} + \frac{(\text{๑๑๓}-\text{๑๑๘.๑๕})^{\text{๒}}}{\text{๑๑๘.๑๕}} + \text{----} +$$

$$\frac{(\text{๑๒}-\text{๑๐.๘๒})^{\text{๒}}}{\text{๑๐.๘๒}} = \text{๐.๓๑๔๐}$$

จากตารางภาคผนวก จ. การทดสอบชนิดสองทาง $X_1^2 = \text{๐.๓๑๔๐} > \chi^2_{3(.995)} = \text{.๐๗๑๗}$ และ $X_1^2 = \text{๐.๓๑๔๐} > \chi^2_{1(.975)} = \text{.๒๑๖}$ ไม่มีนัยสำคัญที่ .๐๕ และ .๐๑ จึงยอมรับสมมติฐานสูญว่าการลาของครูนั้นไม่ขึ้นกับเหตุผลของการเข้ามาเป็นครู

๖.๑.๕ ค่าของความสัมพันธ์ (Degree of Association)

เนื่องจากการทดสอบความเป็นอิสระด้วยไคสแควร์นั้นไม่สามารถบอกขนาดสัมพันธ์ของเกณฑ์หรือตัวแปร ๒ ตัวได้ แต่มีวิธีอื่นที่จะนำไปใช้หาความสัมพันธ์สำหรับตาราง ๒x๒ ที่ข้อมูลแยกออกจากกันโดยสิ้นเชิง (Dichotomy) นั้น ใช้ค่าสัมประสิทธิ์ไฟ (ϕ= Phi) ซึ่งมีค่าตั้งแต่ ๐ ถึง ๑ ค่า ๐ เป็นค่าที่บอกความสัมพันธ์ต่ำสุด ๑ เป็นค่าบอกความสัมพันธ์สูงสุด ที่ต้องใช้ค่าสัมประสิทธิ์ ϕ ทดสอบเนื่องจากเราไม่สามารถจะชี้หรือสังเกตทิศทาง

ของความสัมพันธ์จากค่าความถี่ที่สังเกตได้และความถี่ที่คาดหวัง[1] ค่าสัมประสิทธิ์ ϕ มีประโยชน์ในการหาค่าสหสัมพันธ์ระหว่างข้อของแบบทดสอบ ถ้า ϕ สูง แสดงว่าข้อสอบนั้นมีความสัมพันธ์กันสูงสามารถใช้แทนกันได้ หรือตัดข้อใดข้อหนึ่งทิ้ง

$$\phi = \sqrt{\frac{X^2}{N}} \quad \text{--------------} \quad (๙)$$

N คือ จำนวนกรณีทั้งหมดของสิ่งที่สังเกตได้

จากตัวอย่างที่ ๑ $X^2 = ๑๐.๐๘$

$$\phi = \sqrt{\frac{X^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{(๑๐.๐๘)^๒}{๒๑๘}}$$

$$= \sqrt{.๔๖} \qquad = .๖๙๕$$

สรุปได้ว่าความแข็งแรงของขาและหลังมีความสัมพันธ์กับเพศของเด็กอายุ ๖ ขวบค่อนข้างสูง

สำหรับข้อมูลที่บรรจุในตารางการณ์จรชนิดอื่นที่เกณฑ์ในการจัดจำพวกมากกว่า ๒ ชนิดขึ้นไป มักจะใช้ ค่าสัมประสิทธิ์ C (Contingency Coefficient)

$$C = \sqrt{\frac{X^2}{X^2+N}} \quad \text{--------------} \quad (๑๐)$$

ค่าของ C นี้จะเปลี่ยนไปตามการจัดจำพวกในระหว่าง ๒ ตัวแปรนั้น และใช้

---

[1] Sanford Dornbuch and Calvin F. Schimd. A Premier of Social Statistics, (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1955), p.209.

ได้ดีสำหรับตัวแปรที่แบ่งการจัดจำพวกตั้งแต่ ๕ ชนิดขึ้นไป[1] ค่าของ C จะเป็นบวกอยู่เสมอ เช่น ในการออกแบบสอบถามหยั่งเสียงความคิดเห็น เพื่อดูว่าระดับของการศึกษาที่ต่างกันจะมีความเห็นต่อการหยั่งเสียงแตกต่างกันหรือไม่ โดยใช้กลุ่มตัวอย่างทั้งหมด ๒๕๐ คน แบ่งออกเป็นพวกจบปริญญา ๙๕ คน จบเตรียมอุดมศึกษา ๗๐ คน และจบประถมศึกษา ๘๕ คน ใช้ X^2 สูตร (๑) ทดสอบความเป็นอิสระ ได้ค่า X^2 = มีนัยสำคัญที่ระดับ .๐๕ และ .๐๑ และต้องการทราบว่ามีความสัมพันธ์กันอย่างไร ใช้สูตร (๑๐)[2]

$$C = \sqrt{\frac{๕๓.๓๘}{๕๓.๓๘ + ๒๕๐}}$$

$$= .๔๒$$

ค่าสหสัมพันธ์อยู่ในเกณฑ์ที่ใช้ได้ ไม่สูงจนเกินไปนัก

อาดัมส์[3] (Kennedy Joe Adam) และแครมเมอร์[4] (Harold Cramer) กล่าวว่า เราสามารถหาค่าองศาของความสัมพันธ์ในตารางการณ์จรได้ คือ

$$\text{ค่าประมาณของสหสัมพันธ์} = \frac{X^2}{n(q-1)} \quad \text{----------} \quad (๑๑)$$

เมื่อ q คือค่าแถวหรือสดมภ์ที่น้อยที่สุด และค่าความสัมพันธ์นี้อยู่ระหว่าง ๐ ถึง ๑ เท่านั้น

n คือขนาดของสิ่งที่สังเกตได้ทั้งหมดในตาราง เช่น จากตัวอย่างที่ ๑

---

[1] Ibid., p. 209.

[2] Allen L. Edwards, Statistical Methods for the Behavioral Sciences, (New York: Holt, Rinehart and Winston, 1961), p.382.

[3] Kennedy Joe Adam, Base Statistical Concept, (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1955), p.136.

[4] Harold Cramer, Mathematical Methods of Statistics, (Princeton University Press, 1946), p. 443.

ค่าแก้ X^2 = ๙.๑๖ ต้องการทราบว่ามีสหสัมพันธ์เท่าไร ใช้สูตร (๑๑)

$$\text{สหสัมพันธ์} = \frac{๙.๑๖}{๒๑๘(๒-๑)} = .๔๒๐$$

ซึ่งเป็นค่าโดยประมาณเท่านั้น แต่การใช้ควรใช้ ϕ หรือ C หาสหสัมพันธ์จะได้ค่าที่ถูกต้องกว่า

๖.๒ การทดสอบความเป็นเอกพันธุ์ของข้อมูล (Test of Homogeneity of Varainces)

การทดสอบความเป็นเอกพันธุ์ของข้อมูล เป็นการทดสอบว่าข้อมูลแต่ละชุดที่หยิบมานั้นมีการกระจายเหมือนกันหรือไม่ เช่น มีความแปรปรวนเท่ากัน มีสัดส่วนในแต่ละแถวหรือสดมภ์เท่ากัน หรือมีมัชฌิมเท่ากัน เป็นต้น ตามปกติการทดสอบความเป็นเอกพันธุ์ของข้อมูลนั้นมักใช้ F test ซึ่งเกี่ยวข้องกับโค้งปกติ ในกรณีที่เกี่ยวข้องกับการแจกแจงทฤษฎีทวินาม (Binomial Distribution) หรือพัวซอง เรามักใช้ไคสแควร์ทดสอบความเป็นเอกพันธุ์ของข้อมูล[1]

๖.๒.๑ การทดสอบค่าความแปรปรวนเดี่ยว (Single Varaince)

การทดสอบค่าความแปรปรวนเดี่ยว เป็นการทดสอบว่า ค่าความแปรปรวนที่ได้มานั้นมีค่าเท่ากับความแปรปรวนประชากรอย่างมีนัยสำคัญหรือไม่

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

ค่า σ_0^2 นั้นเป็นจำนวนที่กำหนดค่าเป็นบวก และในการตั้งสมมติฐานสำรองจะเป็นได้ทั้งชนิดทางเดียวและสองทางขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหา ในการนี้ต้องประมาณค่า s^2 จากกลุ่มตัวอย่าง จะได้ค่าสถิติ

---

[1] Jerome C.R. Li, Statistical Inference, (Michigan:Edwards Brothers, Inc., C 1964), p.467.

$$\chi^2_{(N-1)} = \frac{(N-1)s^2}{\sigma_0^2} \quad \text{-------------- (๑๒)}$$

หรือ $$= \sum \frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_0^2}$$

n = ขนาดของกลุ่มตัวอย่าง

s^2 = ความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่าง

σ_0^2 = ความแปรปรวนของประชากร

วิธีการ

๑. คำนวณหาค่าความแปรปรวน s^2 ของตัวอย่าง

๒. คำนวณค่า $\chi^2 = \frac{(N-1)s^2}{\sigma_0^2}$

ตัวอย่างที่ ๓ มีข้อสังเกตบางประการที่ทำให้เชื่อว่าเด็กนักเรียนหญิงมีความสามารถในการเรียนวิชาออกแบบด้อยกว่าเด็กนักเรียนชาย จากผลการทดสอบปรากฏว่าคะแนนของเด็กนักเรียนชายมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ ๒.๕ และจากการสุ่มหยิบคะแนนของนักเรียนหญิง ๓๐ คน มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน = ๔.๕๕ อยากทราบว่านักเรียนหญิงมีความสามารถในการออกแบบด้อยกว่าเด็กนักเรียนชายหรือไม่ (ข้อมูลสมมติ)

วิธีทำ

๑. ตั้งสมมติฐาน H_0: ความแปรปรวนของคะแนนเด็กนักเรียนหญิงเท่ากับของนักเรียนชาย $\sigma_{ญ}^2$ = ๖.๒๕ (.๒๕)^๒

H_1: ความแปรปรวนของคะแนนเด็กนักเรียนหญิงมากกว่านักเรียนชาย $\sigma_{ญ}^2$ > ๖.๒๕

๒. การทดสอบทางสถิติ : ใช้ χ^2 ทดสอบ

๓. การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่าง: จะคำนวณจากสูตร (๑๕) โดยถือการแจกแจงของกลุ่มตัวอย่างเป็น

χ^2 ที่ df = ๓๐-๑ = ๒๙

๔. ขอบเขตของการปฏิเสธ : เนื่องจากเป็นการทดสอบทางเดียวทางด้านซ้ายมือของการกระจาย ดังนั้นขอบเขตของการปฏิเสธจึงประกอบด้วยค่าของ

$\chi^2_{29(\alpha/2)} \geq x^2_{29}$

๕. การตัดสิน

ค่า x^2 จากสูตร (๑๒)

$$x^2 = \frac{(N-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

$$x^2_{29} = \frac{(๓๐-๑)(๔.๕๕)}{๖.๒๕} = ๒๑.๑๑$$

จากภาคผนวก จ. ค่าของ $\chi^2_{29(.01)}$ = ๔๙.๖ $\geq x^2_{29}$ = ๒๑.๑๑ และ $\chi^2_{29(.05)}$ = [illegible].๖ $\geq x^2_{29}$ = ๒๑.๑๑ ดังนั้น ค่าของ x^2 = ๒๑.๑๑ จึงไม่มีนัยสำคัญที่ .๐๕ และ .๐๑ สรุปว่า นักเรียนชายและนักเรียนหญิงมีความสามารถในการออกแบบ เหมือนกัน

๖.๒.๒ การทดสอบความเอกพันธ์ของการแจกแจงแบบทวินามด้วยไคสแควร์ (χ^2 test of Homogeneity of A Binomial Series)

สมมติว่าข้อมูลประกอบด้วยสิ่งที่ต้องการ (Success) แทนด้วย $x_1, x_2, ---, x_k$ จากการทดลองที่เป็นอิสระ n ครั้ง ในตารางจะได้

	การทดลอง				รวม
สิ่งที่ต้องการ (Success)	x_1	x_2	----	x_k	$k\bar{x}$
ไม่ต้องการ (Failure)	$n-x_1$	$n-x_2$	----	$n-x_k$	$k(n-\bar{x})$
การทดลองทั้งหมด	n	n	----	n	nk

ตารางที่ ๗ ลักษณะตารางการทดสอบความเป็นเอกพันธุ์ของการแจกแจง แบบทวินาม

ต้องการทดสอบสมมติฐานว่า ความน่าจะเป็นทุก ๆ การทดลองเป็นค่าคงที่ p ความน่าจะเป็นของการได้ค่าเฉพาะของกลุ่มตัวอย่างที่ข้อตกลงที่ว่าสมมติฐานเป็นจริงคือ[1]

$$P = \prod_{i=1}^{k} \frac{n!}{x_i!(n-x_i)!} \; p^{x_i} q^{n-x_i}$$

เมื่อ $\prod_{i=1}^{k}$ = ผลคูณของ p_i, i=1, 2, --- k

p = ความน่าจะเป็นของสิ่งที่ต้องการ

q = ความน่าจะเป็นของสิ่งที่ไม่ต้องการ (1-p)

ค่าประมาณสูงสุดของ p คือ $\bar{x}/n$ ดังนั้นค่าความถี่ที่คาดหวังของแต่ละสิ่งที่ต้องการคือ $np = \bar{x}$ และแต่ละสิ่งที่ไม่ต้องการ $nq = (n-\bar{x})$

---

[1] R.L. Anderson and T.A. Bancroft, Statistical Theory in Research, (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., C 1952), p.138.

พิจารณา

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i-\bar{x})^2}{\bar{x}} + \sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i-\bar{x})^2}{n-\bar{x}} = (\frac{1}{\bar{x}} + \frac{1}{n-\bar{x}})\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2 \text{----(i)}$$

เราสามารถเขียน (i) ให้อยู่ในรูป

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i-\bar{x})^2}{\bar{x}(1-\frac{\bar{x}}{n})} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i-np)^2}{npq}$$

เมื่อ $n \to \infty$, $\sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i-np)^2}{npq}$ จะมีการแจกแจงแบบ χ^2 มี $df = k-1$

ดังนั้นสูตรสำหรับทดสอบความเป็นเอกพันธุ์ของข้อมูลทฤษฎีทวินามคือ

$$X^2 = n \sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i-\bar{x})^2}{\bar{x}(n-\bar{x})}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i-np)^2}{npq} \quad \text{----------------} \quad (๑๓)$$

การใช้ X^2 ทดสอบความเป็นเอกพันธุ์ของข้อมูลคล้ายคลึงกับการใช้ทดสอบเป็นอิสระ การตั้งสมมติฐานแตกต่างกัน สถิติที่ใช้เหมือนกัน แต่ยังมีข้อแตกต่างที่สำคัญเห็นได้ง่ายคือ ในการทดสอบความเป็นอิสระของข้อมูล ข้อมูลได้มาจากกลุ่มประชากรเดียวกัน ขณะที่การทดสอบความเป็นเอกพันธุ์ของข้อมูลนั้นแต่ละกลุ่มตัวอย่างมาจากกลุ่มประชากรหลายกลุ่ม ข้อสังเกตสำหรับ ๒ กรณีนี้คือ การทดสอบความเป็นอิสระทั้งแถวและสดมภ์ ค่ารวมริมสุด (Marginal Total) ไม่ได้กำหนดล่วงหน้า ได้มาอย่างบังเอิญ แต่การทดสอบความเป็นเอกพันธุ์ผลบวกด้านแถวเป็นจำนวนที่เลือกขึ้นมาด้วยการกำหนด

ตัวอย่างที่ ๔ การทดสอบความเป็นเอกพันธุ์ในสัดส่วน

สมมติว่ากลุ่มตัวอย่างที่ส่งมาจากนักศึกษามหาวิทยาลัย ๓ กลุ่ม กลุ่มแรกประกอบ

---

[1] William C. Guenther, Concepts of Statistical Inference, (New York: McGraw-Hill Book Company, C 1965), p.191.

ด้วยนักศึกษาชายที่เป็น ชั้นต่ำ (Lower Classmen) ๓๐๐ คน กลุ่มสองชั้นสูงขึ้นมา ๒๐๐ คน และกลุ่มที่ ๓ เป็นผู้ที่จบปริญญา ๑๐๐ คน แต่ละคนถูกเลือกให้ตอบคำถาม ๓ คำถามที่ตรงกับความรู้สึกของเขามากที่สุด คือ

๑. อาจารย์ผู้สอนหวังผลงานจากนักศึกษามากเกินไป

๒. อาจารย์ผู้สอน ให้งานแก่นักศึกษาน้อยไป

๓. อาจารย์ผู้สอนหวังผลงานเกี่ยวกับสิ่งที่เรียนเหมาะสม

ผลของการตอบคำถามบรรจุอยู่ในตาราง

	ให้งานมากเกินไป	งานน้อยไป	ให้งานเหมาะสม	รวม
นักศึกษาชั้นต่ำ	182	85	33	300
นักศึกษาชั้นสูง	68	60	72	200
ผู้สำเร็จปริญญา	32	53	15	100
รวม	282	198	120	600

ตารางที่ ๘ ข้อมูลการทดสอบความเป็นเอกพันธุ์ในสัดส่วน

การวิเคราะห์ข้อมูล

๑. ตั้งสมมติฐาน H_o : สัดส่วนความคิดเห็นต่อคำถามการให้คะแนนของนักศึกษาระดับต่าง ๆ เท่ากัน $p_{11}=p_{21}=p_{31}$, $p_{12}=p_{22}=p_{32}$, $p_{13}=p_{23}=p_{33}$

H_1 : สัดส่วนความคิดเห็นต่อคำถามการให้คะแนนของนักศึกษาระดับต่าง ๆ ไม่เท่ากัน $p_{11}\neq p_{21}\neq p_{31}$, $p_{12}\neq p_{22}\neq p_{32}$, $p_{13}\neq p_{23}\neq p_{33}$

๒. การทดสอบทางสถิติ : ใช้ X^2 ทดสอบข้อมูลโดยยอมรับ H_0 นี้เป็นจริง เพราะข้อมูลเป็นความถี่ที่บรรจุในตารางการณ์จร สมาชิกทุกตัวหยิบมาอย่างสุ่มและเป็นอิสระต่อกัน ใช้การทดสอบชนิดสองทาง

๓. การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่าง : การแจกแจงความถี่ของกลุ่มตัวอย่าง โดยประมาณเป็น χ^2 ที่ df = (๓-๑)(๓-๑) = ๔

๔. ขอบเขตของการปฏิเสธ : ประกอบด้วยค่าของ $X_4^2 \geq \chi^2_{4(\alpha/2)}$ หรือ $X_4^2 \leq \chi^2_{4(1-\alpha/2)}$

๕. การตัดสินใจ

คำนวณหา E_i

$$\frac{(๒๘๒)(๓๐๐)}{๖๐๐} = ๑๔๑ \quad \frac{(๑๙๘)(๓๐๐)}{๖๐๐} = ๙๙ \quad \frac{(๑๒๐)(๓๐๐)}{๖๐๐} = ๖๐$$

$$\frac{(๒๘๒)(๒๐๐)}{๖๐๐} = ๙๔ \quad \frac{(๑๙๘)(๒๐๐)}{๖๐๐} = ๖๖ \quad \frac{(๑๒๐)(๒๐๐)}{๖๐๐} = ๔๐$$

$$\frac{(๒๘๒)(๑๐๐)}{๖๐๐} = ๔๗ \quad \frac{(๑๙๘)(๑๐๐)}{๖๐๐} = ๓๓ \quad \frac{(๑๒๐)(๑๐๐)}{๖๐๐} = ๒๐$$

ดังนั้นจากสูตร (๑)

$$X_4^2 = \frac{(๑๘๒-๑๔๑)^๒}{๑๔๑} + \frac{(๘๕-๙๙)^๒}{๙๙} + - - - + \frac{(๕๓-๓๓)^๒}{๓๓} + \frac{(๑๕-๒๐)^๒}{๒๐}$$

$$= ๑๑.๙๒ + ๑.๙๘ + ๑๒.๑๕ + ๙.๑๙ + .๕๕ + ๒๕.๖๐ + ๔.๗๙ + ๒.๑๒ + ๑.๒๕$$

$$= ๗๗.๕๕$$

จากตารางภาคผนวก จ. ค่า $X_4^2 = ๗๗.๕๕ > \chi^2_{4(.025)} = ๑๑.๑$ และ $X_4^2 > \chi^2_{4(.005)} = ๑๔.๙$

จึงปฏิเสธสมมุติฐานสูญ นั่นคือความคิดเห็นของนักศึกษาเกี่ยวกับการให้งานแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญที่ .๐๕ และ .๐๑ คำถามที่ให้งานมากไปนั้น นักศึกษาระดับต่ำตอบว่าให้มากกว่านักศึกษาระดับอื่น แต่นักศึกษาชั้นสูง คิดว่าให้งานเหมาะสมมากที่สุด

ในกรณีที่มัชฌิมของกลุ่มตัวอย่างหลายกลุ่มที่ได้จากกลุ่มประชากรแบบทวินามซึ่งมีการแจกแจงเป็นโค้งปกติโดยประมาณที่มีค่ามัชฌิมเท่ากับ np ค่าความแปรปรวนเท่ากับ npq และมัชฌิม (np) ขนาดต่าง ๆ ของกลุ่มตัวอย่างหลายกลุ่มอาจจะคิดเป็นจำนวนสิ่งที่สังเกตได้ (Y) k สิ่งที่ได้มาจากการกลุ่มประชากรที่มีการแจกแจงเป็นโค้งปกติที่มีมัชฌิม μ และความแปรปรวนเท่ากับ σ^2/n จากจุดนี้เราจะได้ค่าสถิติ[1]

$$X^2 = \sum^{k}\frac{(Y-np)^2}{npq} = n\sum^{k}\frac{(Y-np)^2}{pq} = \frac{\text{among sample SS}}{\mu(1-\mu)}$$

มีการแจกแจงแบบ χ^2 ที่มีจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ k-1

วิธีที่ง่ายในการคำนวณผลบวกกำลังสองระหว่างกลุ่มตัวอย่าง (Among Sample SS) คือ

$$\sum\frac{T^2}{n} - \frac{G^2}{n} = \frac{T_1^2}{n_1} + \frac{T_2^2}{n_2} + \cdots + \frac{T_2^2}{n_k} - \frac{G^2}{n} \qquad (๑๔)$$

n คือจำนวนความถี่ในแต่ละรายการ

T_i; i=1--k คือค่าความถี่ในผลที่ต้องการ (Success) และ G ถือค่าความถี่รวมของผลที่ต้องการ และถ้ากลุ่มตัวอย่างมีขนาดเท่ากัน

$$\frac{\sum T^2}{n} - \frac{G^2}{kn} = \frac{T_1^2+T_2^2+\cdots+T_k^2}{n} - \frac{G^2}{kn} \qquad (๑๕)$$

---

[1] Jerome C.R. Li, Statistical Inference, (Michigan: Edwards Brothers, Inc., c 1964), p.445.

วิธีการ ๑. ใส่ความถี่ของผลที่ต้องการ (Success) และที่ไม่ต้องการในแต่ละสดมภ์จนถึง k แถว

๒. หาค่าความถี่ทั้งหมดในแต่ละแถว และสดมภ์

๓. คำนวณหาค่าผลบวกกำลังสองระหว่างกลุ่ม (Among Sample SS) โดยใช้สูตร (๑๕)

๔. คำนวณค่า X^2 โดยใช้สูตร (๑๗)

๕. พิจารณาค่า X^2 มีนัยสำคัญที่ระดับใด

ตัวอย่างที่ ๕ การทดสอบความเป็นเอกพันธุ์ของข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบทวินาม[1]

ในการศึกษาเรื่องความยากของข้อสอบไล่พีชคณิตพบว่า เปอร์เซ็นต์ของผู้ที่ตอบถูกในข้อใดข้อหนึ่งนั้น แปรตามโรงเรียนหนึ่งไปอีกโรงเรียนหนึ่ง จึงสนใจว่าความแปรผันนั้นเป็นไปโดยบังเอิญ (Chance) หรือชี้ให้เห็นถึงความยากของข้อสอบ จากตารางข้างล่างนี้เป็นคำถามข้อหนึ่งที่เด็กตอบถูกและผิดจากโรงเรียน ๑๐ โรง

---

[1] E.F. Lindquist, Statistical Analysis in Educational Research, Boston: Houghton Miffin Company, C 1940), p.44-45.

S.S.	ตอบถูก T	ตอบผิด	รวม n	R^2/T
1	5	15	20	1.2500
2	20	23	43	9.3023
3	32	62	94	10.8936
4	23	13	36	14.6944
5	18	41	59	5.4915
6	45	62	107	18.9252
7	9	19	28	2.8929
8	34	42	76	15.2105
9	11	31	42	2.8810
10	16	65	81	3.1605
รวม	213(G)	373	586	84.7019

ตารางที่ ๙ ข้อมูลการทดสอบความเป็นเอกพันธ์ของการแจกแจงแบบทวินาม

วิธีทำ

๑. ตั้งสมมุติฐาน H_o: เด็กนักเรียนแต่ละโรงเรียนทำข้อสอบพีชคณิตได้เหมือนๆ กัน $\mu_1 = \mu_2 = - - - - = \mu_{10}$

H_1: เด็กนักเรียนแต่ละโรงเรียนทำข้อสอบพีชคณิตได้ไม่เหมือนกัน $\mu_1 \neq \mu_2 \neq - - - \neq \mu_{10}$

๒. การทดสอบทางสถิต: ใช้ X^2 ทดสอบความเป็นเอกพันธุ์ของข้อมูล เนื่องจากการแจกแจงข้อมูลเป็นแบบทวินาม

๓. การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่าง : จะคำนวณจากสูตร (๑๗) โดยถือว่ามีการแจกแจงเป็น χ^2 ที่ df = (๒-๑)(๑๐-๑) = ๙

๔. ขอบเขตของการปฏิเสธ : ค่าของ X^2 ที่มีค่ามากที่สุดที่ใช้การทดสอบชนิดสองทาง $X_9^2 \geqslant \chi^2_{9(\alpha/2)}$ หรือ $X_9^2 \leqslant \chi^2_{9(1-\alpha/2)}$

๕. การตัดสิน

ค่า X^2 หาได้จากสูตร (๑๕)

$$X^2 = \frac{\text{among sample SS}}{pq}$$

$$\text{among sample} = \frac{๕^2}{๒๐} + \frac{๒๐^2}{๔๓} + --- + \frac{๑๖^2}{๔๑} - \frac{๒๑๗^2}{๕๘๖}$$

$$= ๗.๒๘๐๕$$

$$X^2 = \frac{๗.๒๘๐๕}{(.๓๖๓๔๘)(.๖๓๖๕๒)} = ๓๑.๔๗$$

จากตารางภาคผนวก จ. $X_9^2 = ๓๑.๔๗ > \chi^2_{9(.025)} = ๑๙.๐$; $X_9^2 = ๓๑.๔๗ > \chi^2_{9(.005)} = ๒๓.๖$ มีนัยสำคัญที่ระดับ .๐๕ และ .๐๑ สรุปว่า เด็กนักเรียนแต่ละโรงเรียนทำข้อสอบพีชคณิตได้ไม่เหมือนกัน

๖.๓ การทดสอบสภาวะสารูปสนิทดี (Test of Goodness of Fit)

การทดสอบสภาวะสารูปสนิทดี หมายถึง การทดสอบตารางที่บรรจุความถี่ที่สังเกตได้นั้น เป็นกลุ่มสมาชิกที่สมนัยกับความถี่ที่คาดหวังตามที่สมมุติฐานกำหนดไว้หรือไม่ ถ้าได้กลุ่มข้อมูลอยู่กลุ่มหนึ่งมา เราจำเป็นต้องชี้ให้เห็นว่ากลุ่มข้อมูลนั้นได้มามีลักษณะการแจกแจงอย่างไร มีความเหมาะและใกล้เคียงกับข้อมูลเดิมหรือไม่ เปียร์สัน (Karl Pearson) มีความคิดว่า นักวิจัยมักจะยอมรับข้อมูลที่ได้มานั้นเป็นข้อมูลที่มีการแจกแจงเป็นโค้งปกติอย่างเดียวทั้งๆ

ที่มีการกระจายแบบอื่นอีก[1] การทดสอบสภาวะสารูปสนิทสุดสามารถทดสอบกับการแจกแจงของมัลติโนเมียล (Multinomial) นัยหนึ่งก็คือ มีสิ่งที่สังเกตได้จำนวน N แต่ละค่าจะบรรจุอยู่ในหนึ่งชั้นของจำนวน k ชั้น ซึ่งมีความน่าจะเป็น p_i, $i = 1,2, - - -,k$, ในกรณีที่ง่ายที่สุด ความน่าจะเป็น p_i อาจจะกำหนดโดยสมมุติฐาน เช่น มีจำนวนชั้น k ความน่าจะเป็นในแต่ละชั้นเท่ากับ $\frac{1}{k}$ อย่างไรก็ตาม ค่า p_i นี้จะเป็นตัวพารามิเตอร์ที่อาจกำหนดหรือไม่ได้กำหนดจากสมมุติฐานก็ได้ ในบางกรณีต้องคำนวณจากข้อมูล

ผู้วิจัยใช้ไคสแควร์เพื่อทดสอบสภาวะสารูปสนิทดี เพื่อตัดสินใจว่ากลุ่มตัวอย่างประชากรนั้นมีการกระจายเป็นรูปใด เราอาจสนใจว่าการกระจายของคะแนนที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบางทฤษฎีมีการกระจายเป็นโค้งปกติ มีมัชฌิม μ และมีความแปรปรวน σ^2 หรือไม่ เช่น ทฤษฎีเกี่ยวกับเกณฑ์ภาคเชาวน์เชื่อว่า สติปัญญาของคนนั้นมีการกระจายเป็นโค้งปกติ และต้องการทดสอบว่าบุคคลที่กระทำผิดอยู่ในสถานกักกันจะมีสติปัญญากระจายเป็นโค้งปกติด้วยหรือไม่

อย่างไรก็ตามต้องไม่ลืมว่าการกระจายของประชากรนั้นสามารถจัดเป็นกลุ่มเป็นช่วง ๆ ได้ และจำนวนความถี่ที่คาดหวังในแต่ละชั้นต้องมีขนาดใหญ่ ดังนั้น ผู้วิจัยต้องตัดสินใจในการกำหนดจำนวนชั้นและช่วง เพื่อหาค่าความถี่ที่คาดหวังและความถี่ที่เป็นจริง โคแครน[๒] (William G. Cochran)ได้เสนอว่าในการปฏิบัติทั่ว ๆ ไปมักจะใช้จำนวนชั้นระหว่าง ๑๐ - ๒๕ ชั้น และมีช่วงระหว่างชั้นเท่ากัน ในกรณีที่ทำให้ช่วงระหว่างชั้นเท่ากันจะทำให้ง่ายต่อการใส่ความถี่ ช่วงที่เท่ากันนี้ ไม่ได้เป็นเครื่องกำหนดอำนาจการทดสอบของไคสแควร์ เพียงแต่แนะนำว่าเป็นขบวนการที่ดีเท่านั้น การทดสอบสภาวะรูปสนิทดี เราต้องคำนวณหาค่าคงที่บางค่า เช่น มัชฌิม ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เป็นต้น เพื่อกำหนด

---

[1] H.O. Lancaster, The Chi-Squared Distribution, (New York: John Wiley & Sons, Inc., C 1969), p. 37.

[2] William G. Cochran, " [2] Test of Goodness of Fit" The Annals of Mathematical Statistics, Vol.35, (1952), pp.332-33.

ความโค้งที่เหมาะสม แล้วหาขอบเขตของชั้นที่จะให้ค่าความถี่ในแต่ละชั้น พร้อมทั้งนับจำนวนความถี่ที่สังเกตได้ x_i ที่อยู่ในแต่ละชั้นตามลำดับ ค่าของที่ได้

$$X^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

อย่างไรก็ตามจำนวนชั้น ควรแปรตามขนาดของข้อมูลถ้าข้อมูลมีขนาดใหญ่ ก็ควรให้ให้มีจำนวนชั้นมากขึ้นด้วย ถ้าขนาดข้อมูลน้อย จำนวนชั้นก็ต้องน้อยตามด้วย ในกรณีที่ช่วงอันตรภาคชั้นไม่เท่ากัน เราคำนวณความถี่ที่คาดหวังจากพื้นที่ใต้โค้งปกติ หรือจากสูตรการกระจายของค่าสถิติพัวซอง (Possion) หรือทฤษฎีทวินาม (Binomial)

การทดสอบสภาวะสารูปสนิทดีใช้ทดสอบสภาวะสารูปสนิทดีของกลุ่มตัวอย่างว่าหยิบมาจากกลุ่มประชากรที่เป็น โค้งปกติ, พัวซอง, หรือทฤษฎีทวินาม (Normal, Poisson, Binomial) เป็นต้น ในการวิจัยนี้จะใช้ไคสแควร์ทดสอบสภาวะสารูปสนิทดีของโค้งปกติ, พัวซอง, ทฤษฎีทวินาม โดยใช้สูตร (๑) ที่มีจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ k (k คือจำนวนชั้น) ลบด้วยจำนวนค่าที่ต้องประมาณค่า เช่น ในการทดสอบสภาวะสารูปสนิทดีของการแจกแจงโค้งปกติ จำเป็นต้องประมาณค่า $\bar{X}$ จาก μ, S.D จาก σ ดังนั้นจึงมีจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ k-1-2 = k-3

ข้อตกลงเบื้องต้นสำหรับการทดสอบสภาวะสารูปสนิทดี[1]

๑. สิ่งที่ได้จากการสังเกตแต่ละสิ่งจะอยู่ในชั้นหนึ่งชั้นเดียวเท่านั้น

๒. ผลที่เกิดจากสิ่งที่สังเกตได้จะต้องเป็นอิสระจากกัน

๓. กลุ่มตัวอย่างที่หยิบมาจากประชากร ควรมีขนาดใหญ่ N ควรมากกว่า ๕๐

๔. ค่าความถี่ที่คาดหวังในแต่ละชั้นไม่ควรน้อยกว่า ๕ ถ้าน้อยกว่า ๕ ให้รวมจำนวนชั้นนั้นให้เป็นชั้นเดียว

---

[1] William L. Hays, Statistics, (New York: Holt, Rinehart and Winston, C 1963), p.583.

๕. นอกนั้นเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นทั่วไปของไคสแควร์

วิธีการ

๑. กำหนดจำนวนชั้นความถี่และอันตรภาคชั้นให้เหมาะกับขนาดของข้อมูลแล้วใส่ความถี่ แล้วหามัชฌิม และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ x_i

๒. คำนวณความถี่ที่คาดหวังในแต่ละชั้น ถ้าเป็นการทดสอบสภาวะสารูปสนิทดีของโค้งปกติความถี่ที่คาดหวังจะหาได้จากการเปลี่ยน x_i ให้เป็นคะแนนมาตรฐาน $Z=\frac{x-\mu}{\sigma}$ ได้แล้วเปิดหาค่าความน่าจะเป็นจากตารางพื้นที่ใต้โค้งปกติ (ภาคผนวก ฉ) คูณด้วยขนาดของกลุ่มตัวอย่าง N จะได้ความถี่ที่คาดหวัง E_i

ถ้าเป็นการทดสอบสภาวะสารูปสนิทดี ทฤษฎีทวินาม ค่าความถี่ที่คาดหวังได้จากสูตร

$$p(x) = \binom{N}{x} p^{x}(1-p)^{N-x} \quad ; \quad x = ๐, ๑, ๒, ---$$

เป็นความน่าจะเป็นที่จะได้ X ในการทำ N ครั้ง และความน่าจะเป็น p(x) นั้น คูณด้วย N จะได้ความถี่ที่คาดหวัง E_i

หรือสำหรับการทดสอบสภาวะสารูปสนิทดีพัวซอง (Possion) คำนวณความถี่ที่คาดหวังได้จาก

$$p(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} \quad ; \quad x = ๐, ๑, ๒, ---$$

$$\mu = \text{มัชฌิม} = np$$

$$e = ๒.๗๑๘$$

แล้วคูณ p(x) ซึ่งเป็นความน่าจะเป็นด้วยขนาดของกลุ่มตัวอย่าง N

๓. ตั้งสมมุติฐานสูญและสมมุติฐานสำรอง

๔. กำหนดระดับความมีนัยสำคัญและขอบเขตค่าวิกฤต

๕. คำนวณค่า $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$

ตัวอย่างที่ ๖ การแจกแจงของคะแนนทดสอบจิตวิทยาชุดหนึ่ง มีมัชฌิม ๖๐.๑ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ ๑๐.๒ การกระจายของคะแนนเป็นดังนี้[1]

Interval ขีดจำกัด	n_i ความถี่	Upper Limit ขีดจำกัดบน	x ส่วนเบี่ยงเบนจากมัชฌิม	Z คะแนนมาตรฐาน	ความน่าจะเป็นสะสม	ความน่าจะเป็นของคะแนนแต่ละช่วง	ความถี่ที่คาดหวัง	
85-89	2	89.5	29.4	-	-	.0084	.8	
80-84	1	84.5	24.4	2.39	.9916	.0203	2.0	7.9
75-79	4	79.5	19.4	1.90	.9713	.0506	5.1	
70-74	9	74.5	14.4	1.41	.9207	.0995	10.0	
65-69	13	69.5	9.4	.92	.8212	.1548	15.5	
60-64	26	64.5	4.4	.43	.6664	.1903	19.0	
55-59	19	59.5	- .6	-.06	.4761	.1849	18.5	
50-54	12	54.5	-5.6	-.55	.2912	.1420	14.2	
45-49	8	49.5	-10.6	-1.04	.1492	.0862	8.6	
40-44	3	44.5	-15.6	-1.53	.0630	.0413	4.1	
35-39	2	39.5	-20.6	-2.02	.0217	.0157	1.6	6.3
30-34	1	34.5	-25.6	-2.51	.0060	.0060	.6	

ตารางที่ ๑๐ ข้อมูลการทดสอบสภาวะสารูปสนิทดีของโค้งปกติ

---

[1] Allen L. Edwards, Statistical Methods for the Behavioral Sciences, (New Yofk: Holt, Rinehart and Winston, C 1954), p.385.

วิธีทำ

๑. ตั้งสมมุติฐาน H_0 :การแจกแจงของคะแนนแบบทดสอบจิตวิทยาเป็นโค้งปกติ

H_1 :การแจกแจงของคะแนนแบบทดสอบจิตวิทยาไม่เป็นโค้งปกติ

๒. การทดสอบทางสถิติ :ใช้ χ^2 ทดสอบ เนื่องจากเป็นการทดสอบสภาวะสารูปสนิทดีของกลุ่มตัวอย่าง

๓. การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่าง : X^2 ที่กำหนดได้จากสูตร (๑) มีการแจกแจงโดยประมาณเป็น χ^2 ที่ df= ๘-๒-๑ = ๕ เนื่องจากรวมความถี่ที่คาดหวังให้มากกว่า ๕ ตามหลักการและตัวประมาณค่า $\bar{X}$ และ S.D ด้วย จึงมี df =๕

๔. ขอบเขตของการปฏิเสธ : ขอบเขตของการปฏิเสธประกอบด้วยค่าของ

$\chi^2_{5(1-\alpha/2)} \geq X^2_5$ หรือ $X^2_5 \geq \chi^2_{5(\alpha/2)}$

๕. การตัดสินใจ

Interval ขีดจำกัด	O_i ความถี่ที่สังเกตได้	E_i ความถี่ที่คาดหวัง	$O_i - E_i$ ค่าเบี่ยงเบน	$(O_i-E_i)^2$ ค่าเบี่ยงเบนกำลังสอง	$(O_i-E_i)^2/E_i$ ค่าไคสแควร์
เหนือ 74	7	7.9	-.9	.81	.102
70-74	9	10.0	-1.0	1.00	.100
65-69	13	15.5	-2.5	6.25	.403
60-64	26	19.0	7.0	49.00	2.579
55-59	19	18.5	.5	.25	.94
50-54	12	14.2	-2.2	4.84	.341
45-49	8	8.6	-.6	.36	.042
ต่ำกว่า 45	6	6.3	-.3	.09	.014
รวม	100	100.0	.0		X^2=3.595

ตารางที่ ๑๑ การทดสอบสภาวะสารูปสนิทดีของโค้งปกติ

ค่า X^2 ที่คำนวณได้จากสูตร (๑) = ๓.๕๙๕ การทดสอบชนิดสองทาง ไม่มีนัยสำคัญที่ .๐๕ และ .๐๑ ; $\chi^2_{5(.975)}$ = .๘๓๑๒ < X^2 = ๓.๕๙๕ และ $\chi^2_{5(.975)}$ = .๔๑๒ < X^2_5 = ๓.๕๙๕

แสดงว่า การแจกแจงของคะแนนแบบทดสอบจิตวิทยาเป็นโค้งปกติ

ตัวอย่างที่ ๗ การทดสอบสภาวะสารูปสนิทดีของการแจกแจงพัวซอง

ตารางข้างล่างนี้เป็นกลุ่มเด็กที่สอบแบบทดสอบของ Binet (แบบสั้น ๕ ชุด) ผ่านทั้งหมด เมื่อการทดสอบผ่านไป ๑ ปี จึงขยายการทดสอบออกไปใหม่ และให้เด็กสอบ เพื่อดูว่าจะมีเด็กตกแบบทดสอบเป็น ๑ หรือ ๒ ชุด หรือมากกว่านั้น[1]

จำนวนแบบทดสอบที่ตก	ความถี่ที่สังเกตได้ (E_i)	จำนวนความถี่ที่สอบตก
0	88	0
1	34	34
2	8	16
3	1	4
4	0	0
5	0	0
รวม	131	53

ตารางที่ ๑๒ ความถี่ในการทดสอบสภาวะสารูปสนิทดีของพัวซอง

[1]Palmer O. Johnson, Statistical Methods in Research, (New York: Prentice-Hall, Inc., 1949), pp.96-97.

วิธีทำ

๑. ตั้งสมมุติฐาน H_o : การแจกแจงการสอบตกในแบบทดสอบเป็นการแจกแจงแบบพัวซอง

H_1 : การแจกแจงการสอบตกในแบบทดสอบไม่เป็นการแจกแจงพัวซอง

๒. การทดสอบทางสถิติ : ใช้ χ^2 ทดสอบสภาวะสารูปสนิทดีของพัวซองโดยใช้สูตร (๑) มี df= k - ๒ = ๓ - ๒ = ๑

๓. การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่าง : การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่างมีลักษณะคล้ายกับการแจกแจงแบบพัวซองมีความน่าจะเป็นของการสอบตก = $\frac{๑}{๑๓๑}$ และสอบตก n= ๕๓ ดังนั้นมัชฌิม = $\frac{๕๓}{๑๓๑}$ = ๐.๔๐๔๖

๔. ขอบเขตของการปฏิเสธ : ขอบเขตของการปฏิเสธด้วยค่าของ

$$\chi^2_{(\alpha/2)} \leq x^2 \leq \chi^2_{(1-\alpha/2)}$$

๕. การตัดสิน

จำนวนแบบทดสอบที่ตก	O_i ความถี่ที่สังเกตได้	E_i ความถี่ที่คาดหวัง $\mu^x e^{-\mu}/x!$	$O_i - E_i$ ค่าเบี่ยงเบน	$(O_i-E_i)^2/E_i$ ค่าไคสแควร์
0	88	$\frac{131(.4046)^0 e^{-(.4046)}}{0!}$	88-87.41	0.004
1	34	$\frac{131(.4046)^1 e^{-(.4046)}}{1!}$	34-35.37	0.053
2	8	$\frac{131(.4046)^2 e^{-(.4046)}}{2!}$		
3	1	$\frac{131(.4046)^3 e^{-(.4046)}}{3!}$	9-8.24	0.070
4	0	$\frac{131(.4046)^4 e^{-(.4046)}}{4!}$		
5	0	$\frac{131(.4046)^5 e^{-(.4046)}}{5!}$		
รวม	131	131.02		0.127

ตารางที่ ๑๓ การทดสอบสภาวะสารูปสนิทดีของพัวซอง

สำหรับการคำนวณความถี่ที่คาดหวัง จำเป็นต้องใช้ลอการิธึม (Logarithm) เข้าช่วย[1]

ค่า X^2 จากสูตร (๑) ได้ = ๐.๑๒๗ จากตารางในภาคผนวก จ.

$\chi^2_{1(.995)} = .00003 < X^2_1$ และ $\chi^2_{1(.975)} = .0009 < X^2_1 = 0.127$ ไม่มีนัยสำคัญที่ระดับ .๐๕ และ .๐๑ ยอมรับสมมุติฐานว่าการแจกแจงของกลุ่มตัวอย่างเป็นแบบพัวซอง คือเด็กจะสอบตกในแบบทดสอบย่อยน้อยมาก

ตัวอย่างที่ ๘ การทดสอบสภาวะสารูปสนิทดีของการแจกแจงแบบทวินาม

ในการทดสอบครั้งหนึ่งผู้วิจัยจะใช้การโยนเหรียญเพื่อจัดกลุ่มอย่างสุ่ม จึงทำการโยนเหรียญ ๔ อัน ๑๑๒ ครั้ง เพื่อดูว่ามีการแจกแจงเป็นแบบทวินามหรือไม่ คือ ความน่าจะเป็นของการเกิดหัว = .๕

จำนวนข้อทดสอบที่ทำได้	ความถี่ที่สังเกตได้
0	11
1	26
2	39
3	31
4	5
รวม	112 = N

ตารางที่ ๑๔ ข้อมูลการทดสอบสภาวะสารูปสนิทดีของการแจกแจงแบบทวินาม

1. *Ibid.*, p.97.

วิธีทำ

๑. ตั้งสมมุติฐาน H_o : การแจกแจงของการโยนเหรียญเป็นแบบทวินาม

H_1 : การแจกแจงของการโยนเหรียญไม่เป็นแบบทวินาม

๒. การทดสอบทางสถิติ : ใช้ X^2 สูตร (๑) ทดสอบ

๓. การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่าง : การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่างมีลักษณะเป็นแบบทวินาม จึงหาความถี่ที่คาดหวังจาก $p(x;n) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}$ แล้วคูณด้วย N การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่างนี้เป็นค่าประมาณของ χ^2 ที่ df = ๕ - ๑ = ๔

๔. ขอบเขตของการปฏิเสธ : ขอบเขตของการปฏิเสธประกอบด้วยค่าของ $X_4^2 \geqslant \chi^2_{\alpha/2}$ หรือ $X_4^2 \leqslant \chi^2_{1-\alpha/2}$

๕. การตัดสินใจ

จำนวนหัว	ความถี่ที่สังเกตได้	ความถี่ที่คาดหวัง
0	11	$122\binom{4}{0}(.5)^0(.5)^4 = 7$
1	26	$122\binom{4}{1}(.5)^1(.5)^3 = 28$
2	39	$122\binom{4}{2}(.5)^2(.5)^2 = 42$
3	31	$122\binom{4}{3}(.5)^1(.5)^3 = 28$
4	5	$122\binom{4}{4}(.5)^0(.5)^4 = 7$

ตารางที่ ๑๕ การทดสอบสภาวะสารูปสนิทดีของการแจกแจงแบบทวินาม

ค่า X^2 ที่หาได้จากสูตร (๑)

$$X^2 = \frac{(๑๑-๗)^๒}{๗} + \frac{(๒๖-๒๘)^๒}{๒๘} + \frac{(๓๙-๔๒)^๒}{๔๒} + \frac{(๓๑-๒๘)^๒}{๒๘} + \frac{(๕-๗)^๒}{๗}$$

$$= ๓.๕๘$$

จากตารางภาคผนวก จ. x_4^2 = ๓.๕๘ $< \chi^2_{3(.025)}$ = ๑๑.๑ และ $x_4^2 < \chi^2_{4(.005)}$ = ๑๔.๙ ไม่มีนัยสำคัญที่ระดับ .๐๕ และ .๐๑ การแจกแจงของการโยนเหรียญเป็นแบบทวินาม คือ ความน่าจะเป็นของการเกิดหัวเท่ากับ .๕

๗. การทดสอบไคสแควร์ที่ไม่มีพารามิเตอร์ (Non - Parametric)

การทดสอบที่ไม่มีพารามิเตอร์ หมายถึง การทดสอบที่ไม่กำหนดการแจกแจงของกลุ่มตัวอย่างว่ามีลักษณะเฉพาะอย่างไร เพื่อต้องการให้ใช้แทนการวิเคราะห์ความแปรปรวนซึ่งกำหนดลักษณะการกระจายของกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งจะกล่าวถึงบางค่าที่เกี่ยวข้องกับการทดสอบไคสแควร์

๗.๑ การทดสอบไคสแควร์สำหรับกลุ่มตัวอย่างเดียว (The X^2-One Sample Test)

มีบ่อยครั้งที่นักวิจัยหันมาสนใจเกี่ยวกับจำนวน คน สิ่งของ หรือการตอบสนองในประเภทต่าง ๆ นักวิจัยอาจทำนายว่า เมื่อแบ่งภาพวาดขาวดำ และภาพวาดสี เด็กนักเรียนจะสนใจภาพไหนมากกว่ากัน χ^2 มีความเหมาะสมที่จะใช้ทดสอบข้อมูลประเภทนี้ จำนวนประเภทอาจแบ่งออกเป็น ๒ ประเภท หรือมากกว่าก็ได้ ซึ่งสามารถใช้ทดสอบนัยสำคัญความแตกต่างที่เกิดขึ้นระหว่างความถี่ที่คาดหวังกับความถี่ที่สังเกตได้ โดยทั่วไปแล้ว สำหรับกรณีกลุ่มตัวอย่างเดียว ถ้าแบ่งการสังเกตออกเป็น k ประเภท จำนวนสิ่งที่ได้จากการสังเกต = N ที่เป็นอิสระต่อกัน ถ้าสมมุติฐานสูญ (H_o) กำหนดอัตราส่วนของแต่ละประเภทเป็นอย่างเดียวกันแล้ว $E_i = N/k$ โดยปกติความถี่ที่คาดหวังมักจะได้รับการกำหนดล่วงหน้าซึ่งอาจเท่ากันทุกรายการ หรือเป็นอัตราส่วนกันก็ได้ หรือคำนวณได้จากกลุ่มตัวอย่าง

วิธีการ

๑. แบ่งความถี่ที่สังเกตได้ออกเป็น k ประเภท ผลรวมของความถี่ทั้งหมดเป็น N ซึ่งเป็นจำนวนของการสังเกตที่เป็นอิสระ

๒. จากสมมุติฐานสูญ (H_o) กำหนดความถี่ที่คาดหวัง (E_i) ลงในแต่ละช่องทั้ง

k ประเภท ถ้า k > ๒ และค่าของ E_i มีค่าน้อยกว่า ๕ ประมาณ ๒๐ % ให้รวมประเภทที่ใกล้เคียงกันเข้าด้วยกัน ซึ่งเป็นการลดค่า k แต่เป็นการเพิ่มค่า E_i ถ้า k = ๒, X^2 จะใช้ได้ในกรณีที่ความถี่ที่คาดหวังมีค่าเท่ากับหรือมากกว่า ๕ เท่านั้น ในเมื่อเป็นกลุ่มตัวอย่างเดียว

๓. ใช้สูตร $X^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$

๔. กำหนดค่า จำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระ df; df= k-1 และระดับความมีนัยสำคัญ

๕. ใช้ตารางภาคผนวก จ. กำหนดค่า χ^2_{k-1} ถ้า $\geqslant X^2$ ก็ปฏิเสธ H_o

	ความถี่ที่ได้จากการสังเกต	ความถี่ที่คาดหวัง
1	O_1	E_1
2	O_2	E_2
---	---	---
k	O_k	E_k
รวม	N	N

ตารางที่ ๑๖ ความถี่ของกลุ่มตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ ๔ ในการวิเคราะห์ผลการสอบความรู้ทางวิทยาศาสตร์ ซึ่งข้อสอบเป็นแบบเลือกตอบ (Multiple Choice) ๕ คำตอบ ในแต่ละคำถาม ซึ่งมีคำตอบผิดอยู่ ๔ ข้อ อีกข้อหนึ่งเป็นคำตอบที่ถูก เพื่อหาว่านักเรียนมีโอกาสเลือกคำตอบที่ผิดเท่ากันจริงหรือไม่ จึงนำคำตอบมาวิเคราะห์ได้ผลดังนี้[๑]

---

[๑]ประคอง กรรณสูต, สถิติศาสตร์ประยุกต์สำหรับครู, (พิมพ์ครั้งที่ ๒, พระนคร: ไทยวัฒนาพานิช, ๒๕๑๓), หน้า ๑๒๑ - ๑๒๒.

ในคำถามที่หนึ่ง มีนักเรียนตอบผิด ๒๖๐ คน โดยเลือกคำตอบดังนี้ คำตอบแรก ๕๙ คน **คำตอบที่สาม** ๖๘ คน และคำตอบที่สี่ ๕๘ คน

คำตอบผิดที่ 1	ความถี่ที่สังเกตได้	ความถี่ตามความคาดหวัง
1	59	65
2	75	65
3	68	65
4	58	65
รวม	260	260

ตารางที่ ๑๗ การทดสอบไคสแควร์ของกลุ่มตัวอย่างเดียว

วิธีทำ

๑. **ตั้งสมมุติฐาน** H_o : ไม่มีความแตกต่างระหว่างจำนวนนักเรียนที่เลือกคำตอบที่ผิด

H_1 : นักเรียนเลือกคำตอบที่ผิดแตกต่างกัน

๒. การทดสอบทางสถิติ : ใช้ X^2 ทดสอบ เนื่องจากข้อมูลเป็นความถี่และต้องการทราบสัดส่วนของการตอบผิดว่าเท่ากันหรือไม่ ดังนั้นความถี่ที่คาดหวังของในการตอบคำตอบที่ผิด ๔ ข้อนั้น จึงเท่ากับ $\frac{๒๖๐}{๔}$ = ๖๕

๓. การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่าง : X^2 ที่คำนวณได้จากสูตร (๑) มีการแจกกลุ่มตัวอย่างซึ่งเป็นค่าประมาณ χ^2 ที่ df = ๔ - ๑ = ๓

๔. ขอบเขตของการปฏิเสธ : เขตการปฏิเสธประกอบด้วยค่า $X_3^2 \geq \chi^2_{5(\alpha/2)}$ หรือ $X_3^2 \leq \chi^2_{3(1-\alpha/2)}$

๕. การตัดสิน จากการวิเคราะห์ข้อมูล สรุปได้ว่า ไม่มีความแตกต่างระหว่างจำนวนนักเรียนที่เลือกคำตอบผิดแต่ละคำตอบ ดังนั้นในคำถามข้อหนึ่งเป็นคำถามที่ดี ถ้า. คำถามทั้งหมดมีคำตอบในลักษณะเดียวกันก็นับว่าผู้สร้างข้อสอบสร้างข้อสอบได้ดี

ค่า X^2 หาได้จากสูตร (๑)

$$X^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$$

$$= \frac{(๕๙-๖๕)^๒}{๖๕} + \frac{(๗๕-๖๕)^๒}{๖๕} + \frac{(๖๘-๖๕)^๒}{๖๕} + \frac{(๕๘-๖๕)^๒}{๖๕}$$

$$= \frac{๑๙๔}{๖๕} = ๒.๙๘$$

จากตารางภาคผนวก จ. การทดสอบชนิดสองทาง $X_3^2 = ๒.๙๘ < \chi^2_{3(.025)} = ๙.๓๕$ และ $X_3^2 = ๒.๙๘ < \chi^2_{3(.005)} = ๑๒.๘$ ยอมรับสมมุติฐาน ว่าไม่มีความแตกต่างในการเลือกคำตอบที่ผิด นักเรียนเลือกคำตอบที่ผิดทั้งสี่ข้อเท่า ๆ กันอย่างไม่มีนัยสำคัญที่ .๐๕ และ .๐๑

๗.๒ การทดสอบเคสแควร์สำหรับกลุ่มตัวอย่าง ๒ กลุ่มที่สัมพันธ์กัน (The X^2 Test for Two Related Samples)

การทดสอบทางสถิติของกลุ่มตัวอย่างที่สัมพันธ์กัน ๒ กลุ่มนี้ ใช้เมื่อผู้วิจัยต้องการทราบว่า ผลจากการกระทำ ๒ วิธีแตกต่างกันหรือไม่ หรือผลการกระทำอันไหนจะดีกว่ากัน การกระทำ (Treatment) อาจจะเป็นเงื่อนไขต่าง ๆ เช่น ให้การฝึก ให้การสอนแบบใหม่ เป็นต้น กลุ่มหนึ่งจะได้รับเงื่อนไขอย่างหนึ่ง อีกกลุ่มหนึ่งได้

รับอีกอย่างหนึ่งหรือไม่ได้รับ แล้วเอาผลมาเปรียบเทียบกัน ในการเปรียบเทียบดังกล่าว การใช้กลุ่มตัวอย่างที่สัมพันธ์กัน ๒ กลุ่ม กลุ่มหนึ่งจะจับคู่ (Match) กับอีกกลุ่มหนึ่งหรือกลุ่มทั้งสองสัมพันธ์กัน (Related) ซึ่งทำได้โดยใช้ตัวทดลอง (Subject) ตัวเดียวกัน หรือจับคู่กันก่อนแล้วนำคู่นั้น ๆ มาแยกออกเป็น ๒ กลุ่ม

๗.๒.๑ การทดสอบความมีนัยสำคัญการเปลี่ยนแปลงของแมคนีมาร์ (McNemar) โดยใช้ X^2

วิธีของ แมคนีมาร์ (McNemar) ใช้ทดสอบนัยสำคัญของการเปลี่ยนแปลง "ก่อนและหลัง" โดยผู้ทดสอบทำการทดลองซ้ำ และวัดด้วยมาตรานามบัญญัติ (Nominal) แล้วประเมินผลการเปลี่ยนแปลง "ก่อนมายังภายหลัง"

เมื่อทดสอบความมีนัยสำคัญของการเปลี่ยนแปลงที่สังเกตได้ด้วยวิธีนี้ ต้องสร้างตาราง ๔ ช่องหรือแบบ ๒ x ๒ ซึ่งแสดงความถี่ของการตอบสนองครั้งแรกและครั้งหลังของตัวทดลองตัวเดิม

		หลัง	
		-	+
ก่อน	+	A	B
	-	C	D
รวม			

ตารางที่ ๑๘ ตาราง ๒ x ๒ สำหรับทดสอบนัยสำคัญของการเปลี่ยนแปลง

จงสังเกตว่าแต่ละคนที่เปลี่ยนจาก + ไป - จะแจงนับในช่อง A ก็เปลี่ยนจาก - ไป + แจงนับในช่อง B ดังนั้นถ้าเอา A+D จะได้จำนวนผู้เปลี่ยนแปลงทั้งหมด ในสมมุติฐานสูญ เราคาดว่า $\frac{1}{2}$ (A + D) จะเปลี่ยนไปทั้งสองทิศทาง หรือกล่าวว่า $\frac{1}{2}$ (A + D) เป็นความถี่ที่คาดหวัง

$$X^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

เมื่อนำมาใช้ใน McNemar $X^2 = \sum_{i=1}^{AD} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$

$$= \frac{(A - \frac{A+D}{2})^2}{\frac{A+D}{2}} + \frac{(D - \frac{A+D}{2})^2}{\frac{A+D}{2}}$$

$$= \frac{(A-D)^2}{A+D} \; ; \quad df = 1$$

การปรับแก้สำหรับค่าต่อเนื่อง

$X^2 = \frac{(A-D)^2}{A+D}$ จะใช้ได้ดีถ้าปรับแก้ให้เป็นค่าต่อเนื่อง

เมื่อความถี่คาดหวังมีค่าน้อย การใช้ X^2 ประมาณค่าการแจกแจงที่ขาดตอนย่อมใช้ไม่ได้ดี ต้องใช้ค่าแก้ (Yate's Correction) ค่าความคลาดเคลื่อนโดย

$$X^2 = \frac{(|A-D| - 1)^2}{A + D} \; ; \quad df = 1 \qquad (๑๖)$$

วิธีการ

๑. บรรจุความถี่ต่าง ๆ ลงในตาราง ๒ x ๒

๒. กำหนดค่าความถี่ที่คาดหวังในช่อง A และ D ด้วย $E = \frac{1}{2}(A+D)$ ซึ่งไม่ควรน้อยกว่า ๕

๓. กำหนด df = (๒ - ๑)(๒ - ๑) = ๑

๔. คำนวณ X^2 จาก (๑๖)

๕. ถ้าค่าของ $X^2 \geqslant \chi^2_{\alpha/2}$ หรือ $X^2 \leqslant \chi^2_{(1-\alpha/2)}$ ก็ปฏิเสธสมมุติฐาน

ตัวอย่างที่ ๑๐ จากการสังเกตเด็กที่เข้าโรงเรียนอนุบาลใหม่ ๒๕ คน เด็กจะอยากเข้าหาผู้ใหญ่มากกว่าเด็ก ๆ ด้วยกัน และคาดว่าถ้าเพิ่มความคุ้นเคยและประสบการณ์ขึ้น เด็กจะเพิ่มการเข้าหาเด็กด้วยกันมากขึ้น ทั้งนี้ทำโดยเริ่มสังเกต

จัดประเภทเด็กที่เข้าใหม่ไว้ก่อนทั้ง ๒๕ คน แล้วสังเกตอีกครั้งหนึ่งเมื่ออยู่ไปได้ ๑ เดือนแล้วว่าจะเป็นอย่างไร[1]

		หลังเข้าเรียนแล้ว 30 วัน	
		เด็ก	ผู้ใหญ่
เข้าเรียนวันแรก	ผู้ใหญ่	14(A)	4
	เด็ก	3	4 (D)
	รวม	17	8

ตารางที่ ๑๙ ข้อมูลการทดสอบความมีนัยสำคัญของการเปลี่ยนแปลง

วิธีทำ

๑. ตั้งสมมุติฐาน H_o : ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนของเด็กจากผู้ใหญ่ไปหาเด็กด้วยกัน จากเข้าเรียนวันแรกและหลังเข้าแล้ว ๓๐ วัน เท่ากัน

$$P_A = P_D = \frac{1}{2}$$

H_1 : $P_A > P_D$

---

[1] Sidney Siegel, Non-Parametric Statistics, (Tokyo:Kogakusha Company, Ltd., 1951), pp.63-67.

๒. การทดสอบทางสถิติ : ใช้ทดสอบแบบ McNemar เพราะเป็นกลุ่มตัวอย่าง ๒ กลุ่มที่สัมพันธ์กันในแบบเปลี่ยนแปลงก่อนหลัง ในมาตรานามบัญญัติ

๓. การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่าง : X^2 ที่คำนวณได้จากสูตร (๑๖) มีการแจกแจงกลุ่มตัวอย่างซึ่งเป็นค่าประมาณ χ^2 ที่ df = ๑

๔. ขอบเขตการปฏิเสธ : ขอบเขตการปฏิเสธประกอบด้วยค่า $X_1^2 \geqslant \chi^2_\alpha$

๕. การตัดสินใจ

จากข้อมูลนี้ได้ว่า

$$X^2 = \frac{(|A - D| - 1)^2}{A + D}$$

$$= \frac{(|๑๔ - ๔| - ๑)^๒}{๑๔ + ๔}$$

$$= \frac{๙^๒}{๑๘} = ๔.๕$$

จากภาคผนวก จ. ค่าของ X_1^2 = ๔.๕ มีนัยสำคัญที่ระดับ .๐๕; $X_1^2 = ๔.๕ > \chi^2_{1(.05)}$ = ๓.๘๔ และไม่มีนัยสำคัญที่ .๐๑; $X_1^2 = ๔.๕ < \chi^2_{1(.01)}$ = ๖.๖๓๔ สรุปว่าหลังเข้าเรียนไปแล้ว ๓๐ วัน เด็กจะเปลี่ยนสังคมจากการเข้าหาผู้ใหญ่ไปเป็นหาเด็กด้วยกันอย่างมีนัยสำคัญที่ .๐๕

๗.๓ การทดสอบไคสแควร์ด้วยการจัดอันดับที่ (Rank Test)

การทดสอบไคสแควร์ด้วยการจัดอันดับที่นี้ ข้อมูลที่ได้มาจะได้รับการเรียงอันดับที่ให้เริ่มแต่อันดับที่ ๑ ไปจนถึง k ตามลำดับ ถ้าในกรณีที่มีคะแนนเท่ากันก็ให้เฉลี่ยอันดับที่นั้นเท่า ๆ กัน ขนาดของกลุ่มตัวอย่างไม่จำเป็นต้องเท่ากัน เราใช้การทดสอบนี้

เพื่อทดสอบว่ามัชฌิมของแต่ละกลุ่มตัวอย่างเท่ากัน โดยไม่ต้องคำนึงถึงความแปรปรวนที่เท่ากันของกลุ่มตัวอย่าง

วิธีการ

๑. จัดคะแนนเป็นแบบตารางการณ์จร มี k สดมภ์ (เงื่อนไข) และ r แถว (คนหรือกลุ่ม)

๒. จัดอันดับคะแนนในแต่ละแถว จาก ๑ ถึง k สำหรับกลุ่มตัวอย่างที่สัมพันธ์กัน และจัดอันดับของข้อมูลรวมกันสำหรับกลุ่มตัวอย่างที่อิสระจากกัน

๓. พิจารณาผลรวมของแต่ละอันดับในแต่ละสดมภ์ T_j

๔. หาค่า X^2 โดยใช้สูตร

$$X^2_{k-1} = \left[\frac{12}{N(N+1)}\right]\left[\sum_{j=1}^{k}\frac{K^2}{nj}\right] - 3(N+1) \qquad (๑๗)$$

สำหรับกลุ่มตัวอย่างที่อิสระจากกัน จะมีค่าประมาณเท่ากับ X^2_{k-1} เมื่อขนาดของ k กลุ่มตัวอย่างไม่เล็กจนเกินไปนัก คือ $n_j > ๕$; ถ้าน้อยกว่า ๕ ให้ใช้ตารางอื่น[1]

n คือ ขนาดของกลุ่มตัวอย่าง

K คือ ผลบวกของตำแหน่งที่ในสดมภ์

k คือ จำนวนกลุ่มตัวอย่าง

หรือ

$$X^2_{k-1} = \left[\frac{12}{rk(k+1)}\right]\left[\sum_{j=1}^{k}\frac{K^2}{J}\right] - 3r(k+1) \qquad (๑๘)$$

---

[1] *Ibid.*, p.192.

สำหรับกลุ่มตัวอย่างที่สัมพันธ์กัน มี

r คือ จำนวนแถว

k คือ จำนวนสดมภ์

K คือ ผลรวมของตำแหน่งที่ในสดมภ์

๕. พิจารณาความมีนัยสำคัญของค่าที่คำนวณได้ว่ามีนัยสำคัญที่ระดับใดบ้าง

๗.๓.๑ การทดสอบการจัดอันดับของกลุ่มที่เป็นอิสระจากกัน (The Krusal - Wallis One - Way Analysis of Varaince by Ranks)

วิธีการจัดอันดับที่ของ ครูซอล วอลลิส[1] (Krusal - Wallis) นี้ใช้ในการตัดสินว่ากลุ่มตัวอย่างที่เป็นอิสระจากกัน k กลุ่มมาจากประชากรเดียวกันหรือแตกต่างกัน การทดสอบนี้ถือว่า ตัวแปรหรือข้อมูลที่นำมาศึกษานั้นเป็นค่าต่อเนื่อง หรืออย่างน้อยที่สุดใช้การวัดด้วยการจัดอันดับ

วิธีการ

๑. จัดอันดับจำนวนรายการทั้งหมดสำหรับ k กลุ่ม โดยเอามารวมเป็นกลุ่มเดียวกันก่อน แล้วจัดอันดับตั้งแต่ ๑ ถึง N คะแนนน้อยที่สุดเป็นอันดับ ๑

๒. หาค่า R ซึ่งเป็นผลบวกของอันดับที่ในแต่ละกลุ่ม

๓. ถ้ามีจำนวน อันดับซ้ำกันมาก ๆ ให้ใช้ค่าแก้สำหรับอันดับที่ซ้ำกัน (Tie) คือการแก้ผลของการเกิดซ้ำค่า X^2 ที่คำนวณโดยสูตร (๑๗) แล้วหารด้วย

$$C = 1 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{T} (t^3 - t)}{N^3 - N} \right) \qquad (๑๙)$$

---

[1] William L. Hays, Statistics, (New York: Holt, Rinehart and Winston, C 1963), p.637.

เมื่อ t_i คือ จำนวนอันดับที่ซ้ำกันในกลุ่ม i

N คือ จำนวนรายการทั้งหมด

T คือ จำนวนอันดับที่ซ้ำกันทั้งหมด

๔. พิจารณาความมีนัยสำคัญจากตาราง

๕. ถ้าค่าของ $X^2 \geqslant \chi^2_{(\alpha)}$ หรือ $X^2 \leqslant \chi^2_{(1-\alpha)}$ ก็ปฏิเสธสมมุติฐาน

ตัวอย่างที่ ๑๑ เด็กเล็ก ๓ กลุ่มได้รับการสอนให้เห็นข้อแตกต่างของสิ่งเร้า ๒ สิ่ง เด็กแต่ละคนจะผ่านสิ่งเร้า ๒ สิ่ง เป็นแบบที่แตกต่างกัน สิ่งหนึ่งเป็นรางวัลและภายในเงื่อนไขการทดลองอย่างหนึ่ง สิ่งเร้าที่เป็นรางวัลจะเหมือนกันเสมอ แต่จะแตกต่างกันในปฏิบัติการการทดลองแต่ละกลุ่ม คือ ในกลุ่มที่ ๑ จะให้รางวัลที่เป็นรูปต่าง ๆ (Form) ในกลุ่ม ๒ ให้รางวัลที่เป็นสี ในกลุ่มที่ ๓ ให้รางวัลที่มีขนาด กลุ่มหนึ่งประกอบด้วยเด็ก ๑๒ คน เพื่อดูว่าการแจกแจงของคะแนนจากการเห็นข้อแตกต่างของสิ่งเร้า ๒ สิ่ง ในเด็กแต่ละกลุ่มเหมือนกันหรือไม่[1]

---

[1] Ibid., p.638.

การปฏิบัติการ		
1	2	3
6 (1)	31 (34.5)	13 (10)
11 (7)	7 (2)	32 (36)
12 (9)	9 (4)	31 (34.5)
20 (19)	11 (7)	30 (33)
24 (23)	16 (14)	28 (31)
21 (20)	19 (17.5)	29 (32)
18 (16)	17 (15)	25 (24)
15 (13)	11 (7)	26 (26.5)
14 (11.5)	22 (21)	27 (29.5)
10 (5)	23 (22)	26 (26.5)
8 (3)	27 (29.5)	19 (17.5)
14 (11.5)	26 (26.5)	
K_j 139.0	200.0	327.0
K = 666		

ตารางที่ ๒๐ ข้อมูลการทดสอบความมีนัยสำคัญของการจัดอันดับของกลุ่มที่เป็นอิสระ

วิธีทำ

๑. ตั้งสมมุติฐาน H_o : การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่าง ๓ กลุ่มนั้นเหมือนกัน

H_1 : การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่าง ๓ กลุ่มไม่เหมือนกัน

๒. การทดสอบค่าสถิติ : เนื่องจากกลุ่มที่นำมาศึกษานั้นเป็นอิสระจากกัน และคะแนนที่ได้จัดเป็นอันดับ และค่า n ซึ่งเป็นขนาดของกลุ่มตัวอย่างมากกว่า ๕ จึงใช้ X^2 สูตร (๑๗) ทดสอบ

๓. การกระจายของกลุ่มตัวอย่าง : สำหรับ k = ๓ ขนาดของ n ในกลุ่ม = ๑๒ > ๕ ค่าความมีนัยสำคัญใช้ตาราง χ^2 ได้

๔. ขอบเขตของการปฏิเสธ : ประกอบด้วยค่าของ $\chi^2_{3(1-\alpha/2)} \geqslant X^2$ หรือ $X^2 \geqslant \chi^2_{3(\alpha/2)}$ เพราะเป็นการทดสอบสมมุติฐานชนิดสองทาง

๕. การตัดสินใจ

ค่า X^2 คำนวณจากสูตร (๑๗) ได้ดังนี้

$$X^2 = \left[\frac{12}{N(N+1)}\right]\left[\sum_{j=1}^{k} \frac{K_j^2}{n_j}\right] - 3(N+1)$$

$$= \frac{๑๒}{๓๖(๓๗)}\left[\frac{(๑๓๙)^๒ + (๒๐๐)^๒ + (๓๒๗)^๒}{๑๒}\right] - ๓(๓๗)$$

$$= ๑๓.๘๑$$

แต่เนื่องจากอันดับที่เท่ากันหลายอันดับ จำเป็นต้องใช้ค่าแก้จากสูตร (๑๙)

$$C = 1 - \left(\sum_{i}^{T} \frac{(t_i^3 - t_i)}{N^3 - N}\right)$$

จากตัวอย่างนี้มีอันดับที่ซ้ำกัน ๔ อันดับ

$$C = ๑ - \left(๔\,[(๒)^{๓} - ๒] + [(๓)^{๓} - ๓] + [(๔)^{๓} - ๔] \right)$$

$$= .๙๙๗$$

ดังนั้น $$\chi^2_C = \frac{\chi^2}{C} = \frac{๑๓.๘๑}{.๙๙๗} = ๑๓.๘๕$$

จากตารางภาคผนวก จ. การทดสอบชนิดสองทาง $\chi^2_C = ๑๓.๘๕ > \chi^2_{3(.025)} = ๙.๓๔๘๔$ และ $\chi^2_C = ๑๓.๘๕ > \chi^2_{3(.005)} = ๑๒.๘๓๘๑$ การทดสอบนี้มีนัยสำคัญที่ระดับ .๐๑ และ .๐๕ สรุปว่า การแจกแจงคะแนนการเรียนรู้ข้อแตกต่างสิ่งเร้า ๒ สิ่งของเด็ก ๓ กลุ่มแตกต่างกัน

๗.๓.๒ การทดสอบการจัดอันดับที่ สำหรับกลุ่มตัวอย่างที่สัมพันธ์กัน

การทดสอบการจัดอันดับสำหรับกลุ่มตัวอย่าง k กลุ่มที่สัมพันธ์กัน เหมือนกับการวิเคราะห์ความแปรปรวน แต่ในบางครั้งข้อตกลงเบื้องต้นเกี่ยวกับการทดสอบไม่เหมาะกับการวิเคราะห์ความแปรปรวน จึงหันมาใช้การวิเคราะห์โดยตำแหน่งที่แทนกลุ่ม k กลุ่มนั้นจำนวนคนต้องเท่ากัน[1] ความสัมพันธ์ของกลุ่มอาจเป็นคนกลุ่มเดียวภายใต้สถานการณ์ k อย่าง หรือคนหลายชุดที่สัมพันธ์กัน แล้วใช้วิธีสุ่มคนไปยังการทดลอง k กลุ่ม แต่ละกลุ่มประกอบด้วย n ตัว กำหนดไปยัง k ปฏิบัติการ การทดสอบนี้เหมาะสำหรับข้อมูลการทดลองที่จัดอันดับ โดยที่แต่ละตัวนั้นมีการกำหนดอย่างสุ่มให้ผ่านปฏิบัติการแต่ละอย่าง

วิธีการ

๑. จัดคะแนนเป็นแบบตารางการณ์จร k สดมภ์และ r แถว

---

[1] Hays, *op.cit.*, p.641.

๒. จัดอันดับคะแนนในแต่ละแถวจาก ๑ ถึง k

๓. พิจารณาผลรวมของอันดับในแต่ละสดมภ์ (K_j)

๔. หาค่า X^2_{k-1} โดยใช้สูตร (๑๘)

๕. เมื่อค่าของจำนวนแถว และสดมภ์ ไม่น้อยจนเกินไปนัก ให้ใช้ตาราง χ^2 นั่นคือค่าของ N นั้นควรใหญ่พอประมาณ ถ้าไม่ใหญ่พอให้ใช้ตารางอื่น[1]

ตัวอย่างที่ ๑๒

ในการศึกษาถึงผลของแรงจูงใจ ๓ ชนิด ที่มีต่อการแยกการเรียนรู้ของหนู ได้มีการจับคู่เป็นกลุ่ม (Match Samples) ๓ กลุ่ม ของหนู ๑๘ ตัว หนูได้การฝึกภายใต้กระสวนแรงจูงใจ ๓ ชนิด การจับคู่กระทำโดยใช้หนู ๑๘ ชุด แต่ละชุดมีหนู ๓ ตัว แม่ว่าหนูทั้ง ๕๔ ตัวจะได้รับแรงจูงใจเหมือนกัน แต่แบบของการให้รางวัลก็แตกต่างไปแต่ละกลุ่ม กลุ่มที่หนึ่งถูกฝึกด้วยการให้รางวัล ๑๐๐ % (RR) กลุ่มที่สองได้รับการฝึกด้วยการให้รางวัลแต่บางส่วน ซึ่งทุก ๆ การฝึกทดลองจะตามมาด้วยการทดลองที่ไม่มีการให้รางวัล (RU) และกลุ่มที่สามมีการให้รางวัลบางส่วนเป็นแรงจูงใจ และจบการทดลองก็ให้รางวัลอีก (UR) เมื่อจบการทดลองจึงวัดความเร็วที่หนูต่าง ๆ เรียนรู้นิสัยที่ตรงข้าม นั่นคือ หนูที่เคยฝึกให้วิ่งเข้าหาสีขาว แล้ววิ่งเข้าหาสีดำ จะมีรางวัลให้ ยิ่งหนูมีการเรียนรู้ครั้งแรกดีเท่าไร การถ่ายทอดการเรียนรู้ตอนหลังจะช้าลง โดยคาดว่าการมีแรงจูงใจหรือรางวัลที่แตกต่างกันไปจะมีผลทำให้มีการเรียนรู้ที่แตกต่างกันไป ซึ่งจะแสดงด้วยความสามารถในการถ่ายทอดการเรียนรู้[๒]

---

[1] Sidney Siegel, Non-Parametric Statistics, (Tokyo: Kagakusha Company Ltd., C 1956), p.171.

[2] Ibid., p.169.

วิธีทำ

๑. ตั้งสมมุติฐาน H_0 : การมีแรงจูงใจแตกต่างกันไม่มีผลทำให้เกิดความแตกต่างกันในผลที่ได้รับจากการเรียนรู้

H_1 : การมีแรงจูงใจที่แตกต่างกันจะทำให้ผลที่ได้รับจากการเรียนรู้แตกต่างกัน

๒. การทดสอบทางสถิติ : เพราะว่าคะแนนที่ได้จากการวัดการถ่ายทอดการเรียนรู้นั้นไม่เป็นคะแนนช่วงที่แท้จริง (Interval Scale) และคะแนนที่ได้ไม่แสดงความเป็นเอกพันธุ์ของความแปรปรวน จึงใช้ X^2 สูตร (๑๘) ทดสอบ

๓. การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่าง : จะคำนวณจากสูตร (๑๘) โดยถือว่ามีค่าแจกแจงใกล้เคียงกับ χ^2 เมื่อ df = k-1 และเมื่อ N และ/หรือ k มีจำนวนมาก

๔. ขอบเขตของการปฏิเสธ : การทดสอบชนิดสองทาง ขอบเขตการปฏิเสธประกอบด้วยค่าของ $\chi^2_{k-1(1-\alpha/2)} \geq X^2$ หรือ $X^2 \geq \chi^2_{k-1(\alpha/2)}$

๕. การตัดสิน

กลุ่ม	ชนิดของแรงจูงใจ		
	RR	RU	UR
1	1	3	2
2	2	3	1
3	1	3	2
4	1	2	3
5	3	1	2
6	2	3	1
7	3	2	1
8	1	3	2
9	3	1	2
10	3	1	2
11	2	1	3
12	2	3	1
13	3	2	1
14	2	3	1
15	2.5	2.5	1
16	3	2	1
17	3	2	1
18	2	3	1
K_j	39.5	42.5	26.0

ตารางที่ ๒๑ ข้อมูลการทดสอบความมีนัยสำคัญของการจัดอันดับของกลุ่มที่สัมพันธ์กัน

พิจารณาเมื่อหนูทำผิด แล้วให้คะแนนเป็นอันดับ ไว้ตามตารางข้างบน ผลรวมของอันดับในกลุ่ม RR= ๓๙.๕ ผลรวมของกลุ่ม RU = ๔๒.๕ ผลรวมของอันดับในกลุ่ม UR = ๒๖.๐ อันดับต่ำแสดงถึงมีข้อผิดพลาดในการถ่ายทอดการเรียนรู้มาก

หาค่า X^2 ได้จากสูตร (๑๘)

$$X^2 = \left[\frac{12}{rk(k+1)}\right]\left[\sum_{j=1}^{k}(K_j^2)-3r(k+1)\right]$$

$$= \frac{๑๒}{๑๘(๓)(๓+๑)}\left[(๓๙.๕)^๒+(๔๒.๕)^๒+(๒๖.๐)^๒\right]$$

$$-๓(๑๘)(๓+๑)$$

$$= ๘.๔$$

จากตารางภาคผนวก จ. $\chi^2_{2(.025)} = ๗.๓๘ < X^2_2 = ๘.๔$ และ $X^2_2 = ๘.๔ < \chi^2_{2(.005)} = ๑๐.๖$ ซึ่งมีนัยสำคัญที่ .๐๕ แต่ไม่มีนัยสำคัญที่ .๐๑ จึงปฏิเสธสมมุติฐานสูญที่ระดับความมีนัยสำคัญ .๐๕

สรุปได้ว่าคะแนนของหนูในการถ่ายทอดการเรียนรู้ขึ้นอยู่กับชนิดของแรงจูงใจของการทดลองในตอนแรก ๆ มาก

๗.๔ การทดสอบไคสแควร์ด้วยการใช้มัธยฐาน (Median Test)

การทดสอบมัธยฐานหมายถึง การทดสอบที่ยึดมัธยฐานเป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบข้อมูลหรือในการแบ่งข้อมูลเป็น ๒ รายการ ข้อมูลอาจประกอบด้วย k กลุ่ม ที่สัมพันธ์กันหรือเป็นอิสระก็ได้

ขั้นต่าง ๆ ในการใช้ การทดสอบมัธยฐาน มีดังนี้

๑. หาค่ามัธยฐานรวมของ k กลุ่ม ขนาดของแต่ละกลุ่มไม่ควรน้อยกว่า ๑๐

๒. แบ่งครึ่งคะแนนแต่ละกลุ่มที่มัธยฐานรวมนี้ ใส่ความถี่ที่ได้ในตาราง $2 \times k$ ถ้ามีคะแนนหลายคะแนนที่เท่ากับมัธยฐาน ให้แบ่งคะแนนเหล่านี้ไปใส่ในกลุ่มทั้ง ๒ กลุ่มเท่า ๆ กัน

๓. คำนวณหาค่า X^2 จากสูตร (๔)

$$X^2 = \frac{N(|ad-bc| - N/2)^2}{(a+c)(b+d)(c+d)(a+b)}$$

๔. ดูว่า X^2 มีนัยสำคัญที่ระดับใดหรือไม่

๗.๔.๑ เปรียบเทียบมัธยฐานของกลุ่มอิสระ ๒ กลุ่ม

การทดสอบมัธยฐานสำหรับกลุ่มอิสระ ๒ กลุ่ม มักใช้เพื่อเปรียบเทียบการกระทำ (Treatment) ที่แตกต่างกัน ๒ อย่าง สำหรับกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม เพื่อดูว่ากลุ่มอิสระ ๒ กลุ่มนั้นจะมีมัธยฐานเท่ากันหรือไม่ โดยมีสมมุติฐานสูญว่ากลุ่ม ๒ กลุ่มนั้นมีมัธยฐานเท่ากัน และสมมุติฐานสำรองอาจเป็นชนิดทางเดียวหรือสองทางก็ได้ ขึ้นอยู่กับความสนใจของผู้ทดลอง

ตัวอย่างที่ ๑๓ นักจิตวิทยาผู้หนึ่งต้องการทดลองยาชนิดหนึ่งที่มีผลต่อการสั่นของมือของคนไข้ โดยให้ยากับคนไข้ ๑๔ คน และอีก ๑๘ คนไม่ให้ ทั้งนี้เพื่อไม่ให้คนไข้รู้ว่าตนได้รับการทดลองยา จึงจัดรูปยาเม็ดให้เหมือนกันทุกคน ต่อมาใช้เครื่องมือวัดความสั่นของมือคนไข้ ๒ กลุ่ม ข้อมูลบรรจุในตารางที่ ๒๒ เครื่องหมายบวกหมายถึงคะแนนที่เหนือมัธยฐาน ลบหมายถึงต่ำกว่ามัธยฐาน การทดลองครั้งนี้สนใจว่ายาจะลดความสั่นของมือได้หรือไม่ จึงทดสอบแบบทางเดียว[๑]

---

[1] Henry E. Garrett, <u>Statistics in Psychology and Education</u>, (Bombay: Vakils, Feffer and Simons Private Ltd., C 1966), p.269.

กลุ่มให้ยา	๕๓	๓๙	๖๓	๓๖	๔๗	๕๘	๔๔	๓๘	๕๙	๓๖	๔๒	๔๓	๔๖	๔๖
	+	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-	-	-	-
กลุ่มไม่ให้ยา	๔๘	๖๕	๖๖	๓๘	๓๖	๔๕	๕๙	๕๓	๕๘	๔๒	๗๐	๗๑	๖๕	๔๖
	-	+	-	-	-	-	+	+	+	-	+	+	+	-
	๕๕	๖๑	๖๒	๕๓										
	+	+	+	+										

ค่ามัธยฐานร่วม = ๔๙.๕ ในกลุ่มให้ยาเหนือมัธยฐานอยู่ ๔ คน ต่ำกว่ามัธยฐาน ๑๐ คน และกลุ่มที่ไม่ให้ยาเหนือมัธยฐาน ๑๒ คน ต่ำกว่ามัธยฐานอยู่ ๖ คน

	ต่ำกว่ามัธยฐาน	เหนือมัธยฐาน	รวม
กลุ่มให้ยา	10	4	14
กลุ่มไม่ให้ยา	6	12	18
รวม	16	16	32

ตารางที่ ๒๒ ข้อมูลการทดสอบความมีนัยสำคัญด้วยมัธยฐาน

วิธีทำ

๑. ตั้งสมมุติฐาน H_o: กลุ่มที่ให้ยาและไม่ให้ยามีการสั่นของมือเหมือนกัน

$$Md_1 = Md_2$$

H_1: กลุ่มให้ยามีการสั่นของมือน้อยกว่ากลุ่มไม่ให้ยา

$$Mdn_1 < Mdn_2$$

๒. การทดสอบทางสถิติ : ใช้ X^2 ทดสอบ ด้วยการใช้มัธยฐาน, N= ๓๒

๓. การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่าง : X^2 ที่คำนวณได้จากสูตร (๔) มีการแจกแจงกลุ่มตัวอย่างที่ประมาณค่า χ^2 ที่ df = (๒-๑)(๒-๑) = ๑

๔. ขอบเขตของการปฏิเสธ : ขอบเขตของการปฏิเสธประกอบด้วยค่า X^2 ทั้งหมดที่มีค่ามากจะทำให้ความน่าจะเป็นของการเกิดของมันเท่ากันหรือน้อยกว่า ๑๒ หรือ $X_1^2 \leqslant \chi^2_{1(\alpha)}$

๕. การตัดสิน

ค่าของ X^2 หาได้จากสูตร (๔)

$$X^2 = \frac{N(|ad-bc| - \frac{N}{2})^2}{(a+c)(b+d)(c+d)(a+b)}$$

$$= \frac{๓๒(|๑๒๐ - ๒๔| - \frac{๓๒}{๒})^๒}{๑๖ \times ๑๖ \times ๑๘ \times ๑๔}$$

$$= ๓.๑๗$$

จากตารางภาคผนวก จ. การทดสอบชนิดทางเดียว $X_1^2 = ๓.๑๗ < \chi^2_{1(.995)} = .๐๐๐๓๙ < \chi^2_{1(.975)} = .๐๐๐๙๘$ ไม่มีนัยสำคัญที่ระดับ .๐๕ และ .๐๑ จึงยอมรับสมมุติฐานสูญว่ากลุ่มให้ยาและไม่ให้มีความสั่นของมือเท่า ๆ กัน ถ้าการทดสอบนี้ไม่คำนึงถึงทิศทางคือเป็นชนิดสองทาง ค่า $X_1^2 = ๓.๑๗$ จะไม่มีนัยสำคัญที่ระดับใดเลย สรุป ผู้ทำการทดลองเชื่อว่ายาจะช่วยลดความสั่นของมือได้ แต่การทดสอบมีนัยสำคัญที่ .๑๐ จึงควรได้ทำการทดลองหลายครั้ง เพราะความมีนัยสำคัญไม่เป็นไปโดยเด็ดขาด (Highly Significant) จึงควรทำการทดลองหลาย ๆ ครั้ง

๗.๔.๒ เปรียบเทียบมัธยฐานของกลุ่มอิสระมากกว่า ๒ กลุ่ม

การเปรียบเทียบมัธยฐานนี้ เรายอมรับว่าตัวแปรต่าง ๆ ในประชากรหลายกลุ่มที่จะนำมาเปรียบเทียบกันนั้นต่อเนื่อง สมมุติฐานที่จะทดสอบคือ กลุ่มตัวอย่าง k กลุ่มนั้นมีการกระจายเหมือนกัน

วิธีการ

กลุ่มตัวอย่าง k กลุ่มนั้นนำมารวมกันให้เป็นกลุ่มเดียวแล้วหามัธยฐานรวม Md (Grand Median) และนำเอาคะแนนแต่ละกลุ่มมาเปรียบเทียบกับมัธยฐานรวม ถ้าเหนือกว่า Md ก็ให้อยู่ในชนิด + ต่ำกว่าให้อยู่ในชนิด -

กำหนดให้ a_i เป็นจำนวนบวกในกลุ่ม i และ $n_i - a_i$ เป็นจำนวนลบ ดังนั้นข้อมูลจะบรรจุในตาราง $2 \times k$ ดังนี้

กลุ่ม	1	---	i	---	k	รวม
บวก	a_1	---	a_i	---	a_k	a
ลบ	n_1-a_1	---	n_i-a_i	---	n_k-a_k	N-a
	n_1	---	n_i	---	n_k	N

ตารางที่ ๒๓ ตารางแจกแจงการทดสอบมัธยฐานที่มากกว่า ๒ กลุ่ม

เมื่อค่าของ $N \geqslant$ ๒๐ และ $n_i \geqslant$ ๕ สำหรับแต่ละค่าของ i ตารางนี้สามารถทดสอบได้ด้วย[1]

$$X^2 = \frac{(N-1)}{a(N-a)} \sum_{i=1}^{k} \frac{(Na_i - n_i a)^2}{N_{n_i}} \qquad (๒๐)$$

เมื่อ N = ขนาดของกลุ่มตัวอย่างรวมกันทั้งหมด

a = ผลรวมของความถี่ที่เหนือมัธยฐานและต่ำกว่ามัธยฐาน = $(N-a)$

a_i = ความถี่-แต่ละกลุ่ม

n_i = ขนาดของกลุ่มตัวอย่างย่อย

ค่าสถิตินี้มีการแจกแจงโดยประมาณเป็น χ^2 มี $df = k-1$ ถ้าปฏิเสธสมมุติฐานแสดงว่า กลุ่มตัวอย่าง k กลุ่มนั้นมีการแจกแจงไม่เหมือนกัน สูตร (๑) นี้มีข้อกำหนดว่า ค่าที่เท่ากับมัธยฐาน (Tie) ไม่ควรมีเกิดขึ้น แต่ถ้าเกิดขึ้นก็ให้แบ่งค่าที่เกิดนั้นอยู่ในกลุ่ม a_i และ $N - a_i$ เท่า ๆ กัน

ตัวอย่างที่ ๑๔ ในการทดลองครั้งหนึ่งผู้ทดลองต้องการทราบว่า ระเบียบการสมัครเข้าเป็นสมาชิกของชุมนุมที่มีค่อนข้างยุ่งยากนั้นจะมีผลต่อการสมัครเข้าเป็นสมาชิกหรือไม่ เขาได้จัดตั้งชุมนุมสังคมขึ้น ๔ ชุมนุมในวิทยาลัยที่ใหญ่แห่งหนึ่ง กลุ่มตัวอย่างเป็นหญิงที่คัดเลือกมาอย่างสุ่มโดยการส่งจดหมายเชิญเข้ารับการสัมภาษณ์ และแต่ละคนได้รับการจัดเข้ากลุ่มอย่างสุ่มในระหว่าง ๔ เงื่อนไข ในเงื่อนไขแรก (กลุ่ม ๑) ชุมนุมมีความมุ่งหมายและเงื่อนไขในการรับสมาชิกง่าย ๆ กลุ่ม ๒ มีเงื่อนไขเหมือนกลุ่มแรกแต่ค่อนข้าง

---

[1]William L. Hays, Statistics, (New York: Holt, Rinehart and Winston, C 1963), p.621.

ยุ่งยากขึ้นเล็กน้อย กลุ่ม ๓ และ ๔ มีเงื่อนไขในการรับสมาชิกที่รวมความยุ่งยากหลาย ๆ อย่างที่การรับสมาชิกเข้ายากกว่ากันตามลำดับ เมื่อสัมภาษณ์เสร็จแล้ว ให้มีการประเมินค่าว่าหญิงเหล่านั้นมีความกระตือรือร้นในการเป็นสมาชิกชุมนุมไหนโดยใช้เกณฑ์ประเมินค่าชนิด ๑๒ หน่วย (12 - Point Scale)

๑ หมายความว่าต้องการเป็นสมาชิกชุมนุมนั้นมากที่สุด และ ๑๒ หมายความว่าต้องการเป็นสมาชิกชุมนุมนั้นน้อยที่สุด[1]

การประมาณค่า	กลุ่ม			
	1	2	3	4
12	0	0	0	0
11	3	2	1	0
10	7	3	4	1
9	5	5	4	4
8	5	5	1	0
7	3	6	3	10
6	2	2	5	8
5	0	2	4	1
4	0	0	3	1
3	0	0	0	0
n	25	25	25	25 N=100

ตารางที่ ๒๔ ข้อมูลการทดสอบความมีนัยสำคัญด้วยมัธยฐานของกลุ่มตัวอย่าง ๔ กลุ่ม

---

[1] *Ibid.*, p.622.

ผู้ทดลองต้องการทดสอบสมมุติฐานว่าทั้ง ๔ กลุ่มนี้ มีการแจกแจงในการประเมินค่าเหมือนกัน ค่ารวมการแจกแจงการประเมินค่าบรรจุอยู่ในตารางต่อไปนี้

	f	cf
12	0	100
11	6	100
10	15	94
9	18	79
8	11	61
7	22	50
6	17	28
5	7	11
4	4	4

Md = 7.5

ตารางที่ ๒๕ ตารางการประเมินค่าระเบียบการรับสมัครเป็นสมาชิกชุมนุม

บรรจุข้อมูลที่เหนือกว่าและต่ำกว่ามัธยฐานได้ดังนี้

	1	2	3	4	
เหนือมัธยฐาน	20	15	10	5	50 = a
ต่ำกว่ามัธยฐาน	5	10	15	20	50 = N - a
รวม	25	25	25	25	100 = N

ตารางที่ ๒๖ ความถี่ที่อยู่เหนือและต่ำกว่ามัธยฐานของกลุ่มตัวอย่าง

วิธีทำ

๑. ตั้งสมมุติฐาน H_0 : การแจกแจงการประเมินค่าของ ๔ กลุ่มมีมัธยฐานเท่ากัน $Md_1 = Md_2 = Md_3 = Md_4$

H_1 : การแจกแจงการประเมินค่าของ ๔ กลุ่มมีมัธยฐานไม่เท่ากัน $Md_1 \neq Md_2 \neq Md_3 \neq Md_4$

๒. การทดสอบทางสถิติ : ใช้การทดสอบไคสแควร์ด้วยการใช้มัธยฐาน, N= ๑๐๐

๓. การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่าง : X^2 ที่คำนวณได้จากสูตร (๒๐) มีการแจกแจงกลุ่มตัวอย่างที่ประมาณค่า χ^2 ที่ df = (๒-๑)(๔-๑) = ๓

๔. ขอบเขตของการปฏิเสธ : ขอบเขตของการปฏิเสธประกอบด้วยค่า X^2 ทั้งหมดที่มีค่ามากที่ $\chi^2_{3(1-\alpha/2)} \geq X^2_3$ หรือ $X^2_3 \geq \chi^2_{3(\alpha/2)}$

๕. การตัดสิน

ค่าของ x^2 ที่คำนวณได้จากสูตร (๒๐) มีดังนี้

$$x^2 = \frac{(N-1)}{a(N-a)} \sum_{i=1}^{k} \frac{(Na_i - n_i a)^2}{Nn_i}$$

$$= \frac{(๑๐๐-๑)}{๕๐(๑๐๐-๕๐)} \left\{ [๑๐๐(๒๐)-๒๕(๕๐)]^{๒} + --- + [๑๐๐(๕)-๕๐(๕๐)]^{๒} \right\}$$

$$= ๑๙.๘$$

จากตารางภาคผนวก จ. การทดสอบชนิดสองทาง x_3^2 = ๑๙.๘ $> \chi^2_{3(.025)}$ = ๙.๓๔๘๔ และ x_3^2 = ๑๙.๘ $> \chi^2_{3(.005)}$ = ๑๒.๘๓๘๑ จึงมีนัยสำคัญทั้งที่ระดับ .๐๕ และ .๐๑ จึงสรุปว่าการแจกแจงการประเมินค่าของมัธยฐานของ ๔ กลุ่มไม่เหมือนกัน หญิงชอบเป็นสมาชิกในชุมนุมที่ระเบียบการสมัครค่อนข้างสะดวกมากที่สุด และสมัครเป็นสมาชิกในชุมนุมที่ระเบียบการสมัครที่ยุ่งยากมากน้อยที่สุด

การทดสอบข้อมูลที่มีกลุ่มตัวอย่างเดียวหรือสองกลุ่มตัวอย่าง

การทดสอบทางสถิติที่ไม่มีพารามิเตอร์ (Non-Parametric) ซึ่งใช้ทดสอบสมมุติฐานสำหรับกลุ่มตัวอย่างกลุ่มเดียวหรือสองกลุ่ม จะทำให้เราทราบว่า กลุ่มตัวอย่างนั้นมาจากมวลประชากรที่เราต้องการศึกษาหรือไม่ ซึ่งโดยปกติแล้วเป็นการทดสอบแบบสภาวะสารูปสนิทดี คือเราเลือกกลุ่มตัวอย่างแบบสุ่ม แล้วทดสอบสมมุติฐานว่า กลุ่มตัวอย่างนั้นมาจากมวลประชากรที่เราต้องการศึกษามีการแจกแจงเช่นเดียวกันกับมวลประชากรเดิมหรือไม่ การทดสอบแบบนี้สามารถจะตอบปัญหาต่าง ๆ เหล่านี้ได้

๑. มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญของแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง (Central Tendency) ระหว่างกลุ่มตัวอย่างประชากรที่จะศึกษาหรือไม่

๒. มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญระหว่างความถี่ที่ได้จากการสังเกตกับความถี่ที่คาดหวังว่าจะเป็นไปตามหลักการหรือไม่

๓. มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญระหว่างอัตราส่วนที่สังเกตได้กับอัตราส่วนที่

คาดหวังว่าจะเกิดขึ้นนั้นหรือไม่

๔. กลุ่มตัวอย่างนั้นมาจากมวลประชากรที่ต้องการศึกษา โดยมีลักษณะของการแจกแจงความถี่เหมือนมวลประชากรหรือไม่

ในกรณีที่กลุ่มตัวอย่างกลุ่มเดียวหรือสองกลุ่มวิธีการสถิติที่คำนึงถึงพารามิเตอร์ต่างๆนั้น มีข้อมูลเป็นจำนวนมากที่ไม่อาจใช้การทดสอบโดยการใช้ค่าสถิติ t ได้ ผู้ทำการทดลองจะพบว่า

๑. ข้อตกลงเบื้องต้น (Assumptions) และข้อกำหนด (Requirements) ของ t - test ไม่เป็นจริงตามลักษณะของข้อมูล

๒. ถ้าสามารถหลีกเลี่ยงข้อตกลงเบื้องต้นของ t - test ได้จะดีกว่า เพราะจะทำให้สามารถขยายความของการสรุปผลได้กว้างขวางกว่า

๓. ข้อมูลบางอย่างในการวิจัย เป็นเพียงขั้นการจัดอันดับเท่านั้น ซึ่งไม่สามารถวิเคราะห์โดยการใช้แบบ t - test ได้

๔. ข้อมูลในการวิจัยบางครั้งจัดแยกออกเป็นประเภทหรือบอกไว้แต่เพียงจำนวนเท่านั้น ซึ่งจะใช้การวิเคราะห์โดยการใช้ t - test ไม่ได้

๕. ในการวิจัยบางครั้ง ผู้วิจัยไม่เพียงแต่ศึกษาความแตกต่างในด้านแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางเท่านั้น แต่ยังต้องการศึกษาถึงความแตกต่างในด้านอื่น ๆ ด้วย เช่น การทดสอบความมีนัยสำคัญการเปลี่ยนแปลงของแมคนีมาร์

ในกรณีดังกล่าวนี้ ผู้ทำการทดลองจะต้องเลือกใช้ วิธีทดสอบทางสถิติแบบไม่คำนึงถึงพารามิเตอร์วิธีใดวิธีหนึ่ง แต่อย่างไรก็ดีข้อมูลลักษณะเดียวกันกับที่ใช้ X^2 ทดสอบนั้น ถ้าใช้ทดสอบแยกเป็นราย ๆ ไม่รวมแต่ละประเภทเข้าด้วยกันเมื่อกลุ่มตัวอย่างน้อย ๆ และต้องรวมประเภทที่ใกล้เคียงเข้าด้วยกันก่อนทดสอบ X^2 แล้ว การทดสอบ X^2 จะมี

อำนาจน้อย จึงควรใช้การทดสอบแบบ Kolmogarov Smirnov[๑]

ในงานวิจัยที่ต้องการทดสอบว่ากลุ่มตัวอย่าง k กลุ่มมาจากประชากรเดียวกันหรือไม่นั้นโดยปกติจะใช้ การวิเคราะห์ความแปรปรวนหรือ F - test ในบางครั้งข้อตกลงเบื้องต้นของการวิเคราะห์ความแปรปรวน ประกอบด้วย คะแนนที่ได้เป็นไปอย่างอิสระและมาจากประชากรที่มีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ และประชากรทั้งหมดมีความแปรปรวนเหมือนกัน นักวิจัยไม่อาจได้ข้อมูลที่มีลักษณะครบตามข้อตกลงเบื้องต้นดังกล่าวจึงใช้การทดสอบด้วยไคสแควร์ที่ไม่มีพารามิเตอร์ แต่ในกรณีที่ต้องการวิเคราะห์ความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่าง ๒ กลุ่มว่าเท่ากันหรือไม่ (โดยใช้ F - test) เพื่อนำไปใช้ในการทดสอบความแตกต่างของมัชฌิมที่ใช้ t - test เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก ไม่ควรใช้ไคสแควร์ ให้ใช้ F - test แทน[๒]

๘. ความสัมพันธ์ระหว่างไคสแควร์กับค่าสถิติอื่น

ฮันติงตัน (E.V. Huntington) ได้แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ของการแจกแจงทั่ว ๆ ไประหว่างค่าสถิติ ๒ ค่า ที่ทราบการกระจายอย่างเป็นอิสระต่อกันดังนี้ สมมุติว่า x เป็นตัวแปร [illegible]ที่มีการกระจายตามกฎความน่าจะเป็น

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,dx = 1$$

สมมุติว่า y เป็นตัวแปรตัวหนึ่งที่มีการกระจายตามกฎความน่าจะเป็น

---

[1] Sidney Siegel, Non-Parametric Statistics, (Tokyo:Kogakusha Company, Ltd., C 1956), pp.116-27.

[2] William L. Hays, Statistics, (New York: Holt Rinehart and Winston, C 1963), p.352.

$$\int_{0}^{\infty} f_2(y)dy = 1$$

x และ y ต่างก็มีการกระจายเป็นอิสระ ผลหาร $w = x/y$ จะกระจายตามกฎความน่าจะเป็น

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(w)dw = 1$$

ซึ่ง

$$Q(w) = \int_{0}^{\infty} f_1(wy)\ f_2(y)y\ dy \qquad (๒๑)$$

ซึ่งสามารถหาค่าความน่าจะเป็นได้ถ้าทราบการกระจายของค่าสถิติ โดยแยกออกจากกันของ x, y ซึ่งจะมี ๓ กรณี คือ[1]

๑. ถ้า x มีกระกระจายแบบแกมมา (Gamma Distribution) และ y เป็นค่าคงที่ (๑๙) จะมีการกระจายแบบ χ^2 ซึ่งพัฒนามาโดยเปียร์สัน ในปี ๑๙๐๐ (Karl Pearson)

๒. ถ้าทั้ง x และ y มีการกระจายแบบแกมมา (Gamma Distribution) (๑) จะมีการกระจายแบบ t ซึ่งพัฒนาโดยสติวเด็นท์ (Student) ในปี ๑๙๐๘

๓. ถ้าทั้ง x และ y มีการกระจายแบบแกมมา (Gamma Distribution) (๑) จะมีการกระจายเป็นโค้งปกติ z หรือ การกระจายแบบ F

เมื่อทราบการกระจายของ x และ y สำหรับทุกกรณีที่กลุ่มตัวอย่างนั้นสุ่มอย่างอิสระจากประชากรที่เป็นโค้งปกติ การกระจายของกลุ่มตัวอย่าง x และ y ในตอนนั้นได้มาจากการใช้เรขาคณิตวิเคราะห์ โดยการเปลี่ยนให้เป็นโพลาร์ โคออร์ดิเนต

---

[1] E.V. Huntington, "Frequency Distribution of Product and Quotient", The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 10, (1939), pp. 195-98.

และนำจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย แต่ต่อมา ดันแฮม แจคสัน (Dunham Jackson) ได้แสดงให้เห็นถึงการได้มาของสัมการชนิดต่าง ๆ โดยใช้วิธีทางพีชคณิตวิเคราะห์[๑]

ความสัมพันธ์ระหว่าง F, t, Z กับ χ^2 [๒]

๑. X^2 ที่จำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากัน ๑ และขนาดของกลุ่มตัวอย่างใหญ่จะเข้าใกล้โค้งปกติ และเมื่อจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระมากกว่า ๓๐ ค่าของ X^2 จะมีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ

๒. การกระจายแบบ F จะมีค่าเท่ากับ t^2 เมื่อจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ ๑

๓. การกระจายของ F มีค่าเท่ากับ X^2/n ที่จำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ n และ ∞

๔. เปรียบเทียบตารางของ t กับตารางของ X^2 จะเห็นว่าค่าของรากที่สองของไคสแควร์ที่จำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ ๑ จะเท่ากับค่าของ t ที่จำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับค่าอนันต์

พิจารณา ความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่าง กำหนดโดย

$$S^2 = \frac{\sum_{1}^{N} (Y_i - M)^2}{N}$$

---

[1] Dunham Kackson, "Mathematical Principles in The Theory of Small Samples," American Mathematical Monthly, Vol.42 (1935), pp. 344 - 64.

[2] Quinn McNemar Psychological Testing, (New York: D.Van Nostrand Company, Inc., C 1951), p.150.

สมมุติว่าเรารู้ค่าของ μ ซึ่งค่าเบี่ยงเบนจาก μ

$$(Y_i - \mu) = (Y_i - M) + (M - \mu)$$

ค่ากำลังสองเบี่ยงเบนใด ๆ จาก μ

$$(Y_i - \mu)^2 = \left[(Y_i - M) + (M - \mu)\right]^2$$

$$= (Y_i - M)^2 + (M - \mu)^2 + 2(Y_i - M)(M - \mu)$$

รวมค่าเบี่ยงเบนทุกค่าจนถึง N

$$\sum_i^N (Y_i - \mu)^2 = \sum_i (Y_i - M)^2 + \sum_i (M - \mu)^2 + 2\sum_i (Y_i - M)(M - \mu)$$

ค่าของ $(M - \mu)^2$ เป็นค่าคงที่ ดังนั้น

$$\sum_i^N (M - \mu)^2 = N(M - \mu)^2$$

และค่า ของ $(M - \mu)$ มีค่าเท่ากันโดยตลอดทุกค่าของ i

$$\sum_i^N (Y_i - M)(M - \mu) = (M - \mu) \sum_i^N (Y_i - M) = 0$$

เพราะว่าผลบวกของความเบี่ยงเบนจากมัชฌิมของกลุ่มตัวอย่างจะเป็น 0

ดังนั้น $$\sum_i^N (Y_i - \mu)^2 = \sum_i (Y_i - M)^2 + N(M - \mu)^2$$

หารด้วย σ^2 ทั้งหมด $$\frac{\sum_i (Y_i - \mu)^2}{\sigma^2} = \sum_i \frac{(Y_i - M)^2}{\sigma^2} + \frac{N(M - \mu)^2}{\sigma^2}$$

พิจารณาทางด้านซ้ายมือที่เป็น N กรณีอิสระ หยิบจากประชากรโค้งปกติ

$$\frac{\sum_i (Y_i - \mu)^2}{\sigma^2} = \chi^2_{(N)} \qquad (\text{ท.บ.}๑)$$

ดังนั้นถ้าประชากรมีการกระจายเป็นปกติ กลุ่มตัวอย่างที่หยิบมาจากประชากรจะเป็นโค้งปกติด้วย มีมัชฌิม μ และความแปรปรวน σ^2/N ดังนั้น

$$\frac{N(M-\mu)^2}{\sigma^2} = \frac{(M-\mu)^2}{\sigma^2/N}$$
$$= \chi^2_{(1)}$$

ค่า $\frac{(M-\mu)^2}{\sigma^2/N}$ มีค่าเหมือน z^2_M จากการกระจายปกติ ถ้ารวมความจริงทั้งสองนี้เข้าด้วยกัน

$$\chi^2_{(N)} = \sum_i \frac{(Y_i-M)^2}{\sigma^2} + \chi^2_{(1)}$$
$$\chi^2_{(N)} = \frac{NS^2}{\sigma^2} + \chi^2_{(1)}$$

$\chi^2_{(N)}$ นี้มีจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระ N และ $\chi^2_{(1)}$ มีจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระ ๑ ดังนั้น จากคุณสมบัติการบวกของไคสแควร์ (ท.บ.๒) จะได้

$$\frac{NS^2}{\sigma^2} = \chi^2_{(N-1)}$$

อัตราส่วน $\frac{NS^2}{\sigma^2}$ ก็คือไคสแควร์ที่มีจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระ N - 1 เพื่อให้ s^2 เป็นค่าประมาณที่ดีใช้ s^2 แทน

$$\frac{(N-1)s^2}{\sigma^2} = \chi^2_{(N-1)}$$

ค่าการกระจายของ $F = \frac{s^2}{s^2} = \text{est.} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

$$s_1^2 = \frac{\sigma^2 \chi^2_{n_1}}{n_1}$$
$$s_2^2 = \frac{\sigma^2 \chi^2_{n_2}}{n_2}$$
$$F = \frac{[\chi^2_{n_1}/n_1]}{[\chi^2_{n_2}/n_2]}$$

นั่นคือ F เป็นอัตราส่วนระหว่างไคสแควร์ ๒ ค่าหารด้วยจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระของมัน

จะเห็นได้ว่ามีความสัมพันธ์กันในทางทฤษฎีระหว่าง F, χ^2 และ Z มาก แต่ t ก็ยังมีความสัมพันธ์กับ F, χ^2, Z อัตราส่วน t สำหรับมัชฌิม คือ

$$t = \frac{(M-\mu)/\sigma}{\sqrt{s^2/N\sigma^2}} = \frac{(M-\mu)\,\sigma_M}{\sqrt{s^2/\sigma^2}}$$

และ $$\frac{(N-1)\,s^2}{\sigma^2} = \chi^2_{(N-1)}$$

$$\frac{s^2}{\sigma^2} = \frac{\chi^2_{(N-1)}}{N-1}$$

ดังนั้น $$t = \frac{Z_M}{\sqrt{\chi^2_{(N-1)}/(N-1)}}$$

หรือ $$t^2 = \frac{Z^2_M}{\chi^2/N-1}$$

ตารางสรุปความสัมพันธ์ของการกระจายที่มาจากโค้งปกติ[1]

การกระจาย	X^2	F	t
โค้งปกติ	กำเนิดจากโค้งปกติและจะเป็นโค้งปกติเมื่อ $n-\infty$ นิยามจากผลบวกของค่าปกติ z^2 ที่เป็นอิสระ	กำเนิดจากโค้งปกติ	กำเนิดจากโค้งปกติและเข้าใกล้เมื่อ $n \longrightarrow \infty$
X^2		ค่าของ X^2 ที่ df=n จะเท่ากับ F เมื่อ X^2/n และจำนวน df เป็น n และ ∞	เศษเป็นค่าปกติ z ส่วนคือ $\sqrt{X^2/n}$
F			$t^2_{(n)} = F_{(1,n)}$

[1] William L. Hays, <u>Statistics</u>, (New York: Holt Rinehart and Winston, C 1963), p.355.

การวิเคราะห์ความแปรปรวนด้วย F - test เปรียบเทียบกับ X^2 - test

การทดสอบสมมุติฐานทางสถิติเกี่ยวกับกลุ่มตัวอย่าง k กลุ่มว่ามีมัชฌิมเท่ากันหรือไม่นั้นขึ้นอยู่กับชนิดของกลุ่มตัวอย่างที่เกี่ยวข้อง สำหรับกลุ่มตัวอย่างที่มีการแจกแจงเป็นปกติ สถิติที่ใช้คือ

$$F = \frac{\frac{\text{among sample SS}}{k-1}}{\frac{\text{within sample SS}}{\sum n-k}} = \frac{\text{among sample MS}}{\text{within sample MS}} \quad (๒๒)$$

$$\text{among sample SS} = \sum\left(\frac{T^2}{n}\right) - \frac{G^2}{\sum n}$$

$$\text{within sample SS} = \sum Y^2 - \sum\left(\frac{T^2}{n}\right)$$

Y คือ สมาชิกแต่ละตัวในกลุ่มตัวอย่าง

n คือ จำนวนสมาชิกของแต่ละกลุ่มตัวอย่าง

T คือ ผลรวมของคะแนนในแต่ละกลุ่มตัวอย่าง

G คือ ผลรวมของ T

เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีการแจกแจงแบบทวินาม ใช้สถิติ

$$X^2_{k-1} = \frac{\text{among sample SS}}{\bar{\bar{Y}}(1-\bar{\bar{Y}})} \quad (๒๓)$$

$\bar{\bar{Y}}$ คือ ค่าเฉลี่ยของมัชฌิมของกลุ่มตัวอย่าง

ค่าสถิติทั้งสองนี้มีความคล้ายคลึงกันมาก และเมื่อการเปรียบเทียบ จึงเขียน F′ อยู่ใน X^2 รูปของ

$$\frac{X^2}{k-1} = \frac{\frac{\text{among sample SS}}{k-1}}{\bar{\bar{Y}}(1-\bar{\bar{Y}})} = \frac{\text{among Sample MS}}{\bar{\bar{Y}}(1-\bar{\bar{Y}})} \quad (๒๔)$$

ที่มีจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระ (k-1) และ ค่าอนันต์ (∞) พิจารณา F ในสมการ (๒๒) และ F′ สมการ (๒๔) มีจำนวนเศษเหมือนกัน แต่จำนวนส่วนแตกต่างกัน ตัวเศษของทั้งสองสมการเป็นค่าประมาณจากประชากร สำหรับการแจกแจงโค้งปกติ ความแปรปรวน σ^2 ประมาณค่าจาก s^2 ซึ่งเป็นค่า Error Mean Square โดยตรง สำหรับการแจกแจงแบบทวินาม σ^2 ประมาณค่าจากค่าเฉลี่ยของมัชฌิม $\bar{\bar{Y}}$ เพราะว่า $\sigma^2 = \mu(1 - \mu)$

ถ้าสมมุติฐานค่าความแปรปรวน σ^2 ของการแจกแจงทวินามประมาณค่าจาก s^2 แทน $\bar{\bar{Y}}(1 - \bar{\bar{Y}})$ ในการวิเคราะห์ความแปรปรวนนั้นไม่เคยนำ Total Mean Square มาใช้เลย ถึงอย่างไรมันก็เป็นค่าประมาณที่เท่ากับ $\bar{\bar{Y}}(1 - \bar{\bar{Y}})$ เมื่อ Total SS หารด้วย $\sum n$ แทน ($\sum n-1$) ซึ่งเป็นจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระ ผลจะได้เป็นสมการ (๒๘) และ

$$\frac{1}{\sum n}\left[G - \frac{G^2}{\sum n}\right] = \frac{G}{\sum n} - \left(\frac{G}{\sum n}\right)^2 = \bar{\bar{Y}} - \bar{\bar{Y}}^2 = \bar{\bar{Y}}(1-\bar{\bar{Y}})$$

แต่ค่าของ Total Mean Square นั้นมากกว่าค่าของ $\bar{\bar{Y}}(1-\bar{\bar{Y}})$ เล็กน้อย และเมื่อจำนวนสิ่งที่สังเกตได้มีมากขึ้น ค่าความแตกต่างจะน้อยลง ดังนั้น x^2 จึงใช้ทดสอบความแปรปรวนได้สำหรับกลุ่มตัวอย่างที่มีขนาดใหญ่ แต่เมื่อค่าของ F′ น้อยกว่า F ซึ่งมากกว่า ๑ การทดสอบไคสแควร์จะไม่ไวต่อการปฏิเสธสมมุติฐานเหมือนการวิเคราะห์ความแปรปรวน F อย่างไรก็ตามบางครั้งไม่สามารถใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนได้เพราะกลุ่มตัวอย่างมีการแจกแจงแบบทวินาม แต่ถ้าการแจกแจงแบบทวินามที่มีขนาดใหญ่มาก ๆ จะมีการกระจายแบบโค้งปกติ จึงสามารถใช้ไคสแควร์หรือการวิเคราะห์ความแปรปรวนทดสอบได้ทั้ง ๒ อย่าง[๑]

[1] Jerome C.R. Li, Statistical Inference, (Michigan :Edward Brothers, Inc., C 1964), pp. 471-75.