# บทที่ 3

## STABILITY CRITERIA

### 3.1. ความนำ.

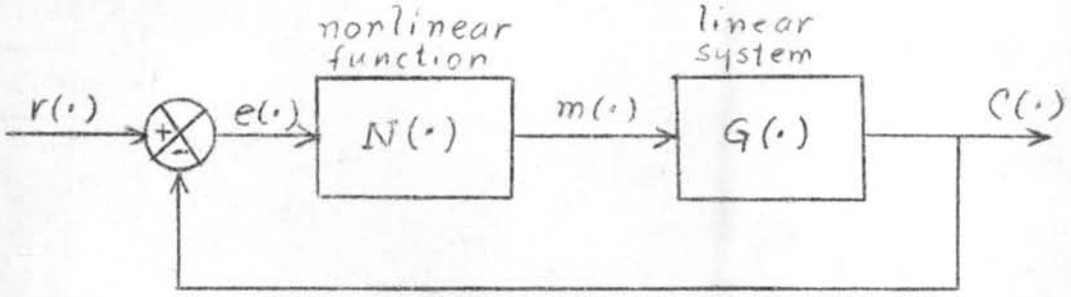
จากบทที่ 2 จะสามารถเขียน block diagram ของ nonlinear servomechanism ได้ดังรูปที่ 3.1 ซึ่งจะเขียน integral equation ได้ดังนี้ [1]

$$e(t) = r(t) - \int_{-\infty}^{\infty} g(t-u)N(e(u))du, \qquad -\infty < t < \infty \qquad (3.1)$$

เมื่อ r(.) เป็น input signal, g(.) เป็นunit impulse response, G(.) เป็น transfer function และ N(.) เป็น nonlinear function ซึ่งสมมุติว่า N(.) เป็นไปตาม uniform Lipschitz condition

$$|N(x) - N(y)| \leq \beta |x - y| \qquad (3.2)$$

และ $N(0) = 0$.




รูปที่ 3.1

ในวิธีดั้งเดิมสำหรับการศึกษาเรื่อง nonlinear servomechanism จะต้องบ่งถึงnonlinear element N(.) ให้แน่นอนว่าเป็นอย่างไรและต้องสมมุติว่า response g(.)เป็น Green's function ของdifferential operator of low orderและจะต้องใช้ phase-plane analysis บางชนิดในการคำนวณ วิธีการนี้จะมีข้อเสียทางทฤษฎีสองประการคือ ใช้ไม่ได้ทั่ว ๆ ไปและเมื่อนำไปใช้จะให้information

1. V.E. Benes,"A Nonlinear Integral Equation from the Theory of Servomechanisms" The Bell System Technical Journal, Vol.40, No.5, September 1961, pp.1300-1321.

มากเกินกว่าที่ต้องการทำให้ต้องรู้ถึงกรณีต่าง ๆ อย่างละเอียด ในปัจจุบันชอบใช้วิธีการทั่ว ๆ ไปโดยให้ information แต่น้อยและตรงกับที่ต้องการ วิธีการนี้ใช้ Schauder's fixed point theorem สำหรับศึกษาถึง solution e(.) ของสมการที่ (3.1) โดยไม่ต้องบ่งให้ละเอียดว่า g(.) หรือ N(.) เป็นอย่างไร แต่เราจะต้องสร้างคำจำกัดความถึงคุณสมบัติของ e(.) โดยหา fixed point (ที่ตรงกับ solution ของสมการ) ใน specific set ของ function space อันหนึ่ง แต่เนื่องด้วย function space และ set อาจเลือกได้หลายอย่างขึ้นกับส่วนต่าง ๆ ของคุณสมบัติของ e(.) ที่เราสนใจ ซึ่งในปัญหาทาง control ทั่ว ๆ ไปจะขึ้นอยู่กับ function space $L_2$ of square integrable function (function of finite energy).[2]

## 3.2. ทฤษฎีและผลลัพธ์.[3]

ถ้าเราจะหา solution e(t) ของสมการที่ (3.1) สมมุติให้ r(.) และ g(.) อยู่ใน $L_2$, ถ้า e(.) เป็นฟังก์ชันของ $L_2$, เราอาจเขียน Fourier tranaform ได้ว่า

$$Fe(w) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{j\omega t} e^{jwt} e(t)dt \qquad (3.3)$$

สำหรับ g(.) $L_2$, เราใช้ notation พิเศษดังนี้

$$Fg(w) = G(w) \qquad (3.4)$$

และจำกัดความให้ operator H บน $L_2$ เป็นดังนี้

$$He(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-u)N(e(u))du \qquad (3.5)$$

จะเขียนทฤษฎีต่าง ๆ ได้ดังนี้

**ทฤษฎี 1.** ถ้า G(.) เป็น bounded ใน w, ดังนั้น H เป็น continuous transformation of $L_2$

**ทฤษฎี 2.** ถ้าให้ w(.) เป็นฟังก์ชันที่กำหนดให้ที่ไม่เป็นลบของ $L_2$ และให้ S เป็น set ของ e(.) ทั้งหมดใน $L_2$ เพื่อว่า

---

2. J.M. Holtzman,"Contraction Maps and Equivalent Linearization", The Bell System Technical Journal, Vol.46, No.10, December 1967, pp.2411-2412

3. V.E. Benes, loc cit.

$$|e(t)| \leq w(t) \quad \text{เกือบจะทุก ๆ แห่ง}$$

S จะ closed และเป็น convex.

ถ้าให้ B เป็น subset ของฟังก์ชัน e(.) ของ $L_2$ ซึ่งเป็น "band limited"ของระหว่างช่วงความถี่ $(-\Omega, \Omega)$ จะเขียนได้ว่า

$$e(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{jwt} Fe(w)dw \qquad (3.6)$$

สมมุติให้ input signal r(.) และ response g(.) เป็นของ B, จำกัดความให้ operator J บน $L_2$ เป็นดังนี้

$$Je(t) = r(t) - He(t) \qquad (3.7)$$

ดังนั้น range ของ J จะเป็น subset ของ B จะทำให้ได้ว่า solution ใด ๆ ของสมการที่ (3.1) (นั่นคือ fixed point ใด ๆ ของ J )เป็นของ B ตราบเท่าที่ r(.) และ g(.) เป็นของ B

เพื่อที่จะได้ bound บนจำนวนของพลังงานซึ่ง solution e(.) มีส่วนอยู่ภายนอกช่วงที่กำหนดให้ สมมุติให้ฟังก์ชันที่ไม่เป็นลบ w(.) ของ $L_2$ satisfy กับ integral inequality

$$|r(t)| + \beta \int_{-\infty}^{\infty} |g(t-u)|\, w(u)du \leq w(t) \qquad (3.8)$$

สมการนี้จะใช้เพื่อให้แน่ใจว่า Je(.) เป็นของ S ถ้า e(.) เป็นของ S. และ inequality นี้จะทำให้คิดได้ว่าเป็นคำจำกัดความของ associated linear problem, สำหรับnonlinear function N(.) จะเข้าไปมีส่วนในสมการที่ (3.8) โดยมีส่วนใน Lipschitz constant (of order 1) $\beta$ เท่านั้น

<u>ทฤษฎี 3.</u> ถ้าสมการที่ (3.8) เป็นจริง และ N(0) = 0, ดังนั้น $JS \subset S$.

<u>ทฤษฎี 4.</u> $S \cap B$ เป็น compact ใน $L_2$

<u>ทฤษฎี 5.</u> ให้ r(.) และ g(.) เป็นของ B โดยมี G(.) bounded, ให้ N(0) = 0 และให้ integral inequality ในสมการที่ (3.8) เป็นจริง ดังนั้นจะมี solution e(.) ของสมการที่ (3.1) ใน set $S \cap B$, โดยมีคุณสมบัติ

$$|e(t)| \leq w(t) \qquad \text{(และดังนั้น } \|x\| \leq \|w\| \text{ )}$$

$$|e(t)| \leq \left(\frac{\Omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|$$

และ $$e(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{jwt} Fe(w)dw$$

ห้องสมุดคณะวิศวกรรมศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

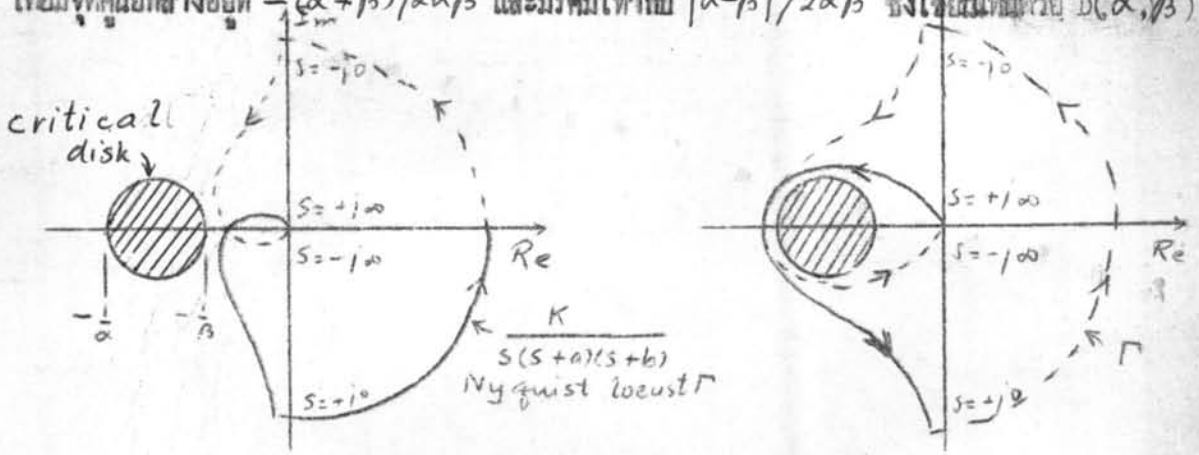
## 3.3. The Circle Criteria.[4]

ในการพิจารณาถึง stability นั้นพิจารณาจาก Nyquist criterion ซึ่งใน linear servo จะต้องพิจารณาจาก Nyquist locus $\Gamma$ ของ $G(jw)$ จะวงล้อมจุด critical point หรือไม่ สำหรับใน nonlinear servo จะดูจาก Nyquist locus $\Gamma$ จะวงล้อม critical disk หรือไม่ วิธีการเช่นนี้เรียกว่า circle criteria อันเป็นวิธีที่ทำให้ Nyquist criterion ใช้ได้ทั่ว ๆ ไป

ในการพิจารณา stability ของ system S ในรูปที่ 3.1 ถ้าให้ $G(s)$ มี P pole อยู่ในครึ่งขวามือของ s-plane ถ้าหาก system S นี้เป็น linear, system S นี้จะstable ถ้าหาก Nyquist locus วงล้อม critical point เป็นจำนวน P รอบทวนเข็มนาฬิกา แต่ในที่นี้ system S เป็น nonlinear ซึ่งจะต้องพิจารณาถึง nonlinear element $N(.)$ โดยกำหนดให้เป็น

$$\alpha \leq n(t,c) \leq \beta \qquad (3.9)$$

เมื่อ $\alpha$ และ $\beta$ เป็นตัวคงที่ที่มีค่าเป็นบวก คุณสมบัติตามสมการที่ (3.9) จะใช้ได้กับ system ที่เป็นทั้ง nonlinear และ time-varying จากคุณสมบัตินี้จะเขียน critical disk[5] ได้ดังรูปที่ 3.2 โดยมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $-(\alpha+\beta)/2\alpha\beta$ และมีรัศมีเท่ากับ $|\alpha-\beta|/2\alpha\beta$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $D(\alpha,\beta)$




รูปที่ 3.2

4. R.W. Brockett and H.B. Lee,"Frequency-Domain Instability Criteria for Time-Varying and Nonlinear Systems", Proc.IEEE, Vol.55, No.5, May 1967, pp.604-619

5. I.W. Sandberg,"Some Results on the Theory of Physical Systems Governed by Nonlinear Functional Equations", The Bell System Technical Journal, Vol.44, No.5, May-June 1965, pp.871-898.

circle criterion มีใจความว่า

1. ถ้า Nyquist locus วงรอบ critical disk $D(\alpha, \beta)$ จำนวน P รอบในทิศทวนเข็มนาฬิกา(ดูรูปที่ 3.2(ก)) system S จะ stable โดยที่ว่า initial condition ทุก ๆ อัน จะให้ output response ที่ bounded ขณะที่ $t \to \infty$
2. ถ้า Nyquist locus วงรอบ critical disk $D(\alpha, \beta)$ มีจำนวนไม่เท่ากับ P รอบในทิศทวนเข็มนาฬิกา(ดูรูปที่ 3.2(ข)) system S จะ unstable โดยที่ว่า initial condition ชุดหนึ่งหรือมากกว่าจะทำให้ output response โตขึ้นเรื่อย ๆ โดยไม่มีขอบเขตจำกัดขณะที่ $t \to \infty$.