การประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวนแบบเบส์สำหรับตัวแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูร

นางสาวชุติมา โศจิพันธุ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาสถิติศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาสถิติ ภาควิชาสถิติ

คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2542

ISBN 974-334-412-8

BAYESIAN ESTIMATION OF VARIANCE COMPONENTS FOR RANDOMIZED COMPLETE BLOCK MODEL

Miss Chutima Sojipun

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science in Statistics

Department of Statistics
Faculty of Commerce and Accountancy
Chulalongkorn University

Academic Year 1999
ISBN 974-334-412-8

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวนแบบเบส์สำหรับตัวแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์
โดย	นางสาว ชุติมา โศจิพันธุ์
ภาควิชา	ภาควิชาสถิติ
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ดร. สุพล ดุรงค์วัฒนา

คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วิรัช อภิเมธีธำรง)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ มัลลิกา บุนนาค)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา
(รองศาสตราจารย์ ดร. สุพล ดุรงค์วัฒนา)

.... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร. ธีระพร วีระถาวร)

ชุติมา โศจิพันธุ์ : การประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวนแบบเบส์สำหรับตัวแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์ (BAYESIAN ESTIMATION OF VARIANCE COMPONENTS FOR RANDOMIZED COMPLETE BLOCK MODEL)
อ.ที่ปรึกษา : รศ. ดร. สุพล ดุรงค์วัฒนา, 97 หน้า. ISBN 974-334-412-3

วัตถุประสงค์ของการวิจัยครั้งนี้เพื่อเปรียบเทียบการประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวนสำหรับตัวแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์ 2 วิธี คือ การประมาณวิธีคลาสสิก (Classic Estimation) และการประมาณวิธีเบส์ (Bayesian Estimation) โดยตัวแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์ที่นำมาศึกษาคือตัวแบบเชิงสุ่มที่ไม่มีการทำซ้ำ การเปรียบเทียบกระทำภายใต้สถานการณ์ของระดับต่างๆของปัจจัยทดลอง (a) และระดับปัจจัยแบ่งบล็อก (b) โดยที่สถานการณ์ต่างๆเป็นดังนี้ 1) a=3,b=3 2)a=4,b=4 และ 3)a=5,b=5 โดยการจำลองสถานการณ์จะกระทำเมื่อสัมประสิทธิ์การแปรผัน (Coefficient of Variation : C.V.) เป็น 5%,15% และ 25% และที่ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น 95% และ 99% ในการวิจัยครั้งนี้ทำการจำลองข้อมูลด้วยเทคนิคมอนติคาร์โลโดยทำการทดลองซ้ำๆด้วยโปรแกรม Mathematica 4.0 และหลักเกณฑ์ที่นำมาใช้ในการเปรียบเทียบวิธีการประมาณทั้ง 2 วิธี คือ สำหรับการประมาณค่าแบบจุดใช้ระยะทางยุคลิดเฉลี่ยเป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบ ส่วนการประมาณค่าแบบช่วงใช้อัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองเป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบ

ผลการวิจัยสรุปได้ดังนี้

วิธีการประมาณค่าแบบจุดขององค์ประกอบความแปรปรวนวิธีเบส์ให้ค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยต่ำกว่าการประมาณวิธีคลาสสิกในทุกสถานการณ์ของการทดลองที่ทำการศึกษา และวิธีการประมาณค่าแบบช่วงขององค์ประกอบความแปรปรวนวิธีเบส์ให้ค่าอัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 (α=0.05 และ 0.01) มากกว่าการประมาณวิธีคลาสสิก ในทุกสถานการณ์ของการทดลองที่ทำการศึกษา

ภาควิชาสถิติ ลายมือชื่อนิสิต........ชุติมา โศจิพันธ์........
สาขาวิชาสถิติ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา..........................
ปีการศึกษา 2542

2205026 : MAJOR STATISTICS

KEY WORD: Variance Components / Bayesian Estimation / Randomized Complete Block

CHUTIMA SOJIPUN : BAYESIAN ESTIMATION OF VARIANCE COMPONENTS FOR RANDOMIZED COMPLETE BLOCK MODEL. THESIS ADVISOR: ASSOCIATE PROFESSOR SUPOL DURONGWATANA, Ph. D. 97 pp. ISBN 974-334-412-3

The objective of this study is to compare Bayesian estimation of variance components of randomized complete block design for random-effect model with classical estimation. The random-effect model in the study is randomized complete block with no replication. Monte Carlo Simulation is done under several situations due to level of treatment factor (a), level of blocking factor (b) and coefficient of variation (C.V.) of the response variable.

In this study, the data were generated as the following:

1) The case of $a = 3$ and $b = 3$,
2) The case of $a = 4$ and $b = 4$, and
3) The case of $a = 5$ and $b = 5$

All situations were generated under C.V. of 5%,15% and 25% . There are 2 criteria for evaluation for both approaches. Euclidean distance for vector of variance component estimates is a measure for point estimation and the empirical experimentwise error rate (EER) is a measure for interval estimation. Simulation is done by Mathematica 4.0. The results for the study show that the vector of point estimates for variance components in the model using Bayesian approach; on the average, has less Euclidean distance than classical one for all cases. Interval estimates using Bayesian approach provide empirical experiment error rate much closer to the level of significance at 5% and 1% than the classical estimates for all cases.

ภาควิชาสถิติ ลายมือชื่อนิสิต.......ชุติมา โศจิพันธุ์.......

สาขาวิชาสถิติ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา...............

ปีการศึกษา 2542

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยความช่วยเหลืออย่างดียิ่งของรองศาสตราจารย์ ดร. สุพล ดุรงค์วัฒนา อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่กรุณาให้คำแนะนำ ปรึกษา ตลอดจนช่วยเหลือแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ จนกระทั่งวิทยานิพนธ์เสร็จสมบูรณ์ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณด้วยความรู้สึกซาบซึ้งและสำนึกในพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ มัลลิกา บุนนาค ในฐานะประธานกรรมการ และรองศาสตราจารย์ ดร. ธีระพร วีระถาวร ในฐานะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่กรุณาตรวจแก้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น ขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์ประจำภาควิชาสถิติ และภาควิชาคณิตศาสตร์ที่ให้โอกาสทางการศึกษา และประสิทธิประสาทความรู้ให้แก่ผู้เขียนจนกระทั่งสำเร็จการศึกษา

ท้ายนี้ ผู้วิจัยใคร่ขอกราบขอบพระคุณ บิดา-มารดา ซึ่งสนับสนุนในด้านการเงิน และให้กำลังใจแก่ผู้วิจัยเสมอมาจนสำเร็จการศึกษา และเนื่องจากทุนการวิจัยครั้งนี้บางส่วนได้รับมาจากทุนอุดหนุนการวิจัยของบัณฑิตวิทยาลัย จึงขอขอบพระคุณบัณฑิตวิทยาลัยมา ณ ที่นี้ด้วย

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

ตาราง หน้า

สารบัญตาราง

ตาราง หน้า

สารบัญภาพ

ภาพประกอบ หน้า

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพประกอบ หน้า

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพประกอบ หน้า

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพประกอบ หน้า

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา

องค์ประกอบความแปรปรวน (Varaince Components) เป็นความแปรปรวนของปัจจัยต่าง ๆ ซึ่งศึกษาในแผนแบบการทดลอง ถือว่าเป็นพารามิเตอร์ที่สำคัญของการวางแผนการทดลอง โดยทั่วไปแผนแบบการทดลองจะมีตัวแบบอยู่ 3 ลักษณะ คือ ตัวแบบคงที่ (fixed model) ใช้ในกรณีที่ปัจจัยที่ระดับปัจจัยในการทดลองเป็นจำนวนระดับทั้งหมดที่ศึกษา ตัวแบบเชิงสุ่ม (random model) ใช้ในกรณีที่ปัจจัยที่ระดับปัจจัยในการทดลอง ถูกสุ่มมาจากจำนวนระดับทั้งหมดที่ศึกษา และตัวแบบผสม (mixed model) ที่มีทั้งตัวแบบคงที่และตัวแบบเชิงสุ่มอยู่ในการทดลอง ซึ่งในการศึกษาครั้งนี้กล่าวถึงตัวแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์ที่ไม่มีการทำซ้ำ ซึ่งมีการแยกองค์ประกอบความแปรปรวนเนื่องจากปัจจัยทดลอง ปัจจัยแบ่งบล็อก และความคลาดเคลื่อน เป็นอิสระจากกันในแต่ละปัจจัย โดยปัจจัยดังกล่าวกำหนดให้เป็นตัวแบบที่ 2 คือ ตัวแบบเชิงสุ่ม

ในการประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนสามารถทำได้ 2 วิธี คือ การประมาณวิธีคลาสสิก (Classical Estimation) พิจารณาว่าองค์ประกอบความแปรปรวนเป็นค่าคงที่ที่ไม่ทราบและต้องการประมาณค่า และการประมาณวิธีเบส์ (Bayesian Estimation) ซึ่งเป็นวิธีการที่นักวิชาการสถิติกำลังให้ความสนใจ โดยพิจารณาองค์ประกอบความแปรปรวนเป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นไปได้อยู่ในช่วงหนึ่ง และมีการแจกแจงความน่าจะเป็นขององค์ประกอบความแปรปรวน ที่เรียกว่า การแจกแจงก่อน (Prior Distribution) ซึ่งการแจกแจงก่อน มี 2 ประเภท ประเภทแรกคือการแจกแจงก่อนที่ให้ข้อมูล (Informative Prior Distribution) ว่ามีลักษณะการแจกแจงใด ประเภทที่สองคือ การแจกแจงก่อนที่ไม่ให้ข้อมูล (Noninformative Prior Distribution) ว่ามีลักษณะการแจกแจงใด นั่นคือ ไม่ทราบว่าองค์ประกอบความแปรปรวน ควรจะมีค่าแท้จริงเท่าใด ดังนั้นการแจกแจงนี้กำหนดให้แต่ละองค์ประกอบความแปรปรวนมีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน หรือโอกาสเกิดขึ้นใกล้เคียงกัน และในการศึกษาครั้งนี้เราจะกำหนดให้การแจกแจงก่อนมีลักษณะการแจกแจงแบบที่สอง โดยการแจกแจงก่อนใช้การแจกแจงแบบสม่ำเสมอในช่วงของค่าองค์ประกอบความแปรปรวนที่เป็นไปได้ เรียกว่า การแจกแจงก่อนแบบสม่ำเสมอเฉพาะที่ (Locally Uniform Prior Distribution) เมื่อเราได้การแจกแจงก่อนแล้วนำมาปรับกับข้อมูลของการทดลองหรือฟังก์ชันความควรจะเป็น (likelihood function) จะได้การแจกแจงใหม่น่าจะส่งผลให้มีความน่าเชื่อถือมากยิ่งขึ้น ซึ่งเรียกว่า การแจกแจงภายหลัง (Posterior Distribution) ซึ่งทำให้ทราบ

ลักษณะการแจกแจงขององค์ประกอบความแปรปรวนที่ต้องการประมาณ และสามารถหาค่าประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนสำหรับตัวแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์ได้ตามหลักการของเบส์

จากหลักการดังกล่าวข้างต้น จึงทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาและเปรียบเทียบการประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนโดยส่วนใหญ่สำหรับตัวแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์ 2 วิธี คือ

1.1 การประมาณค่าวิธีคลาสสิก (Classical Estimation)

1.2 การประมาณค่าวิธีเบส์ (Bayesian Estimation)

ซึ่งผลที่ได้จากการศึกษาในครั้งนี้ นอกจากจะทำให้ทราบวิธีการประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนที่เหมาะสมที่สุดใน 2 วิธีการข้างต้นสำหรับตัวแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์แล้ว ยังทำให้ทราบลักษณะทั่วไปขององค์ประกอบความแปรปรวนจากฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังด้วย และค่าที่ได้จากการประมาณน่าจะครอบคลุมกว่าการพิจารณาที่องค์ประกอบความแปรปรวนเป็นค่าคงที่เพียงอย่างเดียว

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อศึกษาและเปรียบเทียบการประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนสำหรับตัวแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์ 2 วิธี คือ

1.2.1 การประมาณค่าวิธีคลาสสิก (Classical Estimation)

1.2.2 การประมาณค่าวิธีเบส์ (Bayesian Estimation)

1.3 สมมติฐานของการวิจัย

การประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนวิธีเบส์สำหรับตัวแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์จะให้ค่าประมาณใกล้เคียงค่าจริงขององค์ประกอบความแปรปรวนมากกว่าการประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนวิธีคลาสสิก

1.4 ข้อตกลงเบื้องต้น

1.4.1 ศึกษาภายใต้ตัวแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์ที่ไม่มีการทำซ้ำ ซึ่งจะไม่มีอันตรกิริยา(interaction)เทอมระหว่างปัจจัยทดลองและปัจจัยแบ่งบล็อก สมมติว่าสนใจปัจจัย 1 อย่าง คือ ปัจจัยทดลองมี a ระดับ โดยมีปัจจัยแบ่งบล็อก b ระดับ ดังนั้นจะมีข้อมูลในการทดลองหนึ่ง ๆ เท่ากับ axb ข้อมูล ถ้าให้ y_{ij} คือ ค่าสังเกตที่ i ของปัจจัยทดลอง และบล็อกที่ j ของปัจจัยแบ่งบล็อก

โดยมีตัวแบบเป็นดังนี้

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \quad ; \quad i = 1,\dots,a;\ j = 1,\dots,b \qquad (1)$$

ซึ่งหมายความว่า ค่าสังเกต y_{ij} ประกอบด้วยส่วนประกอบ 4 ส่วนคือ

1) μ คือ ค่าเฉลี่ยรวมของประชากร

2) τ_i คือ ผลกระทบระดับที่ i ของปัจจัยทดลอง

3) β_j คือ ผลกระทบระดับที่ j ของปัจจัยแบ่งบล็อก

4) ε_{ij} คือ ความคลาดเคลื่อนของค่าสังเกตระดับที่ i ของปัจจัยทดลอง และบล็อกที่ j ของปัจจัยที่ถูกแบ่งเป็นบล็อก

4.1.2 สมมติให้ μ เป็นพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า

และ $\tau_i, \beta_j, \varepsilon_{ij}$ เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระกันและมีการแจกแจงแบบปกติที่มี $E(\tau_i) = E(\beta_j) = E(\varepsilon_{ij}) = 0$ และ $Var(\tau_i) = \sigma_\tau^2, Var(\beta_j) = \sigma_\beta^2, Var(\varepsilon_{ij}) = \sigma_\varepsilon^2$

ดังนั้น $\quad E(y_{ij}) = \mu \quad , \quad Var(y_{ij}) = \sigma_\tau^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_\varepsilon^2$

นั่นคือ $\quad y_{ij} \sim N(\mu, \sigma_\tau^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_\varepsilon^2)$

$$\mathrm{Cov}(y_{ij}, y_{i'j'}) = \begin{cases} \sigma_\tau^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_\varepsilon^2 & , i = i', j = j' \\ \sigma_\tau^2 & , i \neq i', j = j' \\ \sigma_\beta^2 & , i = i', j \neq j' \\ 0 & , i \neq i', j \neq j' \end{cases}$$

ซึ่ง $\sigma_\tau^2, \sigma_\beta^2$ และ σ_ε^2 นี้เรียกว่า พารามิเตอร์องค์ประกอบความแปรปรวน (variance component parameter) ที่ต้องการประมาณ ตารางต่อไปนี้เป็นตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับแผนแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์

ตารางที่ 1 แสดงการวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับแผนแบบการทดลองสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์

สาเหตุของความแปรปรวน	ระดับขั้นความเสรี	ผลรวมกำลังสอง	ผลรวมกำลังสองเฉลี่ย	ค่าคาดหวังของผลรวมกำลังสองเฉลี่ย
ปัจจัยทดลอง	$a-1$	$SST = b\sum_i(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$	$MST = \frac{SST}{a-1}$	$\sigma^2_{\varepsilon\tau} = \sigma^2_{\varepsilon} + b\sigma^2_{\tau}$
ปัจจัยแบ่งบล็อก	$b-1$	$SSB = a\sum_j(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2$	$MSB = \frac{SSB}{b-1}$	$\sigma^2_{\varepsilon\beta} = \sigma^2_{\varepsilon} + a\sigma^2_{\beta}$
ความคลาดเคลื่อน	$(a-1)(b-1)$	$SSE = \sum_i\sum_j(y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2$	$MSE = \frac{SSE}{(a-1)(b-1)}$	σ^2_{ε}
รวม	$ab-1$	$SSY = \sum_i\sum_j(y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$		

โดยที่ y_{ij} คือ ค่าสังเกตที่ i ของปัจจัยทดลอง และบล็อกที่ j ของปัจจัยแบ่งบล็อก

$\bar{y}_{i.}$ คือ ค่าเฉลี่ยของค่าสังเกตทุกตัวในทุกระดับของปัจจัยแบ่งบล็อก ในระดับที่ i ของ

$$\text{ปัจจัยทดลอง} = \frac{\sum_{j=1}^{b} y_{ij}}{b}$$

$\bar{y}_{.j}$ คือ ค่าเฉลี่ยของค่าสังเกตทุกตัวในทุกระดับของปัจจัยทดลองในระดับที่ j ของ

$$\text{ปัจจัยแบ่งบล็อก} = \frac{\sum_{i=1}^{a} y_{ij}}{a}$$

$\bar{y}_{..}$ คือ ค่าเฉลี่ยของค่าสังเกตทุกตัวในทุกระดับของปัจจัยทดลอง และในทุกระดับของ

$$\text{ปัจจัยแบ่งบล็อก} = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}}{ab}$$

a คือ จำนวนระดับของปัจจัยทดลอง

b คือ จำนวนระดับของปัจจัยแบ่งบล็อก

1.5 **ขอบเขตของการวิจัย**

1.5.1 กำหนดระดับของปัจจัยคือ

$$i = 1,\ldots,a \quad j = 1,\ldots,b \quad \text{โดย} \quad a, b = 3,4,5$$

ดังนั้น ขนาดตัวอย่างสำหรับตัวแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์ เท่ากับ 9, 16 และ 25 ตามลำดับ

1.5.2 กำหนดให้ข้อมูลมีค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน (Coefficient of Variation: $C.V.$) เท่ากับ 5%, 15% และ 25% และค่าเฉลี่ย(μ) เท่ากับ 40 จะได้ความแปรปรวน ($\sigma^2_{Y_{ij}}$) เท่ากับ 4, 36 และ 100 และคำนวณหาองค์ประกอบการแปรผันของปัจจัยต่าง ๆ ได้ตามสูตรดังนี้ คือ

จาก $$C.V.\left(y_{ijk}\right) = \frac{SD\left(y_{ijk}\right)}{\mu} = \frac{\sqrt{\sigma^2_\tau + \sigma^2_\beta + \sigma^2_\varepsilon}}{\mu}$$

เพื่อให้ง่ายในการคำนวณ กำหนดให้

$$\sigma^2_\tau = \sigma^2_\beta = k\sigma^2_\varepsilon {}^{*}$$

โดยที่ k เป็นค่าจำนวนเต็มคงที่ เท่ากับ 1,2,3

จะได้ว่า $$C.V.\left(y_{ijk}\right) = \frac{\sqrt{k\sigma^2_\varepsilon + k\sigma^2_\varepsilon + \sigma^2_\varepsilon}}{\mu} = \frac{\sigma_\varepsilon\sqrt{2k+1}}{\mu}$$

ดังนั้น $$\sigma^2_\varepsilon = \frac{(cv x \mu)^2}{2k+1.}$$

1.5.3 กำหนดค่าระดับนัยสำคัญ (α) คือ 0.05 และ 0.01

1.5.4 ในการวิจัยครั้งนี้สร้างแบบจำลองข้อมูลโดยใช้เทคนิคมอนติคาร์โลซีมูเลชั่น (Monte Carlo Simulation Technique) เป็นเทคนิคจำลองข้อมูลโดยใช้ตัวเลขสุ่ม เขียนด้วยโปรแกรมภาษา Mathematica 4.0 ทำการทดลองจนกว่าค่าสัมบูรณ์ของระยะทางยุคลิดเฉลี่ยลู่เข้าสู่ค่าคงที่ หมายความว่า จะหยุดทำการทดลองเมื่อค่าสัมบูรณ์ของระยะทางยุคลิดเฉลี่ยของจำนวนการทดลองก่อนหน้ามีค่าแตกต่างจากระยะทางยุคลิดเฉลี่ยของจำนวนการทดลองถัดไปน้อยกว่าหรือเท่ากับ 0.001 ($\left|EU_N - EU_{N-1}\right| \le 0.001$ โดย N คือจำนวนการทดลองที่ทำให้ค่าประมาณมีค่าเป็นบวก)

1.6 คำจำกัดความที่ใช้ในการวิจัย

ระยะทางยุคลิด (Euclidean Distance) หมายถึง ระยะทางระหว่างค่าประมาณขององค์ประกอบความแปรปรวนโดยส่วนใหญ่ที่ศึกษากับค่าจริงขององค์ประกอบความแปรปรวน

1.7 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.7.1 สามารถใช้หลักการแบบเบส์ประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนสำหรับแผนแบบการทดลองสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์

---

* ในทางปฏิบัติ $\sigma^2_\tau = \sigma^2_\beta = k\sigma^2_\varepsilon$ ไม่เป็นจริงเสมอไปแต่เพื่อให้สะดวกต่อการวิจัยจึงกำหนดเป็นดังกล่าวข้างต้น

1.7.2 สามารถเปรียบเทียบวิธีการประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนวิธีเบส์โดยส่วนใหญ่และวิธีคลาสสิกโดยรวมว่าในแต่ละกรณีวิธีการใดให้ค่าประมาณที่ดีกว่าในเชิงสถิติ

1.7.3 เพื่อใช้เป็นแนวทางในการศึกษาการประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนสำหรับแผนแบบการทดลองอื่นต่อไป

บทที่ 2

ระเบียบวิธีการวิจัย

ในทางสถิติแนวความคิดเกี่ยวกับการประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนสามารถทำได้ 2 วิธี คือ 1) การประมาณค่าวิธีคลาสสิก (Classical Estimation) 2) การประมาณค่าวิธีเบส์ (Bayesian Estimation) วิธีการประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนที่นำมาเปรียบเทียบในการศึกษาครั้งนี้เป็นการศึกษาทั้งสองแนวความคิด โดยแนวความคิดวิธีคลาสสิกจะพิจารณาว่า ค่าประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนเป็นค่าคงที่ที่ไม่ทราบค่าและต้องการประมาณค่า แต่แนวความคิดวิธีเบส์ พิจารณาว่าองค์ประกอบความแปรปรวนเป็นตัวแปรสุ่ม ซึ่งมีการแจกแจงความน่าจะเป็นที่เรียกว่า การแจกแจงก่อน ซึ่งเป็นที่สนใจของการศึกษาศาสตร์ทางสถิติในปัจจุบัน เนื่องจากในบางกรณีอาจไม่ทราบ ลักษณะการแจกแจงขององค์ประกอบความแปรปรวนได้ เช่น เหตุการณ์ที่ไม่เคยเกิดขึ้นมาก่อนเลยในอดีต ดังนั้นจึงเกิดปัญหาว่าจะกำหนดการแจกแจงก่อนอย่างไร ส่วนในกรณีที่เป็นเหตุการณ์ที่เคยเกิดขึ้นมาแล้วในอดีตก็อาจพอมองเห็นลักษณะการแจกแจงขององค์ประกอบความแปรปรวน และนำมาใช้เป็นการแจกแจงก่อนได้ สำหรับการศึกษาครั้งนี้สนใจเหตุการณ์ที่ไม่เคยเกิดขึ้นเลยในอดีตหรืออาจเกิดขึ้นได้ แต่ผู้วิจัยอาจไม่มีข้อมูลเพียงพอที่จะนำมากำหนดการแจกแจงก่อนได้ (Noninformative Prior Distribution) ซึ่งจากผลงานของนักสถิติ Lindley (1970)[1] เสนอว่า เมื่อไม่ทราบการแจกแจงก่อนได้ วิธีการที่ควรกระทำคือ กำหนดให้การแจกแจงก่อนแบบสม่ำเสมอเฉพาะที่ของค่าประมาณองค์ประกอบที่เป็นไปได้ (Locally Uniform Prior Distribution) ซึ่งนักสถิติที่ยึดมั่นในแนวความคิดนี้เชื่อว่าการกำหนดการแจกแจงก่อนโดยไม่มีกฎเกณฑ์แน่นอนเช่นนี้ จะไม่ก่อให้เกิดปัญหาเกี่ยวกับคุณภาพของการประมาณแต่อย่างใด ทั้งนี้เพราะในการประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนวิธีเบส์ อาศัยการแจกแจงที่มีเงื่อนไขขององค์ประกอบความแปรปรวนเมื่อกำหนดข้อมูลตัวอย่าง หรือที่เรียกว่าการแจกแจงภายหลัง (Posterior Distribution) เป็นสิ่งสำคัญ เพื่อเป็นแนวทางสู่การประมาณค่าแบบจุด และการประมาณค่าแบบช่วง ซึ่งมีรายละเอียดต่าง ๆ ได้กล่าวไว้ในหัวข้อต่อไป

---

[1] Lindley,D.V., Introduction to Probability and Statistics from a Bayesian Viewpoint Part2 Inference. (Cambridge:Cambridge University Press,1970), pp.19.

2.1 การประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนวิธีคลาสสิก

การประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนในตัวแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์ ตามแนวคิดวิธีคลาสสิกพิจารณาว่าองค์ประกอบความแปรปรวนเป็นค่าที่ไม่ทราบค่า โดยใช้วิธีวิเคราะห์ความแปรปรวนในการประมาณค่าแบบจุด

2.1.1 การประมาณค่าแบบจุดขององค์ประกอบความแปรปรวน

ในการประมาณค่าแบบจุดขององค์ประกอบความแปรปรวนนี้ จะใช้วิธีวิเคราะห์ความแปรปรวน โดยนำค่าคาดหวังของผลรวมกำลังเฉลี่ยในคอลัมภ์สุดท้ายของตารางที่ 1 หน้าที่ 4 มาใช้หลักการคำนวณทางคณิตศาสตร์เพื่อหาค่าประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนแบบจุด แสดงได้ดังนี้

1) ค่าประมาณแบบจุดของ σ_ε^2

จากตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวน เราทราบว่า

$$E(MSE) = \sigma_\varepsilon^2$$

นั่นคือ MSE เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงสำหรับ σ_ε^2

เราจึงสามารถใช้ $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = MSE$

2) ค่าประมาณแบบจุดของ σ_τ^2

ทราบว่า

$$E(MST) = \sigma_\varepsilon^2 + b\sigma_\tau^2$$

$$E(MST) - \mathrm{E(MSE)} = (\sigma_\varepsilon^2 + b\sigma_\tau^2) - \sigma_\varepsilon^2$$

$$= \mathrm{b}\sigma_\tau^2$$

$$\therefore \ \sigma_\tau^2 = \frac{E(MST) - \mathrm{E(MSE)}}{b}$$

$$= E\left(\frac{MST - MSE}{b}\right)$$

นั่นคือ $\dfrac{MST - MSE}{b}$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงสำหรับ σ_τ^2

เราจึงสามารถใช้ $\hat{\sigma}_\tau^2 = \dfrac{MST - MSE}{b}$

3) ค่าประมาณแบบจุดของ σ_β^2

ในทำนองเดียวกันทราบว่า

$$E(MSB) = \sigma_\varepsilon^2 + a\sigma_\beta^2$$

เราจึงสามารถใช้

$$\hat{\sigma}_\beta^2 = \frac{MSB - MSE}{a}$$

จะเห็นได้ว่าโอกาสที่ค่าประมาณขององค์ประกอบความแปรปรวนอาจจะติดลบได้ ซึ่งเป็นตัวประมาณที่ไม่ดีนักสำหรับการประมาณองค์ประกอบความแปรปรวน จาก Cochran (1976)[2] ได้เสนอให้ค่าประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนที่ติดลบนั้นมีค่าเป็นศูนย์หรือตัดค่าประมาณนั้นออกไป โดยในการวิจัยครั้งนี้ได้ทำการตัดค่าประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนที่ติดลบนั้นออกไป

2.1.2 การประมาณค่าแบบช่วงขององค์ประกอบความแปรปรวน

พิจารณาจากทฤษฎีของ Cochran ที่ว่า ถ้าค่าสังเกต y_{ij} สำหรับ $i = 1,2,..,a,\ j = 1,2,...,b$ มีการแจกแจงแบบปกติ โดยที่ $Var\left(y_{ijk}\right) = \sigma_\tau^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_\varepsilon^2$ และ $\mathrm{Cov}\left(y_{ij}, y_{i'j'}\right) = 0$ SSY ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่มที่สามารถแยกองค์ประกอบความแปรปรวนออกเป็น 3 ส่วน คือ SST, SSB และ SSE โดยที่ $y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$ และ $Var\left(\varepsilon_{ij}\right) = \sigma_\varepsilon^2$ และเป็นไปตามข้อกำหนดของข้อมูลดังกล่าวแล้ว จะได้ว่า $\frac{SST}{\sigma_{\varepsilon\tau}^2}, \frac{SSB}{\sigma_{\varepsilon\beta}^2}$ และ $\frac{SSE}{\sigma_\varepsilon^2}$ จะเป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระจากกัน และมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ ด้วยระดับขั้นความเสรี (a-1),(b-1) และ (a-1)(b-1) ตามลำดับ

ดังนั้น $$p\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},(a-1)(b-1)} \le \frac{SSE}{\sigma_\varepsilon^{\ 2}} \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2},(a-1)(b-1)}\right) = 1-\alpha$$

หรือ $$p\left(\frac{SSE}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},(a-1)(b-1)}} \le \sigma_\varepsilon^{\ 2} \le \frac{SSE}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},(a-1)(b-1)}}\right) = 1-\alpha$$

นั่นคือ ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\,\%$ สำหรับ σ_ε^2 คือ

$$\frac{SSE}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},(a-1)(b-1)}} \le \sigma_\varepsilon^{\ 2} \le \frac{SSE}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},(a-1)(b-1)}}$$

---

[2]Cochran,W.G.,and Cox,G.M. Experimental Design,(New York : John Hiley and Sons, 1976).

ส่วนการหาช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\,\%$ สำหรับองค์ประกอบความแปรปรวนที่เหลือไม่สามารถหาช่วงความเชื่อมั่นจริงได้ เนื่องจากค่าคาดหวังของผลรวมกำลังสองเฉลี่ยไม่ได้ขึ้นอยู่กับความแปรปรวนเพียงค่าเดียว จึงใช้ทฤษฎีของ Sattertyhwaite[3] ที่ใช้การทดสอบเอฟแบบเทียม ("pseudo"F tests) ในการหาโครงสร้างการประมาณค่าแบบช่วงขององค์ประกอบความแปรปรวนได้

ทฤษฎีของ Satterthwaite ได้ใช้ผลรวมเชิงเส้นของผลรวมกำลังสองเฉลี่ย 2 เชิงเส้น

กำหนดให้ $MS' = MSR + \ldots + MSS$

และ $MS'' = MSU + \ldots + MSV$

ด้วยตัวสถิติทดสอบ

$$F = \frac{MS'}{MS''}$$

และมีระดับขั้นความเสรี (p,q) โดยที่

p คือ ระดับขั้นความเสรี ของตัวเศษ $= \dfrac{(MSR + \ldots + MSS)^2}{\dfrac{MSR^2}{df_r} + \ldots + \dfrac{MSS^2}{df_s}}$

q คือ ระดับขั้นความเสรี ของตัวส่วน $= \dfrac{(MSU + \ldots + MSV)^2}{\dfrac{MSU^2}{df_u} + \ldots + \dfrac{MSV^2}{df_v}}$

df_i คือ จำนวนระดับขั้นความเสรี ที่สัมพันธ์กับผลรวมกำลังสองเฉลี่ย MSI โดยที่ $i = r,\ldots,s,u,\ldots,v$; I = R,...,S,U,...,V

ตัวสถิติ F นี้สามารถใช้ในการทดสอบการประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนสนใจที่ระดับนัยสำคัญ

สำหรับการทดสอบระดับนัยสำคัญขององค์ประกอบความแปรปรวน σ_0^2 ของสองผลรวมเชิงเส้น MS' และ MS'' ที่เลือก โดยนำค่าคาดหวังมาลบกัน ซึ่งมีค่าเท่ากับผลคูณขององค์ประกอบกล่าวคือ

---

[3] Sattertwait, F.E. An Approximate Distribution of Estimates of Variance Components. Biometrics Bull.2 (1946) pp. 110 – 112.

$$E(MS') - E(MS'') = k\sigma_0^2$$

หรือ

$$\sigma_0^2 = \frac{E(MS') - E(MS'')}{k}$$

ซึ่งใช้เป็นเกณฑ์สำหรับค่าประมาณแบบจุดของ σ_0^2

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{E(MS') - E(MS'')}{k}$$

นั่นคือ

$$= \frac{1}{k}MS' - \frac{1}{k}MS \qquad \text{......(*)}$$

$$= \frac{1}{k}MSR + ... + \frac{1}{k}MSS - \frac{1}{k}MSU - ... - \frac{1}{k}MSV$$

ผลรวมกำลังสองเฉลี่ย MSI ใน (*) เป็นอิสระต่อกันด้วย $\frac{df_i MSI}{\sigma_i^2} = \frac{SSI}{\sigma_i^2}$ ซึ่งมีการแจกแจงไคว์สแควร์ด้วยระดับขั้นความเสรี df_i การประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวน $\hat{\sigma}_0^2$ คือ ผลรวมเชิงเส้นของผลคูณของผลรวมกำลังสองเฉลี่ย และ $\frac{r\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$ มีการแจกแจงไคสแควร์โดยประมาณด้วยระดับขั้นความเสรี r เมื่อ

$$r = \frac{\left(\hat{\sigma}_0^2\right)^2}{\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k^2} \frac{MSI^2}{df_i}}$$

$$= \frac{(MSR + ... + MSS - MSU - ... - MSV)^2}{\frac{MSR^2}{df_r} + ... + \frac{MSS^2}{df_s} + \frac{MSU^2}{df_u} + ... + \frac{MSV^2}{df_v}}$$

ซึ่งผลดังกล่าวสามารถใช้ได้ก็ต่อเมื่อ $\sigma_0^2 > 0$ เท่านั้น เช่นเดียวกับระดับขั้นความเสรี r โดยทั่วไปจะไม่มีค่าเป็นจำนวนเต็ม ซึ่งแตกต่างจากตารางไคว์สแควร์ที่โดยทั่วไปจะต้องเป็นจำนวนเต็ม โดยค่า r ได้มาจาก Graybill(1961)[4]

เมื่อ $\frac{r\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$ มีการแจกแจงไคว์สแควร์โดยประมาณด้วยระดับขั้นความเสรี r ดังนั้น

$$p\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},r} \le \frac{r\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2},r}\right\} = 1-\alpha$$

และ

$$p\left\{\frac{r\hat{\sigma}_0^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},r}} \le \sigma_0^2 \le \frac{r\hat{\sigma}_0^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},r}}\right\} = 1-\alpha$$

---

[4] Graybill,F.A.,An Introduction to Linear Statistical Model.1 vol.,(New York : McGraw – Hill, 1961), pp.368 – 371.

ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่น$(1-\alpha)100\,\%$ ของ σ_0^2 โดยประมาณ คือ $\left(\dfrac{r\hat{\sigma}_0^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},r}}, \dfrac{r\hat{\sigma}_0^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},r}}\right)$

จากทฤษฎี Satterthwaite ดังกล่าวข้างต้นสามารถหาช่วงความเชื่อมั่น$(1-\alpha)100\,\%$ ขององค์ประกอบความแปรปรวนที่เหลือได้ดังนี้คือ

ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\,\%$ สำหรับ σ_τ^2 โดยการพิจารณาค่าประมาณแบบจุดที่ได้จากการใช้หลักการทางคณิตศาสตร์ในหัวข้อ 2.1.1 คือ $\hat{\sigma}_\tau^2 = \dfrac{MST - MSE}{b}$ แล้วตัวแปรสุ่ม $\dfrac{r_t\hat{\sigma}_\tau^2}{\sigma_\tau^2}$ มีการแจกแจงเป็นแบบไคสแควร์ ด้วยระดับขั้นความเสรี r_t ดังนั้น

$$p\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},r_t} \le \frac{r_t\hat{\sigma}_\tau^2}{\sigma_\tau^2} \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2},r_t}\right\} = 1-\alpha$$

หรือ
$$p\left\{\frac{r_t\hat{\sigma}_\tau^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},r_t}} \le \sigma_\tau^2 \le \frac{r_t\hat{\sigma}_\tau^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},r_t}}\right\} = 1-\alpha$$

นั่นคือ ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\,\%$ สำหรับ σ_τ^2 คือ

$$\frac{r_t\hat{\sigma}_\tau^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},r_t}} \le \sigma_\tau^2 \le \frac{r_t\hat{\sigma}_\tau^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},r_t}}$$

โดยที่ $r_t = \dfrac{(MST - MSE)^2}{\dfrac{MST^2}{(a-1)} + \dfrac{MSE^2}{(a-1)(b-1)}}$

ในทำนองเดียวกัน

ช่วงความเชื่อมั่น$(1-\alpha)100\,\%$ สำหรับ σ_β^2 คือ

$$\frac{r_b\hat{\sigma}_\beta^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},r_b}} \le \sigma_\beta^2 \le \frac{r_b\hat{\sigma}_\beta^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},r_b}}$$

โดยที่ $\hat{\sigma}_\beta^2 = \dfrac{MSB - MSE}{a}$, $r_b = \dfrac{(MSB - MSE)^2}{\dfrac{MSB^2}{(b-1)} + \dfrac{MSE^2}{(a-1)(b-1)}}$

2.2 การประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนด้วยวิธีเบส์ (Bayesian Estimation)

ทฤษฎีเบส์สำหรับตัวแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์

ให้ $\underset{\sim}{y} = (y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{ab})$ เป็นเวกเตอร์ค่าสังเกต ab ข้อมูลและเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงความน่าจะเป็นที่มีเงื่อนไขเมื่อกำหนด $\underset{\sim}{\theta}$ คือ $p(\underset{\sim}{y}/\underset{\sim}{\theta})$ หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งคือฟังก์ชันความควรจะเป็นคือ $l(\underset{\sim}{\theta}/\underset{\sim}{y})$ ตาม Fisher (1922)[5]

$\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ เป็นเวกเตอร์ของพารามิเตอร์ k ค่าที่เรียกว่า พารามิเตอร์สุ่ม(random parameter) ที่มีการแจกแจงความน่าจะเป็น $p(\underset{\sim}{\theta})$ ซึ่งเรียกว่า การแจกแจงแรก (Prior Distribution) ซึ่งเป็นข้อมูลเกี่ยวกับพารามิเตอร์ก่อนทำการทดลอง เมื่อทำการทดลองแล้วนำข้อมูลจากการทดลองที่หาได้จากฟังก์ชันความควรจะเป็น มาปรับกับการแจกแจงแรก จะได้การแจกแจงใหม่นี้ที่เรียกว่า การแจกแจงภายหลัง (Posterior Distribution) $p(\underset{\sim}{\theta}/\underset{\sim}{y})$ คือ

$$p(\underset{\sim}{\theta}/\underset{\sim}{y}) = \frac{p(\underset{\sim}{\theta})l(\underset{\sim}{\theta}/\underset{\sim}{y})}{\int_{\theta_1}^{\theta_k} p(\underset{\sim}{\theta})l(\underset{\sim}{\theta}/\underset{\sim}{y})d\theta} \quad \text{ในกรณีต่อเนื่อง}$$

หรืออาจจะเขียนได้ในอีกลักษณะคือ

$$p(\underset{\sim}{\theta}/\underset{\sim}{y}) \propto p(\underset{\sim}{\theta})l(\underset{\sim}{\theta}/\underset{\sim}{y})$$

ดังนั้นเมื่อได้การแจกแจงภายหลังแล้วทำให้สามารถประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนได้ตามหลักการของเบส์

ในกรณีการประมาณค่าแบบจุด จะใช้วิธีการหาฐานนิยม (mode) มาทำการประมาณค่าเนื่องจากเราไม่คำนึงถึงฟังก์ชันการเสี่ยงซึ่งมีค่าเท่ากับ 1[6] และต้องการให้โอกาสที่ทำให้ฟังก์ชันการแจกแจงภายหลัง $p(\underset{\sim}{\theta}/\underset{\sim}{y})$ มีค่ามากที่สุด โดยการหาค่าอนุพันธ์(derivative)ฟังก์ชันการแจกแจงภายหลัง $p(\underset{\sim}{\theta}/\underset{\sim}{y})$ แล้วกำหนดให้เท่ากับ 0

[5]Fisher,R.A.,On the Mathematical Foundations of Theoretical Statistica.,(Phil, Trans. Roy. Soc.,1992),Series A,pp. 222,309

[6]Box,G.E.P., and Taio,G.C., Bayesian Inference in Statistical Analysis.,(Massachusetts : Addison-Wesley Publishing Company,1793),pp.309

ในกรณีการประมาณค่าแบบช่วง เมื่อกำหนดระดับนัยสำคัญ α จะได้ช่วงความเชื่อมั่น โดยวิธีเบส์ที่เรียกว่า Credible Interval[7] คือช่วงความเชื่อถือได้ ซึ่งได้จากการอินทิเกรตฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังที่ใช้ฟังก์ชันการแจกแจงแรกแบบไม่ทราบข้อมูล คือช่วง (L,U) ที่ทำให้

$$\int_L^U p(\underset{\sim}{\theta} / \underset{\sim}{y}) d(\underset{\sim}{\theta}) = 1 - \alpha$$

ดังนั้น การประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนวิธีเบส์สำหรับตัวแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์ทำตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

2.2.1 การหาฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังขอบของ $\sigma_\tau^2, \sigma_\beta^2$ และ σ_ε^2

สิ่งที่สำคัญคือ เราต้องทราบฟังก์ชันความควรจะเป็น และฟังก์ชันการแจกแจงแรกก่อนเพื่อนำไปหาฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังได้ดังนี้คือ

ฟังก์ชันความควรจะเป็น คือ ผลคูณของฟังก์ชัน ดังนั้นเราทำการแปลงข้อมูลให้อยู่ในรูปของผลรวมกำลังสองเฉลี่ยในตารางที่ 1 หน้าที่ 4 เพื่อหาลักษณะการแจกแจงของฟังก์ชันได้ดังนี้คือ

$$y_{ij} - \bar{y}_{..} = (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) + (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})$$

$$\sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$$

$$= \sum_i \sum_j (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_i \sum_j (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2$$

$$= b\sum_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + a\sum_j (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2$$

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

$$\bar{y}_{..} = \mu + \bar{\tau}_i + \bar{\beta}_j + \bar{\varepsilon}_{ij}$$

---

[7]Box,G.E.P., and Taio,G.C., Bayesian Inference in Statistical Analysis.,(Massachusetts : Addison-Wesley Publishing Company,1793),pp.84-84

ดังนั้น $E(\bar{y}..) = \mu$

$$Var\left(\bar{y}_{..}\right) = Var\left(\bar{\tau}_{i}\right) + Var\left(\bar{\beta}_{j}\right) + Var\left(\bar{\varepsilon}_{ij}\right)$$

$$= Var\left(\frac{\sum_{i}^{a}\tau_{i}}{a}\right) + Var\left(\frac{\sum_{j}^{b}\beta_{j}}{b}\right) + Var\left(\frac{\sum_{ij}^{ab}\varepsilon_{ij}}{ab}\right)$$

$$= \frac{1}{a^2}\sum_{i}^{a}Var(\tau_{i}) + \frac{1}{b^2}\sum_{k}^{b}Var(\beta_{j}) + \frac{1}{a^2b^2}\sum_{ij}^{ab}Var(\varepsilon_{ij})$$

$$= \frac{\sigma_{\tau}^{2}}{a} + \frac{\sigma_{\beta}^{2}}{b} + \frac{\sigma_{\varepsilon}^{2}}{ab}$$

$$= \frac{1}{ab}\left(b\sigma_{\tau}^{2} + a\sigma_{\beta}^{2} + \sigma_{\varepsilon}^{2}\right)$$

จะได้ว่า $$\bar{y}.. \sim N\left(\mu, \frac{1}{ab}\left(\sigma_{\varepsilon}^{2} + a\sigma_{\beta\varepsilon}^{2} + b\sigma_{\tau\varepsilon}^{2}\right)\right)$$

และ $$SSE \sim \sigma_{\varepsilon}^{2}\chi_{(a-1)(b-1)}^{2},\quad SSB \sim \sigma_{\beta}^{2}\chi_{(b-1)}^{2},\quad SST \sim \sigma_{\tau}^{2}\chi_{(a-1)}^{2}$$

นั่นคือ

$$l\left(\mu, \sigma_{\varepsilon}^{2}, \sigma_{\beta\varepsilon}^{2}, \sigma_{\tau\varepsilon}^{2} \middle| \underset{\sim}{y}\right) = N\left(\mu, \frac{1}{ab}\left(\sigma_{\varepsilon}^{2} + a\sigma_{\beta\varepsilon}^{2} + b\sigma_{\tau\varepsilon}^{2}\right)\right)\left(\chi_{(a-1)(b-1)}^{2}\right)\left(\chi_{(b-1)}^{2}\right)\left(\chi_{(a-1)}^{2}\right) \quad ......(1)$$

ฟังก์ชันความควรจะเป็นสำหรับตัวแบบที่ (1)

$$l\left(\mu, \sigma_{\varepsilon}^{2}, \sigma_{\beta\varepsilon}^{2}, \sigma_{\tau\varepsilon}^{2} \middle| \underset{\sim}{y}\right) \propto$$
$$\left(\sigma_{\tau\varepsilon}^{2} + \sigma_{\beta\varepsilon}^{2} - \sigma_{\varepsilon}^{2}\right)^{-1/2}\left(\sigma_{\varepsilon}^{2}\right)^{-(a-1)(b-1)/2}\left(\sigma_{\beta\varepsilon}^{2}\right)^{-(b-1)/2}\left(\sigma_{\tau}^{2}\right)^{-(a-1)/2}$$
$$\times \exp-\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{ab(\bar{y}..-\mu)^{2}}{\sigma_{\tau\varepsilon}^{2} + \sigma_{\beta\varepsilon}^{2} - \sigma_{\varepsilon}^{2}} + \frac{SSE}{\sigma_{\varepsilon}^{2}} + \frac{SSB}{\sigma_{\beta\varepsilon}^{2}} + \frac{SST}{\sigma_{\tau\varepsilon}^{2}}\right]\right\}$$

เลือกการแจกแจงแรกของ μ , σ_{ε}^{2}, $\sigma_{\varepsilon\beta}^{2}$, $\sigma_{\varepsilon\tau}^{2}$ แบบไม่ให้ข้อมูล กล่าวคือความรู้ล่วงหน้าเกี่ยวกับพารามิเตอร์ไม่ได้ให้ข้อมูลเลยว่าพารามิเตอร์ควรมีค่าแท้จริงเท่าใด เราทราบเพียงแต่ว่าแต่ละค่าของพารามิเตอร์มีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน นั่นคือ

$$p\left(\mu,\ \sigma^2_{\varepsilon},\ \sigma^2_{\varepsilon\beta},\ \sigma^2_{\varepsilon\tau}\right) \propto \sigma^{-2}_{\varepsilon}\sigma^{-2}_{\varepsilon\beta}\sigma^{-2}_{\varepsilon\tau} \tag{2}$$

เนื่องจาก การแจกแจงภายหลัง $\propto$ ฟังก์ชันความควรจะเป็น $\times$ การแจกแจงแรก
ดังนั้น จะได้การแจกแจงภายหลังของพารามิเตอร์ คือ

$$\begin{aligned} p\left(\mu,\ \sigma^2_{\varepsilon},\ \sigma^2_{\varepsilon\beta},\ \sigma^2_{\varepsilon\tau}\ \middle|\ \underset{\sim}{y}\right) &\propto (\sigma^2_{\varepsilon\tau}+\sigma^2_{\varepsilon\beta}-\sigma^2_{\varepsilon})^{-1/2}(\sigma^2_{\varepsilon})^{-\left(\frac{(a-1)(b-1)}{2}+1\right)} \\ &\quad \times\ (\sigma^2_{\varepsilon\beta})^{-\left(\frac{b-1}{2}+1\right)}(\sigma^2_{\varepsilon\tau})^{-\left(\frac{a-1}{2}+1\right)} \\ &\quad \times \exp-\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{ab(\bar{y}_{..}-\mu)^2}{\sigma^2_{\varepsilon\tau}+\sigma^2_{\varepsilon\beta}-\sigma^2_{\varepsilon}}+\frac{SSE}{\sigma^2_{\varepsilon}}+\frac{SSB}{\sigma^2_{\varepsilon\beta}}+\frac{SST}{\sigma^2_{\varepsilon\tau}}\right]\right\} \end{aligned} \tag{3}$$

และจากค่าคาดหวังผลรวมกำลังสองเฉลี่ยในตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวน จะทราบว่า

$$C:\ \begin{cases}\sigma^2_{\varepsilon}\langle\sigma^2_{\beta\varepsilon} \\ \sigma^2_{\varepsilon}\langle\sigma^2_{\tau\varepsilon}\end{cases}$$

ทำการอินทิเกรต (3) เทียบกับ μ จะได้การแจกแจงภายหลังร่วม (Joint Posterior Distribution) ของ $\sigma^2_{\varepsilon},\ \sigma^2_{\varepsilon\tau},\ \sigma^2_{\varepsilon\beta}$ คือ

$$\begin{aligned} p\left(\sigma^2_{\varepsilon},\sigma^2_{\varepsilon\tau},\sigma^2_{\varepsilon\beta}\middle|\underset{\sim}{y}\right) &= w(SSE)^{-1}p\left(\chi^{-2}_{(a-1)(b-2)}=\frac{\sigma^2_{\varepsilon}}{SSE}\right)(SST)^{-1}p\left(\chi^{-2}_{(a-1)}=\frac{\sigma^2_{\varepsilon\tau}}{SST}\right) \\ &\quad \times(SSB)^{-1}p\left(\chi^{-2}_{(b-1)}=\frac{\sigma^2_{\varepsilon\beta}}{SSB}\right) \\ &\quad \sigma^2_{\varepsilon}>0,\ \sigma^2_{\varepsilon\tau}>\sigma^2_{\varepsilon},\ \sigma^2_{\varepsilon\beta}>\sigma^2_{\varepsilon} \end{aligned} \tag{4}$$

เมื่อ $$w^{-1}=\mathbf{Pr}^*(\mathbf{c}|\mathbf{y})=\mathbf{Pr}\left\{\frac{\chi^2_{(a-1)}}{\chi^2_{(a-1)(b-1)}}<\frac{SST}{SSE},\frac{\chi^2_{(b-1)}}{\chi^2_{(a-1)(b-1)}}<\frac{SSB}{SSE}\right\}$$

และ $\chi^2_{(a-1)},\chi^2_{(b-1)},\chi^2_{(a-1)(b-1)}$ เป็นการแจกแจงไคสแควร์ที่เป็นอิสระต่อกันด้วยระดับขั้นความเสรี $a-1, b-1, (a-1)(b-1)$

ดังนั้น จะได้การแจกแจงภายหลังร่วมของ $\sigma_{\varepsilon}^{2},\ \sigma_{\beta}^{2},\ \sigma_{\tau}^{2}$ คือ

$$p\left(\sigma_{\varepsilon}^{2},\sigma_{\tau}^{2},\sigma_{\beta}^{2}\middle|\underset{\sim}{y}\right)=w(SSE)^{-1}p\left(\chi_{(a-1)(b-1)}^{-2}=\frac{\sigma_{\varepsilon}^{2}}{SSE}\right)\left(\frac{SST}{b}\right)^{-1}p\left(\chi_{(a-1)}^{-2}=\frac{\sigma_{\varepsilon}^{2}+b\sigma_{\tau}^{2}}{SST}\right)$$

$$\times\left(\frac{SSB}{a}\right)^{-1}p\left(\chi_{(b-1)}^{-2}=\frac{\sigma_{\varepsilon}^{2}+a\sigma_{\beta}^{2}}{SSB}\right),\quad \sigma_{\varepsilon}^{2}>0,\sigma_{\tau}^{2}>0,\sigma_{\beta}^{2}>0 \qquad (5)$$

ทำการอินทิเกรต (5) เทียบกับ σ_{τ}^{2} เพื่อหาการแจกแจงภายหลังร่วมของ $\sigma_{\varepsilon}^{2},\ \sigma_{\beta}^{2}$ คือ

$$p\left(\sigma_{\varepsilon}^{2},\sigma_{\beta}^{2}\middle|\underset{\sim}{y}\right)=w_{1}(SSE1)^{-1}p\left(\chi_{ve1}^{-2}=\frac{\sigma_{\varepsilon}^{2}}{SSE1}\right)\left(\frac{SSB}{a}\right)^{-1}p\left(\chi_{(b-1)}^{-2}=\frac{\sigma_{\varepsilon}^{2}+a\sigma_{\beta}^{2}}{SSB}\right)$$

$$,\sigma_{\varepsilon}^{2}>0,\ \sigma_{\beta}^{2}>0 \qquad (6)$$

โดยที่ $w_{1}^{-1}=\Pr\left\{\dfrac{\chi_{ve1}^{2}}{\chi_{(b-1)}^{2}}>\dfrac{SSE1}{SSB}\right\}$

$$a_{1}=\left[\left(\frac{(a-1)(b-1)}{2}+1\right)\times\frac{I_{x_{1}}\left(\frac{1}{2}(a-1),\left(\frac{1}{2}(a-1)(b-1)\right)+2\right)}{I_{x_{1}}\left(\frac{1}{2}(a-1),\left(\frac{1}{2}(a-1)(b-1)\right)+1\right)}\right]-\left[\left(\frac{(a-1)(b-1)}{2}\right)\times\frac{I_{x_{1}}\left(\frac{1}{2}(a-1),\left(\frac{1}{2}(a-1)(b-1)\right)+1\right)}{I_{x_{1}}\left(\frac{1}{2}(a-1),\left(\frac{1}{2}(a-1)(b-1)\right)\right)}\right]$$

$$ve1=\left(\frac{(a-1)(b-1)}{a_{1}}\right)\times\frac{I_{x_{1}}\left(\frac{1}{2}(a-1),\left(\frac{1}{2}(a-1)(b-1)\right)+1\right)}{I_{x_{1}}\left(\frac{1}{2}(a-1),\frac{1}{2}(a-1)(b-1)\right)}$$

$$X_{1}=\frac{SST}{SST+SSE},\quad MSE1=\frac{SSE}{a_{1}ve1},\quad SSE1=(MSE1)(ve1)$$

$I_{x_{1}}(p,q)$ คือ Incomplete beta integral

$$=\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_{0}^{x_{1}}t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \qquad ;p,q>0,0<t<1$$

โดยที่ p,q คือ ระดับขั้นความเสรีของตัวเศษและตัวส่วนตามลำดับ

ทำการอินทิเกรต (6) เทียบกับ σ_{β}^{2} เพื่อหาการแจกแจงภายหลังขอบ (Marginal Posterior Distribution) ของ σ_{ε}^{2} คือ

$$p\left(\sigma_{\varepsilon}^{2}\middle|\underset{\sim}{y}\right) \text{ คือ } p\left(\chi_{ve3}^{-2} = \frac{\sigma_{\varepsilon}^{2}}{SSE2}\right) \tag{7}$$

โดยที่

$$a_{2} = \left[\left(\frac{ve1}{2}+1\right) \times \frac{I_{x_{2}}\left(\frac{1}{2}(b-1),(ve1)+2\right)}{I_{x_{2}}\left(\frac{1}{2}(b-1),\left(\frac{1}{2}ve1\right)+1\right)}\right] - \left[\left(\frac{ve1}{2}\right) \times \frac{I_{x_{2}}\left(\frac{1}{2}(b-1),\left(\frac{1}{2}ve1\right)+1\right)}{I_{x_{2}}\left(\frac{1}{2}(b-1),\frac{1}{2}ve1\right)}\right.$$

$$ve2 = \left(\frac{ve1}{a_{2}}\right) \times \frac{I_{x_{2}}\left(\frac{1}{2}(n-1),\left(\frac{1}{2}ve1\right)+1\right)}{I_{x_{2}}\left(\frac{1}{2}(n-1),ve1\right)}$$

$$X_{2} = \frac{SSB}{SSB+SSE1},\ MSE2 = \frac{SSE1}{a_{2}ve1},\ \ SSE2 = (MSE2)(ve2)$$

ทำการอินทิเกรต (7) เทียบกับ σ_{ε}^{2} เพื่อหาการแจกแจงภายหลังขอบของ σ_{β}^{2} คือ

$$p\left(\sigma_{\beta}^{2}\middle|\underset{\sim}{y}\right) \text{ คือ } p\left(\chi_{(b-1)}^{-2} = \frac{MSE2 + a\sigma_{\beta}^{2}}{SSB}\right) \tag{8}$$

ทำการอินทิเกรต (5) เทียบกับ σ_{β}^{2} เพื่อหาการแจกแจงภายหลังร่วมของ $\sigma_{\varepsilon}^{2},\ \sigma_{\tau}^{2}$ คือ

$$p\left(\sigma_{\varepsilon}^{2},\sigma_{\tau}^{2}\middle|\underset{\sim}{y}\right) = w_{3}(SSE3)^{-1}\,p\left(\chi_{ve3}^{-2} = \frac{\sigma_{\varepsilon}^{2}}{SSE3}\right)\left(\frac{SST}{b}\right)^{-1} p\left(\chi_{(a-1)}^{-2} = \frac{\sigma_{\varepsilon}^{2}+b\sigma_{\tau}^{2}}{SST}\right),\ \sigma_{\varepsilon}^{2}>0,\ \sigma_{\tau}^{2}>0 \tag{9}$$

โดยที่ $w_{3}^{-1} = \Pr\left\{\frac{\chi_{ve3}^{2}}{\chi_{(a-1)}^{2}} > \frac{SSE3}{SST}\right\}$

$$a_3 = \left[\left(\frac{(a-1)(b-1)}{2} + 1 \right) \times \frac{I_{x_3}\left(\frac{1}{2}(b-1), \left(\frac{1}{2}(a-1)(b-1) \right) + 2 \right)}{I_{x_3}\left(\frac{1}{2}(b-1), \left(\frac{1}{2}(a-1)(b-1) \right) + 1 \right)} \right]$$

$$- \left[\left(\frac{(a-1)(b-1)}{2} \right) \times \frac{I_{x_3}\left(\frac{1}{2}(b-1), \left(\frac{1}{2}(a-1)(b-1) \right) + 1 \right)}{I_{x_3}\left(\frac{1}{2}(b-1), \left(\frac{1}{2}(a-1)(b-1) \right) \right)} \right]$$

$$ve3 = \left(\frac{(a-1)(b-1)}{a_3} \right) \times \frac{I_{x_3}\left(\frac{1}{2}(b-1), \left(\frac{1}{2}(a-1)(b-1) \right) + 1 \right)}{I_{x_3}\left(\frac{1}{2}(b-1), \frac{1}{2}(a-1)(b-1) \right)}$$

$$X_3 = \frac{SST}{SST + SSE}, \quad MSE3 = \frac{SSE}{a_3 ve3}, \quad SSE3 = (MSE3)(ve3)$$

ทำการอินทิเกรต (9) เทียบกับ σ_{ε}^2 เพื่อหาการแจกแจงภายหลังขอบของ σ_{τ}^2 คือ

$$p\left(\sigma_{\tau}^2 \middle| \underset{\sim}{y} \right) \text{ คือ } p\left(\chi_{(a-1)}^{-2} = \frac{MSE3 + b\sigma_{\tau}^2}{SST} \right) \tag{10}$$

พิจารณาสมการที่ (7), (8), (10) เป็นฟังก์ชันที่อยู่ในเทอมของฟังก์ชันการแจกแจงแบบอินเวอร์สไคสแควร์ (Inverted Chisquare χ_{ν}^{-2}) ดังนั้น จึงต้องทำการแปลง (transformation) ฟังก์ชันดังกล่าวเสียก่อน เพื่อที่จะหาฟังก์ชันประมาณการแจกแจงภายหลังขอบของ $\sigma_{\tau}^2, \sigma_{\beta}^2$ และ σ_{ε}^2 ตามลำดับ

<u>ทฤษฎี</u> ให้ y เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นคือ $f(y)$

ถ้า $z = v(y)$ เป็นการแจกแจงแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (1-1) ที่ส่งจาก A ไปบน B

$A = \{ y \mid f(y) > 0 \}$ ไปบน $B = \{ z \mid f(z) > 0 \}$ แล้ว

ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม y คือ

$$g(z) = \begin{cases} f[w(z)]|J| & , \ z \in B, \ J = \text{ จาโคเบียนของการแปลงผกผัน} \\ 0 & , \ \text{มีค่าอื่น} \end{cases}$$

โดย $y \sim \chi_{df}^{-2}$ และมีฟังก์ชันความหนาแน่นดังนี้คือ

$$f(y)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{df}{2}\right)2^{\left(\frac{df}{2}\right)}}y^{-\left(\frac{df}{2}+1\right)}e^{\left(\frac{-1}{2y}\right)} \qquad ,y>0$$

ฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังขอบของ σ_τ^2 คือ

$$f(y)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{(a-1)}{2}\right)2^{\left(\frac{(a-1)}{2}\right)}}y^{-\left(\frac{(a-1)}{2}+1\right)}e^{\left(\frac{-1}{2y}\right)}$$

$$\chi^{-2}_{(a-1)}=y=\frac{MSE3+b\sigma_\tau^2}{SST}$$

กำหนดให้ $\sigma_\tau^2=z_T$ และ $J=\frac{dy}{d\sigma_\tau^2}=\frac{b}{SST}$

ดังนั้น $$g\left(\sigma_\tau^2\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{(a-1)}{2}\right)2^{\left(\frac{(a-1)}{2}\right)}}\left(\frac{MSE3+b\sigma_\tau^2}{SST}\right)^{-\left(\frac{(a-1)}{2}+1\right)}e^{\left(\frac{-1}{2\left(\frac{MSE3+b\sigma_\tau^2}{SST}\right)}\right)}\cdot\frac{b}{SST}$$

ฟังก์ชันประมาณการแจกแจงภายหลังขอบของ σ_β^2 คือ

$$f(y)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{(b-1)}{2}\right)2^{\left(\frac{(b-1)}{2}\right)}}y^{-\left(\frac{(b-1)}{2}+1\right)}e^{\left(\frac{-1}{2y}\right)}$$

$$\chi^{-2}_{(b-1)}=y=\frac{MSE1+a\sigma_\beta^2}{SSB}$$

กำหนดให้ $\sigma_\beta^2=z_B$ และ $J=\frac{dy}{d\sigma_\beta^2}=\frac{a}{SSB}$

ดังนั้น $$g(z_B)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{(b-1)}{2}\right)2^{\left(\frac{(b-1)}{2}\right)}}\left(\frac{MSE1+az_B}{SSB}\right)^{-\left(\frac{(b-1)}{2}+1\right)}e^{\left(\frac{-1}{2\left(\frac{MSE1+az_B}{SSB}\right)}\right)}\cdot\frac{a}{SSB}$$

ฟังก์ชันประมาณการแจกแจงภายหลังขอบของ σ_{ε}^2 คือ

$$f(y) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{ve2}{2}\right)2^{\left(\frac{ve2}{2}\right)}} y^{-\left(\frac{ve2}{2}+1\right)} e^{\left(\frac{-1}{2y}\right)}$$

$$\chi_{ve2}^{-2} = y = \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{SSE2}$$

กำหนดให้ $\sigma_{\varepsilon}^2 = z_E$ และ $J = \frac{dy}{dz_E} = \frac{1}{SSE2}$

ดังนั้น
$$g(z_E) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{ve2}{2}\right)2^{\left(\frac{ve2}{2}\right)}} \left(\frac{z_E}{SSE2}\right)^{-\left(\frac{ve2}{2}+1\right)} e^{\left(\frac{-1}{2\left(\frac{z_E}{SSE2}\right)}\right)} \cdot \frac{1}{SSE2}$$

2.2.2 การประมาณค่าแบบจุดขององค์ประกอบความแปรปรวน

พิจารณา σ_{τ}^2 เป็นพารามิเตอร์ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่ม โดยฟังก์ชันประมาณการแจกแจงภายหลังขอบของ σ_{τ}^2 คือ $g(z_T)$ จะได้ว่า $\hat{\sigma}_{\tau}^2 = z_T$ ซึ่งทำให้ฟังก์ชันประมาณการแจกแจงภายหลังขอบของ σ_{τ}^2 มีค่ามากที่สุด เรียกว่า ฐานนิยมของ σ_{τ}^2 สามารถทำได้โดยการหาอนุพันธ์ ของฟังก์ชันประมาณการแจกแจงภายหลังขององค์ประกอบความแปรปรวน แล้วกำหนดให้เท่ากับ 0 นั่นคือ

1) การหาค่าประมาณแบบจุดของ σ_{τ}^2

จาก
$$g(z_T) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(a-1)}{2}\right)2^{\left(\frac{(a-1)}{2}\right)}} \left(\frac{MSE3 + bz_T}{SST}\right)^{-\left(\frac{(a-1)}{2}+1\right)} e^{\left(\frac{-1}{2\left(\frac{MSE3+bz_T}{SST}\right)}\right)} \cdot \frac{b}{SST}$$

เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณ เรากำหนดให้

$$k = \frac{1}{\Gamma(\frac{a-1}{2})2^{\frac{a-1}{2}}},\ A_T = \frac{MSE3}{SST},\ B_T = \frac{b}{SST},\ C_T = -(\frac{a-1}{2}+1)$$

ดังนั้น $$g(z_T) = k(A_T + B_T z_T)^{C_T} e^{\left(\frac{-1}{2(A_T + B_T z_T)}\right)} .B_T$$

จะเห็นว่าฟังก์ชันอยู่ในรูปวงศ์ชี้กำลัง (Exponential Family) เพื่อให้ง่ายต่อการหาอนุพันธ์ เรา take $\ln(g(z_T))$ เนื่องจากฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชันเพิ่ม แล้วทำการหาค่าอนุพันธ์ ให้เท่ากับ 0 ดังนี้คือ

$$\ln(g(z_T)) = \ln k + C_T \ln(A_T + B_T z_T) - \frac{1}{2(A_T + B_T z_T)} \ln e + \ln B_T$$

$$\frac{d}{dz_T}\ln(g(z_T)) = \frac{B_T C_T}{A_T + B_T z_T} + \frac{B_T}{2(A_T + B_T z_T)^2} = 0$$

$$z_T = -\frac{1}{2B_T C_T} - \frac{A_T}{B_T}$$

ดังนั้น ค่าประมาณแบบจุดสำหรับ σ_τ^2 คือ

$$\hat{\sigma}_\tau^2 = z_T = \frac{1}{b}\left(\frac{SST}{\frac{(a-1)}{2}+2} - MSE3\right)$$

ในทำนองเดียวกัน สามารถหาค่าประมาณแบบจุดขององค์ประกอบความแปรปรวนตัวอื่นได้ดังนี้

2) ค่าประมาณแบบจุดสำหรับ σ_β^2 คือ

$$\hat{\sigma}_\beta^2 = z_B = \frac{1}{a}\left(\frac{SSB}{\frac{(b-1)}{2}+2} - MSE1\right)$$

3) ค่าประมาณแบบจุดสำหรับ σ_ϵ^2 คือ

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = z_E = \frac{SSE2}{(ve2+2)}$$

จะเห็นได้ว่ามีโอกาสที่ค่าประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนอาจจะติดลบได้เช่นเดียวกับวิธีการประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนวิธีคลาสสิก

2..2.3 การประมาณค่าแบบช่วงขององค์ประกอบความแปรปรวน

ในหัวข้อที่ 2.2.2 ทำให้ทราบฟังก์ชันการประมาณการแจกแจงภายหลังขอบของ $\sigma_\tau^2, \sigma_\beta^2$ และ σ_ε^2 แล้วทำการอินทิเกรต $g(z_T)$, $g(z_B)$, $g(z_E)$ เพื่อหาช่วงความเชื่อถือ(Credible Interval) $(1-\alpha)100\%$ จะได้ค่าขีดจำกัดบนและขีดจำกัดล่าง ตามระดับนัยสำคัญที่ผู้วิจัยกำหนด

ดังนั้น จะได้ช่วงความเชื่อถือ $(1-\alpha)100\%$ สำหรับ σ_τ^2 คือ

$$\int_0^{Lt} g(z_T)dz_T = \frac{\alpha}{2} < \sigma_\tau^2 < \int_{Ut}^{\infty} g(z_T)dz_T = \frac{\alpha}{2}$$

ช่วงความเชื่อถือ $(1-\alpha)100\%$ สำหรับ σ_β^2 คือ

$$\int_0^{Lb} g(z_B)dz_B = \frac{\alpha}{2} < \sigma_\beta^2 < \int_{Ub}^{\infty} g(z_B)dz_B = \frac{\alpha}{2}$$

และช่วงความเชื่อถือ $(1-\alpha)100\%$ สำหรับ σ_ε^2 คือ

$$\int_0^{Le} g(z_E)dz_E = \frac{\alpha}{2} < \sigma_\varepsilon^2 < \int_{Ue}^{\infty} g(z_E)dz_E = \frac{\alpha}{2}$$

2.3 เกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบวิธีการประมาณทั้ง 2 แบบ

2.3.1 การประมาณค่าแบบจุด

การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบจุดขององค์ประกอบความแปรปรวนสำหรับตัวแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์จะพิจารณาโดยการเปรียบเทียบขนาดเวกเตอร์ขององค์ประกอบความแปรปรวน ระหว่างค่าประมาณของพารามิเตอร์ที่ศึกษากับค่าจริงของขององค์ประกอบความแปรปรวน ซึ่งเรียกเกณฑ์นี้ว่า ระยะทางยุคลิด (Euclidean distance) โดยสมมติให้องค์ประกอบความแปรปรวนแต่ละตัวเป็นอิสระจากกัน ซึ่งมีหลักการดังนี้

กำหนดให้ $\underset{\sim}{\theta}$ เป็นเวกเตอร์ค่าจริงขององค์ประกอบความแปรปรวน

$\underset{\sim C}{\hat{\theta}}$ เป็นเวกเตอร์ค่าประมาณขององค์ประกอบความแปรปรวนวิธีคลาสสิก

$\underset{\sim B}{\hat{\theta}}$ เป็นเวกเตอร์ค่าประมาณขององค์ประกอบความแปรปรวนวิธีเบส์

ซึ่ง $\underset{\sim}{\theta} = \begin{pmatrix} \sigma_{\tau}^2 \\ \sigma_{\beta}^2 \\ \sigma_{\varepsilon}^2 \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{\hat{\theta}}_C = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{\tau_C}^2 \\ \hat{\sigma}_{\beta_C}^2 \\ \hat{\sigma}_{\varepsilon_C}^2 \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{\hat{\theta}}_B = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{\tau_B}^2 \\ \hat{\sigma}_{\beta_B}^2 \\ \hat{\sigma}_{\varepsilon_B}^2 \end{pmatrix}$

<u>วิธีคลาสสิก</u>

$$(EuCl)_i = \sqrt{\left(\hat{\sigma}_{\tau_{C_i}}^2 - \sigma_{\tau_i}^2\right)^2 + \left(\hat{\sigma}_{\beta_{C_i}}^2 - \sigma_{\beta_i}^2\right)^2 + \left(\hat{\sigma}_{\varepsilon_{C_i}}^2 - \sigma_{\varepsilon_i}^2\right)^2}$$

$$AEuCl = \frac{\sum_{i=1}^{N} (EuCl)_i}{N}$$

<u>วิธีเบส์</u>

$$(EuB)_i = \sqrt{\left(\hat{\sigma}_{\tau_{B_i}}^2 - \sigma_{\tau_i}^2\right)^2 + \left(\hat{\sigma}_{\beta_{B_i}}^2 - \sigma_{\beta_i}^2\right)^2 + \left(\hat{\sigma}_{\varepsilon_{B_i}}^2 - \sigma_{\varepsilon_i}^2\right)^2}$$

$$AEuB = \frac{\sum_{i=1}^{N} (EuB)_i}{N}$$

โดย i คือ ค่าเริ่มต้นในการหาค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ย

N คือ จำนวนการทดลองทั้งหมดที่ทำให้ระยะทางยุคลิดเฉลี่ยลู่เข้าสู่ค่าคงที่

ดังนั้น ถ้าวิธีการใดที่ให้ระยะทางยุคลิดเฉลี่ยต่ำกว่าก็จะเป็นวิธีการประมาณที่ดีกว่าในภาพรวมของการประมาณ นั่นแสดงว่าค่าประมาณขององค์ประกอบความแปรปรวนโดยส่วนใหญ่ที่ได้มีค่าใกล้เคียงค่าจริงขององค์ประกอบความแปรปรวน

2.3.2 การประมาณค่าแบบช่วง

การเปรียบเทียบวิธีการประมาณแบบช่วงขององค์ประกอบความแปรปรวนสำหรับตัวแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์โดยพิจารณาจากค่าอัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลอง (Experimentwise Error Rate) ซึ่งมีค่าดังนี้

อัตราของความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลอง = $\dfrac{\text{จำนวนการทดลองอย่างน้อย 1 องค์ประกอบความแปรปรวนไม่ครอบคลุมค่าจริง}}{\text{จำนวนการทดลองทั้งหมด}}$

ความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 = Pr(อย่างน้อย 1 องค์ประกอบความแปรปรวนไม่อยู่ในช่วง)

= 1 - Pr(ทุกองค์ประกอบความแปรปรวนอยู่ในช่วง)

$$= 1 - \prod_{i=1}^{m} (1-\alpha_i)$$

โดยที่ m = จำนวนองค์ประกอบความแปรปรวน ซึ่งในที่นี้มีค่าเท่ากับ 3

กำหนดให้ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.05 จะได้ความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 เท่ากับ $1-(1-0.05)^3 = 0.1426$

และระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.01 จะได้ความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 เท่ากับ $1-(1-0.01)^3 = 0.0297$

เมื่อคำนวณค่าอัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองทั้ง 2 วิธี แล้วนำค่าที่ได้มาเปรียบเทียบกับค่าความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 ซึ่งถ้าวิธีการใดมีค่าอัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองใกล้เคียงกับค่าดังกล่าวข้างต้น วิธีการนั้นก็จะเป็นวิธีการที่เหมาะสม

ดังนั้น ถ้าวิธีการใดให้ค่าใกล้เคียงและต่ำกว่าอัตราของความผิดพลาดวิธีการนั้นเป็นวิธีการที่ดีกว่า นั่นแสดงว่าค่าประมาณแบบช่วงขององค์ประกอบความแปรปรวนของวิธีการนั้นครอบคลุมค่าจริงได้ดีกว่า

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ต้องการศึกษาและเปรียบเทียบวิธีการประมาณองค์ประกอบสำหรับตัวแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์ 2 วิธี คือ วิธีคลาสสิก และวิธีเบส์ ซึ่งวิธีการประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนทั้งแบบจุดและแบบช่วงของทั้ง 2 แนวทาง ได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 2 ดังนั้นในบทนี้จะกล่าวถึง ขั้นตอนในการวิจัย ซึ่งขั้นตอนแรก คือ การสร้างรูปแบบการแจกแจงของประชากรแบบปกติ ขั้นตอนที่สอง คำนวณหาค่าประมาณแบบจุดขององค์ประกอบความแปรปรวน โดยใช้ระยะทางยุคลิด เป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบ และในขั้นตอนสุดท้าย คือ การหาค่าประมาณแบบช่วงขององค์ประกอบความแปรปรวน โดยใช้อัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองเป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบ ซึ่งขั้นตอนในการวิจัย จะนำเสนอตามลำดับดังต่อไปนี้

3.1 การสร้างรูปแบบการแจกแจงของประชากรแบบปกติ

ในการวิจัยครั้งนี้ได้ทำการสร้างการแจกแจงของประชากรแบบปกติ ด้วยเทคนิคมอนติคาโล โดยใช้ภาษา Mathematica 4.0 และประมวลผลด้วยเครื่อง PC (Personal Computer) ซึ่งการสร้างการแจกแจงแบบปกติจะต้องใช้ตัวเลขสุ่ม Random Number ที่มีการแจกแจงสม่ำเสมอ (Uniform)ในช่วง (0,1) เป็นพื้นฐาน ดังนั้นคุณสมบัติของตัวเลขสุ่มที่ดีควรประกอบด้วย

- ตัวเลขที่ได้มีลักษณะการกระจายของความน่าจะเป็นแบบสม่ำเสมอ (Uniform)
- ตัวเลขที่ได้เป็นอิสระแก่กัน
- อนุกรมของตัวเลขที่ได้สามารถซ้ำเดิมได้ (Reproducible)
- ขนาดของความยาวของอนุกรมตัวเลขไม่ซ้ำต้องยาวพอสำหรับการใช้งาน

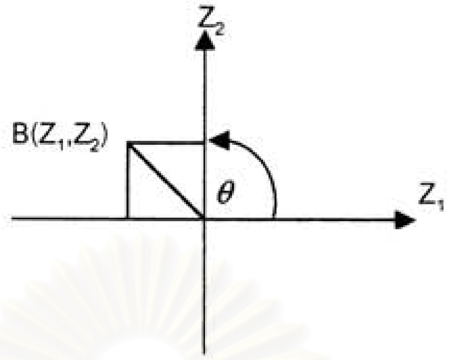
สำหรับการสร้างตัวเลขสุ่มในฟังก์ชัน Random[] โดยกำหนดค่า SeedRandom[65479] ส่วนรายละเอียดในการสร้างการแจกแจงปกติมีดังนี้

การสร้างการแจกแจงปกติ $N(\mu,\sigma^2)$

การผลิตตัวเลขสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติใช้วิธีการของ Box Muller(1958)[4] โดยผลิตเลขสุ่มที่มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน $N(0,1)$ พร้อมกัน 2 ค่าและแต่ละค่าเป็นอิสระกันโดยใช้ตัว

[4] Box,G.E.P., and M.E. Muller,"A Note on the Generation of Random Normal Deviates" in Ann. Math. Statistics 29 (1958) : pp.610-611.

ผลิต(generator) Z_1และ Z_2 พิจารณาดังรูปต่อไปนี้



พิจารณาจากรูปจะได้

$$Z_1 = B\cos(\theta) \qquad (1)$$

$$Z_2 = B\sin(\theta) \qquad (2)$$

เนื่องจาก $B^2 = Z_1^2 + Z_2^2$ มีการแจกแจงไคสแควร์ด้วยระดับความเป็นอิสระ 2 และเทียบเท่ากับการแจกแจงชี้กำลัง (Exponential) ค่าเฉลี่ยเท่ากับ 2 โดยใช้วิธีการแปลงผกผัน (Transformation) สามารถสร้างเลขสุ่มที่มีการแจกแจงชี้กำลัง (Exponential) ได้ดังนี้

$$B = (-2\ln g)^{\frac{1}{2}} \qquad (3)$$

เมื่อ g เป็นเลขสุ่มที่มีการแจกแจงสม่ำเสมอ (Uniform) ในช่วง (0,1)

จากการสมมาตรของการแจกแจงปกติ (Normal) จะได้ว่ามุมθ มีการแจกแจงสม่ำเสมอระหว่าง 0 ถึง π เรเดียน และรัศมี B ทำมุมกับθ เป็นอิสระกัน จาก (1),(2)และ(3) เราสามารถสร้างเลขสุ่มที่มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน จากเลขสุ่ม 2 ชุด g_1และ g_2 กล่าวคือ

$$Z_1 = (-2\ln g_1)^{\frac{1}{2}}\cos(2\pi g_2)$$

$$Z_2 = (-2\ln g_1)^{\frac{1}{2}}\sin(2\pi g_2)$$

ซึ่ง g_1และ g_2เป็นตัวเลขสุ่มที่สร้างจากฟังก์ชัน Random[65479] เมื่อได้เลขสุ่มที่มีการแจกแจงปกติมาตรฐานแล้ว จะทำการแปลงค่าเลขสุ่มดังกล่าวโดยอาศัยฟังก์ชัน

$$gn_1 = \mu + \sigma Z_1$$

$$gn_2 = \mu + \sigma Z_2$$

ซึ่งจะได้ว่า gn_1และgn_2 มีการแจกแจงปกติด้วยค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ และมีความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 นั่นคือ $gn_i \sim N(\mu,\sigma^2)$: i=1,2

ในงานวิจัยครั้งกำหนดให้

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \quad ; \quad i = 1,\ldots,a;\ j = 1,\ldots.,b$$

กำหนดให้ $\tau_i, \beta_j, \varepsilon_{ij}$ เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระกันและมีการแจกแจงแบบปกติที่มี $E(\tau_j) = E(\beta_j) = E(\varepsilon_{ij}) = 0$ และ $Var(\tau_j) = \sigma_\tau^2, Var(\beta_j) = \sigma_\beta^2, Var(\varepsilon_{ij}) = \sigma_\tau^2$

โดย $\sigma_\tau^2 = k\sigma_\varepsilon^2$, $\sigma_\beta^2 = k\sigma_\varepsilon^2$ ซึ่ง k เป็นค่าจำนวนเต็มคงที่

ดังนั้นเราจะได้ ค่า Y_{ij} ซึ่งเป็นค่าสังเกตของแต่ละหน่วยทดลองนั้น ๆ

3.2 การคำนวณค่าประมาณแบบจุดขององค์ประกอบความแปรปรวน

เมื่อสร้างข้อมูล Y_{ij} ที่เป็นไปตามข้อกำหนดข้างต้นได้แล้วนำไปคำนวณหาค่าประมาณแบบจุด

3.2.1 วิธีคลาสสิก แสดงได้ดังนี้

ค่าประมาณแบบจุดสำหรับ σ_τ^2 คือ $\hat{\sigma}_\tau^2 = \dfrac{MST - MSE}{b}$

ค่าประมาณแบบจุดสำหรับ σ_β^2 คือ $\hat{\sigma}_\beta^2 = \dfrac{MSB - MSE}{a}$

และค่าประมาณแบบจุดสำหรับ σ_ε^2 คือ $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = MSE$

3.2.2 วิธีเบส์ แสดงได้ดังนี้

ค่าประมาณแบบจุดสำหรับ σ_τ^2 คือ $\hat{\sigma}_\tau^2 = z_T = \dfrac{1}{b}\left(\dfrac{SST}{\dfrac{(a-1)}{2}+2} - MSE3\right)$

ค่าประมาณแบบจุดสำหรับ σ_β^2 คือ $\hat{\sigma}_\beta^2 = z_B = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{SSB}{\dfrac{(b-1)}{2}+2} - MSE1\right)$

และค่าประมาณแบบจุดสำหรับ σ_ε^2 คือ $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = z_E = \dfrac{SSE2}{ve2+2}$

3.2.3 การคำนวณหาระยะทางยุคลิดเฉลี่ย

<u>วิธีคลาสสิก</u>

$$(EuCl)_i = \sqrt{\left(\hat{\sigma}^2_{\tau_{C_i}} - \sigma^2_{\tau_i}\right)^2 + \left(\hat{\sigma}^2_{\beta_{C_i}} - \sigma^2_{\beta_i}\right)^2 + \left(\hat{\sigma}^2_{\varepsilon_{C_i}} - \sigma^2_{\varepsilon_i}\right)^2}$$

$$AEuCl = \frac{\sum_{i=1}^{N}(EuCl)_i}{N}$$

<u>วิธีเบส์</u>

$$(EuB)_i = \sqrt{\left(\hat{\sigma}^2_{\tau_{B_i}} - \sigma^2_{\tau_i}\right)^2 + \left(\hat{\sigma}^2_{\beta_{B_i}} - \sigma^2_{\beta_i}\right)^2 + \left(\hat{\sigma}^2_{\varepsilon_{B_i}} - \sigma^2_{\varepsilon_i}\right)^2}$$

$$AEuB = \frac{\sum_{i=1}^{N}(EuB)_i}{N}$$

โดยที่ i คือ ค่าเริ่มต้นในการหาค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ย

N คือ จำนวนการทดลองทั้งหมดที่ทำให้ระยะทางยุคลิดเฉลี่ยลู่เข้าสู่ค่าคงที่

ซึ่งถ้าวิธีการประมาณใดให้ค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยต่ำกว่า วิธีการนั้นก็จะถือว่าเป็นวิธีการที่เหมาะสมกว่า

3.3 การคำนวณค่าประมาณแบบช่วงขององค์ประกอบความแปรปรวน

3.3.1 วิธีคลาสสิก

ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ สำหรับ σ^2_τ คือ $\frac{r_t\hat{\sigma}^2_\tau}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},r_t}} \le \sigma^2_\tau \le \frac{r_t\hat{\sigma}^2_\tau}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},r_t}}$

ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ สำหรับ σ^2_β คือ $\frac{r_b\hat{\sigma}^2_\beta}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},r_b}} \le \sigma^2_\beta \le \frac{r_b\hat{\sigma}^2_\beta}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},r_b}}$

และช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ สำหรับ σ^2_ε คือ $\frac{SSE}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},(n-1)(n-2)}} \le {\sigma_\varepsilon}^2 \le \frac{SSE}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},(n-1)(n-2)}}$

3.3.2 วิธีเบส์

ช่วงความเชื่อถือ $(1-\alpha)100\%$ สำหรับ σ_τ^2 คือ

$$\int_0^{Lt} g(z_T)dz_T = \frac{\alpha}{2} < \sigma_\tau^2 < \int_{Ut}^{\infty} g(z_T)dz_T = \frac{\alpha}{2}$$

ช่วงความเชื่อถือ $(1-\alpha)100\%$ สำหรับ σ_β^2 คือ

$$\int_0^{Lb} g(z_B)dz_B = \frac{\alpha}{2} < \sigma_\beta^2 < \int_{Ub}^{\infty} g(z_B)dz_B = \frac{\alpha}{2}$$

และช่วงความเชื่อถือ $(1-\alpha)100\%$ สำหรับ σ_ε^2 คือ

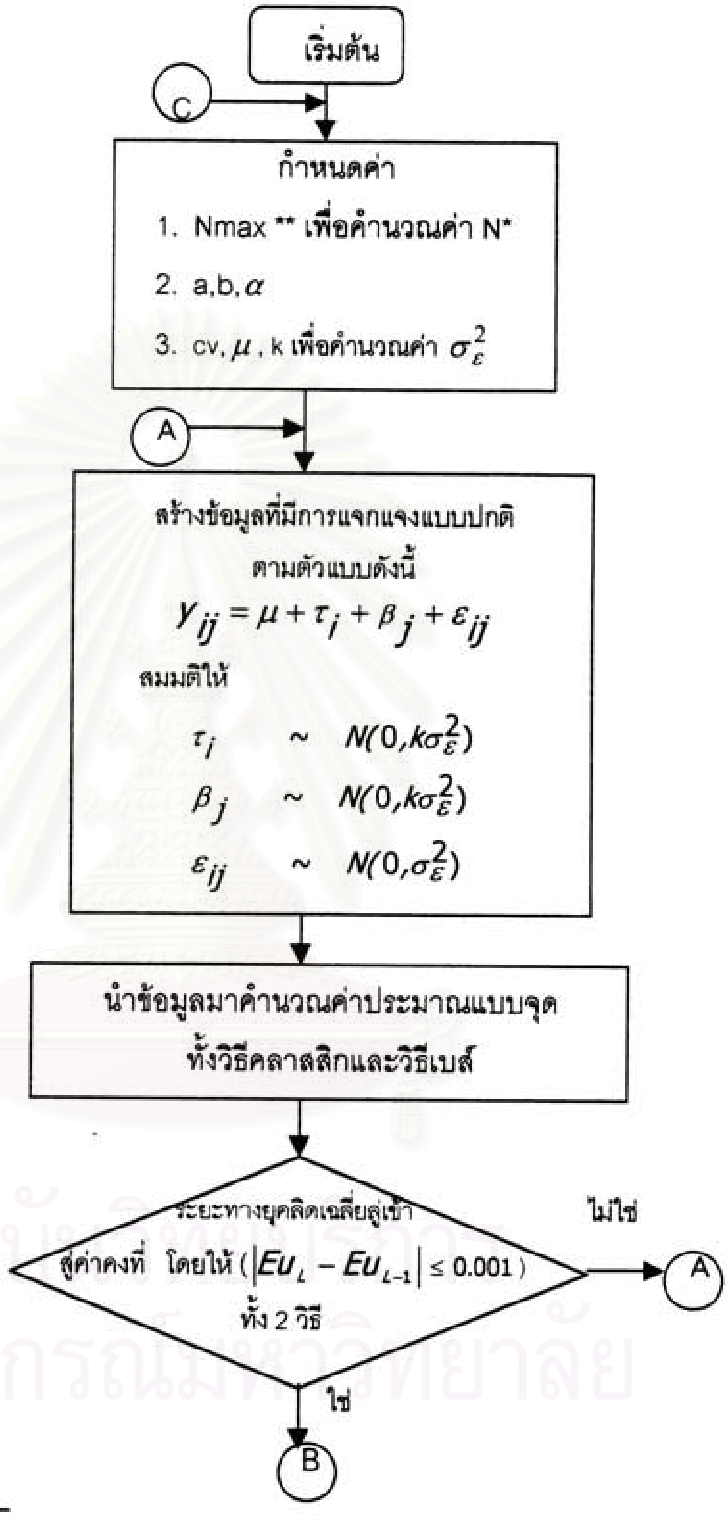
$$\int_0^{Le} g(z_E)dz_E = \frac{\alpha}{2} < \sigma_\varepsilon^2 < \int_{Ue}^{\infty} g(z_E)dz_E = \frac{\alpha}{2}$$

3.3.3 การคำนวณหาอัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลอง

$$\text{อัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลอง} = \frac{\text{จำนวนการทดลองอย่างน้อย 1 องค์ประกอบความแปรปรวนไม่ครอบคลุมค่าจริง}}{\text{จำนวนการทดลองทั้งหมด}}$$

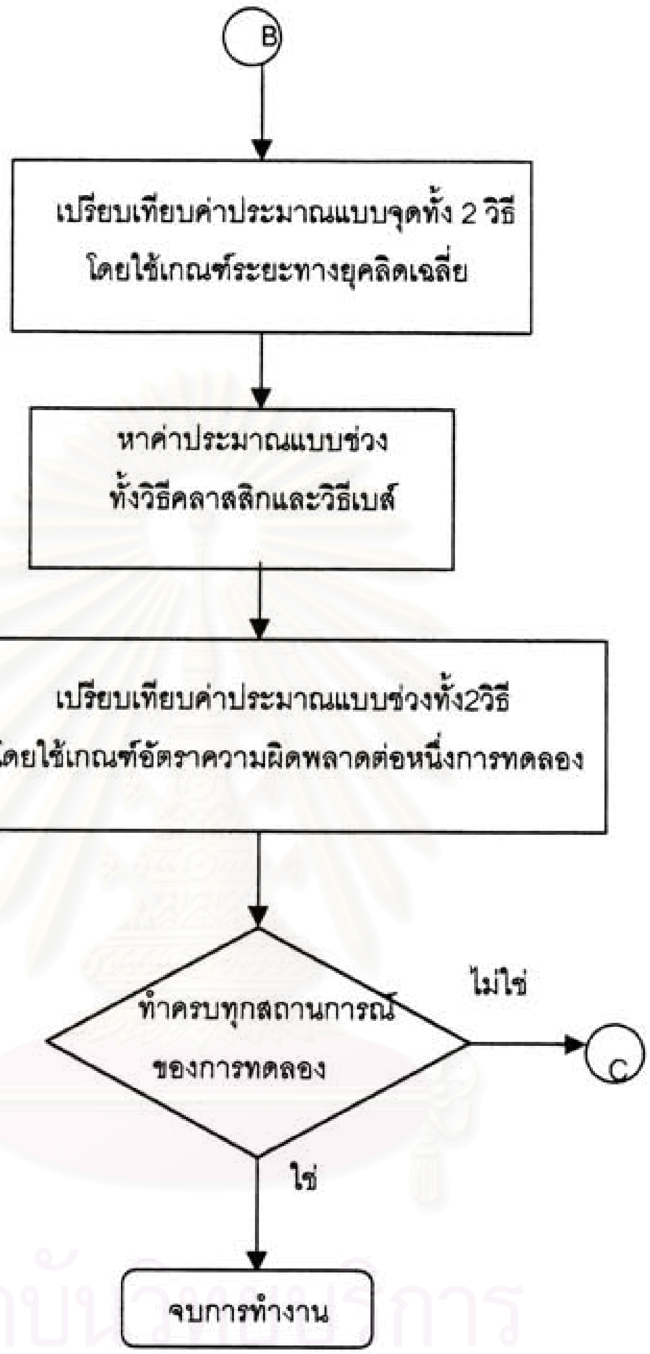
เมื่อคำนวณค่าอัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองทั้ง 2 วิธีแล้วนำมาเปรียบเทียบกับค่าความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 ณ ระดับนัยสำคัญ α = 0.05 ,0.01 เท่ากับ 0.1426 และ 0.0297 ตามลำดับ ถ้าวิธีการใดมีค่าอัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 วิธีการนั้นก็จะเป็นวิธีการที่เหมาะสม

ขั้นตอนในการทำงานของโปรแกรม



** จำนวนการทดลองทั้งหมด

* จำนวนการทดลองที่ทำให้ค่าประมาณแบบจุดมีค่าเป็นบวก


B
เปรียบเทียบค่าประมาณแบบจุดทั้ง 2 วิธี
โดยใช้เกณฑ์ระยะทางยุคลิดเฉลี่ย
หาค่าประมาณแบบช่วง
ทั้งวิธีคลาสสิกและวิธีเบส์
เปรียบเทียบค่าประมาณแบบช่วงทั้ง2วิธี
โดยใช้เกณฑ์อัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลอง
ทำครบทุกสถานการณ์
ของการทดลอง
ไม่ใช่
C
ใช่
จบการทำงาน

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวน สำหรับตัวแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์ 2 แบบ คือ การประมาณวิธีคลาสสิก (Classical Estimation) การประมาณวิธีเบส์ (Bayesian Estimation) เกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบวิธีการประมาณทั้ง 2 วิธี เพื่อหาวิธีการประมาณที่เหมาะสม แบ่งเป็น 2 ขั้นตอน คือ ในขั้นตอนแรก ใช้ระยะทางยุคลิดเฉลี่ยเป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบจุดขององค์ประกอบความแปรปรวน นั่นคือ ถ้าวิธีการประมาณแบบใดให้ค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยต่ำกว่าก็จะเป็นวิธีการประมาณที่ดีกว่า ซึ่งแสดงว่าค่าประมาณขององค์ประกอบความแปรปรวนแบบจุดโดยส่วนใหญ่ที่ได้มีค่าใกล้เคียงค่าจริงขององค์ประกอบความแปรปรวนนั้น และในขั้นตอนสุดท้าย ใช้ค่าอัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองเป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบช่วงขององค์ประกอบความแปรปรวน นั่นคือถ้าวิธีการแบบใดมีค่าอัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่1 (α) = 0.05 และ 0.01 ซึ่งเท่ากับ 0.1426 และ0.0297 ตามลำดับ วิธีการนั้นก็จะเป็นวิธีการที่เหมาะสมกว่า

การนำเสนอค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับค่าคงที่ k ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน (C.V.) และระดับปัจจัย (a,b) จากวิธีการประมาณทั้ง 2 วิธี ซึ่งผลจากการทดลองได้นำเสนอดังตารางที่ 4.1-4.9 และรูปที่ 4.1-4.27 ตามลำดับ และรูปแสดงการลู่เข้าสู่ค่าคงที่ของค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยที่มีค่า k = 1 ได้นำเสนอดังรูปที่ 4.28-4.30 ส่วนค่าอัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลอง ณ ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.05 และ 0.01 ได้นำเสนอดังตารางที่ 4.10-4.13 และรูปที่ 4.31-4.42 ตามลำดับ จากวิธีการประมาณทั้ง 2 วิธี

4.1 ผลจากการเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยโดยรวมของวิธีการประมาณทั้ง 2 วิธี

4.1.1. การเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับค่าคงที่ k เมื่อกำหนดให้สัมประสิทธิ์การแปรผัน และระดับปัจจัยคงที่ ได้ดังนี้

ตารางที่ 4.1 แสดงการเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับค่าคงที่ k ที่คำนวณจากวิธีการประมาณทั้ง 2 วิธี เมื่อ ระดับปัจจัย คือ a=3,b=3

ระดับปัจจัย	ค่าเฉลี่ย μ	ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน C.V.	ความแปรปรวน σ^2	ค่า k	จำนวนการทดลองคู่เข้าสู่ค่าคงที่	ระยะทางยุคลิดเฉลี่ยแบบคลาสสิก Eucl	ระยะทางยุคลิดเฉลี่ยแบบเบย์ EuB
a=3,b=3	40	5%	4	1	184	1.9992	1.5711
				2	257	1.9423	1.6186
				3	154*	1.9880	1.6751
		15%	36	1	385	18.3010	13.7345
				2	729	18.0551	14.2919
				3	821	18.6356	14.8320
		25%	100	1	385	50.8361	38.1514
				2	729	50.1530	39.6997
				3	821	52.8476	41.1999

* อาจเกิดจากการกำหนดให้ทำการทดลองจนกว่าค่าสัมบูรณ์ของระยะทางยุคลิดเฉลี่ยของจำนวนการทดลองก่อนหน้ามีค่าแตกต่างจากระยะทางยุคลิดเฉลี่ยของจำนวนการทดลองถัดไปน้อยกว่าหรือเท่ากับ 0.001 ซึ่งทำให้เกิดการหยุดนิ่งที่เร็วขึ้น

ตารางที่ 4.2 แสดงการเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับค่าคงที่ k ที่คำนวณจากวิธีการประมาณทั้ง 2 วิธี เมื่อ ระดับปัจจัย คือ a=4,b=4

ระดับปัจจัย	ค่าเฉลี่ย μ	ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน C.V.	ความแปรปรวน σ^2	ค่า k	จำนวนการทดลองลู่เข้าสู่ค่าคงที่	ระยะทางยุคลิดเฉลี่ยแบบคลาสสิก Eucl	ระยะทางยุคลิดเฉลี่ยแบบเบส์ EuB
a=4,b=4	40	5%	4	1	116	1.6146	1.3268
				2	112*	1.6760	1.4398
				3	133	1.7324	1.5171
		15%	36	1	231	14.8424	11.8687
				2	611	15.3670	13.1865
				3	323*	15.8418	13.5356
		25%	100	1	868*	41.4662	33.7349
				2	687	42.9130	36.6770
				3	737	44.2809	38.1968

---

* อาจเกิดจากการกำหนดให้ทำการทดลองจนกว่าค่าสัมบูรณ์ของระยะทางยุคลิดเฉลี่ยของจำนวนการทดลองก่อนหน้ามีค่าแตกต่างจากระยะทางยุคลิดเฉลี่ยของจำนวนการทดลองถัดไปน้อยกว่าหรือเท่ากับ 0.001 ซึ่งทำให้เกิดการหยุดนิ่งที่เร็วขึ้น

ตารางที่ 4.3 แสดงการเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับค่าคงที่ k ที่คำนวณจากวิธีการประมาณทั้ง 2 วิธี เมื่อ ระดับปัจจัย คือ a=5,b=5

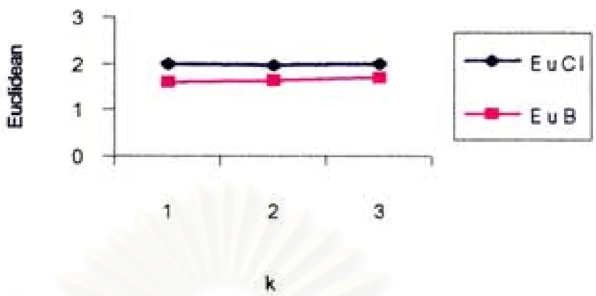
ระดับปัจจัย	ค่าเฉลี่ย μ	ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน C.V.	ความแปรปรวน σ^2	ค่า k	จำนวนการทดลองสู่เข้าสู่ค่าคงที่	ระยะทางยุคลิดแบบคลาสสิก Eucl	ระยะทางยุคลิดแบบเบส์ EuB
a=5,b=5	40	5%	4	1	127	1.3187	1.1969
				2	118*	1.4750	1.3735
				3	139	1.5329	1.4331
		15%	36	1	232	12.6019	1.6371
				2	567	13.7724	1.7611
				3	684	14.4007	1.8211
		25%	100	1	874	34.5113	30.2504
				2	567*	38.2567	33.3647
				3	1020	38.7120	34.6115

จากตารางที่ 4.1-4.3 เพื่อให้เห็นภาพการเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับค่าคงที่ k ต่างๆ ในทุกสถานการณ์ชัดเจนยิ่งขึ้นจะแสดงให้เห็นดังรูปที่ 4.1-4.9 ตามลำดับ

---

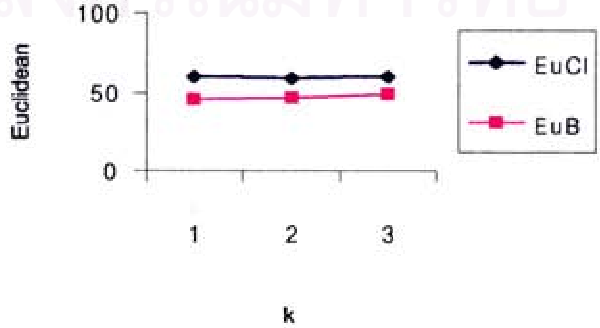
* อาจเกิดจากการกำหนดให้ทำการทดลองจนกว่าค่าสัมบูรณ์ของระยะทางยุคลิดเฉลี่ยของจำนวนการทดลองก่อนหน้ามีค่าแตกต่างจากระยะทางยุคลิดเฉลี่ยของจำนวนการทดลองถัดไปน้อยกว่าหรือเท่ากับ 0.001 ซึ่งทำให้เกิดการหยุดนิ่งที่เร็วขึ้น

รูปที่ 4.1 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับค่าคงที่ k เมื่อระดับปัจจัย คือ a=b=3 และ สัมประสิทธิ์การแปรผัน คือ 0.05

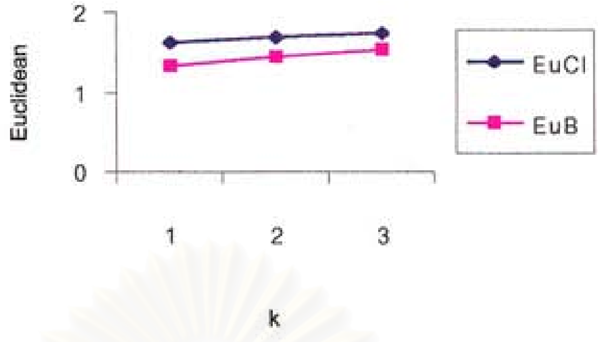


รูปที่ 4.2 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับค่าคงที่ k เมื่อระดับปัจจัย คือ a=b=3 และสัมประสิทธิ์การแปรผัน คือ 0.15

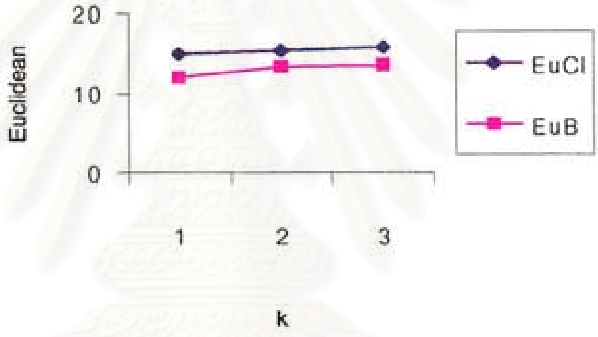
รูปที่ 4.3 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับค่าคงที่ k เมื่อระดับปัจจัย คือ a=b=3 และสัมประสิทธิ์การแปรผัน คือ 0.25



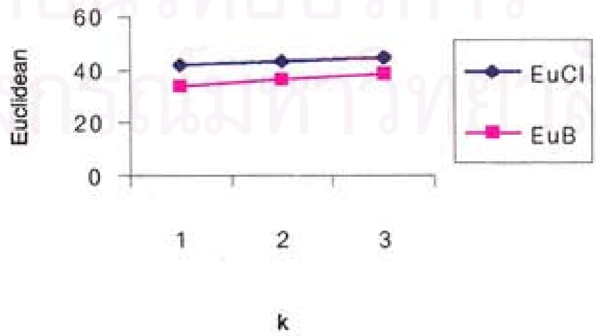
รูปที่ 4.4 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับค่าคงที่ k เมื่อระดับปัจจัย คือ a=b=4 และสัมประสิทธิ์การแปรผัน คือ 0.05



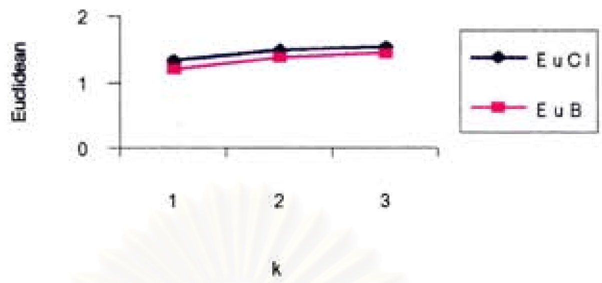
รูปที่ 4.5 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับค่าคงที่ k เมื่อระดับปัจจัย คือ a=b=4 และสัมประสิทธิ์การแปรผัน คือ 0.15



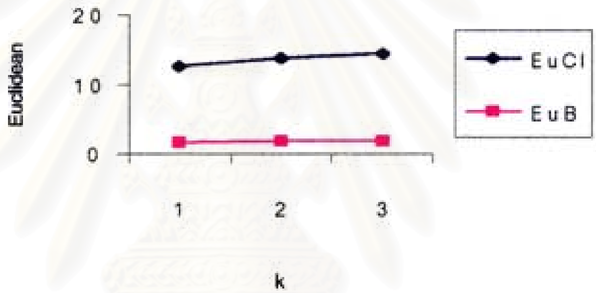
รูปที่ 4.6 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับค่าคงที่ k เมื่อระดับปัจจัย คือ a=b=4 และสัมประสิทธิ์การแปรผัน คือ 0.25



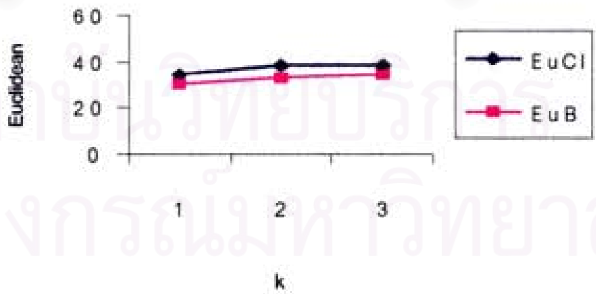
รูปที่ 4.7 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับค่าคงที่ k เมื่อระดับปัจจัย คือ a=b=5 และ สัมประสิทธิ์การแปรผัน คือ 0.05



รูปที่ 4.8 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับค่าคงที่ k เมื่อระดับปัจจัย คือ a=b=5 และสัมประสิทธิ์การแปรผัน คือ 0.15



รูปที่ 4.9 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับค่าคงที่ k เมื่อระดับปัจจัย คือ a=b=5 และสัมประสิทธิ์การแปรผัน คือ 0.25



จากรูปที่ 4.1 – 4.8 จะเห็นได้ว่าเมื่อ k มีค่าเพิ่มขึ้น ระยะทางยุคลิดเฉลี่ยทั้งวิธีเบส์และวิธีคลาสสิกไม่มีค่าต่างกันมากนัก และ ค่า k ณ ระดับต่าง ๆ ในทุกสถานการณ์จะให้ค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยวิธีเบส์ต่ำกว่าวิธีคลาสสิก นั่นคือ ค่าประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนวิธีเบส์โดยส่วนใหญ่ให้ค่าใกล้เคียงกับค่าจริงมากกว่าค่าประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนวิธีคลาสสิกโดยส่วนใหญ่

4.1.2. การเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับสัมประสิทธิ์การแปรผัน เมื่อกำหนดให้ค่าคงที่ k และ ระดับปัจจัยคงที่ ได้ดังนี้

ตารางที่ 4.4 แสดงการเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับสัมประสิทธิ์การแปรผัน ที่คำนวณจากวิธีการประมาณทั้ง 2 วิธี เมื่อ ค่าคงที่ k = 1

ค่าคงที่ k	ระดับปัจจัย	ค่าเฉลี่ย μ	ความแปรปรวน σ^2	สัมประสิทธิ์การแปรผัน C.V.	จำนวนการทดลองคู่เข้าสู่ค่าคงที่	ระยะทางยุคลิดเฉลี่ยแบบคลาสสิก EucI	ระยะทางยุคลิดเฉลี่ยแบบเบส์ EuB
1	a=3,b=3	40	4	5 %	184	1.9992	1.5711
				15 %	385	18.3010	13.7345
				25 %	385	50.8361	38.1514
	a=4,b=4		36	5 %	116	1.6146	1.3268
				15 %	231	14.8424	11.8687
				25 %	868	41.4662	33.7349
	a=5,b=5		100	5 %	128	1.3187	1.1969
				15 %	233	12.5019	10.9648
				25 %	874	34.5113	30.2504

ตารางที่ 4.5 แสดงการเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับสัมประสิทธิ์การแปรผัน ที่คำนวณจากวิธีการประมาณทั้ง 2 วิธี เมื่อ ค่าคงที่ k = 2

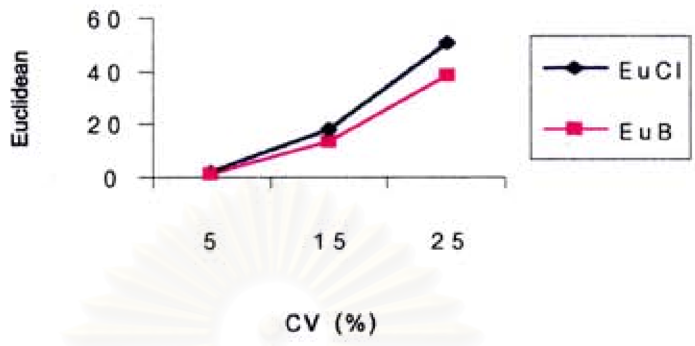
ค่าคงที่ k	ระดับปัจจัย	ค่าเฉลี่ย μ	ความแปรปรวน σ^2	สัมประสิทธิ์การแปรผัน C.V.	จำนวนการทดลองสู่เข้าสู่ค่าคงที่	ระยะทางยุคลิดเฉลี่ยแบบคลาสสิก Eucl	ระยะทางยุคลิดเฉลี่ยแบบเบส์ EuB
2	a=3,b=3	40	4	5 %	257	1.9423	1.6186
				15 %	729	18.0551	14.2919
				25 %	729	50.153	39.6997
	a=4,b=4		36	5 %	112	1.6760	1.4398
				15 %	611	15.3670	13.1685
				25 %	687	42.9130	36.6770
	a=5,b=5		100	5 %	118	1.4750	1.3735
				15 %	567	13.7724	12.0113
				25 %	567	38.2567	33.3647

ตารางที่ 4.6 แสดงการเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับสัมประสิทธิ์การแปรผัน ที่คำนวณจากวิธีการประมาณทั้ง 2 วิธี เมื่อ ค่าคงที่ k = 3

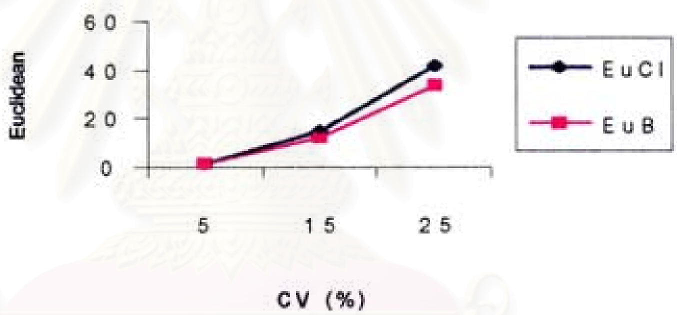
ค่าคงที่ k	ระดับปัจจัย	ค่าเฉลี่ย μ	ความแปรปรวน σ^2	สัมประสิทธิ์การแปรผัน C.V.	จำนวนการทดลองคู่เข้าสู่ค่าคงที่	ระยะทางยุคลิดเฉลี่ยแบบคลาสสิก Eucl	ระยะทางยุคลิดเฉลี่ยแบบเบส์ EuB
3	a=3,b=3	40	4	5 %	154	1.9880	1.6751
				15 %	821	18.3051	14.8320
				25 %	821	50.8476	41.1999
	a=4,b=4		36	5 %	133	1.7324	1.5171
				15 %	323	15.8418	13.5356
				25 %	737	44.2809	38.1968
	a=5,b=5		100	5 %	139	1.5329	1.4331
				15 %	684	14.4007	12.5796
				25 %	1020	38.712	34.6115

จากตารางที่ 4.4 - 4.6 เพื่อให้เห็นภาพการเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับสัมประสิทธิ์การแปรผันในทุกสถานการณ์ชัดเจนยิ่งขึ้น จะแสดงให้เห็นดังรูปที่ 4.10 - 4.18 ตามลำดับ

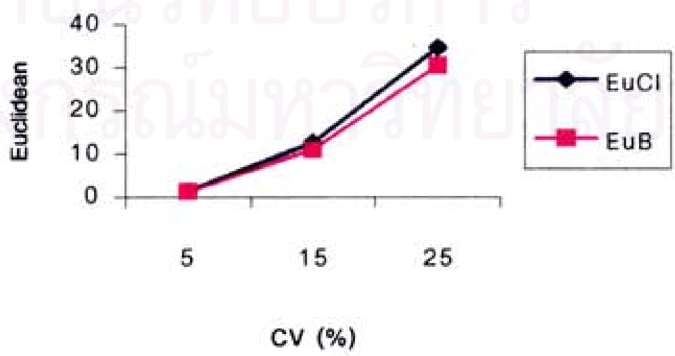
รูปที่ 4.10 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน เมื่อ ระดับปัจจัย คือ a=3,b=3 และค่าคงที่ k = 1



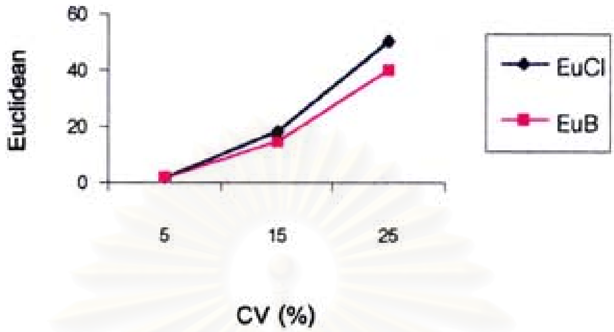
รูปที่ 4.11 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน เมื่อ ระดับปัจจัย คือ a=4,b=4 และค่าคงที่ k = 1



รูปที่ 4.12 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน เมื่อ ระดับปัจจัย คือ a=5,b=5 และค่าคงที่ k = 1

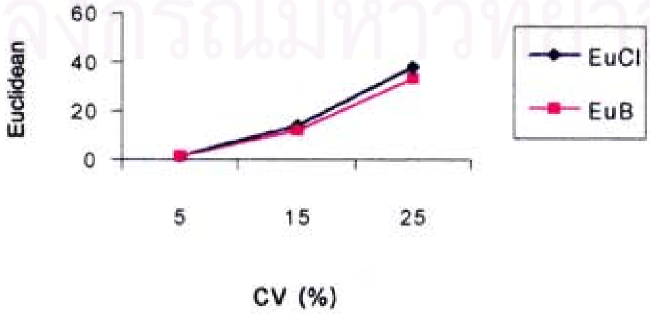


รูปที่ 4.13 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน เมื่อ ระดับปัจจัย คือ a=3,b=3 และค่าคงที่ k = 2

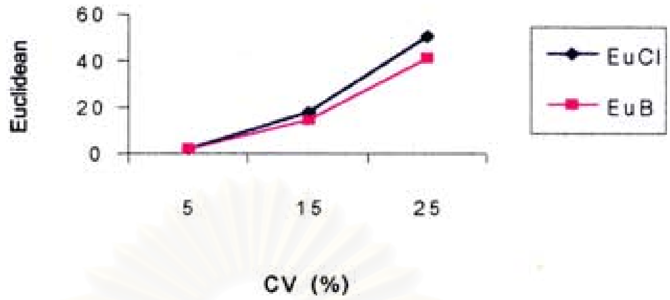


รูปที่ 4.14 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน เมื่อ ระดับปัจจัย คือ a=4,b= 4และค่าคงที่ k = 2

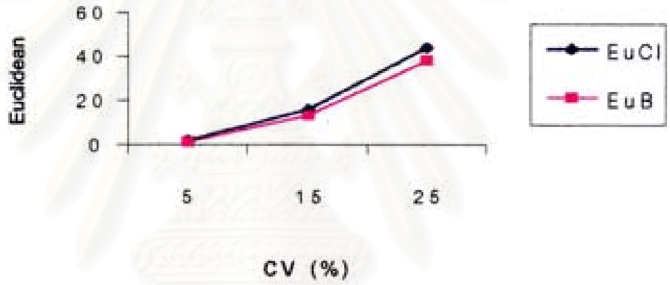
รูปที่ 4.15 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน เมื่อ ระดับปัจจัย คือ a=5,b=5 และค่าคงที่ k = 2



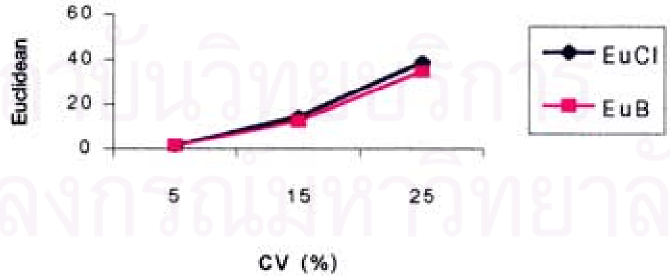
รูปที่ 4.16 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน เมื่อ ระดับปัจจัย คือ a=3,b=3 และค่าคงที่ k = 3



รูปที่ 4.17 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน เมื่อ ระดับปัจจัย คือ a=4,b=4 และค่าคงที่ k = 3



รูปที่ 4.18 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน เมื่อ ระดับปัจจัย คือ a=5,b=5 และค่าคงที่ k = 3



จากรูปที่ 4.10 – 4.18 จะเห็นได้ว่าเมื่อ C.V.มีค่าเพิ่มขึ้นระยะทางยุคลิดเฉลี่ยทั้งวิธีเบส์และวิธีคลาสสิกมีค่าเพิ่มสูงขึ้น และค่า C.V. ณ ระดับต่าง ๆ ในทุกสถานการณ์จะให้ค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยวิธีเบส์ต่ำกว่าวิธีคลาสสิก นั่นคือ ค่าประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนวิธีเบส์โดยส่วนใหญ่ให้ค่าใกล้เคียงกับค่าจริงมากกว่าค่าประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนวิธีคลาสสิกโดยส่วนใหญ่

4.1.3. การเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับระดับปัจจัย เมื่อกำหนดให้ สัมประสิทธิ์การแปรผัน และค่าคงที่ k คงที่ ได้ดังนี้

ตารางที่ 4.7 แสดงการเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับระดับปัจจัย (a,b) ที่คำนวณจากวิธีการประมาณทั้ง 2 วิธี เมื่อ ค่าคงที่ k = 1

ค่าคงที่ k	สัมประสิทธิ์การแปรผัน C.V.	ค่าเฉลี่ย μ	ความแปรปรวน σ^2	ระดับปัจจัย	จำนวนการทดลองสู่เข้าสู่ค่าคงที่	ระยะทางยุคลิดเฉลี่ยแบบคลาสสิก Eucl	ระยะทางยุคลิดเฉลี่ยแบบเบย์ EuB
1	5 %	40	4	a=b=3	184	1.9992	1.5711
				a=b=4	116	1.6146	1.3268
				a=b=5	128	1.3187	1.1969
	15 %		36	a=b=3	385	18.3010	13.7345
				a=b=4	231	14.8424	11.8687
				a=b=5	233	12.6019	10.9648
	25 %		100	a=b=3	385	50.8361	38.1514
				a=b=4	868	41.4662	33.7349
				a=b=5	874	34.5113	30.2504

ตารางที่ 4.8 แสดงการเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับระดับปัจจัย (a,b) ที่คำนวณจากวิธีการประมาณทั้ง 2 วิธี เมื่อ ค่าคงที่ k = 2

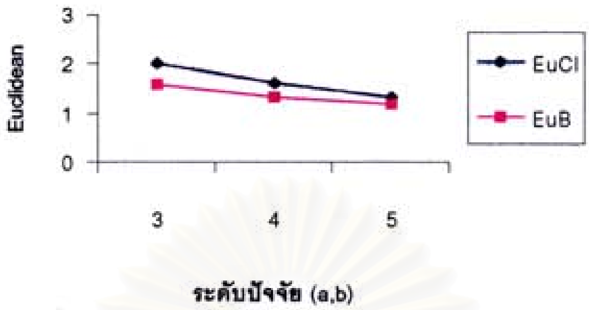
ค่าคงที่ k	สัมประสิทธิ์การแปรผัน C.V.	ค่าเฉลี่ย μ	ความแปรปรวน σ^2	ระดับปัจจัย	จำนวนการทดลองสู่เข้าสู่ค่าคงที่	ระยะทางยุคลิดเฉลี่ยแบบคลาสสิก Eucl	ระยะทางยุคลิดเฉลี่ยแบบเบย์ EuB
2	5 %	40	4	a=b=3	257	1.9423	1.6186
				a=b=4	112	1.6760	1.4398
				a=b=5	118	1.4750	1.3735
	15 %		36	a=b=3	729	18.0551	14.2919
				a=b=4	611	15.367	13.1865
				a=b=5	567	13.7724	12.0113
	25 %		100	a=b=3	729	50.1530	39.6997
				a=b=4	687	42.9130	36.6770
				a=b=5	567	38.2567	33.3647

ตารางที่ 4.9 แสดงการเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับระดับปัจจัย (a,b) ที่คำนวณจากวิธีการประมาณทั้ง 2 วิธี เมื่อ ค่าคงที่ k = 3

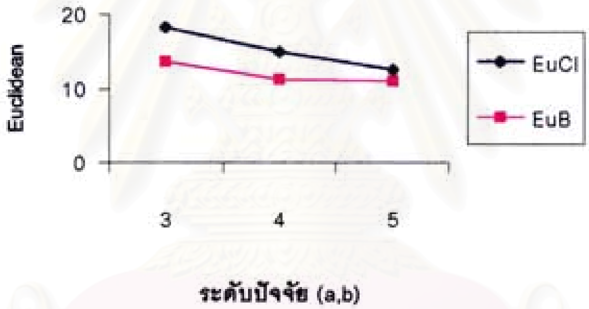
ค่าคงที่ k	สัมประสิทธิ์การแปรผัน C.V.	ค่าเฉลี่ย μ	ความแปรปรวน σ^2	ระดับปัจจัย	จำนวนการทดลองสู่เข้าสู่ค่าคงที่	ระยะทางยุคลิดเฉลี่ยแบบคลาสสิก Eucl	ระยะทางยุคลิดเฉลี่ยแบบเบส์ EuB
3	5 %	40	4	a=b=3	154	1.9880	1.6751
				a=b=4	133	1.7324	1.5171
				a=b=5	139	1.5329	1.4331
	15 %		36	a=b=3	821	18.3051	14.8320
				a=b=4	323	15.8418	13.5356
				a=b=5	684	14.4007	12.5796
	25 %		100	a=b=3	821	50.8476	41.1999
				a=b=4	737	44.2809	38.1968
				a=b=5	1020	38.7120	34.6115

จากตารางที่ 4.7 – 4.9 เพื่อให้เห็นภาพการเปรียบเทียบค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับระดับปัจจัย (a,b) ในทุกสถานการณ์ชัดเจนยิ่งขึ้น จะแสดงให้เห็นดังรูปที่ 4.19 – 4.27 ตามลำดับ

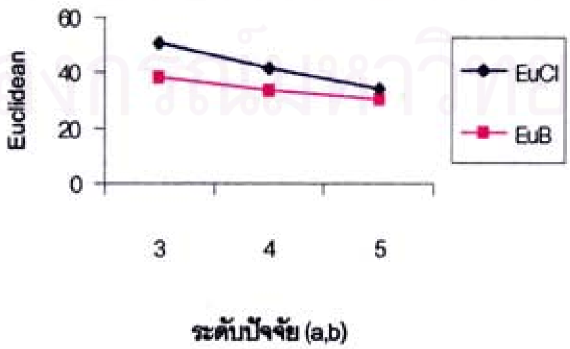
รูปที่ 4.19 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับระดับปัจจัย เมื่อค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน (c.v.) = 5% และค่าคงที่ k = 1



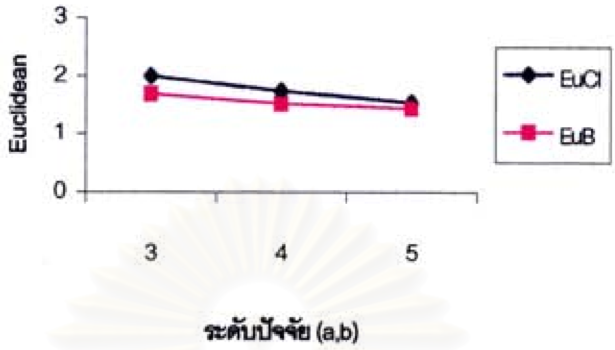
รูปที่ 4.20 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับระดับปัจจัย เมื่อค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน (c.v.) = 15% และค่าคงที่ k = 1



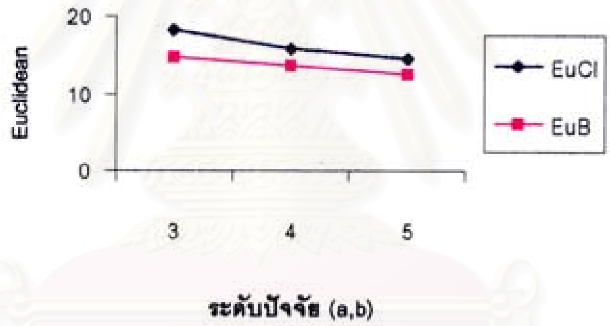
รูปที่ 4.21 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับระดับปัจจัย เมื่อค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน (c.v.) = 25% และค่าคงที่ k = 1



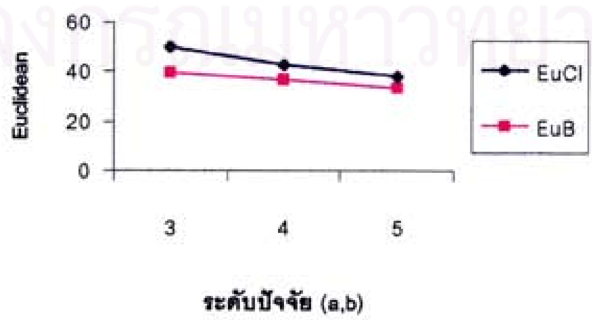
รูปที่ 4.22 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับระดับปัจจัย เมื่อค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน (c.v.) = 5% และค่าคงที่ k = 2



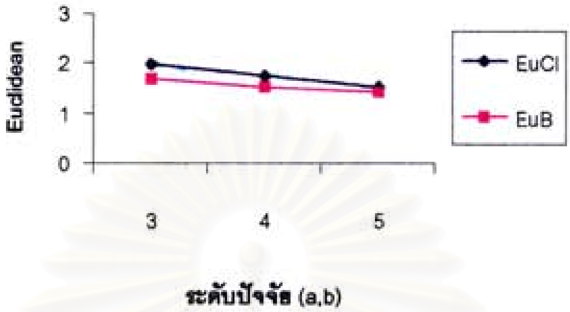
รูปที่ 4.23 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับระดับปัจจัย เมื่อค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน (c.v.) = 15% และค่าคงที่ k = 2



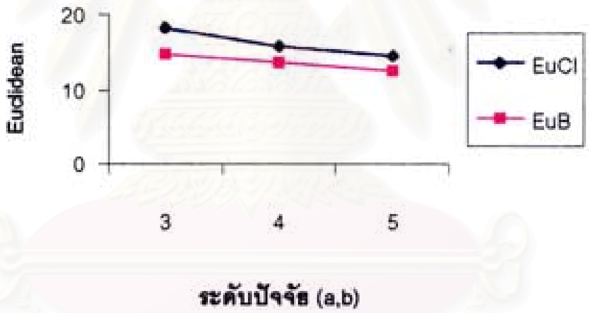
รูปที่ 4.24 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับระดับปัจจัย เมื่อค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน (c.v.) = 25% และค่าคงที่ k = 2



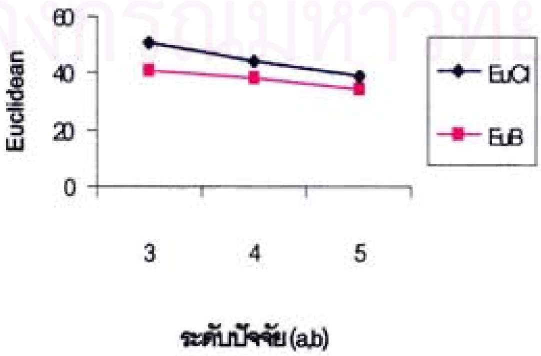
รูปที่ 4.25 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับระดับปัจจัย เมื่อค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน (c.v.) = 5% และค่าคงที่ k = 3



รูปที่ 4.26 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับระดับปัจจัย เมื่อค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน (c.v.) = 15% และค่าคงที่ k = 3



รูปที่ 4.27 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยกับระดับปัจจัย เมื่อค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน (c.v.) = 25% และค่าคงที่ k = 3

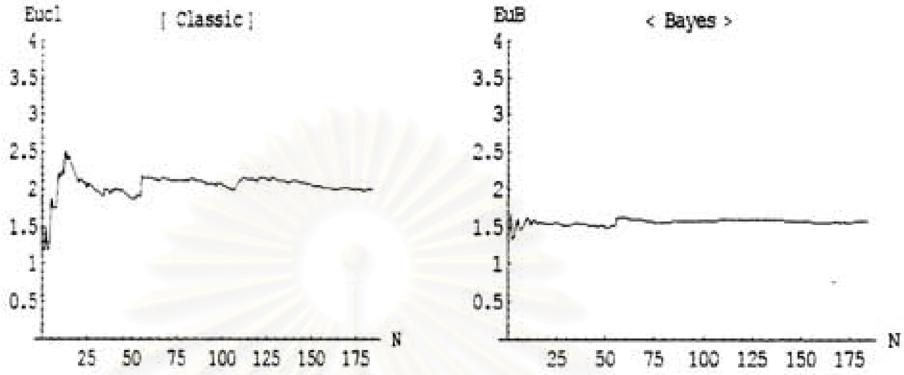


จากรูปที่ 4.19 – 4.27 จะเห็นได้ว่าว่าเมื่อ ระดับปัจจัยทดลอง (a) และระดับปัจจัยแบ่งบล็อก (b) มีระดับปัจจัยเพิ่มขึ้นระยะทางยุคลิดเฉลี่ยทั้งวิธีเบส์และวิธีคลาสสิกมีค่าลดลง และระดับปัจจัยทดลอง (a) และระดับปัจจัยแบ่งบล็อก (b) ณ ระดับต่าง ๆ ในทุกสถานการณ์จะให้ค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยวิธีเบส์ต่ำกว่าวิธีคลาสสิก นั่นคือ ค่าประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนวิธีเบส์โดยส่วนใหญ่ให้ค่าใกล้เคียงกับค่าจริงมากกว่าค่าประมาณองค์ประกอบการแปรผันวิธีคลาสสิกโดยส่วนใหญ่

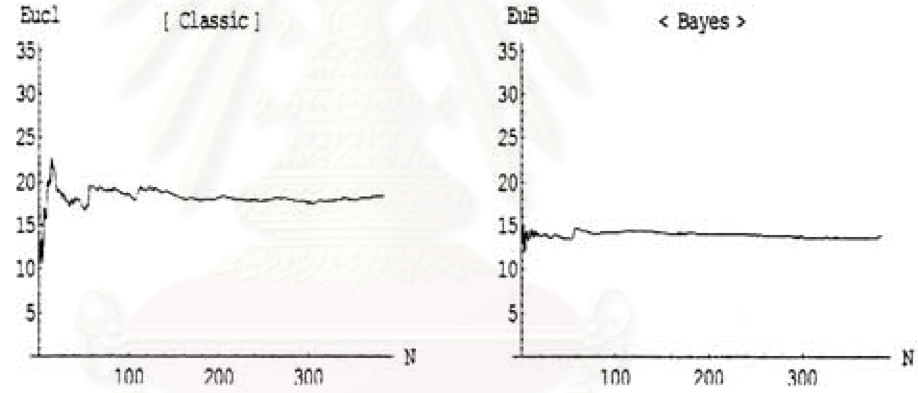
และจากรูปที่ 4.1-4.9 หน้าที่ 36-38 จะเห็นได้ว่าค่า k ณ ระดับต่าง ๆ มีค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยทั้งวิธีคลาสสิกและวิธีเบส์แตกต่างกันน้อย และนอกจากนี้ผู้วิจัยยังมีข้อจำกัดในด้านการประมวลผลของเครื่องคอมพิวเตอร์ ดังนั้นผู้วิจัยจึงทำการศึกษาเฉพาะกรณี k = 1 เพื่อให้สะดวกต่อการนำไปคำนวณหาค่าอัตราความผิดพลาดต่อการทดลองในการเปรียบเทียบกับค่าความน่าจะเป็นที่เป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 และเพื่อให้เห็นรูปชัดเจนยิ่งขึ้น ผู้วิจัยจึงนำเสนอรูปที่แสดงจำนวนการทดลองที่ลู่เข้าสู่ค่าคงที่ในทุกสถานการณ์ที่ k = 1 ดังต่อไปนี้

รูปที่ 4.28 แสดงการลู่เข้าสู่ค่าคงที่ของค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยเมื่อระดับปัจจัย คือ a = 3, b = 3 และ ค่าคงที่ k = 1

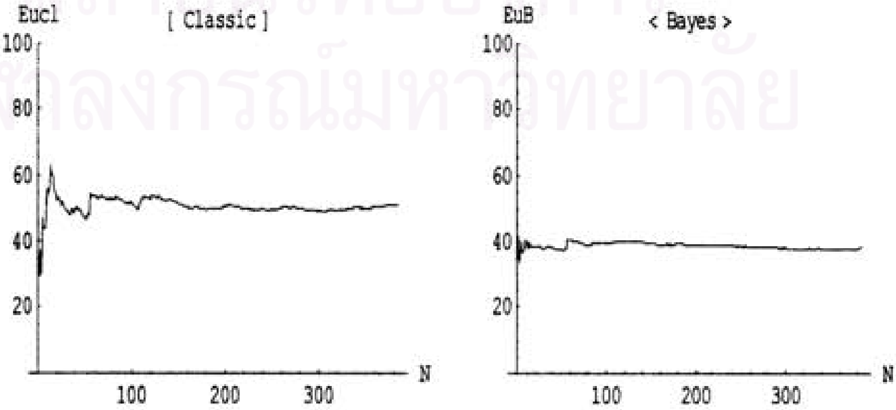
1. เมื่อสัมประสิทธิ์การแปรผัน (C.V.) ระดับ 5%



2. เมื่อสัมประสิทธิ์การแปรผัน (C.V.) ระดับ 15 %

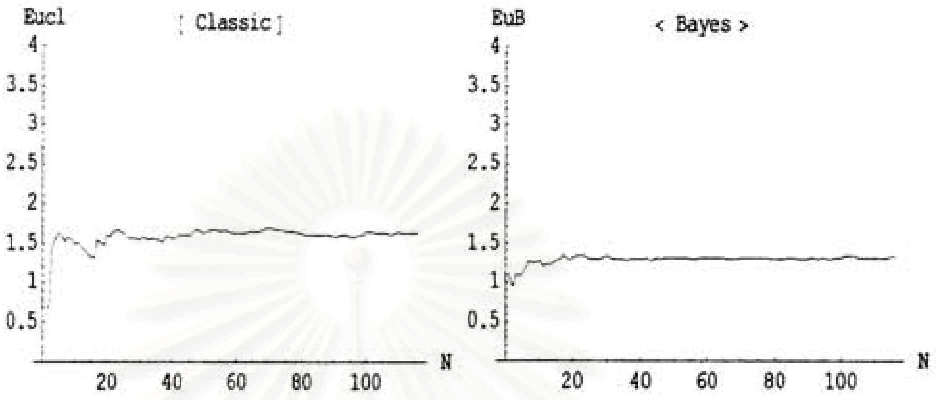


3. เมื่อสัมประสิทธิ์การแปรผัน (C.V.) ระดับ 25 %

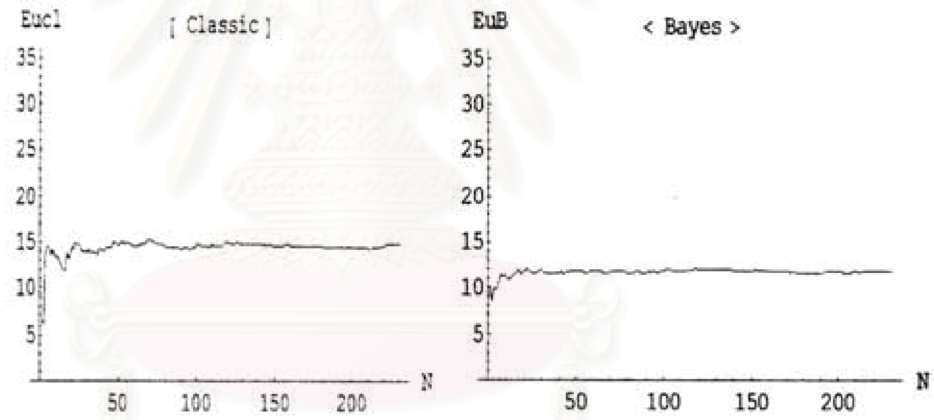


รูปที่ 4.29 แสดงการลู่เข้าสู่ค่าคงที่ของค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยเมื่อระดับปัจจัย คือ a =4, b = 4 และ ค่าคงที่ k = 1

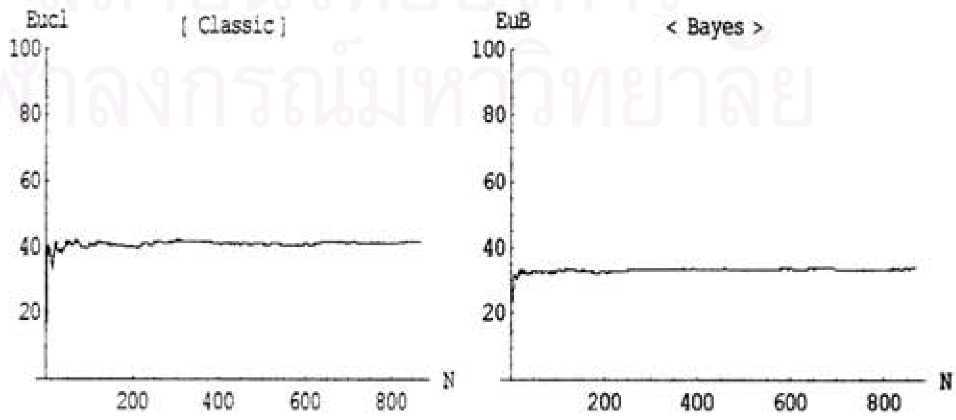
1. เมื่อสัมประสิทธิ์การแปรผัน (C.V.) ระดับ 5%



2. เมื่อสัมประสิทธิ์การแปรผัน (C.V.) ระดับ 15 %

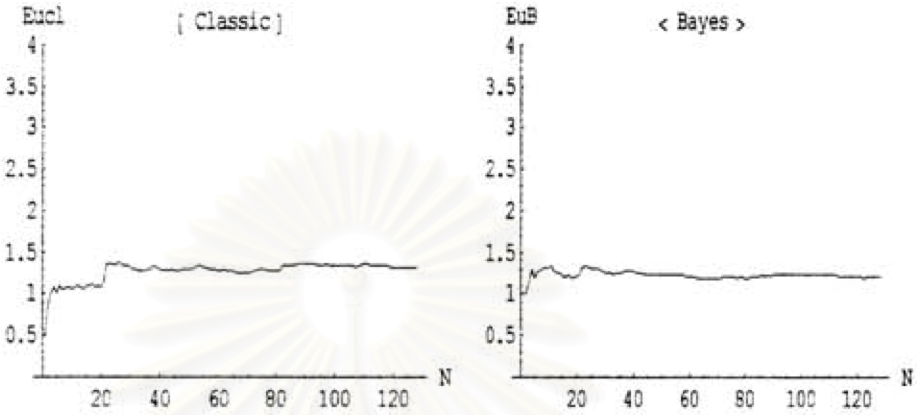


3. เมื่อสัมประสิทธิ์การแปรผัน (C.V.) ระดับ 25 %

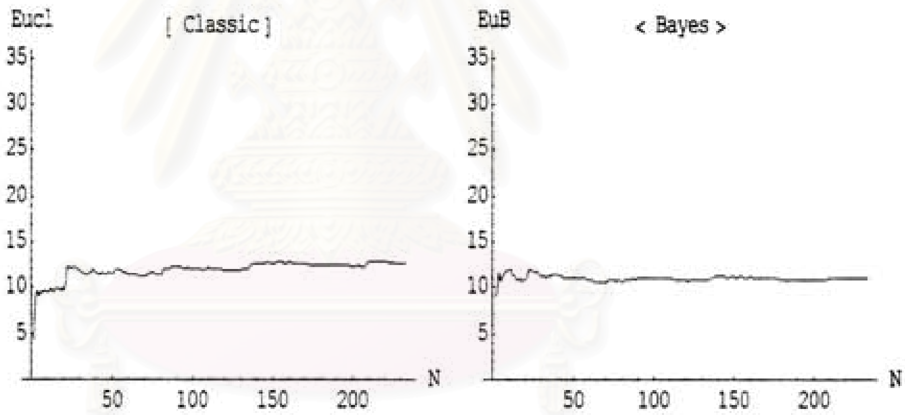


รูปที่ 4.30 แสดงการลู่เข้าสู่ค่าคงที่ของค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยเมื่อระดับปัจจัย คือ a = 5, b = 5 และ ค่าคงที่ k = 1

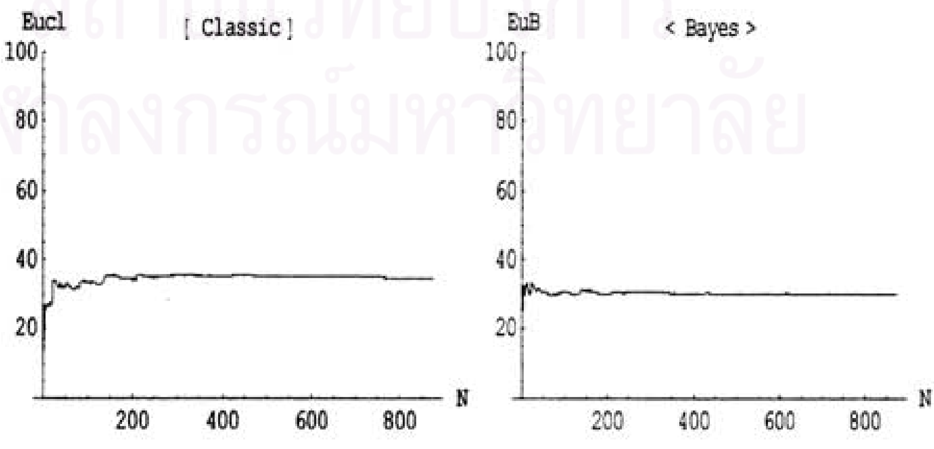
1. เมื่อสัมประสิทธิ์การแปรผัน (C.V.) ระดับ 5%



2. เมื่อสัมประสิทธิ์การแปรผัน (C.V.) ระดับ 15 %



3. เมื่อสัมประสิทธิ์การแปรผัน (C.V.) ระดับ 25 %



4.2 ผลจากการเปรียบเทียบค่าอัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองจากวิธีการทั้ง 2 วิธี

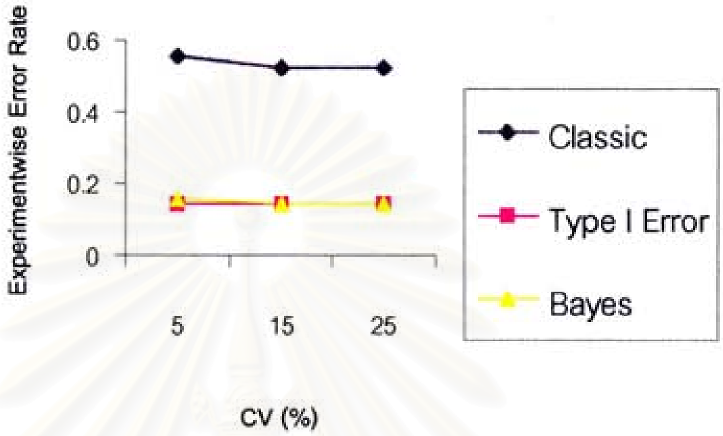
4.2.1 การเปรียบเทียบค่าอัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองทั้ง 2 แบบ ณ ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันต่างๆ

ตารางที่ 4.10 แสดงการเปรียบเทียบค่าอัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองจากวิธีการประมาณทั้ง 2 วิธี ที่ระดับนัยสำคัญ (α) =0.05 โดยมีค่าความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 = 0.1426

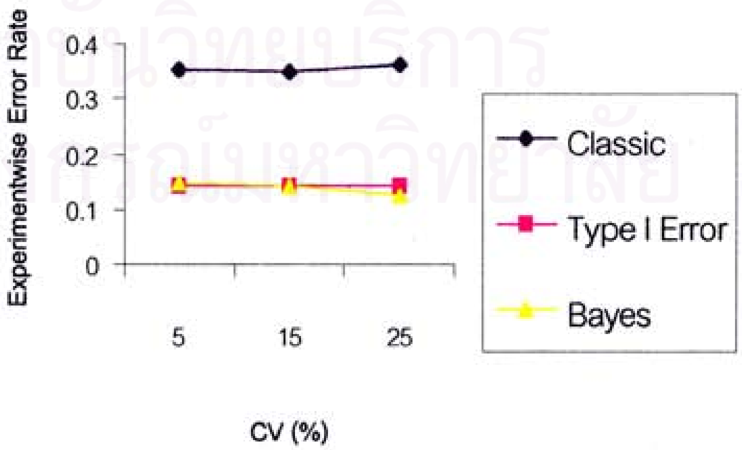
ระดับปัจจัย	ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน C.V.	จำนวนการทดลองทั้งหมด	อัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองแบบคลาสสิก	อัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองแบบเบส์
a=3,b=3	5%	184	0.5544	0.1576
	15%	385	0.5247	0.1403
	25%	385	0.5247	0.1403
a=4,b=4	5%	116	0.3535	0.1466
	15%	231	0.3463	0.1429
	25%	868	0.3606	0.1244
a=5,b=5	5%	128	0.2031	0.0938
	15%	233	0.2060	0.1116
	25%	874	0.2288	0.1030

นำค่าอัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองทั้ง 2 แบบเปรียบเทียบกับค่าความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 = 0.1426 ณ ระดับนัยสำคัญ(α)=0.05 เพื่อให้เห็นภาพชัดเจนขึ้น แสดงได้ดังรูปที่ 4.31 – 4.33

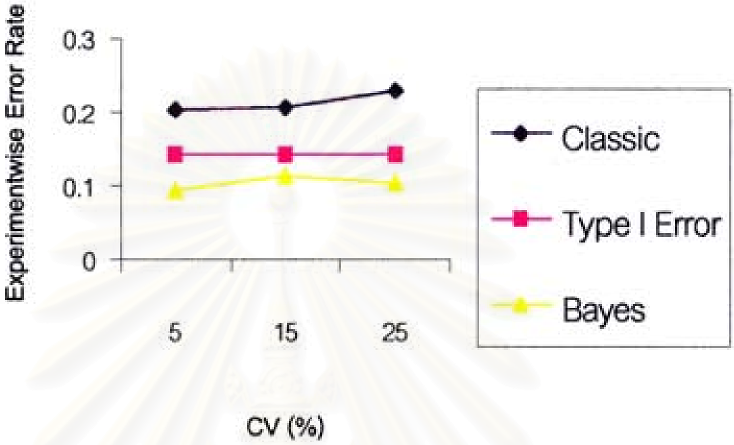
รูปที่ 4.31 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างอัตราความผิดพลาดต่อการทดลองกับค่าความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 (α =0.05) เมื่อ ระดับปัจจัย คือ a=3,b=3 ณ ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันต่างๆ



รูปที่ 4.32 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างอัตราความผิดพลาดต่อการทดลองกับค่าความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 (α =0.05) เมื่อ ระดับปัจจัย คือ a=4,b=4 ณ ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันต่างๆ



รูปที่ 4.33 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างอัตราความผิดพลาดต่อการทดลองกับค่าความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 เมื่อ (α =0.05) ระดับปัจจัย คือ a=5,b=5 ณ ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันต่างๆ



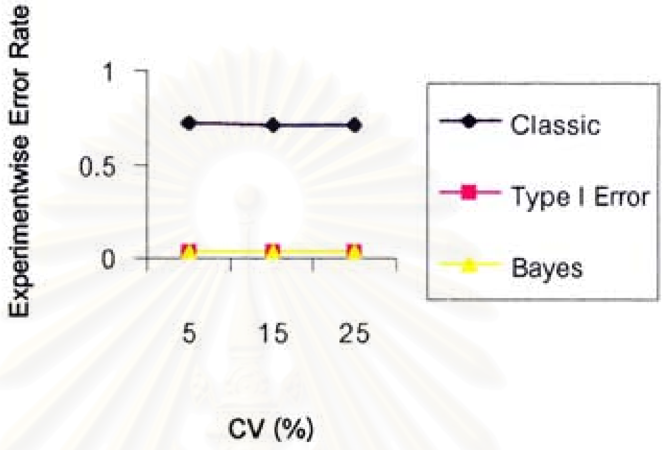
จากรูปที่ 4.31-4.33 จะเห็นได้ว่า ค่าอัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองวิธีเบส์จะให้ค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 (α =0.05) เท่ากับ 0.1426มากกว่าวิธีคลาสสิก ในทุกสถานการณ์ของการทดลอง

ตารางที่ 4.11 แสดงการเปรียบเทียบค่าอัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองจากวิธีการประมาณทั้ง 2 วิธี ที่ระดับนัยสำคัญ (α) =0.01 โดยมีค่าความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 = 0.0297

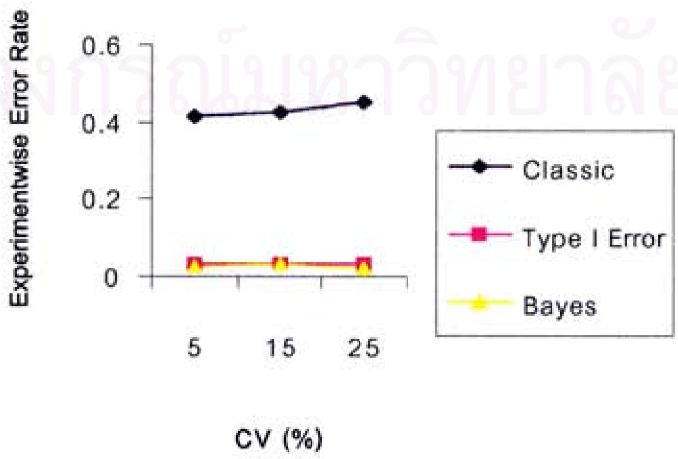
ระดับปัจจัย	ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน C.V.	จำนวนการทดลองทั้งหมด	อัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองแบบคลาสสิก	อัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองแบบเบส์
a=3,b=3	5%	116	0.7174	0.0326
	15%	231	0.7065	0.0286
	25%	868	0.7065	0.0286
a=4,b=4	5%	184	0.4138	0.0259
	15%	385	0.4242	0.0303
	25%	385	0.4493	0.0219
a=5,b=5	5%	128	0.2734	0.0156
	15%	233	0.2446	0.0386
	25%	874	0.2540	0.0194

นำค่าอัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองทั้ง 2 แบบเปรียบเทียบกับค่าความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 = 0.0297 ณ ระดับนัยสำคัญ(α)=0.01 เพื่อให้เห็นภาพชัดเจนขึ้นแสดงได้ดังรูปที่ 4.34 – 4.36

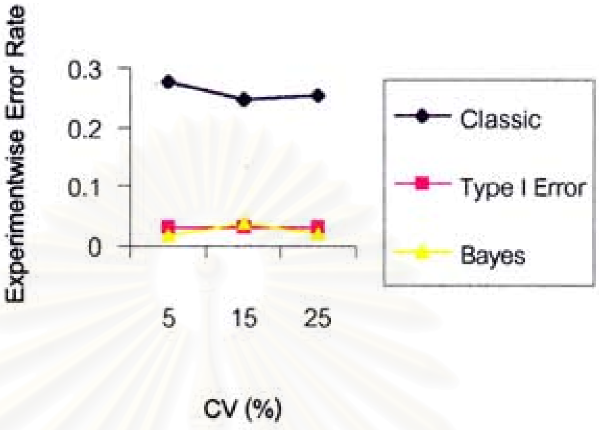
รูปที่ 4.34 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างอัตราความผิดพลาดต่อการทดลองกับค่าความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 (α =0.01) เมื่อระดับปัจจัย คือ a = 3,b = 3ณ ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันต่างๆ



รูปที่ 4.35 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างอัตราความผิดพลาดต่อการทดลองกับค่าความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 (α =0.01) เมื่อระดับปัจจัย คือ a = 4,b = 4ณ ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันต่างๆ



รูปที่ 4.36 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างความผิดพลาดต่อการทดลองกับค่าความน่าจะเป็นที่ของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 (α =0.01) เมื่อระดับปัจจัย คือ a = 5,b = 5ณ ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันต่างๆ



จากรูปที่ 4.34-4.36 จะเห็นได้ว่า ค่าอัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองวิธีเบส์จะให้ค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 (α =0.01) เท่ากับ 0.0297มากกว่าวิธีคลาสสิก ในทุกสถานการณ์ของการทดลอง

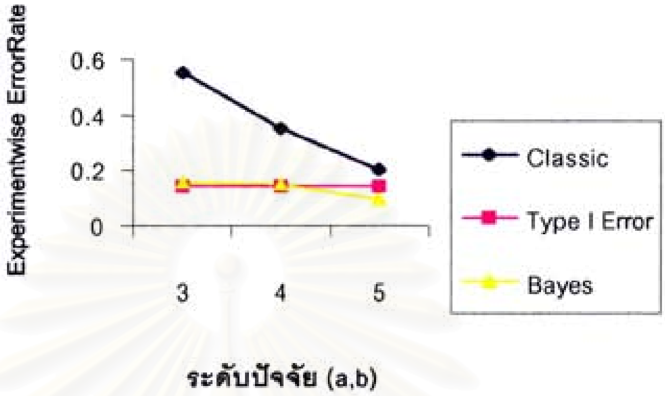
4.2.2 การเปรียบเทียบค่าอัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองทั้ง 2 แบบ ณ ระดับปัจจัยต่างๆ

ตารางที่ 4.12 แสดงการเปรียบเทียบค่าอัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองจากวิธีการประมาณทั้ง 2 วิธี ที่ระดับนัยสำคัญ (α) =0.05 โดยมีค่าความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 = 0.1426

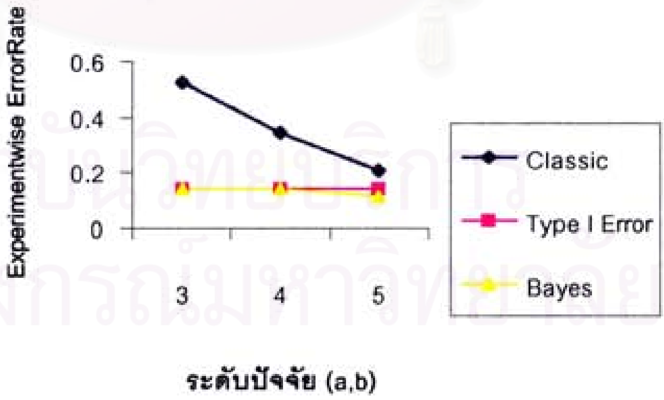
ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน C.V.	ระดับปัจจัย	จำนวนการทดลองทั้งหมด	อัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองแบบคลาสสิก	อัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองแบบเบส์
5%	a =3,b=3	184	0.5544	0.1576
	a =4,b=4	116	0.3535	0.1466
	a =5,b=5	128	0.2031	0.0938
15%	a =3,b=3	385	0.5247	0.1403
	a =4,b=4	231	0.3463	0.1429
	a =5,b=5	233	0.2060	0.1116
25%	a =3,b=3	385	0.5247	0.1403
	a =4,b=4	868	0.3606	0.1244
	a =5,b=5	874	0.2288	0.1030

นำค่าอัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองทั้ง 2 แบบเปรียบเทียบกับค่าความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 = 0.1426 ณ ระดับนัยสำคัญ(α)=0.05 เพื่อให้เห็นภาพชัดเจนขึ้น แสดงได้ดังรูปที่ 4.37 – 4.39

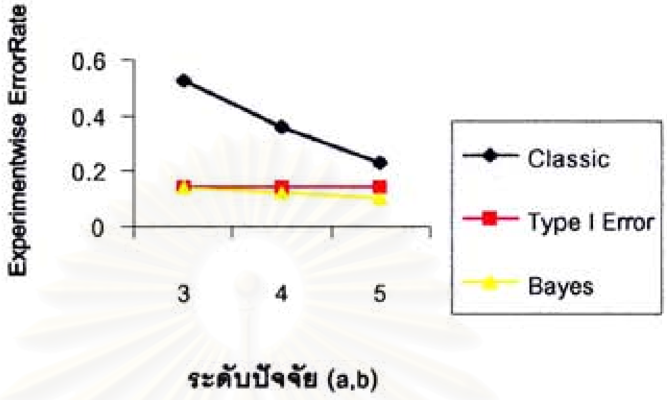
รูปที่ 4.37 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างอัตราความผิดพลาดต่อการทดลองกับค่าความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 (α =0.05) เมื่อสัมประสิทธิ์การแปรผัน = 5% ณ ระดับปัจจัยต่างๆ



รูปที่ 4.38 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างอัตราความผิดพลาดต่อการทดลองกับค่าความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 (α =0.05) เมื่อสัมประสิทธิ์การแปรผัน = 15% ณ ระดับปัจจัยต่างๆ



รูปที่ 4.39 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างอัตราความผิดพลาดต่อการทดลองกับค่าความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 (α =0.05) เมื่อสัมประสิทธิ์การแปรผัน =25% ณ ระดับปัจจัยต่างๆ



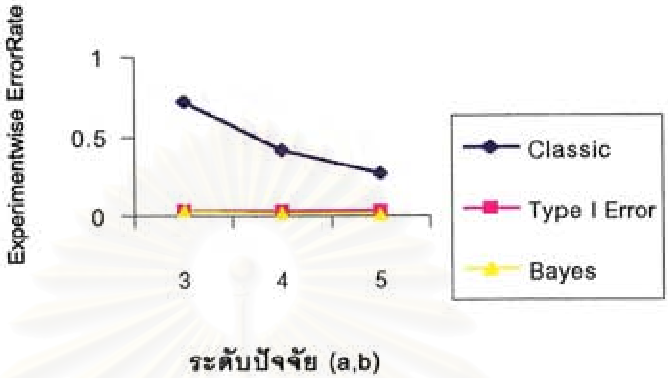
จากรูปที่ 4.37-4.39 จะเห็นได้ว่า ค่าอัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองวิธีเบส์จะให้ค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 (α =0.05) เท่ากับ 0.1426มากกว่าวิธีคลาสสิก ในทุกสถานการณ์ของการทดลอง

ตารางที่ 4.13 แสดงการเปรียบเทียบค่าอัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองจากวิธีการประมาณทั้ง 2 วิธี ที่ระดับนัยสำคัญ (α) =0.01 โดยมีค่าความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 = 0.0297

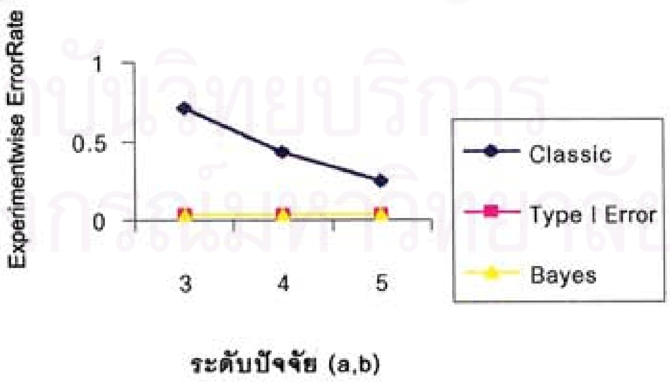
ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน C.V.	ระดับปัจจัย	จำนวนการทดลองทั้งหมด	อัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองแบบคลาสสิก	อัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองแบบเบส์
5%	a =3,b=3	184	0.7174	0.0326
	a =4,b=4	116	0.4138	0.0259
	a =5,b=5	128	0.2734	0.0156
15%	a =3,b=3	385	0.7065	0.0286
	a =4,b=4	231	0.4242	0.0303
	a =5,b=5	233	0.2446	0.0386
25%	a =3,b=3	385	0.7065	0.0286
	a =4,b=4	868	0.4493	0.0219
	a =5,b=5	874	0.2540	0.0194

นำค่าอัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองทั้ง 2 แบบเปรียบเทียบกับค่าความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 = 0.0297 ณ ระดับนัยสำคัญ(α)=0.01 เพื่อให้เห็นภาพชัดเจนขึ้น แสดงได้ดังรูปที่ 4.40 – 4.42

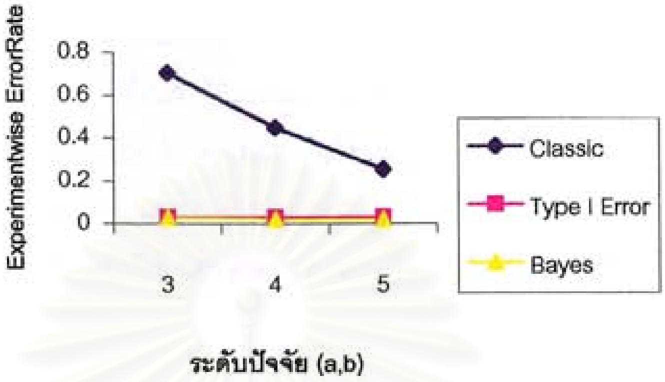
รูปที่ 4.40 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างอัตราความผิดพลาดต่อการทดลองกับค่าความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 (α=0.01) เมื่อสัมประสิทธิ์การแปรผัน = 5% ณ ระดับปัจจัยต่างๆ



รูปที่ 4.41 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างอัตราความผิดพลาดต่อการทดลองกับค่าความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 (α=0.01) เมื่อสัมประสิทธิ์การแปรผัน = 15% ณ ระดับปัจจัยต่างๆ



รูปที่ 4.42 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างอัตราความผิดพลาดต่อการทดลองกับค่าความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 (α=0.01) เมื่อสัมประสิทธิ์การแปรผัน =25% ณ ระดับปัจจัยต่างๆ



จากรูปที่ 4.40-4.42 จะเห็นได้ว่า ค่าอัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองวิธีเบส์จะให้ค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1 (α=0.01) เท่ากับ 0.0297 มากกว่าวิธีคลาสสิก ในทุกสถานการณ์ของการทดลอง

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

ในการวิจัยครั้งนี้ต้องการศึกษาและเปรียบเทียบการประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวนสำหรับตัวแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์ที่ไม่มีการทำซ้ำ 2 วิธี คือ วิธีคลาสสิก (Classical Estimation) และ วิธีเบส์ (Bayesian Estimation) การเปรียบเทียบกระทำภายใต้สถานการณ์ที่มีระดับปัจจัย a=3,b=3 ; a=4,b=4 และ a=5,b=5 สัมประสิทธิ์การแปรผัน (C.V.) 3 ระดับ คือ 5%, 15% และ 25% และระดับนัยสำคัญ 0.05 และ 0.01 ในการวิจัยครั้งนี้ได้ทำการจำลองข้อมูลด้วยเทคนิคมอนติคาร์โล โดยทำการทดลองซ้ำ ๆ กันจนกว่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยจากทั้ง 2 วิธีเข้าสู่ค่าคงที่ ด้วยโปรแกรม Mathematica 4.0 เกณฑ์ที่นำมาใช้ในการเปรียบเทียบวิธีการประมาณทั้ง 2 แบบสำหรับการประมาณค่าแบบจุดโดยใช้ระยะทางยุคลิดเฉลี่ยเป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบ ส่วนการประมาณค่าแบบช่วงโดยใช้อัตราความผิดพลาดเป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบ

5.1 สรุปผลการวิจัย

5.1.1. เมื่อ k มีค่าเพิ่มขึ้น ระยะทางยุคลิดเฉลี่ยทั้งวิธีเบส์และวิธีคลาสสิกไม่มีค่าต่างกันมากนัก และ ค่า k ณ ระดับต่าง ๆ ในทุกสถานการณ์จะให้ค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยวิธีเบส์ต่ำกว่าวิธีคลาสสิก

5.1.2. เมื่อ C.V.มีค่าเพิ่มขึ้นระยะทางยุคลิดเฉลี่ยทั้งวิธีเบส์และวิธีคลาสสิกมีค่าเพิ่มสูงขึ้น และค่า C.V. ณ ระดับต่าง ๆ ในทุกสถานการณ์จะให้ค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยวิธีเบส์ต่ำกว่าวิธีคลาสสิก

5.1.3. เมื่อ ระดับปัจจัยทดลอง (a) และระดับปัจจัยแบ่งบล็อก (b) มีระดับปัจจัยเพิ่มขึ้นระยะทางยุคลิดเฉลี่ยทั้งวิธีเบส์และวิธีคลาสสิกมีค่าลดลง และ ระดับปัจจัยทดลอง (a) และระดับปัจจัยแบ่งบล็อก (b) ณ ระดับต่าง ๆ ในทุกสถานการณ์จะให้ค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยวิธีเบส์ต่ำกว่าวิธีคลาสสิก

ดังนั้น การประมาณค่าแบบจุดขององค์ประกอบความแปรปรวนวิธีเบส์ให้ค่าระยะทางยุคลิดเฉลี่ยต่ำกว่าการประมาณวิธีคลาสสิกในทุกสถานการณ์ของการทดลอง

5.1.4. การประมาณค่าแบบช่วงขององค์ประกอบความแปรปรวนวิธีเบส์ให้ค่าอัตราความผิดพลาดต่อหนึ่งการทดลองใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดแบบที่ 1

(α =0.05 และ 0.01) เท่ากับ 0.1426 และ 0.0297 มากกว่าการประมาณวิธีคลาสสิก ในทุกสถานการณ์ของการทดลอง

นั่นคือ การประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวนวิธีเบส์ที่ได้มีค่าใกล้เคียงกับค่าพารามิเตอร์โดยส่วนใหญ่มากกว่าการประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวนวิธีคลาสสิก

5.2 ข้อเสนอแนะ

5.2.1. การประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวนวิธีเบส์ ในงานวิจัยครั้งนี้ได้กำหนดไว้ว่า ไม่ทราบลักษณะการแจกแจงแรก นั่นคือ ไม่ทราบว่าพารามิเตอร์ควรมีค่าแท้จริงเท่าใด ดังนั้นการแจกแจงแรกใช้การแจกแจงสม่ำเสมอในช่วงของค่าพารามิเตอร์ที่เป็นไปได้ แต่ละค่าของพารามิเตอร์มีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน นอกจากนี้ควรศึกษาเปรียบเทียบเพิ่มเติม เช่น ในกรณีที่การแจกแจงแรกเป็นการแจกแจงแบบเจฟฟรีส์

5.2.2 ในการศึกษาครั้งนี้ได้ทำการศึกษาภายใต้สถานการณ์ของระดับปัจจัย a=3,b=3;a=4,b=4 และa=5,b=5 สัมประสิทธิ์การแปรผัน (C.V.) 3 ระดับ คือ 5%, 15% และ 25% และและระดับนัยสำคัญ 0.05 และ 0.01 เท่านั้น ดังนั้นในการศึกษาครั้งต่อไปอาจศึกษา ณ สถานการณ์ของระดับปัจจัยที่เพิ่มขึ้น ในระดับปัจจัยที่a และ b ไม่เท่ากัน ; $\sigma_\tau^2 = k_1\sigma_\varepsilon^2$, $k_1 > 0$; $\sigma_\beta^2 = k_2\sigma_\beta^2$, $k_2 > 0$; สัมประสิทธิ์การแปรผัน (C.V.) ที่มีการแปรผันมากขึ้น และระดับนัยสำคัญในระดับต่างๆ

5.5.3 ในการศึกษาครั้งนี้ได้ทำการศึกษาและเปรียบเทียบการประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวนสำหรับตัวแบบสุ่มตลอดในบล็อกสมบูรณ์เท่านั้น ดังนั้นในการศึกษาครั้งต่อไปอาจจะศึกษาสำหรับตัวแบบอื่นๆ

รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

ธีระพร วีระถาวร. การอนุมานเชิงสถิติขั้นกลาง:โครงสร้างและความหมาย. พิมพ์ครั้งที่ 2 . กรุงเทพมหานคร:โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย , 2536.

มัลลิกา บุนนาค. สถิติเพื่อการตัดสินใจ . พิมพ์ครั้งที่ 3 กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์-มหาวิทยาลัย , 2539.

สุชาดา กีระนันทน์ . การอนุมานเชิงสถิติ:ทฤษฎีขั้นต้น .พิมพ์ครั้งที่ 4 . กรุงเทพมหานคร:โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย , 2537.

สุพล ดุรงค์วัฒนา . การวางแผนการทดลองขั้นสูง . เอกสารประกอบการสอนวิชาการวางแผนการทดลองขั้นสูง ภาควิชาสถิติ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2540.

ภาษาอังกฤษ

Box,G.E.P., and M.E. Muller.A Note on the Generation of Random Normal Deviates, Annuals of Mathematical Statistics, 29 (1958) : 610-611.

Box,G.E.P ,and Tiao.G.C. Bayesian Inference in Statistical Analysis. Massachusetts : Addison-Wesley Publishing Company,1973.

Cochran,W.G.,and Cox,G.M. Experimental Design. New York : John Wiley and Sons, 1976.

Fisher,R.A.,On the Mathematical Foundations of Theoretical Statistica. Series A,Phil, Trans. Roy. Soc.,1992.

Graybill,F.A.,An Introduction to Linear Statistical Model1 vol.,New York : McGraw – Hill, 1961.

Lindley,D.V., Introduction to Probability and Statistics from a Bayesian Viewpoint Part2 Inference. Cambridge:Cambridge University Press,1970.

Montgomery,C.D. Design and Analysis of Experiments. 4 nd ed.Canada : John Wiley & Sons,1997.

Norman L. Johnson and Samule Kotz . Continous Univariate Distribution.1-2 Vols. Cannada : John Wiley & Sons,1970.

Satterthwaite, F.E. An Approximate Distribution of Estimates of Variance Components. Biometrics Bull.2 (1946) : 110 – 112.

Shayle R. Searle,George Casella and Charlese Mcculloch .Variance Component.
Cannada : John Wiley & Sons,1992.

Stephen K. Mathematica as a tool. Boston : Birk hauser ,1994.

Stephen Wolfram. Mathematica a System for doing Mathematica by Computer.2 nd ed.
California : Addison-Wesley Publishing Company,1991.

William R. Dillon and Matthew Glodstein.Multivariate Analysis Methods and
Applications. New York : John Wiley & Sons,1984.

ภาคผนวก

```
(*  โปรแกรมการคำนวณหาค่าประมาณแบบจุดทั้งวิธีคลาสสิกและวิธีเบส์   *)
(* ขั้นตอนในการกำหนดค่า Nmax ,N , a, b, cv, k, u *)
Nmax =1000;
N = 0;
a  =3;
b  = 3;
c =  a*b;
cv=0.25;
k=1;
u = 40;
vt=a-1;
vb=b-1;
ve=(a-1)*(b-1);

Array[ af1, {a,b}];
Array[ af2, {a,b}];
Vr[u_,k_,cv_] :=  (cv*u)^2/(2*k+1);
var = N[Vr[u,k,cv],7];
qt=k*var;
qb=k*var;
qe=var;
v = qt+qb+qe;
Print[u,"\t",var,"\t",v];

(* ขั้นตอนในการสร้างข้อมูล *)
SeedRandom[65479];
kkix = 0;
Dnor[u_,var_ ] :=  If[kkix==1,  kkix=0;
                                          r1=Random[];
                                          r2=Random[];
                                          ztwo = Sqrt[-2*Log[r1]]*Sin[2*Pi*r2];
                                          gn = ztwo*Sqrt[var]+u;
```

```
                    , kkix = 1;
                        zone= Sqrt[-2*Log[r1]]*Cos[2*Pi*r2];
                        gn=zone*Sqrt[var]+u;
            ];

(* การเก็บข้อมูลลงไฟล์เพื่อเช็คข้อมูลว่ามีการแจกแจงเป็นไปตามข้อกำหนด *)
file1 = OpenWrite["Block.dat"]; (* ไฟล์ข้อมูลทั้งหมด *)
Array[ x1, a];
Array[ x2, b];
Array[ x3, c];
Do[
    Do[ Dnor[ 0,qt ]; x1[i] = gn , {i,a}];
    Do[ Dnor[ 0,qb ];  x2[i] = gn, {i,b}];
    Do[ Dnor[ 0,qe ];  x3[i] = gn, {i,c}];

    tot1 =0;
    For[i=1, i<a+1,i++,For[j=1, j<b+1,j++,tot1=tot1+1; af1[i,j]=x3[tot1] ]];
    Do[ Do[  af2[i,j] = N[ u+x1[i]+x2[j]+af1[i,j] , 6 ];
                temp = ToString[ af2[i,j] ];
                WriteString[ file1, StringJoin[temp,"\t"] ]
      ,{j,b}],{ i, a}];
      WriteString[ file1, "\n"]
,{ z, Nmax }];
Close[ file1];

(* การเปิดไฟล์ข้อมูล *)
file1 = OpenRead["Block.dat"];
rdata = ReadList[ file1, {{Real,Real,Real},
                          {Real,Real,Real},
                          {Real,Real,Real}}];             (* a =3, b=3 *)

                        (*{{Real,Real,Real,Real},
                           {Real,Real,Real,Real},
```

```
                    {Real,Real,Real,Real},
                    {Real,Real,Real,Real}}]; *)            (* a =4, b=4 *)

                 (* {{Real,Real,Real,Real,Real},
                    {Real,Real,Real,Real,Real},
                    {Real,Real,Real,Real,Real},
                    {Real,Real,Real,Real,Real},
                    {Real,Real,Real,Real,Real}}]; *)       (* a =5, b=5 *)

( * การเก็บข้อมูลลงไฟล์เพื่อนำไปใช้ในการประมาณค่าแบบช่วงทั้งวิธีคลาสสิกและเบส์ *)
file2 = OpenWrite["BlockCB.dat"];  (* ไฟล์ที่เก็บค่าประมาณแบบจุดที่มีค่าเป็นบวกทั้ง 2 วิธี *)
file3 = OpenWrite["Block2.dat"];  (* ไฟล์ที่เก็บค่าไว้เพื่อนำไปใช้ประมาณค่าแบบช่วงคลาสสิก *)
file4 = OpenWrite["Block3.dat"];  (* ไฟล์ที่เก็บค่าไว้เพื่อนำไปใช้ประมาณค่าแบบช่วงเบส์ *)
file5 = OpenWrite["Block1.dat"];  (* ไฟล์ข้อมูลที่ทำให้ค่าประมาณเป็นบวก *)
dataEuCl = Table[{x,0}, {x,Nmax}];
dataEuB  = Table[{x,0}, {x,Nmax}];
EuCl = 0;
EuB  = 0;
chkEu = 0;
oldEuCl = 0;
oldEuB  = 0;
(* ขั้นตอนการคำนวณค่าประมาณแบบจุดของทั้ง 2 วิธี *)
Do[ y = rdata[[z]];
    ss = ((Sum[y[[i,j]], {i,1,a}, {j,1,b} ])^2)/(a*b);
    sse = Sum[(y[[i,j]])^2,{i,1,a},{j,1,b}];
    sst= (Sum[(Sum[y[[i,j]],{j,1,b}])^2,{i,1,a}])/(b);
    ssb = (Sum[(Sum[y[[i,j]],{i,1,a}])^2,{j,1,b}])/(a);

    st = sst-ss;
    sb = ssb-ss;
    se = sse-ss-st-sb;

    mt = st/(vt);
```

```
mb = sb/(vb);
me = se/(ve);

x1  =  st/(st+se);
I1 =  BetaRegularized[x1,vt/2,ve/2+2];
I2 =  BetaRegularized[x1,vt/2,ve/2+1];
I3 =  BetaRegularized[x1,vt/2,ve/2];
a1   =  ((ve/2+1)* (I1/I2))-((ve/2)*(I2/I3));
ve1  = (ve/a1)*( I2/I3);
me1 =  se/(a1*ve1);
se1  =  ve1*me1;

x2  =  sb/(sb+se1);
I4 =  BetaRegularized[x2,vb/2,ve1/2+2];
I5 =  BetaRegularized[x2,vb/2,ve1/2+1];
I6 =  BetaRegularized[x2,vb/2,ve1/2];
a2    =  ((ve1/2+1)* (I4/I5))-((ve1/2)*(I5/I6));
ve2   = (ve1/a2)*( I5/I6);
me2  =  se1/(a1*ve2);
se2    = ve2*me2;

x3  =  sb/(sb+se);
I7 =  BetaRegularized[x3,vb/2,ve/2+2];
I8 =  BetaRegularized[x3,vb/2,ve/2+1];
I9 =  BetaRegularized[x3,vb/2,ve/2];
a3    =  ((ve/2+1)* (I7/I8))-((ve/2)*(I8/I9));
ve3   = (ve/a3)*( I8/I9);
me3 =  se/(a3*ve3);
se3  =  ve3*me3;

Clt = (mt-me)/b;
Clb = (mb-me)/a;
Cle = me ;
```

```
Bt = (1/b) * (st/(vt+2)-me3);
Bb = (1/a) * (sb/(vb+2)-me1);
Be = se2 / (ve2+2);


If[ (Clt >= 0 && Clb >=0 && Cle >= 0 && Bt >= 0 && Bb >= 0 && Be >= 0 && chkEu ==0 ),
    N = N + 1;
    ECl  = Sqrt[ (Clt-qt)^2+ (Clb-qb)^2 + (Cle-qe)^2 ];
    EB   = Sqrt[ (Bt-qt)^2+ (Bb-qb)^2 + (Be-qe)^2 ];
    EuCl = EuCl + ECl;
    EuB  = EuB + EB;
    If[ (N >= 50) ,
      If[ (Abs[ (EuCl / N) - oldEuCl ] <= 0.001) && (Abs[ (EuB / N) - oldEuB] <= 0.001) , chkEu = 1
]];
      Print[N,"\t",EuCl / N,"\t" ,EuB / N,"\t",Abs[ (EuCl / N) - oldEuCl ],"\t",Abs[ (EuB / N) - oldEuB ] ];
      dataEuCl[[ N,2 ]] = EuCl / N;
      dataEuB[[ N,2 ]]  = EuB / N;
      oldEuCl = EuCl / N;
      oldEuB  = EuB / N;
      WriteString[ file2, StringJoin[ ToString[Clt],"\t", ToString[Clb],"\t", ToString[Cle],"\t", ToString
[Bt],"\t", ToString[Bb],"\t", ToString[Be],"\t", ToString[ECl],"\t",
ToString[EB], "\n" ]];


    WriteString[ file3, StringJoin[ToString[se],"\t", ToString[mt],"\t", ToString[mb],"\t", ToString
[me],"\t",  ToString[Clt],"\t", ToString[Clb], "\n" ]];


     WriteString[ file4, StringJoin[ ToString[st],"\t", ToString[sb],"\t", ToString[me1],"\t",
ToString[me3],"\t", ToString[se2],"\t",ToString[ve2], "\n" ]];


    Do[ Do[  WriteString[ file5, StringJoin[ ToString[ y[[i,j]] ], "\t"] ], {j,b}],{ i, a}];
    WriteString[ file5, "\n"];
   ]
```

```
,{ z, Nmax }];
Print["\n",u,"\t",var,"\t",v];
EC =EuCl / N;
EB = EuB / N;
Diff = EC - EB ;
Print["\n",N,"\t",EC,"\t" ,EB,"\t",Diff];


(* กราฟแสดงระยะทางยูคลีเดียนลู่เข้าสู่ค่าคงที่ *)
data1 = Table[{x,0}, {x,N}];
data2 = Table[{x,0}, {x,N}];
Do[  data1[[ i,2 ]]  = dataEuCl[[ i,2 ]];
       data2[[ i,2 ]]  = dataEuB[[ i,2 ]];
 ,{i,N}];

ListPlot[ data1, PlotJoined -> True, PlotRange -> {0,3*k*var}, PlotLabel -> " [ Classic ] ", AxesLabel -> {
"N","Eucl"}];
ListPlot[ data2, PlotJoined -> True, PlotRange -> {0,3*k*var}, PlotLabel -> " < Bayes > ", AxesLabel ->
{"N","EuB" }];

Close[ file1 ];
Close[ file2 ];
Close[ file3 ];
Close[ file4 ];
Close[ file5 ];

(*  โปรแกรมการคำนวณหาค่าประมาณแบบช่วงวิธีคลาสสิก  *)
a  = 3;
b  = 3;
c =  a*b;
u=40;
cv=0.05;
k=1;
```

```
alp = 0.05;
up = alp/2;
lo = 1-up;

vt =a-1;
vb =b-1;
ve =(a-1)*(b-1);

Vr[u_,k_,cv_] := (cv*u)^2/(2*k+1);
var = N[Vr[u,k,cv],7];
qt=k*var;
qb=k*var;
qe=var;

Chi[r_,Alp_] := FindRoot[Integrate[(w^(r/2-1)*E^(-w/2))/(Gamma[r/2]*2^(r/2)),
                                  {w,0,g}]==Alp,{g,0.001,2000}];

( * การเปิดไฟล์ข้อมูลที่เก็บค่าไว้มาใช้ในการหาค่าประมาณแบบช่วงคลาสสิก *)
file1 = OpenRead["Block2.dat"];
rdata = ReadList[ file1, { Real,Real,Real,Real,Real,Real}];

Nmax =184;
chkLUC =0;
file2 = OpenWrite["BlockLUC.dat"];
Do[ y = rdata[[z]];
    se = y[[1]];
    mt = y[[2]];
    mb = y[[3]];
    me = y[[4]];
    Clt = y[[5]];
    Clb = y[[6]];

     rt = N[ ((mt-me)^2) / ((mt^2/vt)+(me^2/ve)), 5];
```

```
rb = N[ ((mb-me)^2) / ((mb^2/vb)+(me^2/ve)), 5];

Ctl = N[ g  /. Chi[ rt, lo ] ,5];
Cbl = N[g  /. Chi[ rb, lo ],5];
Cel = N[g  /. Chi[ ve, lo ] ,5] ;

Ctu = N[ g  /. Chi[ rt, up ] ,5];
Cbu = N[g  /. Chi[ rb, up ],5];
Ceu = N[g  /. Chi[ ve, up ] ,5] ;

LCt = N[(Clt*rt)/Ctl ,5];
LCb = N[(Clb*rb)/Cbl ,5];
LCe = N[se/Cel ,5];

UCt  = N[(Clt*rt)/Ctu ,5];
UCb = N[(Clb*rb)/Cbu ,5];
UCe = N[se/Ceu ,5];

St0 = StringPosition[ ToString[LCt], {"+","i","I"}];
Sb0 = StringPosition[ ToString[LCb], {"+","i","I"}];
St1 = StringPosition[ ToString[UCt], {"+","i","I"}];
Sb1 = StringPosition[ ToString[UCb], {"+","i","I"}];

 Print[z,"\t","[",LCt,",",UCt,"]", "\t","[",LCb,",",UCb,"]", "\t","[",LCe,",",UCe,"]"];
 WriteString[ file2, StringJoin[ "[", ToString[LCt], "," , ToString[UCt], "]\t",
                                 "[", ToString[LCb], "," , ToString[UCb], "]\t",
                                 "[", ToString[LCe], "," , ToString[UCe], "]\n" ]];
If [ (qt < LCt || qt > UCt ) || (qb < LCb || qb > UCb )  || (qe < LCe || qe > UCe) ||
     St0 != {} || Sb0 != {} || St1 != {} || Sb1 != {}  ,
    chkLUC = chkLUC + 1;
 ];
 Print[" "]
,{z, Nmax}];
```

```
Print[ chkLUC ];
Print[N[ chkLUC / Nmax,5] ];
Close[file1];
Close[file2];

(* โปรแกรมการคำนวณหาค่าประมาณแบบช่วงวิธีเบส์ *)
a = 3;
b = 3;
c = a*b;
u=40;
cv=0.05;
k=1;
al = 0.025;

vt =a-1;
vb =b-1;
ve =(a-1)*(b-1);

Vr[u_,k_,cv_] := (cv*u)^2/(2*k+1);
var = N[Vr[u,k,cv],7];
qt=k*var;
qb=k*var;
qe=var;


( * การเปิดไฟล์ข้อมูลที่เก็บค่าไว้มาใช้ในการหาค่าประมาณแบบช่วงเบส์ *)
file1 = OpenRead["Block3.dat"];
rdata = ReadList[ file1, { Real,Real,Real,Real,Real,Real}];

Nmax = 184;
chkLUB =0;

file2 = OpenWrite["BlockLUB.dat"];
```

```
Do[ y = rdata[[z]];
      st = y[[1]];
      sb = y[[2]];
      me1 = y[[3]];
      me3 = y[[4]];
      se2 = y[[5]];
      ve2 = y[[6]];

fn[v1_,n1_,S1_,Me1_] := Integrate[( (n1/S1)*((Me1+(n1*y1))/S1)^(-1*(v1/2+1))*E^((-1/2)*(S1/
                              (Me1+(n1*y1)))) ) / (Gamma[v1/2]*2^(v1/2)),{y1,0,Infinity}];
T = N[fn[vt,b,st,me3]];
Bl = N[fn[vb,a,sb,me1]];
Er=N[Integrate[( (1/se2)*(z4/se2)^(-1*(ve2/2+1))*E^((-1/2)*(se2/z4)) )
          / (Gamma[ve2/2]*2^(ve2/2)),{z4,0,Infinity}]];

fn1[v1_,n1_,S1_,Me1_,H_] := Integrate[( (n1/S1)*((Me1+(n1*y1))/S1)^(-1*(v1/2+1))*E^((-
                              1/2)*(S1/(Me1+(n1*y1)))) )/ (Gamma[v1/2]*2^(v1/2))/H,
                              {y1,0,Infinity}];

T1 = N[fn1[vt,b,st,me3,T]];
Bl1 = N[fn1[vb,a,sb,me1,Bl]];
Er1=N[Integrate[( (1/se2)*(z4/se2)^(-1*(ve2/2+1))*E^((-1/2)*(se2/z4)) )
      / (Gamma[ve2/2]*2^(ve2/2))/Er,{z4,0,Infinity}]];

Lfn[v1_,Alp1_,n1_,S1_,Me1_,H1_] := FindRoot[Integrate[( (n1/S1)*((Me1+(n1*w1))/S1)^(-1*
                              (v1/2+1))*E^((-1/2)*(S1/(Me1+(n1*w1)))) )
                              / (Gamma[v1/2]*2^(v1/2))/H1,{w1,0,z1}]==Alp1,
                              {z1,0.001,50}];

LfE[v2_,Alp2_,S2_,H2_] := FindRoot[Integrate[( (1/S2)*(w2/S2)^(-1*(v2/2+1))*E^((-1/2)*
                              (S2/w2)) ) / (Gamma[v2/2]*2^(v2/2))/H2,{w2,0,z2}]==Alp2,
                              {z2,0.001,50}];
```

```
Ufn[v3_,Alp3_,n2_,S3_,Me3_,H1_] := FindRoot[Integrate[( (n2/S3)*((Me3+(n2*w3))/S3)^(-1*
                                   (v3/2+1))*E^((-1/2)*(S3/(Me3+(n2*w3)))) ) / (Gamma
                                   [v3/2]*2^(v3/2))/H1,{w3,z3,Infinity}]==Alp3,
                                   {z3,0.001,1000}];

UfE[v4_,Alp4_,S4_,H2_] := FindRoot[Integrate[( (1/S4)*(w4/S4)^(-1*(v4/2+1))*E^((-1/2)*
                          (S4/w4)) ) / (Gamma[v4/2]*2^(v4/2))/H2,{w4,z4,Infinity}]==Alp4,
                          {z4,0.001,1000}];

LBt = N[ z1 /. Lfn[vt,al,b,st,me3,T] ,5];
LBb = N[ z1 /. Lfn[vb,al,a,sb,me1,Bl] ,5];
LBe = N[ z2 /. LfE[ve2,al,se2,Er] ,5];

UBt = N[ z3 /. Ufn[vt,al,b,st,me3,T] ,5];
UBb = N[ z3 /. Ufn[vb,al,a,sb,me1,Bl] ,5];
UBe = N[ z4 /. UfE[ve2,al,se2,Er] ,5];


      Print[z,"\t","[",LBt,",",UBt,"]", "\t","[",LBb,",",UBb,"]", "\t","[",LBe,",",UBe,"]"];
      WriteString[ file2, StringJoin[ "[", ToString[LBt], "," , ToString[UBt], "]\t",
                                     "[", ToString[LBb], "," , ToString[UBb], "]\t",
                                     "[", ToString[LBe], "," , ToString[UBe], "]\n" ]];
    If [ (qt < LBt || qt > UBt) || (qb < LBb || qb > UBb)  || (qe < LBe || qe > UBe),
         chkLUB = chkLUB + 1;
    ];
     Print[" "]
,{z, Nmax}];
Print[ chkLUB ];
Print[N[ chkLUB / Nmax,5] ];
Close[file1];
Close[file2];

(* จบการทำงาน *)
```

ระดับปัจจัย a=3, b=3; C.V.= 25% ; k =1; σ^2 = 100

Classic			Bayes			EuCl	EuB
σ_τ^2	σ_β^2	σ_ε^2	σ_τ^2	σ_β^2	σ_ε^2		
8.30275	37.0851	18.4852	1.30894	16.2418	12.6429	29.3441	41.7825
78.6471	32.4375	33.8531	34.5795	10.9426	21.0316	45.3256	25.578
21.7293	37.3636	41.6875	5.08099	13.3709	27.0459	14.8556	35.16
8.08247	14.3504	27.3071	0.557839	3.97792	16.9425	32.1601	46.9535
144.312	27.9651	10.4272	70.5122	12.2514	6.66142	113.445	50.3796
44.9051	57.8914	33.09	17.4359	24.0782	22.0793	27.149	21.5648
65.6633	19.1118	8.86567	31.4591	8.09541	5.62964	42.9668	37.5228
6.62634	53.9901	3.44845	2.7402	26.4671	2.41087	45.0896	44.0373
164.429	105.723	22.0426	78.6268	49.2298	14.5392	150.179	51.5502
8.37605	8.79594	20.7783	1.62527	1.85419	12.7929	37.183	49.1757
25.9127	109.994	53.2693	4.74236	48.2838	36.5252	79.5571	32.4214
43.8944	70.0972	40.4662	15.8189	29.2743	27.2134	38.9101	18.9917
196.992	40.4338	22.0935	95.1302	16.5657	13.8319	164.198	66.9351
29.4283	40.3006	23.377	11.1757	16.7452	15.6307	12.7641	32.8559
60.0069	105.555	34.5863	24.501	47.5388	23.5598	77.0002	19.3734
22.2461	6.96941	15.2367	9.22126	1.22268	9.18729	33.8448	46.8564
27.788	16.1602	44.9838	8.48049	2.19255	27.483	21.4802	40.2696
26.4967	63.5145	24.65	9.37381	28.2444	16.9664	32.141	29.459
22.5102	30.2615	70.2559	2.56685	6.81377	43.1392	38.5986	41.7854
31.6854	42.9364	28.1321	11.6437	17.4324	18.7315	11.0448	30.6021
14.9704	101.107	11.1509	5.64196	48.9155	7.87104	73.6378	40.7179
72.7841	15.5273	18.5117	33.8497	4.77611	11.1171	45.7504	36.1848
15.2133	54.3834	10.3031	5.92413	25.66	7.19172	36.0809	38.6462
11.6936	8.42099	7.48183	4.77356	3.09061	4.80179	41.919	50.4414
21.9429	30.4583	27.2196	7.07019	11.5137	17.8867	13.2433	37.476
122.98	57.1265	41.907	55.322	21.9135	26.4825	93.146	25.707
11.4337	30.5578	24.3502	2.17148	12.2272	16.1792	23.8326	41.3618
88.632	49.5341	26.7919	40.2302	20.4832	17.2302	57.9931	21.7257
21.6414	25.7684	23.1769	7.50187	9.64877	15.168	17.2361	39.4741
19.0925	30.1242	6.09408	8.55331	14.091	4.11889	30.9043	42.8696
71.9878	13.3213	6.97756	34.9263	5.50531	4.37362	50.885	40.1945

Classic			Bayes			EuCl	EuB
σ_{τ}^{2}	σ_{β}^{2}	σ_{ε}^{2}	σ_{τ}^{2}	σ_{β}^{2}	σ_{ε}^{2}		
41.518	13.186	26.9638	17.3581	2.56415	16.2831	22.66	38.6349
11.7898	11.7231	49.5874	0.256391	0.219094	29.4088	34.5734	46.9685
3.19799	35.4604	7.43084	0.389792	16.8114	5.23445	39.7945	46.3444
158.071	44.5469	53.2166	71.7291	13.8222	32.3264	126.809	43.0806
39.3527	78.1361	22.8019	16.023	35.6163	15.6117	46.4158	24.8781
41.5553	26.2905	53.2873	14.0474	5.90909	33.037	22.7016	33.528
27.2585	17.6692	24.9341	10.2939	5.27266	15.6868	18.7834	40.3685
67.9561	126.323	11.9833	31.9934	61.2003	8.063	101.497	37.6425
48.449	15.6245	1.73973	23.9369	7.52261	1.15196	39.2459	42.3099
108.415	82.7679	45.9999	47.2125	34.2058	29.9724	90.7826	14.3069
53.8054	15.9071	19.7303	24.2095	4.83892	11.9972	30.1301	36.7479
9.47557	29.3171	20.7689	1.66737	12.0672	13.9074	27.2615	42.8059
18.4413	98.902	30.391	4.36605	45.4846	21.2877	67.3029	33.643
39.3169	43.0338	17.7767	16.8782	18.7583	11.837	19.285	30.7457
26.6907	33.6013	18.3033	10.5561	14.0838	12.2143	16.4347	36.5426
20.4357	25.9471	10.5989	8.55869	11.3502	7.10688	27.1617	42.2477
11.8375	57.8898	25.6382	1.93279	25.7401	17.6482	33.5307	35.912
34.5231	33.8779	8.42222	15.9008	15.5771	5.60206	24.9455	37.2586
20.5963	48.9312	31.7614	5.55218	20.2764	21.4141	20.1989	32.9294
28.0427	90.4264	17.7079	11.1328	42.5586	12.3182	59.4286	31.9313
33.3316	36.4134	10.8353	14.9317	16.482	7.23003	22.7078	36.1106
154.531	77.615	14.8297	74.8447	36.3517	9.76365	130.354	47.8313
37.9361	14.247	4.91304	18.1891	6.31352	3.17251	34.5425	43.233
38.173	17.056	13.2188	17.1547	6.43275	8.32348	26.3243	40.1358
21.146	446.572	14.4559	8.16573	221.139	10.2196	413.849	190.889
43.5911	10.1942	7.00864	20.7556	3.94711	4.3406	36.5189	43.1547
20.285	4.16449	4.12182	9.56033	1.41075	2.494	43.2943	50.3515
90.8367	21.4873	7.88296	44.174	9.43688	5.048	63.9897	38.5826
89.2518	29.7876	50.5558	38.0587	7.22169	30.6976	58.6179	26.6663
30.9756	47.6587	1.80252	15.1877	23.5297	1.20324	34.7127	38.18
19.3538	74.8014	34.9537	4.26897	32.9048	24.0359	43.791	30.5183
68.907	74.2272	28.8904	29.9134	32.6008	19.2344	54.3832	14.5262

Classic			Bayes			EuCl	EuB
σ_{τ}^2	σ_{β}^2	σ_{ε}^2	σ_{τ}^2	σ_{β}^2	σ_{ε}^2		
6.47495	14.6409	5.51166	2.36911	6.52511	3.78854	42.9514	50.5011
37.0758	12.5855	18.0413	16.1305	3.51212	11.0029	26.0446	41.0352
125.061	39.4049	29.0948	58.2517	14.9878	18.104	92.026	34.4879
118.266	6.64312	9.62804	57.8507	1.72457	5.55852	92.13	48.6997
42.0039	12.2725	27.6097	17.571	2.01685	16.5852	23.484	38.8545
29.8842	61.7582	29.7803	10.3482	26.6772	20.3009	28.8529	27.2482
28.7893	75.149	18.5161	11.4019	34.8047	12.809	44.5954	30.0732
82.3528	26.1688	40.8625	35.7975	6.79823	24.7893	50.1092	27.9854
47.3144	42.8864	15.5441	21.2013	18.9707	10.2792	24.5599	29.7483
101.45	51.1813	18.8559	47.7493	22.5095	12.2239	71.8887	27.7594
5.68052	28.589	16.0966	0.395916	12.3624	10.888	32.9286	45.0383
26.8284	71.7385	21.4791	9.97784	32.7439	14.8798	40.716	29.7718
116.309	62.9617	15.8029	55.6023	28.8779	10.3599	89.8334	32.3038
9.91509	49.9154	2.67018	4.5135	24.528	1.82332	41.9953	43.6004
17.8497	51.0923	22.6664	5.40144	22.4635	15.6036	25.8633	34.8237
18.9854	89.4991	20.829	6.11753	41.8524	14.6681	59.3027	34.0832
53.4592	134.025	6.49984	25.6483	65.9398	4.36237	106.132	44.2895
33.739	14.828	27.512	13.3459	3.42063	16.8996	19.4036	39.5517
51.9253	17.503	26.1179	22.4997	4.73899	15.9083	25.4622	35.1942
86.401	160.376	31.217	38.1073	75.2546	21.2231	137.697	43.8958
16.1947	7.27399	10.8624	6.65729	2.02025	6.71328	38.4417	48.9974
10.5408	8.22585	23.2913	2.47442	1.21054	14.2179	35.3656	48.4721
21.3343	26.8529	49.7001	4.29934	7.28345	31.0786	21.3036	39.0724
6.4825	77.4203	8.7339	1.798	37.5333	6.23171	57.1819	41.7925
55.9041	20.0268	4.36936	27.2422	9.28843	2.86003	39.0566	39.2923
12.6691	52.3368	23.8408	2.63734	23.1218	16.4118	29.6353	36.5083
7.05564	50.1574	6.65109	2.43176	24.1326	4.71661	41.0549	43.1101
49.1408	25.0878	25.2897	21.0081	8.66744	15.8972	19.5593	32.6242
41.4475	48.5525	10.9441	18.948	22.5133	7.32303	28.262	31.6314
4.71044	19.0069	8.63277	1.01611	8.39564	5.94458	40.4306	49.1572
26.2399	6.31993	18.8325	10.8758	0.380386	11.1883	31.4693	45.614
95.6354	15.9062	15.9141	45.5736	5.34421	9.56925	66.9977	38.7033

Classic			Bayes				
σ_τ^2	σ_β^2	σ_ε^2	σ_τ^2	σ_β^2	σ_ε^2	EuCl	EuB
62.8258	28.7065	12.582	29.455	12.3025	8.09019	36.357	33.0841
37.7751	39.9262	5.00494	18.0619	19.1383	3.33829	29.4227	36.5297
164.563	72.612	11.9031	80.3292	34.3298	7.84889	138.648	53.4702
15.9047	26.5284	36.3473	3.06762	8.75837	23.2053	18.9512	40.2805
29.9525	14.6148	52.8047	8.84926	0.489364	31.8878	27.2204	40.9913
48.0578	32.558	19.6496	21.0678	13.2033	12.7066	20.1161	31.3229
34.0804	10.6929	29.6889	13.466	1.07603	17.8564	22.944	40.9241
29.2465	45.4469	8.57728	13.2224	21.3496	5.78982	27.8622	36.1484
37.3189	28.2257	14.8204	16.3924	11.7875	9.66436	19.6138	36.2138
48.1513	18.4266	21.8463	21.0727	5.82418	13.4712	23.9528	36.0774
18.5567	44.1351	41.9731	3.31561	16.856	27.5215	20.2404	34.7324
11.0484	25.0544	19.4645	2.68061	10.0137	12.9675	27.5228	43.5679
239.191	12.804	9.99216	118.137	4.73897	6.04306	208.191	93.5628
152.058	95.2266	8.56612	74.6096	46.1891	5.69308	136.161	51.3126
113.927	154.39	15.8692	54.3379	74.5826	10.6209	146.476	51.5611
12.3667	63.4875	6.70617	5.07413	30.7213	4.68152	45.3639	40.3278
208.196	63.7182	49.3842	96.8812	23.8635	30.6309	178.207	64.3064
28.763	22.1779	3.75768	13.7658	10.4695	2.49142	31.9382	43.0914
33.4428	31.5179	15.9615	14.2709	13.2943	10.5238	17.4668	35.8499
74.5579	8.17769	22.0387	34.6141	0.560339	12.5926	49.5968	38.8058
72.7251	47.7106	8.03365	35.046	22.5273	5.31478	48.9744	30.0789
51.6277	31.7452	1.43433	25.5752	15.6337	0.955317	36.807	37.7068
84.48	20.6602	5.22206	41.397	9.46225	3.39517	59.723	39.1298
45.1416	43.8867	6.62768	21.4816	20.8535	4.41388	31.0484	33.6533
28.4592	77.0098	48.6908	6.93136	32.188	32.8956	46.5536	26.4304
193.242	141.287	39.454	90.2839	64.2171	25.986	193.034	65.2009
51.0216	15.4719	6.77585	24.4563	6.61937	4.3173	36.5678	40.4273
19.0248	29.9624	3.11954	8.99632	14.4696	2.09376	33.6002	43.8639
79.3216	33.2675	29.4328	35.4363	11.9916	18.3968	46.1534	26.1341
50.134	48.9206	39.7889	19.2896	18.6639	25.9621	23.8097	21.6045
39.6857	25.3868	8.03324	18.5619	11.3845	5.26028	27.2689	38.5751
38.992	34.8996	13.3137	17.4006	15.3375	8.79435	20.8628	34.3492

Classic			Bayes				
σ_τ^2	σ_β^2	σ_ε^2	σ_τ^2	σ_β^2	σ_ε^2	EuCl	EuB
193.188	83.1407	49.7215	89.0938	33.5506	31.5526	168.235	55.7893
22.1131	38.4794	34.7718	6.08065	14.6676	22.9046	12.4276	34.6392
29.5441	27.3926	32.3436	10.3234	9.1961	20.746	7.1155	35.6441
34.8895	69.6795	14.8567	15.0287	32.5221	10.1442	40.8026	29.5542
49.6301	28.4419	2.60222	24.3839	13.7882	1.72868	35.1271	38.2225
21.4399	40.37	46.1126	4.3452	14.4147	29.8471	18.8223	34.7905
10.6628	59.4886	20.6197	2.06329	27.1207	14.3651	36.874	37.0972
26.0823	33.8878	68.8496	4.34859	8.59314	42.7343	36.2531	39.2501
42.4391	10.5752	15.0634	19.2075	2.90413	9.04837	30.5718	41.4154
4.43505	29.2374	13.0989	0.183139	13.0558	8.95852	35.5151	45.872
11.8272	48.9189	32.6838	1.04671	20.522	21.8908	26.5677	36.5717
21.9106	178.891	32.1655	5.69394	85.1694	22.8328	146.009	59.6756
25.885	86.2867	30.3963	8.1303	38.959	21.1304	53.5552	28.5614
103.316	45.6614	18.2932	48.7899	19.8371	11.7887	72.6345	29.7527
50.5314	21.5223	45.2861	19.5794	4.27306	27.7027	24.0446	32.6401
53.0771	37.9849	29.7312	22.1994	14.4751	19.1458	20.6017	26.0937
49.4826	19.9693	28.3556	20.952	5.68696	17.4518	21.5446	34.203
37.5818	17.0496	55.5397	12.2553	1.14958	33.6415	27.8627	38.473
50.4187	60.3146	18.0231	22.3256	27.307	12.0706	35.4161	24.6899
54.7229	40.9335	45.2511	21.0746	13.911	28.8838	25.638	23.3945
34.582	8.76469	6.33035	16.3574	3.34745	3.91771	36.5286	45.3058
64.4851	45.2526	11.1414	30.4417	20.8017	7.34389	40.0623	28.9975
10.2854	9.29864	21.681	2.46328	1.92774	13.3782	35.2796	48.3475
27.0304	46.1119	18.6202	10.5977	20.2936	12.6516	20.4816	33.3868
47.9732	55.6674	14.1296	21.7061	25.571	9.45242	32.8926	27.6721
21.6092	12.6367	8.3135	9.56436	5.01073	5.32682	34.5224	46.3843
45.1849	89.1994	11.7189	20.6609	42.7102	7.93509	61.0627	29.8929
47.2901	19.1248	19.977	20.8459	6.44387	12.3985	23.9806	36.2939
32.8533	46.0937	35.4798	11.237	18.1002	23.4968	12.9486	28.5842
4.93297	52.4194	15.0565	0.051917	24.4216	10.4608	38.793	41.3548
84.3496	12.3971	15.6404	40.0455	3.64267	9.25595	57.9139	38.8112
51.2148	21.0287	48.6809	19.5846	3.59819	29.676	26.5838	32.9634

Classic			Bayes			EuCl	EuB
σ_τ^2	σ_β^2	σ_ε^2	σ_τ^2	σ_β^2	σ_ε^2		
29.6286	34.4303	18.8795	11.9393	14.3879	12.552	14.9613	35.3341
52.3483	13.121	19.7891	23.5548	3.44372	11.8719	30.8796	38.0737
12.742	14.2499	30.4288	2.55904	3.37816	18.8538	28.2244	45.3214
108.973	36.6884	31.9056	49.8964	13.2332	19.7632	75.728	29.3683
4.1518	15.4241	1.64106	1.8045	7.45449	1.13123	46.6551	51.9688
28.1441	75.5238	27.5148	9.72655	33.8688	19.0218	42.9048	27.6113
17.9492	9.2305	28.4534	5.60036	0.878753	17.2931	29.0074	45.6038
13.5237	137.263	20.189	3.44201	65.955	14.3707	106.614	48.1378
60.0219	96.5257	10.1335	28.3347	46.6023	6.80477	72.414	30.0801
11.2266	6.97622	26.439	2.56478	0.225644	15.9184	35.0847	48.4366
52.2917	76.1058	1.58296	25.8821	37.7893	1.05569	56.542	33.4249
14.2261	28.7094	52.3775	0.386848	8.2924	32.5229	27.3706	41.3905
12.2542	42.0702	6.35022	5.08352	20.0624	4.40516	35.3377	42.5559
43.8355	64.895	84.3901	10.4831	21.7021	54.138	60.9362	33.019
20.4216	28.7999	14.3253	8.00757	12.2795	9.62475	23.4215	40.5802
32.9964	19.6898	22.4922	13.3888	6.5038	14.197	17.4296	38.5202
14.3487	19.3542	45.3548	1.57349	4.31751	27.8275	26.4641	43.3696
4.77006	81.2573	3.00632	1.88453	40.1779	2.11921	63.5004	44.8352
11.5484	9.66411	37.3622	1.47727	0.431259	22.3663	32.4199	47.0917
37.7597	19.2581	49.0043	12.9035	2.98699	29.9861	21.524	36.7353
4.15389	83.3421	10.4959	0.345646	40.3896	7.42487	62.2404	42.535
126.253	30.8475	41.66	57.5153	8.79894	25.0424	93.3255	35.4322
3.34261	6.34988	13.2319	0.007335	1.65779	8.13442	45.0735	52.4304
103.301	60.0717	10.5977	49.9161	28.2823	6.99707	78.2773	31.5293
78.0348	14.5208	9.93317	37.5425	5.62222	6.12623	53.8489	39.0621
52.8038	102.033	17.5082	23.5341	48.2334	11.8989	73.1384	27.8832
45.6326	51.7979	60.3341	14.5004	17.745	38.9103	34.9465	25.0754
44.5573	27.0381	3.79233	21.6544	12.8903	2.51169	32.2223	38.7852
18.5349	37.976	29.3153	4.98113	15.137	19.5331	16.0216	36.4061
153.88	15.5746	35.9077	72.4946	1.9694	20.5112	121.875	51.7852
47.9416	49.4856	26.0851	19.9821	20.7672	17.2605	22.9529	24.3823
7.85702	51.906	2.3834	3.53194	25.572	1.63456	44.1801	44.1947

Classic			Bayes				
σ_{τ}^{2}	σ_{β}^{2}	σ_{ε}^{2}	σ_{τ}^{2}	σ_{β}^{2}	σ_{ε}^{2}	EuCl	EuB
57.5856	11.3409	23.6636	25.8176	1.96792	13.9393	34.1371	37.6351
63.843	22.788	53.4668	25.3202	3.6614	32.4029	38.0447	30.749
40.0584	90.3063	19.3787	16.8786	42.1647	13.3014	59.0413	27.3866
10.9016	68.4671	23.9493	1.65739	31.2465	16.6514	42.7274	35.861
20.8592	2.61988	7.19365	9.56218	0.16939	4.13472	42.2161	50.1744
52.675	108.023	9.84513	24.7062	52.4029	6.63543	80.6492	33.9242
14.0841	165.843	14.929	4.56814	80.8343	10.6432	135.159	59.9885
33.711	66.6504	16.3227	14.2165	30.8082	11.1594	37.4103	29.3856
73.0737	54.9008	16.9236	33.834	24.7075	11.1393	48.1013	23.8166
132.361	85.2758	39.1248	60.1171	36.3738	25.4156	111.974	28.0946
111.346	101.035	36.3733	49.9235	44.7294	24.0564	103.338	22.1623
21.3802	37.7419	10.8688	8.94734	17.2029	7.4029	25.8258	39.0801
152.204	13.5372	10.3841	74.5827	5.04392	6.30271	122.674	56.8547
11.6867	11.8348	30.2823	2.15329	2.2343	18.5517	30.6606	46.4526
37.9954	39.4024	4.71719	18.2189	18.9229	3.14544	29.6218	36.7072
31.4808	15.5427	49.495	9.89763	1.26314	30.0332	24.1069	39.8575
30.5378	31.4245	14.0155	13.0913	13.5403	9.29731	19.6122	37.1381
14.6934	28.9221	15.4641	4.98557	12.2967	10.492	26.1957	42.046
42.4024	14.092	29.2448	17.5212	2.70806	17.6967	21.6609	37.8475
69.0076	9.56237	19.7325	32.0186	1.61596	11.4382	44.9744	38.5632
40.9296	16.4956	27.0723	16.9293	4.21158	16.6069	19.5042	37.3757
114.822	32.98	35.151	52.5004	10.8738	21.4583	81.5096	31.8249
19.3924	64.524	45.4652	2.97022	26.6479	30.4303	36.2545	31.2256
52.7911	55.2308	10.5261	24.6769	25.8994	7.01918	37.1251	28.6816
25.4371	5.23772	9.95212	11.4487	1.05554	5.88382	37.3951	47.6893
9.83029	33.0965	14.1006	2.71555	14.6669	9.73973	30.3701	42.9248
7.71733	55.7181	9.90518	2.2379	26.5142	7.02897	41.3054	41.2958
43.2507	34.4572	10.485	19.9495	15.5327	6.91547	24.9331	34.5528
14.4718	78.8385	29.9226	2.52449	35.6518	20.7545	49.3773	33.3585
136.479	12.5526	6.19841	67.2853	5.24489	3.88207	108.66	53.0007
27.0788	32.3802	6.58073	12.4673	15.1258	4.40533	27.4905	40.0467
25.6115	26.8856	17.7042	10.1648	10.8175	11.6647	18.5868	38.9008

Classic			Bayes			EuCl	EuB
σ_{τ}^2	σ_{β}^2	σ_{ε}^2	σ_{τ}^2	σ_{β}^2	σ_{ε}^2		
46.8756	32.8453	15.5511	21.0347	13.9505	10.1293	22.357	32.6401
111.93	55.3861	29.6272	51.4414	22.9211	18.9711	81.7157	25.3494
22.658	66.0573	19.7362	8.17109	30.1898	13.7113	37.0095	32.0631
18.0348	44.0084	19.8175	5.94094	19.2484	13.5952	23.0365	36.5831
33.8053	41.9444	24.8193	13.1542	17.3195	16.5193	12.1186	30.7628
16.1833	80.0864	18.4687	5.09776	37.4897	13.0176	51.9704	35.0322
83.3749	22.8898	13.3556	39.6672	9.25325	8.37454	54.8848	35.2549
41.5698	8.6094	18.555	18.4638	1.42197	10.9539	29.9585	41.7167
26.2866	78.7434	23.2266	9.42416	36.0374	16.151	47.0518	29.5668
32.855	85.6581	26.8327	12.1464	38.9351	18.5682	52.7292	26.4249
81.2209	103.587	14.2885	38.2576	49.4548	9.56643	87.1293	29.1379
5.77895	14.416	7.11483	1.79438	6.23569	4.86682	42.4796	50.3918
14.3477	58.8877	18.6571	4.19925	26.9158	13.043	35.0552	36.0787
16.4945	10.2728	34.6162	4.19275	0.788106	20.9641	28.5828	45.4022
56.0902	173.569	11.006	26.2163	84.9895	7.44439	143.814	58.2173
12.798	15.9531	17.4007	3.97659	5.63523	11.2829	31.2669	45.9916
45.8408	92.9176	28.9546	18.2992	42.1183	19.8442	61.0401	22.0263
55.4322	22.4745	30.9198	23.5635	6.53722	19.0489	24.7407	31.8987
47.1728	16.3431	26.9902	20.0651	4.0801	16.4286	22.813	36.2983
61.2742	23.686	52.6219	24.0853	4.2589	32.0279	35.2961	30.5377
42.7035	67.4308	26.1056	17.2476	29.7872	17.6861	36.0926	22.7192
16.1894	7.39091	22.8573	5.3853	0.638155	13.8694	32.8127	47.2114
30.3275	24.8986	25.9216	11.5298	8.71091	16.6452	11.6238	36.8802
67.0673	59.1535	11.2904	31.6903	27.7264	7.49838	47.8597	26.4874
138.692	6.74428	7.27339	68.3316	2.1625	4.28693	111.743	55.1379
50.4193	17.7328	11.3542	23.5103	7.02399	7.13592	31.9122	38.4054
12.5795	108.287	30.7588	1.35399	50.3697	21.4918	77.8167	38.1201
96.0733	25.4353	28.8398	44.0453	8.10443	17.5038	63.3946	31.6515
42.8593	19.5896	28.1068	17.6798	5.60007	17.4028	17.52	35.6083
112.693	24.0153	19.8587	53.4694	8.75736	12.1456	81.0328	38.1885
11.4003	18.2119	8.59443	4.37168	7.84544	5.81004	36.3556	47.3914
67.7864	28.2357	9.67572	32.3584	12.5257	6.26056	42.1032	34.1591

Classic			Bayes			EuCl	EuB
σ_{τ}^2	σ_{β}^2	σ_{ε}^2	σ_{τ}^2	σ_{β}^2	σ_{ε}^2		
94.1297	110.75	37.972	41.042	49.4248	25.4026	98.5449	19.5258
35.1432	82.5124	91.312	4.88747	30.1549	59.108	76.0485	38.5176
39.1846	72.4996	29.5312	14.9684	31.9183	20.1289	39.783	22.6635
85.3404	61.0503	18.9912	39.6389	27.442	12.4797	60.652	22.5686
124.286	37.7074	44.289	56.0466	11.8478	27.0099	91.7147	31.8984
119.549	97.5796	14.7407	57.3518	46.3574	9.78933	109.116	36.0671
18.3276	76.7308	14.4761	6.79949	36.2552	10.1596	49.6398	35.3497
84.1406	48.2809	10.7445	40.326	22.3686	7.06687	57.5766	29.3096
37.6457	78.452	13.3779	16.6312	37.1094	9.11744	49.5228	29.6585
84.4086	28.7654	18.8293	39.3935	11.3261	11.8104	53.2909	31.3732
44.8529	44.8077	24.5632	18.6858	18.6628	16.216	18.4737	26.8845
77.6752	87.1869	33.8585	33.5159	38.3222	22.5846	69.7616	11.8515
47.7223	21.3128	3.57549	23.2751	10.0629	2.35696	35.1719	40.0277
16.4195	17.3278	24.4213	4.94235	5.42423	15.5569	24.9335	43.6001
7.42226	19.4831	10.9941	2.04203	8.28218	7.47725	36.9087	47.6995
10.8567	184.791	17.2488	2.57113	90.1312	12.3176	153.959	67.9262
18.4084	78.3459	29.4734	4.56039	35.3086	20.4846	47.5792	31.5733
7.18	39.2195	13.04	1.51741	17.934	9.10381	33.6224	42.854
11.4999	53.333	37.7016	0.17475	22.2339	25.0668	29.9294	35.9308
40.7099	23.7047	49.1697	14.1672	5.113	30.3986	19.9478	34.2394
42.7032	3.14961	6.44055	20.5393	0.516345	3.6614	41.4979	46.055
20.543	50.5489	30.9755	5.61176	21.1742	20.9602	21.5761	32.7021
23.2983	53.9428	24.708	7.81937	23.5171	16.9202	24.4918	31.8859
103.818	14.4574	22.3468	48.9628	3.59597	13.0782	73.7913	39.2283
44.6343	27.941	25.9887	18.6134	10.0384	16.5431	14.5166	32.2683
16.1222	20.8483	20.0716	5.21479	7.68594	13.1168	25.0594	43.0947
27.3795	9.96067	9.93855	12.2877	3.41028	6.14597	33.6013	45.5792
62.697	48.4442	12.5508	29.3248	22.1763	8.28704	39.0189	27.7104
59.1742	21.7105	4.39935	28.8703	10.125	2.88531	40.4971	38.5438
55.4252	36.1834	37.9618	22.3969	12.456	24.1264	22.7507	25.3029
33.4065	23.0167	44.9577	10.9919	5.44936	27.9648	15.5424	36.1314
25.5324	85.9606	75.6273	1.90303	33.9606	49.6527	67.9652	35.42

Classic			Bayes				
σ_{τ}^{2}	σ_{β}^{2}	σ_{ε}^{2}	σ_{τ}^{2}	σ_{β}^{2}	σ_{ε}^{2}	EuCl	EuB
20.6234	79.1516	24.9103	6.33845	36.1616	17.4029	48.2888	31.4722
16.3473	10.9292	6.63261	7.1748	4.42574	4.28579	38.7737	48.6177
23.7532	26.8248	11.4232	10.0946	11.6498	7.61488	24.7829	40.8858
71.3098	52.9812	51.1499	28.4043	18.9406	32.7905	46.3215	15.223
55.0473	80.5995	27.2738	23.1938	36.1035	18.4263	52.3671	18.2401
11.4204	24.6977	36.883	0.820579	8.00342	23.2773	23.8191	42.4241
44.5683	27.1564	21.8924	19.1016	10.207	13.9743	17.1835	33.3488
15.1638	57.025	12.3571	5.57367	26.7187	8.65338	36.4888	37.7287
7.3795	12.1486	20.1414	1.0636	3.64337	12.6603	36.0059	48.4789
36.2517	74.1205	20.6524	14.8083	33.9281	14.1548	42.8125	26.671
24.4055	32.4314	1.62936	11.9317	15.945	1.08754	32.9494	42.4285
20.5939	45.8721	10.3016	8.62516	21.3525	7.07186	29.1544	37.996
23.4664	16.4428	35.5926	7.28376	3.51447	22.0383	19.6913	41.1743
130.412	104.169	40.5638	58.8317	45.6096	26.6622	120.392	29.0753
84.6595	43.5191	43.4692	36.1984	15.095	27.3416	53.2997	19.41
22.6381	36.6216	26.3963	7.42519	14.6732	17.598	13.1653	35.5954
8.26814	36.8311	24.0076	0.548508	15.5441	16.0886	26.9716	41.0936
32.6891	103.914	60.7724	7.15419	44.1759	41.2534	75.7291	29.4217
15.0657	54.6179	33.6874	2.46896	23.1188	22.7557	28.0511	34.1882
38.9157	24.9272	27.0593	15.6881	8.45393	17.1638	11.8823	34.5223
39.4727	120.846	13.8457	17.4489	58.2306	9.4927	89.8666	37.9547
125.451	33.1204	46.2567	56.528	9.26116	27.8774	93.0204	33.8708
41.5997	100.5	9.61604	19.2074	48.6912	6.51376	71.709	33.9808
18.8688	5.9143	13.1843	7.7937	1.00467	7.94808	36.9731	48.3924
68.3191	112.735	41.3168	27.6371	50.1426	28.0559	87.1339	18.5162
40.6411	10.0603	14.6908	18.366	2.70867	8.81561	30.7015	41.9882
201.631	27.1375	8.43502	99.4692	12.1649	5.42684	170.243	74.8387
16.0739	52.6801	21.945	4.6072	23.3892	15.1687	28.3175	35.4123
49.6089	8.16315	2.40319	24.4196	3.68178	1.55078	43.0709	44.3712
29.6497	14.727	17.8998	12.3738	4.6662	11.1774	24.4532	41.8568
48.104	45.3085	9.75542	22.4662	21.0649	6.48523	30.2902	31.4552
40.9232	49.5839	32.385	15.626	20.0723	21.4735	17.9607	25.1009

Classic			Bayes				
σ_{τ}^2	σ_{β}^2	σ_{ε}^2	σ_{τ}^2	σ_{β}^2	σ_{ε}^2	EuCl	EuB
46.9227	29.7621	4.91074	22.6561	14.0687	3.24821	31.706	37.286
12.8953	84.422	23.893	2.61284	39.1503	16.7682	55.8291	35.3835
29.9802	28.4866	49.703	8.56199	7.7627	31.2254	17.3983	35.664
117.407	80.3454	3.3387	58.148	39.6166	2.22426	100.887	40.2868
42.1989	200.661	26.4614	16.7383	96.3603	18.5311	167.703	66.8349
30.5523	24.9062	16.2533	12.849	9.97016	10.5843	19.2478	38.5093
11.1575	11.9718	9.49435	4.1955	4.6158	6.22429	38.9407	49.0776
85.3566	47.4824	14.0241	40.4329	21.4413	9.1654	57.2666	27.8552
11.1933	42.6356	14.3843	3.31264	19.3652	10.0302	30.5905	40.4894
34.8609	103.757	83.0154	5.34992	41.6523	55.0727	86.1985	36.3989
34.1086	29.42	8.07773	15.7557	13.4021	5.34733	25.5688	38.5933
110.264	57.3185	6.65849	54.0323	27.5526	4.41361	84.8835	36.0308
43.995	107.269	14.0217	19.6862	51.3996	9.56241	77.156	32.8282
17.5904	60.3494	7.63399	7.53605	28.9857	5.27139	40.4742	38.365
62.903	111.721	33.0081	26.1666	50.8111	22.4908	83.7805	21.7806
56.2749	15.4617	38.2881	23.4488	2.04202	22.9108	29.5002	34.4308
58.6739	206.293	14.9047	26.8624	100.741	10.1457	175.775	71.5774
41.8886	83.8006	38.0523	15.0415	36.459	25.9565	51.4044	19.9694
128.342	84.2477	34.5727	58.7607	36.5603	22.5325	107.798	27.8141
9.63547	64.1177	17.7531	1.965	29.7826	12.4679	41.857	37.8411
53.8164	86.3994	1.40524	26.6741	42.9656	0.93713	65.2301	34.4477
4.54482	31.2996	5.04563	1.44455	14.9493	3.58013	40.4117	47.3299
58.7063	30.3538	29.3357	25.1954	10.6671	18.4748	25.8582	28.2977
64.9746	35.6965	38.3985	27.1305	12.0482	24.1817	32.1312	23.9851
21.3911	29.9036	30.9077	6.35796	10.8328	20.1398	12.6596	37.5235
14.1371	34.0907	30.6841	2.67515	13.2111	20.2081	19.393	38.95
134.851	39.1567	98.4962	55.3924	5.07316	59.0893	120.772	44.143
25.3685	17.7744	27.8521	9.02	5.0136	17.4984	18.3184	40.5449
40.3079	85.4504	16.1596	17.5149	40.1917	11.0408	55.3152	28.1819
20.7476	47.1736	17.995	7.54154	20.9968	12.369	24.1912	35.4529
28.2221	51.0785	5.09541	13.2676	24.7059	3.42851	33.7401	37.0319
6.61392	31.3541	17.5134	0.6452	13.5538	11.8681	31.1146	43.8235

Classic			Bayes				
σ_τ^2	σ_β^2	σ_ε^2	σ_τ^2	σ_β^2	σ_ε^2	EuCl	EuB
8.17476	72.6771	20.6492	0.773935	33.8175	14.4178	48.3919	37.6583
4.99916	26.2482	11.2612	0.743963	11.725	7.7591	36.6088	46.7229
73.648	110.47	6.0758	35.8138	54.2274	4.05962	91.2049	36.0509
33.1543	16.4234	19.8614	13.8554	5.2162	12.4023	21.621	40.1008
100.859	35.5479	29.7844	46.1221	13.0051	18.5111	67.6548	28.2221
96.9828	154.416	4.90939	47.6738	76.3915	3.27645	139.715	54.4341
108.245	39.9248	25.9267	50.2486	15.7665	16.3104	75.5649	29.7406
91.6286	62.5489	24.1357	42.0189	27.386	15.7731	65.852	20.4737
42.2206	76.5845	16.7427	18.3903	35.665	11.3895	47.1688	26.6508
18.5485	46.3863	19.4283	6.2392	20.472	13.3644	24.1313	36.0314
58.4363	67.8218	11.7498	27.2941	31.996	7.85566	47.8065	26.2178
14.4734	7.70409	7.93996	6.12192	2.64298	4.99844	40.7109	49.852
7.43268	124.252	15.5985	1.14321	60.1665	11.0799	96.1849	47.4493
41.6413	34.6085	11.7771	18.9517	15.414	7.76783	23.137	34.3734
40.5992	92.1167	11.8476	18.3461	44.1601	8.05634	63.0073	31.3171
97.916	87.101	72.6963	38.4394	32.8672	47.2054	92.7972	14.7893
40.5849	92.4982	42.2268	13.7452	40.3289	28.9088	60.2675	21.2652
12.4077	17.9726	28.549	2.45605	5.45087	18.0375	26.3955	44.3261
23.1867	36.8944	21.1981	8.38137	15.4187	14.2561	16.2142	36.159
248.542	63.2502	5.13965	123.418	30.7688	3.4121	219.1	94.9589
141.342	19.6175	26.2819	67.1265	5.51426	15.4816	109.104	47.2711
8.98398	43.4417	27.9475	0.311498	18.4108	18.7156	26.9087	39.0743
23.5297	5.07773	8.78047	10.6276	1.15459	5.21265	38.6954	48.3921
109.936	126.672	4.80175	54.1688	62.5368	3.20217	124.073	46.8492
17.2338	9.43181	4.79391	7.88119	3.94576	3.08615	40.5583	49.2578
44.436	27.3921	2.82765	21.7502	13.2262	1.87763	33.0025	39.0887
21.6481	69.0512	19.1924	7.74069	31.7718	13.3754	40.1532	32.4922
15.9204	22.2938	49.084	1.84034	5.32621	30.2391	25.9454	42.2585
67.0622	127.533	11.5837	31.6117	61.8693	7.79377	102.392	38.3345
54.1877	5.90929	9.44901	25.8547	1.40764	5.48269	41.9219	43.0214
7.55349	21.5877	16.2511	1.39278	8.76038	10.8395	33.0811	46.1519
27.8386	5.53518	6.46357	13.0288	1.72012	3.87546	39.0501	47.7434

Classic			Bayes				
σ_{τ}^{2}	σ_{β}^{2}	σ_{ε}^{2}	σ_{τ}^{2}	σ_{β}^{2}	σ_{ε}^{2}	EuCl	EuB
10.5471	34.5658	8.72309	3.86525	16.0192	6.08537	33.5618	43.7104
76.4524	11.0882	17.4741	35.9294	2.71037	10.2322	51.0453	38.4469

ประวัติผู้เขียน

นางสาว ชุติมา โศจิพันธุ์ เกิดวันที่ 23 พฤษภาคม พ.ศ.2518 ที่อำเภอเมือง จังหวัดปัตตานี สำเร็จการศึกษาปริญญาตรีวิทยาศาสตรบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล ในปีการศึกษา 2539 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรสถิติศาสตรมหาบัณฑิตที่จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อ พ.ศ.2540