ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชันที่ใช้การประมาณพาเดแบบปรับตัว
เพื่อการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแสงในวงจรรวมแสง

นางสาวมาลินดา หงษ์ทอง

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2557

THE FINITE ELEMENT BEAM PROPAGATION METHOD
BASED ON ADAPTIVE PADE APPROXIMATION
FOR ANALYZING OPTICAL WAVEGUIDE IN PHOTONIC INTEGRATED CIRCUIT

Miss Marinda Hongthong

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering Program in Electrical Engineering
Department of Electrical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2014

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชันที่ใช้การประมาณพาเดแบบปรับตัวเพื่อการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแสงในวงจรรวมแสง
โดย	นางสาวมาลินดา หงษ์ทอง
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทับทิม อ่างแก้ว

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

....คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร. บัณฑิต เอื้ออาภรณ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

....ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พสุ แก้วปลั่ง)

....อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทับทิม อ่างแก้ว)

....กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(ศาสตราจารย์ ดร. ประยุทธ อัครเอกฒาลิน)

มาลินดา หงษ์ทอง : ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชันที่ใช้การประมาณพาเดแบบปรับตัวเพื่อการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแสงในวงจรรวมแสง (THE FINITE ELEMENT BEAM PROPAGATION METHOD BASED ON ADAPTIVE PADE APPROXIMATION FOR ANALYZING OPTICAL WAVEGUIDE IN PHOTONIC INTEGRATED CIRCUIT) อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: ผศ. ดร. ทับทิม อ่างแก้ว{, 110 หน้า.

ในวิทยานิพนธ์นี้ได้นำเสนอระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชันสำหรับการวิเคราะห์คลื่นแสงในท่อนำคลื่นแบบ 3 มิติ ในรูปของสมการสนามแม่เหล็กแบบเวกเตอร์ โดยใช้ฟังก์ชันรูปร่างสี่เหลี่ยมแบบโนดแทนที่ฟังก์ชันรูปร่างสามเหลี่ยมเพื่อลดความซับซ้อนจากการแบ่งเอลิเมนต์ในหน้าตัดขวางในทุกๆขั้นตอนการคำนวณตามแนวยาวของท่อนำคลื่น นอกจากนี้ได้ทำการเพิ่มความถูกต้องในการประมาณค่าให้ละเอียดขึ้นด้วยการปรับการประมาณค่าเทอมของอนุพันธ์อันดับสองในสมการคลื่นให้เป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่งด้วยการประยุกต์ใช้การประมาณพาเดอันดับสูงซึ่งใช้ในการแก้ปัญหามุมกว้าง โดยการวิเคราะห์หาคำตอบของสนามได้ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชันตามที่นำเสนอมาวิเคราะห์สมการคลื่นในโดเมนความถี่ที่ไม่มีแหล่งกำเนิดภายในสำหรับตัวกลางแบบไอโซทรอปิก โดยใช้ร่วมกับเงื่อนไขขอบเขตแบบชั้นแมตซ์เฟสสมบูรณ์ เพื่อนำมาสร้างโปรแกรมวิเคราะห์คลื่นแสงในท่อนำคลื่นจากวิธีการที่นำเสนอด้วยโปรแกรม MATLAB และทำการทดสอบในท่อนำคลื่นที่มีลักษณะแตกต่างกัน 3 แบบ คือ ท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยม ท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยมแบบขนาน และท่อนำคลื่นแบบ tapered โดยการทดสอบมีวัตถุประสงค์เพื่อพิสูจน์ความถูกต้องของวิธีการที่นำเสนอด้วยการสังเกตการณ์แพร่กระจายของคลื่นแสงภายในท่อนำคลื่นในแต่ละโครงสร้าง ผลการทดสอบแสดงให้เห็นถึงความถูกต้องและความมีประสิทธิภาพของระเบียบวิธีที่นำเสนอรวมไปถึงการเปรียบเทียบผลที่ได้จากการประมาณค่าพาเดอันดับหนึ่งและอันสอง

ภาควิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า	ลายมือชื่อนิสิต	....
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า	ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาหลัก	....
ปีการศึกษา	2557		

5470335521 : MAJOR ELECTRICAL ENGINEERING
KEYWORDS: FINITE ELEMENT METHOD / BEAM PROPAGATION METHOD / PADE APPROXIMATION

MARINDA HONGTHONG: THE FINITE ELEMENT BEAM PROPAGATION METHOD BASED ON ADAPTIVE PADE APPROXIMATION FOR ANALYZING OPTICAL WAVEGUIDE IN PHOTONIC INTEGRATED CIRCUIT. ADVISOR: ASST. PROF. TUPTIM ANGKAEW, Ph.D.{, 110 pp.

This thesis proposes a Finite Element Beam Propagation Method (FE-BPM) for 3D optical waveguide analysis. The finite element formulation has been expressed in terms of 2-component of transverse magnetic field. The rectangular element mesh has been employed instead of conventioned triangular element mesh in order to reduce the complexity of meshing the transverse domain in every step of successive computation along the longitudinal axis. In addition, the Padé approximation is applied to enhance accuracy of the approximation in wide-angle problem. To demonstrate the usefulness of the proposed FE-BPM, three numerical examples have been carried out. The three numerical examples are a single rectangular dielectric optical waveguide, a coupler of two-parallel rectangular dielectric waveguides and tapered dielectric waveguides. The results demonstrate validity and effectiveness of the proposed method. The comparison between different order of Pade' approximation is also described.

Department:	Electrical Engineering	Student's Signature	....
Field of Study:	Electrical Engineering	Advisor's Signature	....
Academic Year:	2014		

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จเสร็จสมบูรณ์ได้ เนื่องด้วยความอนุเคราะห์ของบุคคลหลายท่านซึ่งไม่สามารถกล่าวถึงได้ทั้งหมด ผู้มีพระคุณท่านแรกที่ใคร่ขอกราบขอบพระคุณคือ อาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทับทิม อ่างแก้ว อาจารย์ผู้สอนวิชาความรู้ที่จำเป็นและเป็นประโยชน์ในการทำวิจัย คอยให้คำปรึกษาด้านต่างๆทั้งในการทำวิจัย และการใช้ชีวิตในสังคมของนักวิจัยตลอดจนเป็นผู้ผลักดันในงานวิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี

ขอขอบคุณพี่เรืองรอง แก้วอินทนิน(พี่ดาว) ที่ช่วยเหลือเรื่องเอกสารทุกอย่างตลอดเวลาที่ศึกษา และขอขอบคุณ พี่ทรรศพร อินทร์ไชยา (พี่อ้อ) ที่เป็นธุระในการดำเนินการต่างๆในสาขาเป็นอย่างดี

ขอขอบคุณพี่ๆ เพื่อนๆ และน้องๆในห้องปฏิบัติการวิจัยโทรคมนาคมทุกท่านที่คอยช่วยเหลือและเป็นกำลังใจให้ตลอดมา

ท้ายที่สุดขอกราบขอบพระคุณคุณพ่อคุณแม่ และครอบครัวอันเป็นที่รัก ซึ่งคอยให้การสนับสนุนด้านต่างๆ และให้กำลังใจตลอดเวลาที่ได้ทำการศึกษาและวิจัย จนกระทั่งสำเร็จการศึกษาได้ด้วยดี

ทุกสิ่งทุกอย่างที่ได้รับตลอดการทำวิจัย และใช้ชีวิตในห้องปฏิบัติการล้วนเป็นบทเรียนในชีวิต เป็นส่วนสำคัญที่ผลักดันให้วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วง ไม่มีคำกล่าวใดสามารถพรรณนาถึงสิ่งเหล่านั้นได้ มีเพียงคำขอบคุณจากใจเท่านั้น ขอขอบคุณทุกท่านสำหรับความทรงจำดีๆที่เกิดขึ้นตลอดเวลาที่ได้ใช้เวลาร่วมกัน หวังว่าสักวันคงได้มีโอกาสได้ใช้เวลาดีๆที่ได้อยู่ร่วมกันอีก ขอบคุณค่ะ

สารบัญ

หน้า

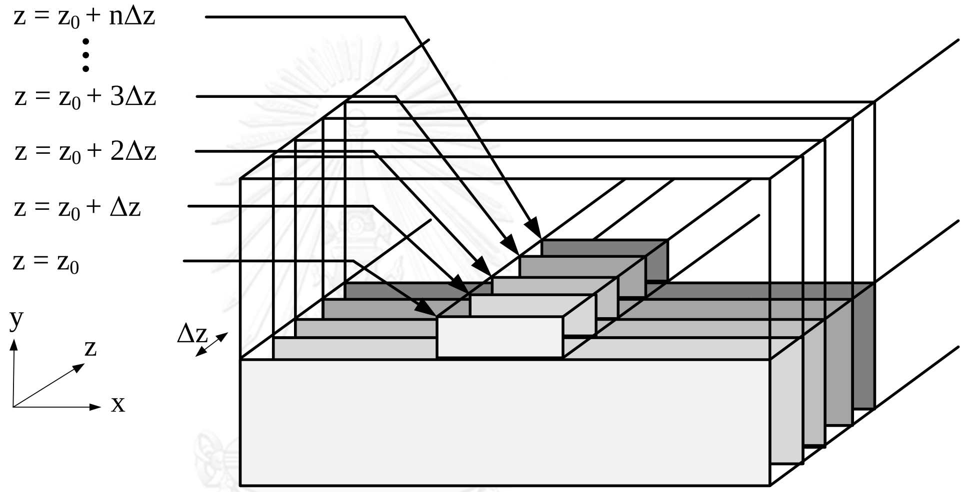
บทที่ 1
บทนำ

1.1 แนวทางและความสำคัญของปัญหา

จากการพัฒนาเทคโนโลยีการสื่อสารในยุคปัจจุบันทำให้มีการแลกเปลี่ยนข้อมูลข่าวสารกันมากขึ้นเป็นผลทำให้ปริมาณการส่งข้อมูลมีอย่างมหาศาล ดังนั้นระบบโทรคมนาคมที่ใช้จะต้องมีความสามารถเพื่อตอบสนองความต้องการที่เพิ่มมากขึ้นได้อย่างมีประสิทธิภาพ เพื่อรองรับอัตราเร็วที่สูงขึ้นของการส่งข้อมูล รวมทั้งมีความถูกต้องแม่นยำและความปลอดภัยของข้อมูลที่ดีโดยการเชื่อมต่อกับผู้ใช้บริการเข้ากับโครงข่ายสื่อสารมีทั้งรูปแบบโครงข่ายแบบมีสาย (wired line) และโครงข่ายแบบไร้สาย (wireless) แต่ด้วยข้อจำกัดของการให้บริการแบบไร้สายที่ไม่สามารถรองรับปริมาณการให้บริการความเร็วสูงได้อย่างเพียงพอ ดังนั้นการสื่อสารแบบมีสายจึงเป็นการบริการอีกชนิดหนึ่งที่มีความน่าสนใจเป็นอย่างยิ่ง ตัวอย่างของการสื่อสารแบบมีสายในปัจจุบันที่มีการใช้งานอย่างแพร่หลายคือการสื่อสารด้วยสัญญาณทางไฟฟ้าผ่านสายทองแดง เช่น เทคโนโลยี ADSL และการสื่อสารด้วยเส้นใยนำแสง (Fiber optics) แต่ด้วยมาตรฐานของ ADSL ที่ยังติดในข้อจำกัดทางด้านความเร็วในการให้บริการ ด้วยเหตุนี้จึงมีการศึกษาและพัฒนาระบบสื่อสารให้มีความเร็วและมีประสิทธิภาพมากขึ้นด้วยการประยุกต์ใช้ความเร็วของคลื่นแสงเข้ามาเป็นตัวกลางในการส่งข้อมูลทำให้การรับส่งข้อมูลที่มีขนาดใหญ่ได้อย่างรวดเร็วและสามารถรองรับปริมาณการใช้งานที่เพิ่มในอนาคตได้อย่างดี ด้วยเหตุนี้ทำให้การสื่อสารข้อมูลด้วยแสงผ่านท่อนำคลื่นจึงกลายมาเป็นระบบสื่อสารหลักซึ่งมีการใช้งานอย่างแพร่หลายในปัจจุบันและถูกพัฒนาขึ้นมาตามลำดับ โดยตลอดเวลาที่ผ่านมานักวิจัยบางกลุ่มได้ทำการวิเคราะห์เพื่อปรับปรุงการส่งข้อมูลผ่านท่อนำคลื่นแสง โดยมีการพัฒนาการท่อนำคลื่นให้อยู่ในรูปวงจรรวมทางแสง Optical Integrated Circuit (OIC) หรือที่เรียกว่า Photonic Integrated Circuit (PIC) ซึ่งนำเอาท่อนำคลื่นรูปแบบต่างๆที่ทำหน้าที่แตกต่างกัน มารวมกันอยู่บนชิปตัวเดียวกัน โดยมีขนาดเล็กทำให้ง่ายต่อการนำไปใช้งาน ซึ่งในอดีตมีหลายงานวิจัยมีความพยายามปรับปรุงและพัฒนาท่อนำคลื่นให้มีประสิทธิภาพในการใช้งานโดยพิจารณาถึงขนาดและวัสดุที่ใช้ในวงจรรวมแสงรวมไปถึงวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์คลื่นแสงภายในโครงสร้างของท่อนำคลื่น [1, 2]

ระเบียบวิธีวิเคราะห์คลื่นแสงทางคณิตศาสตร์ถือว่ามีความสำคัญต่อการพัฒนาการสื่อสารด้วยท่อนำคลื่นเป็นอย่างยิ่ง เนื่องจากจะทำให้สามารถศึกษาการแพร่กระจายของแสงเพื่อนำมาจำลองการเคลื่อนที่ของคลื่นแสงภายในท่อนำคลื่นได้ หนึ่งในวิธีที่ได้รับความนิยมในการศึกษาการแพร่กระจายของคลื่นแสงในท่อนำคลื่นแบบสามมิติคือระเบียบวิธีบีมโพรพาเกชัน (Beam Propagation Method: BPM) ในงานวิจัย [3, 4] แสดงให้เห็นถึงวิธีการวิเคราะห์แบบ BPM โดยการแบ่งโครงสร้างท่อนำคลื่น

แบบ 3 มิติ เป็นระนาบหน้าตัดขวางของท่อนำคลื่นทำให้ได้ระนาบหน้าตัดแบบ 2 มิติที่ระยะต่างกันตลอดแนวยาวของโครงสร้างดังแสดงในภาพที่ 1.1 จากนั้นในแต่ละหน้าตัดจะถูกวิเคราะห์คำนวณด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อศึกษาการแพร่กระจายของคลื่นแสง ซึ่งในอดีตมีงานวิจัยมากมายที่นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงภายในท่อนำคลื่นแสงแบบต่างๆ เช่น ระเบียบวิธี Plane Wave Expansion (PWE) [5], ระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนท์ (Finite-Difference: FD) แบบ Scalar [6], แบบ Semi Vector [7], แบบ Full Vector [8], ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite-Element: FE) แบบ Scalar [9, 10], แบบ Semi Vector [11], แบบ Full Vector [12, 13] เป็นต้น



ภาพที่ 1.1 ระเบียบวิธีบีมโพรพาเกชัน

เริ่มจากในปี 2000 ได้มีงานวิจัยที่เสนอการวิเคราะห์โดยใช้ระเบียบวิธี Plane Wave Expansion หรือ Paraxial Wave Equation (PWE) ซึ่งเป็นการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้การแปลงฟูริเยร์แบบเร็ว (Fast Fourier Transform : FFT) โดยวิธีนี้มีข้อเสียคือเป็นวิธีที่มีการคำนวณที่ซับซ้อนและไม่ยืดหยุ่นในการวิเคราะห์ ใช้ได้แค่กรณีโครงสร้างหน้าตัดที่มีรูปแบบคงที่

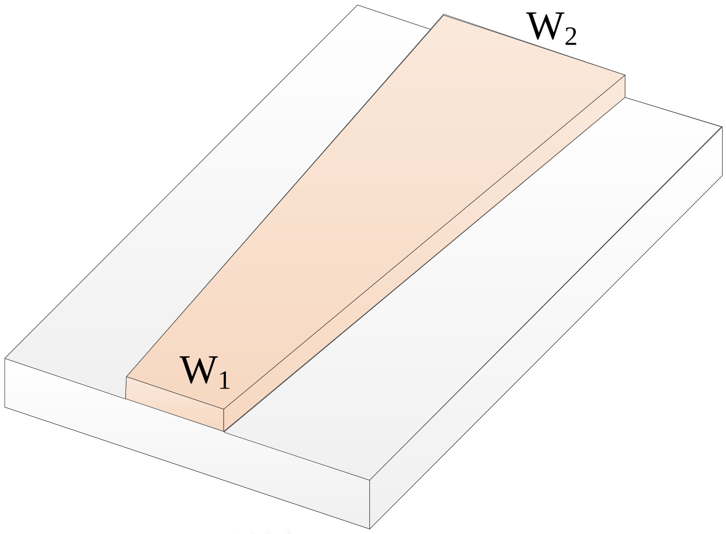
จากข้อจำกัดของระเบียนวิธี PWE จึงได้มีการนำเสนอระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนท์เป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นในเวลาต่อมา แต่เนื่องจากระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนท์ไม่สามารถคำนวณและเขียนโปรแกรมที่ซับซ้อนได้ เนื่องจากระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนท์จะทำการพิจารณาพื้นที่เป็นจุดๆ ที่ถูกแบ่งเป็นตารางกริด (grid) ลักษณะสี่เหลี่ยม ซึ่งขนาดของแต่ละกริดจะแปรผกผันกับความถี่ เมื่อความถี่สูงขึ้นทำให้จำเป็นต้องแบ่งกริดให้มีขนาดเล็กลง และเพื่อให้ได้ความแม่นยำในการคำนวณจะต้องทำการแบ่งจำนวนตารางกริดมากขึ้นทำให้ส่งผลกระทบต่อปริมาณ

หน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์เป็นอย่างมากและยังส่งผลต่อระยะเวลาในการคำนวณที่เพิ่มขึ้นอีกด้วย

ต่อมาได้มีการเสนอระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงในแต่ละหน้าตัดของท่อนำคลื่น โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิธีเชิงตัวเลขหรือวิธีการหาคำตอบโดยประมาณที่มีประสิทธิภาพในการหาผลเฉลยของปัญหาที่มีลักษณะรูปร่างใด ๆ มีจุดเด่นคือ มีความยืดหยุ่นในการคำนวณ มีขั้นตอนการวิเคราะห์ที่ง่ายและสามารถปรับเปลี่ยนโครงสร้างหน้าตัดใดๆได้ ซึ่งสามารถแก้ไขข้อจำกัดของระเบียบวิธีที่กล่าวมาก่อนหน้า โดยการแบ่งเอลิเมนต์จะแบ่งพื้นที่เป็นพื้นที่ย่อยๆ ที่สามารถวางตัวเข้ากับรูปทรงต่างๆได้อย่างเหมาะสม และสามารถแบ่งจำนวนเอลิเมนต์ให้เล็กมากๆได้ ปรับให้มีขนาดใดๆตามต้องการได้ (adaptive mesh) ซึ่งทำให้สามารถแบ่งพื้นที่การคำนวณได้อย่างมีประสิทธิภาพและลดจำนวนโนดที่ใช้ในการคำนวณลงส่งผลให้สามารถประมาณค่าของรูปทรงต่าง ๆ ได้อย่างแม่นยำกว่าระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนท์

งานวิจัยที่ผ่านมาได้ทำการวิเคราะห์ตลอดแนวแกนยาวของท่อนำคลื่นโดยมองโครงสร้างยาวเป็นอนันต์ ซึ่งโดยทั่วไปนิยมใช้การประมาณแบบเฟรสเนล (Fresnel approximation) ซึ่งเป็นการประมาณอนุพันธ์อันดับสองของสนามเมื่อเทียบกับ z ให้เป็นศูนย์ เนื่องจากทำให้ลดรูปเมทริกซ์ที่ใช้ในการคำนวณลง เป็นผลให้ประหยัดหน่วยความจำและลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณหาคำตอบของสมการ [14, 15] แต่อย่างไรก็ตามในกรณีที่ต้องการวิเคราะห์โครงสร้างของท่อนำคลื่นที่มีความไม่สม่ำเสมอไม่เอกรูปกัน (non-uniform) ตามภาพที่ 1.2 ซึ่งโดยปกติความยาวของท่อนำคลื่นมีความยาวมากกว่าความยาวคลื่นมากๆ ($l \gg \lambda$) ซึ่งในระยะที่มีความยาวมากๆนั้น อาจมีความไม่ต่อเนื่องเกิดขึ้น (discontinuity) เมื่อนำมาวิเคราะห์ด้วยวิธีเดิมจะทำให้ผลการคำนวณมีความคลาดเคลื่อนสูง เพราะฉะนั้นในช่วงนี้จึงควรคำนวณในแต่ละระนาบหน้าตัดอย่างละเอียดเพื่อความแม่นยำในการวิเคราะห์ โดยทำการปรับการประมาณเทอมของอนุพันธ์อันดับสอง (second order derivative) ในแกน z ให้มีผลละเอียดยิ่งขึ้น จุดเด่นในงานวิจัยนี้ได้นำการประมาณแบบพาเด (Padé approximation)

ในการแก้ปัญหามุมกว้าง (wide angle) หรือปัญหาท่อนำคลื่นแสงที่มีรูปร่างเปลี่ยนแปลงมากตามแนวการเคลื่อนที่ของคลื่น [16, 17] ซึ่งเป็นวิธีที่ประยุกต์ใช้งานกับวิธีบีมโพรพาเกชันมาปรับใช้เมื่อวิเคราะห์ตามแนวแกนยาวของโครงสร้างท่อนำคลื่นโดยใช้การประมาณแบบพาเดอันดับสูงขึ้นในการลดรูปสมการคลื่นอนุพันธ์อันดับสองให้เหลือเพียงสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งในช่วงของโครงสร้างที่ต้องการการวิเคราะห์ผลอย่างละเอียดมากขึ้น อาจเรียกวิธีนี้ได้ว่าการประมาณพาเดแบบปรับตัว (adaptive padé approximation)



ภาพที่ 1.2 โครงสร้างท่อนำคลื่นแสงที่ไม่เอกรูป

ในการแก้ปัญหามุมกว้างนั้นมีนักวิจัยจำนวนมากเสนอวิธีการในการวิเคราะห์ หนึ่งในนั้นคือ Hadley (1992) โดย Hadley [18] ได้เสนอการประมาณแบบพาเด (padé approximation) มาใช้แก้ไขปัญหามุมกว้างร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนท์บีมโพรพาเกชัน (FD-BPM) แบบ scalar โดยลดสมการอนุพันธ์อันดับสองให้เหลือเพียงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง โดยใช้การประมาณแบบพาเดซึ่งเป็นการประมาณพจน์ของอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปของเศษส่วน ต่อมาในปี 1996 Koshiba และ Tsuji ได้นำแนวคิดนี้มาใช้กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชันแบบสเกลาร์ [19]

จากงานวิจัยที่ผ่านมาในภายหลัง มีการพยายามเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้ในการวิเคราะห์คลื่นแสงในท่อนำคลื่นแบบ 3 มิติ เนื่องจากคลื่นมีคุณสมบัติความเป็นเวกเตอร์ แต่งานวิจัยในอดีตส่วนมากได้ทำการวิเคราะห์คลื่นแสงในลักษณะของฟังก์ชันรูปร่างขอบ (edge-based element) หรือฟังก์ชันรูปร่างแบบไฮบริด (node/edge-based element) ซึ่งใช้ร่วมกันทั้งสมการฟังก์ชันรูปร่างโนดและขอบ [20, 21] ทำให้มีความซับซ้อนและยากในการคำนวณมากขึ้นกว่าการวิเคราะห์แบบ 2 มิติ ด้วยเหตุผลข้างต้น งานวิจัยนี้จึงขอนำเสนอระเบียบวิธีวิเคราะห์คลื่นแสงในท่อนำคลื่นแบบ 3 มิติ ในรูปของสมการสนามแม่เหล็ก เนื่องจากธรรมชาติของสนามแม่เหล็กที่มีความต่อเนื่อง และอ้างอิงจากโครงสร้างทั่วไปของวงจรรวมแสงที่มีลักษณะโครงสร้างเป็นแผ่นสี่เหลี่ยม จึงลดความซับซ้อนในการคำนวณด้วยการใช้เพียงฟังก์ชันรูปร่างสี่เหลี่ยมแบบโนด และในกรณีที่ต้องการวิเคราะห์คลื่นแสงในท่อนำคลื่นแบบ 3 มิติ ที่มีโครงสร้างไม่เอกรูป สามารถเพิ่มความถูกต้องในการประมาณค่าให้ละเอียดขึ้นด้วยการปรับการประมาณค่าเทอมของอนุพันธ์อันดับสองในสมการคลื่นให้เป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่งด้วยการประมาณแบบพาเดที่ใช้ในการแก้ปัญหามุมกว้างและวิเคราะห์คลื่นแสงในลักษณะของเวกเตอร์ โดยการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชันด้วยวิธีที่นำเสนอจะถูกนำมาวิเคราะห์สมการคลื่นในโดเมนความถี่ที่ไม่มีแหล่งกำเนิดภายใน ซึ่งในบทที่ 2 จะ

กล่าวถึงหลักการและพื้นฐานทั่วไปของท่อนำคลื่นแสง วงจรรวมแสง และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชัน ตั้งแต่ขั้นตอนการแบ่งพื้นที่ที่สนใจเป็นเอลิเมนต์เพื่อใช้ในการประมาณค่าสนาม ตามด้วยฟังก์ชันรูปร่างพื้นฐานและฟังก์ชันรูปร่างที่เลือกใช้ในงานวิจัยนี้ ตลอดจนสมการคลื่นทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชัน และการประมาณแบบพาเดในการแก้ปัญหามุมกว้างของท่อนำคลื่นแสง ในบทที่ 3 จะเสนอสมการการวิเคราะห์คลื่นแสงในท่อนำคลื่นด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชัน (Finite Element Beam Propagation Method : FE-BPM) ที่ใช้การประมาณพาเดแบบปรับตัวในรูปโดเมนความถี่ที่ไม่มีแหล่งกำเนิดภายใน สำหรับตัวกลางแบบไอโซทรอปิก โดยใช้ร่วมกับเงื่อนไขขอบเขต (boundary condition) แบบชั้นแมตซ์เฟสสมบูรณ์ (Perfectly Matched Layer : PML) เพื่อนำมาสร้างโปรแกรมวิเคราะห์คลื่นแสงในท่อนำคลื่นจากวิธีการที่นำเสนอด้วยโปรแกรม MATLAB จากนั้นในบทที่ 4 จะนำเสนอการทดสอบและผลการทดสอบคลื่นแสงในท่อนำคลื่นที่มีโครงสร้างลักษณะต่างๆ ด้วยโปรแกรมจำลองที่สร้างขึ้น เพื่อสังเกตการแพร่กระจายของคลื่นแสงภายในท่อนำคลื่น และสรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะในบทที่ 5

1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

1.2.1 เพื่อนำเสนอระเบียบวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่มีประสิทธิภาพในการวิเคราะห์คลื่นแสงในท่อนำคลื่น แบบ 3 มิติ ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชัน ในรูปของสมการสนามแม่เหล็กแบบเวกเตอร์ ในโดเมนความถี่ที่ไม่มีแหล่งกำเนิดภายในสำหรับตัวกลางแบบไอโซทรอปิก ร่วมกับเงื่อนไขขอบเขตแบบชั้นแมตซ์เฟสสมบูรณ์ โดยใช้ฟังก์ชันรูปร่างสี่เหลี่ยมแบบโนดแทนที่ฟังก์ชันรูปร่างสามเหลี่ยมเพื่อลดความซับซ้อนจากการแบ่งเอลิเมนต์ในหน้าตัดขวางในทุกๆขั้นตอนการคำนวณตามแนวยาวของท่อนำคลื่น

1.2.2 เพื่อเพิ่มความถูกต้องในการประมาณค่าคำตอบของสมการให้ละเอียดยิ่งขึ้นตามความเหมาะสมของโครงสร้างที่ต้องการวิเคราะห์ ด้วยการประมาณพาเดแบบปรับตัว โดยประยุกต์ใช้การประมาณพาเดอันดับสูงซึ่งใช้ในการแก้ปัญหามุมกว้าง

1.2.3 เพื่อสร้างโปรแกรมวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงในท่อนำคลื่น 3 มิติ จากวิธีการที่นำเสนอ และทดสอบในกรณีโครงสร้างตัวอย่าง โดยทำการเปรียบเทียบผลของการประมาณพาเดในอันดับต่างกัน

1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

1.3.1 นำเสนอระเบียบวิธีการทางคณิตศาสตร์ในการวิเคราะห์คลื่นแสงในท่อนำคลื่นโครงสร้าง 3 มิติ ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชัน จากสมการแมกซ์เวลล์ในรูปโดเมนความถี่ ที่ไม่มีแหล่งกำเนิดภายใน สำหรับตัวกลางแบบไอโซทรอปิก โดยทำการปรับการประมาณค่าเทอมของอนุพันธ์อันดับสองของสมการคลื่นแบบเวกเตอร์ในรูปสนามแม่เหล็ก โดยใช้การประมาณพาเดแบบปรับตัว และใช้ฟังก์ชันรูปร่างสี่เหลี่ยมแบบโนดในการแบ่งเอลิเมนต์ย่อย

1.3.2 นำระเบียบวิธีที่นำเสนอมาทำการทดสอบและวิเคราะห์ผลการกระจายกำลังของสนามและค่ากำลังของสนามประมาณค่าภายในแกนในของท่อนำคลื่นแบบสี่เหลี่ยม ท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยมแบบขนาน และท่อนำคลื่นแบบ tapered ด้วยโปรแกรม MATLAB

1.3.3 ทำการเปรียบเทียบผลของการประมาณพาเดอันดับ 1 และ 2 ในกรณีของท่อนำคลื่นแบบ tapered ในองศาต่างๆกัน และสรุปผลที่ได้

1.4 ขั้นตอนและวิธีการดำเนินงาน

1.4.1 ศึกษาหลักการและทฤษฎีพื้นฐานของท่อนำคลื่น และขั้นตอนการวิเคราะห์คลื่นแสงในท่อนำคลื่นด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชัน

1.4.2 ประยุกต์วิธีการที่มีประสิทธิภาพในการวิเคราะห์คลื่นแสงในโครงสร้าง 3 มิติ ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชัน จากสมการแมกซ์เวลล์ในรูปโดเมนความถี่ที่ไม่มีแหล่งกำเนิดภายใน สำหรับตัวกลางแบบไอโซทรอปิก โดยทำการปรับการประมาณค่าเทอมของอนุพันธ์อันดับสองโดยใช้การประมาณค่าแบบพาเด และใช้ฟังก์ชันรูปร่างสี่เหลี่ยมแบบโนดในการแบ่งเอลิเมนต์ย่อยมาวิเคราะห์

1.4.3 สร้างโปรแกรมวิเคราะห์คลื่นแสงด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชันจากการวิเคราะห์ด้วยวิธีการที่นำเสนอ

1.4.4 วิเคราะห์คลื่นแสงในท่อนำคลื่นกรณีโครงสร้างตัวอย่างด้วยโปรแกรมที่สร้างขึ้น

1.4.5 ทำการเปรียบเทียบผลของการประมาณพาเดอันดับ 1 และ 2 ในกรณีโครงสร้างตัวอย่างที่ไม่เอกรูปในองศาต่างๆกัน

1.4.6 วิเคราะห์และสรุปผลการทดลอง

1.4.7 เขียนวิทยานิพนธ์ฉบับสมบูรณ์

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

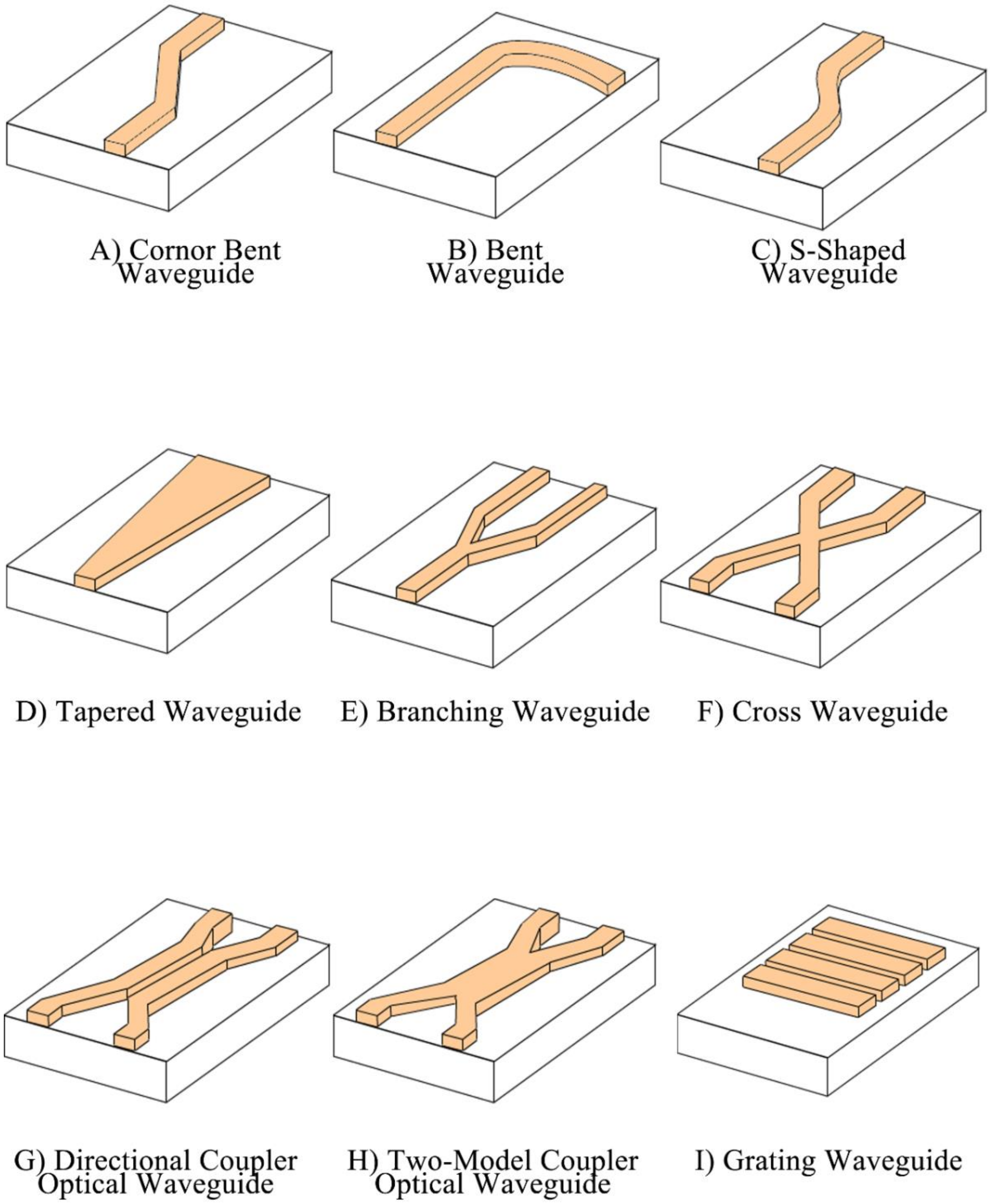
1.5.1 ได้วิธีการที่มีประสิทธิภาพและลดความซับซ้อนของสมการในการวิเคราะห์คลื่นแสงในโครงสร้างท่อนำคลื่น 3 มิติแบบเอกรูป ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชันที่ใช้การประมาณพาเดแบบปรับตัวในรูปโดเมนความถี่ ที่ไม่มีแหล่งกำเนิดภายใน สำหรับตัวกลางแบบไอโซทรอปิก และโปรแกรมที่สร้างจากวิธีการที่นำเสนอ

1.5.2 ได้ความรู้และความเข้าใจในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชัน มาใช้ในการวิเคราะห์คลื่นแสงในท่อนำคลื่น 3 มิติรูปแบบต่างๆ ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับงานด้านคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

บทที่ 2
หลักการและทฤษฎีพื้นฐาน

2.1 ท่อนำคลื่น

ท่อนำคลื่น (optical waveguide) เป็นอุปกรณ์ที่มีบทบาทสำคัญสำหรับการสื่อสารด้วยแสง ซึ่งท่อนำคลื่นจะทำหน้าที่เป็นตัวกลางเปลี่ยนทิศทางและปรับแต่งลำแสงให้มีลักษณะเหมาะสมตามความต้องการ โดยทั่วไปท่อนำคลื่นถูกสร้างขึ้นจากวัสดุไดอิเล็กตริกสองชนิดที่มีค่าดัชนีหักเหต่างกัน และถูกนำมาวางซ้อนกัน โดยส่วนที่ทำหน้าที่เป็นแกนใน (core) จะมีค่าดัชนีหักเหมากกว่าส่วนที่เป็นเปลือกหรือแกนนอก (cladding) ปัจจุบันท่อนำคลื่นมีหลายชนิดดังแสดงในภาพที่ 2.1 ซึ่งท่อนำคลื่นแต่ละชนิดจะถูกออกแบบเพื่อวัตถุประสงค์ในการใช้งานที่แตกต่างกันออกไป ตัวอย่างเช่น ท่อนำคลื่นแบบ corner-bent, แบบ S-shaped และแบบ bent มีหน้าที่เปลี่ยนทิศทางของลำแสง ท่อนำคลื่นแบบ tapered ทำหน้าที่เปลี่ยนแปลงขนาดของคลื่นในท่อนำคลื่น, ท่อนำคลื่นแบบ branching และแบบ crossed ทำหน้าที่รวมลำแสง แยกลำแสง และแทรกสอดลำแสง ท่อนำคลื่นแสงแบบ directional coupler และแบบ two mode coupler ทำหน้าที่คัปปลิ้งลำแสง ในขณะที่ท่อนำคลื่นแสงแบบ grating สามารถทำหน้าที่เป็น filter, mode converter, reflector, resonator และ demultiplexer เป็นต้น



ภาพที่ 2.1 ท่อนำคลื่นโครงสร้างแบบต่างๆ

วงจรรวมแสง (optical integrated circuits: OIC) เป็นอีกหนึ่งวิวัฒนาการของท่อนำคลื่น โดย OIC คือวงจรรวมแสงที่ประกอบด้วยอุปกรณ์หลัก 3 ชนิด คือ source, waveguide และ detector ที่ถูกสร้างอยู่บนแผ่นฐาน (substrate) เดียวกัน ซึ่งอุปกรณ์ทั้งสามชนิดสามารถวางอยู่บนแผ่นฐานเดียวกันหรือต่างแผ่นฐานกันได้ โดยแบบที่อยู่บนแผ่นฐานเดียวกันจะเรียกว่า monolithic optical IC และต่างแผ่นฐานกันจะเรียกว่า hybrid optical IC ใขณะที่ quasi-hybrid หรือ quasi-monolithic IC จะเป็นแบบที่มีอุปกรณ์ 2 ชนิดอยู่บนแผ่นฐานเดียวกัน [22]

ในทศวรรษที่ 60 วงจรรวมทางแสงได้ถูกคิดค้นขึ้น แต่เนื่องจากการพัฒนาของเส้นใยแก้วนำแสงที่สามารถแก้ไขปัญหาความสูญเสียที่เกิดขึ้นทำให้งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับ OIC ลดลงเนื่องจากเป็นที่คาดกันว่างานวิจัยด้าน OIC ยังไม่สามารถนำมาใช้งานได้จริงในอนาคตอันใกล้ จึงทำให้งานวิจัยในช่วงดังกล่าวมุ่งเน้นไปสู่การพัฒนาที่เกี่ยวกับเส้นใยแก้วนำแสงแทน จนกระทั่งการสื่อสารผ่านเส้นใยแก้วนำแสงมีการพัฒนาจนสามารถใช้ความยาวคลื่นที่มีขนาดเล็กมากจนเกิดปัญหา alignment และความเสถียรของระบบ นอกจากนี้ยังพัฒนาจนเริ่มมีขีดจำกัดในการใช้งาน ด้วยเหตุนี้นักวิจัยต่างๆจึงได้หันกลับมาสนใจวิเคราะห์วงจรรวมทางแสงอีกครั้งหนึ่ง โดยวิวัฒนาการของวงจรรวมแสงแสดงดังตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 วิวัฒนาการของวงจรรวมทางแสง [23]

Property	First Generation	Second Generation	Third Generation	
Technology	Conventional Optics	Micro-optics	Integrated Optics	-Wave Optics - Thin-film Tech -Micro Fabrication
Typical Components	Gas laser, lenses, Mirrors	LED, LD, Multimode fibers, rod lenses	Optical ICs, single-mode LD, fibers	- Integration - Diffuculties of coupling to LDs and fibers
Alignment of components	Necessary	Necessary (hard task)	Not necessary (all fixed)	- Stable (for vibration)

Property	First Generation	Second Generation	Third Generation	
Propagation system (size)	Beam	Beam multimode waveguides	Single-mode waveguides	- Easy control - High intensity - Strong interaction - Large nonlinearity - Optical demage
Size of control electrodes (order)	1 cm	1 mm	1 um	- Low drive voltage - High speed
Size of devices (order)	1m square	10 cm square	A few cm square (thin film)	- Compact - Light weigh

คุณสมบัติที่สำคัญของวงจรรวมทางแสงในยุคที่สามคือ

1. การวิเคราะห์จะต้องทำด้วยวิธีเชิงคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเท่านั้น เนื่องจากไม่สามารถวิเคราะห์แบบรังสีได้อีกต่อไป เพราะท่อนำคลื่นแสงไม่ได้มีรูปร่างใหญ่กว่าความยาวคลื่นมากนัก
2. ไม่ต้องเล็งแนวเส้นตรง (alignment) เพราะสร้างอยู่บนแผ่นฐานเดียวกัน
3. ง่ายต่อการควบคุม เนื่องจากเป็นการส่งผ่านข้อมูลแบบ single mode จึงสามารถควบคุมได้ทั้ง electrooptics, acoustooptic effect และ thermooptic effect
4. ใช้แรงดันไฟฟ้าต่ำในการควบคุมและใช้ระยะการควบคุมสั้น
5. การทำงานรวดเร็ว
6. ส่งพลังงานสูงเนื่องจากใช้งานในท่อนำคลื่น เหมาะสำหรับใช้งานร่วมกับ nonlinear optic
7. รูปร่างเล็กและน้ำหนักเบา
8. ราคาถูก

เบื้องต้นวงจรรวมแสงไม่ได้ช่วยให้วงจรทำงานได้เร็วมากขึ้นเมื่อเปรียบเทียบกับวงจรโลหะที่ใช้ในปัจจุบันที่มีกระแสไฟฟ้าเป็นตัวพาห์ โดยวงจรรวมทางแสงสามารถทำงานเร็วกว่าเพียงเล็กน้อยเท่านั้น แต่เนื่องจากวงจรแบบโลหะไม่สามารถทำงานได้ดีที่ความถี่สูงมากๆ เช่น THz ต่างจากวงจรรวมแสงที่สามารถให้แบนด์วิดธ์ที่กว้างมากกว่าจึงทำให้สามารถทำงานที่ความถี่สูงได้

ปัจจุบันวงจรรวมทางแสงยังไม่มีการใช้งานอย่างแพร่หลายในประเทศไทยเนื่องจากราคาในการสร้างยังสูงและยังไม่คุ้มค่าในการลงทุน ซึ่งกำลังรอคอยเทคนิคการสร้างที่จะช่วยลดต้นทุนในการผลิต เมื่อถึงจุดคุ้มทุนก็จะสามารถนำมาใช้งานได้เช่นเดียวกับระบบการสื่อสารแบบเส้นใยแก้วนำแสง

จากที่กล่าวมาข้างต้น การสร้างท่อนำคลื่นจะต้องอาศัยการออกแบบและวิเคราะห์ผลก่อนการสร้างจริงเสมอเพื่อลดปัญหาและค่าใช้จ่ายในการสร้างลง โดยการวิเคราะห์จะอาศัยระเบียบวิธีการทางคณิตศาสตร์ การจำลองผลด้วยคอมพิวเตอร์จากการคำนวณ สิ่งที่นำมาวิเคราะห์คือลักษณะทางกายภาพของท่อนำคลื่นและชนิดของวัสดุที่ใช้ทำท่อนำคลื่น เป็นต้น

2.2 สมการทั่วไปของคลื่นในวัสดุไอโซทรอปิก

เนื่องจากแสงมีคุณสมบัติเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ดังนั้นในการศึกษาพฤติกรรมของแสงจึงต้องพิจารณาถึงสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเป็นสำคัญ โดยสมการแมกซ์เวลล์ (Maxwell’s equation) เป็นสมการที่นิยมนำมาใช้อธิบายปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดจากคลื่นแสงในตัวกลางของคลื่นแสงใดๆ ซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้จะกล่าวถึงตัวกลางของคลื่นแสงที่เป็นวัสดุไอโซทรอปิกไดอิเล็กทริก (isotropic dielectric material) เช่น แก้ว และพลาสติก เป็นต้น

พิจารณาการคำนวณจากสมการแมกซ์เวลล์ในรูปโดเมนความถี่ที่ไม่มีแหล่งกำเนิดภายในสำหรับตัวกลางแบบไอโซทรอปิก ดังนี้

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0\mu_r\vec{H} \qquad ; \mu_r = 1 \tag{2.1}$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} \tag{2.2}$$

เมื่อ

$\vec{E}$ คือ ความเข้มสนามไฟฟ้า

$\vec{H}$ คือ ความเข้มสนามแม่เหล็ก

μ_0 คือ ค่าความซาบซึมได้ของอวกาศว่าง

μ_r คือ ค่าความซาบซึมสัมพัทธ์

ω คือ ความถี่เชิงมุม

ε_0 คือ ค่าสภาพไฟฟ้ายอมของอวกาศว่าง

ε_r คือ ค่าสภาพไฟฟ้ายอมสัมพัทธ์

จากสมการ (2.2) คูณตลอดสมการด้วย $\dfrac{1}{\varepsilon_r}$ จะได้

$$\frac{1}{\varepsilon_r}\left(\nabla\times\vec{H}\right)=j\omega\varepsilon_0\vec{E} \tag{2.3}$$

กระทำการ curl สมการ (2.3) จะได้

$$\nabla\times\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\left(\nabla\times\vec{H}\right)\right)=j\omega\varepsilon_0\left(\nabla\times\vec{E}\right) \tag{2.4}$$

แทนค่าสมการ (2.1) ลงในสมการ (2.4) จะได้

$$\nabla\times\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\left(\nabla\times\vec{H}\right)\right)=j\omega\varepsilon_0\left(-j\omega\mu_0\vec{H}\right) \tag{2.5}$$

$$\nabla\times\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\left(\nabla\times\vec{H}\right)\right)=\omega^2\varepsilon_0\mu_0\vec{H} \tag{2.6}$$

เมื่อกำหนดให้เลขคลื่นของอวกาศว่างเท่ากับ k_0 ซึ่งมีค่าดังนี้

$$k_0^2=\omega^2\varepsilon_0\mu_0 \tag{2.7}$$

แทนค่าสมการ (2.7) ลงในสมการ (2.6) จะได้

$$\nabla\times\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\left(\nabla\times\vec{H}\right)\right)=k_0^2\vec{H} \tag{2.8}$$

จัดรูปสมการ (2.8) จะได้สมการคลื่นในรูปสนามแม่เหล็กดังนี้

$$\nabla\times\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\left(\nabla\times\vec{H}\right)\right)-k_0^2\vec{H}=0 \tag{2.9}$$

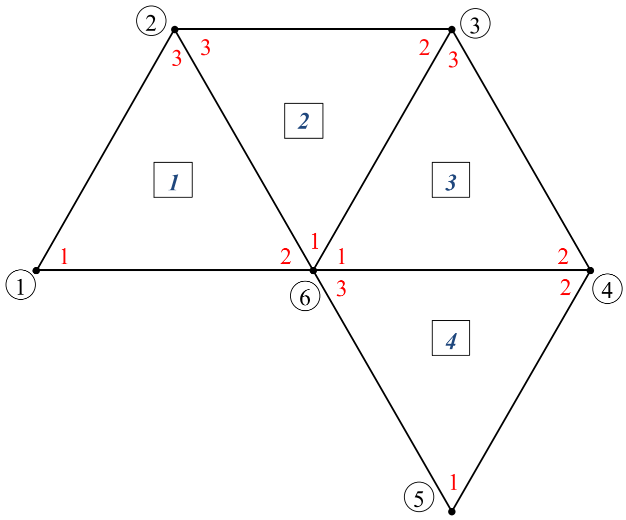
2.3 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

2.3.1 การแบ่งพื้นที่เป็นเอลิเมนต์ (Domain Discretization)

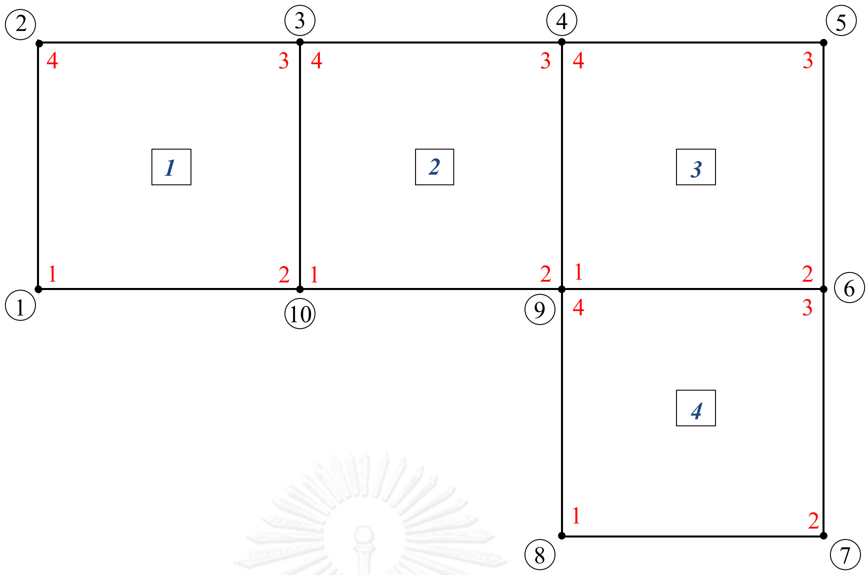
ในการหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น จะต้องทำการแบ่งพื้นที่หรือโดเมนที่ต่อเนื่องของปัญหาทั้งหมดออกเป็นโดเมนย่อย ๆ (subdomains) หรือที่เรียกว่าเอลิเมนต์

(elements) ก่อน จากนั้นจึงทำการสร้างสมการของแต่ละเอลิเมนต์ให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้นๆ โดยทั่วไปพื้นที่ใดๆที่สนใจนั้นจะเป็นพื้นที่ที่มีส่วนโค้งและมุมที่ไม่เป็นมุมฉาก แต่เนื่องจากรูปร่างพื้นฐานของเอลิเมนต์นั้นเป็นรูปร่างแบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก (rectangular) จึงส่งผลให้การแบ่งรูปร่างออกเป็นสี่เหลี่ยมมุมฉากนั้นมีค่าความผิดพลาดเกิดขึ้นมากโดยเฉพาะในบริเวณที่ไม่เป็นมุมฉาก ด้วยเหตุนี้จึงมีการพิจารณาปรับรูปร่างให้มีความเหมาะสมกับพื้นที่มากขึ้นโดยการใช้เอลิเมนต์รูปร่างสามเหลี่ยม (triangle) ดังแสดงในภาพที่ 2.2 แทนการใช้เอลิเมนต์รูปร่างสี่เหลี่ยมมุมฉาก แต่เนื่องจากโครงสร้างที่วิทยานิพนธ์ใช้ในการวิเคราะห์มีลักษณะเป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมจึงเลือกใช้การแบ่งเอลิเมนต์รูปร่างพื้นฐานแบบสี่เหลี่ยมมุมฉากในการคำนวณ เพื่อความง่ายในการวิเคราะห์ โดยเงื่อนไขในการแบ่งพื้นที่เป็นเอลิเมนต์ที่ดีมีดังนี้ [24]

- สำหรับโครงร่างแบบสามเหลี่ยม รูปร่างของสามเหลี่ยมจะต้องเป็น สามเหลี่ยมด้านเท่า
- สำหรับโครงสร้างแบบสี่เหลี่ยม รูปร่างของสี่เหลี่ยม จะต้องเป็น สี่เหลี่ยมจัตุรัส
- สำหรับบริเวณที่คาดว่าคำตอบน่าจะมีความผันแปรสูง ขนาดของเอลิเมนต์ควรจะเล็กมาก ๆ
- หลีกเลี่ยงการใช้เอลิเมนต์ที่มีอัตราส่วนใหญ่มาก เช่น สัดส่วนด้านใหญ่ที่สุดต่อด้านเล็กที่สุด
- จำนวนของโนด จะต้องเริ่มต้นเรียงลำดับจากน้อยไปมาก โดยเริ่มต้นที่ 1 และจำนวนของโนดจะส่งผลกระทบต่อขนาดของเมทริกซ์ครอบคลุม (global matrix)
- ต้องไม่มีการซ้อนทับกันของแต่ละเอลิเมนต์
- เอลิเมนต์ข้างเคียงจะมีการใช้ขอบร่วมกันซึ่งก็คือสามเหลี่ยมที่ติดกันต้องใช้ด้านร่วมกัน
- โนดภายใน (ที่ไม่ใช่ขอบของพื้นที่) จะต้องมีการใช้ร่วมกันอย่างน้อย 3 เอลิเมนต์



ภาพที่ 2.2 ภาพตัวอย่างการแบ่งเอลิเมนต์สามเหลี่ยม



ภาพที่ 2.3 ภาพตัวอย่างการแบ่งเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม

สำหรับพื้นที่ที่ถูกแบ่งเป็นเอลิเมนต์จะประกอบด้วยโนด โดยที่แต่ละโนดจะมีหมายเลขกำกับอยู่ ซึ่งสามารถแบ่งได้เป็น 2 ประเภท คือ หมายเลขของโนดเฉพาะที่ (local node) และหมายเลขของโนดครอบคลุม (global node)

หมายเลขของโนดเฉพาะที่ (local node number) คือ หมายเลขของโนดที่อยู่ภายในแต่ละเอลิเมนต์ โดยมีตั้งแต่หมายเลข 1 จนถึงจำนวนโนดทั้งหมดภายในหนึ่งเอลิเมนต์ ตัวอย่างเช่น เอลิเมนต์ประเภทสี่เหลี่ยมในภาพที่ 2.2 มี 4 มุม จะมีโนดที่มีหมายเลข 1 ถึง 4 โดยหมายเลขของโนดเฉพาะที่จะถูกแสดงดังตัวเลขสีแดง ซึ่งหมายเลขในแต่ละโนดจะถูกเรียงลำดับแบบทวนเข็มนาฬิกา

หมายเลขของโนดครอบคลุม (global node number) คือ หมายเลขของโนดทั้งหมดที่มีในพื้นที่ที่เราพิจารณา ดังแสดงในภาพที่ 2.3 มี 10 โนดครอบคลุม โดยที่หมายเลขของโนดครอบคลุมคือตัวเลขที่มีวงกลมล้อมรอบ

โนดเฉพาะที่จะถูกใช้สำหรับการคำนวณตัวแปรที่ไม่ทราบค่าในแต่ละเอลิเมนต์ หลังจากนั้นจะนำผลที่คำนวณได้ของแต่ละเอลิเมนต์มาประกอบเข้าด้วยกันด้วยหมายเลขของโนดครอบคลุม

ตารางที่ 2.2 ตารางความสัมพันธ์ระหว่างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมกับโนดของภาพที่ 2.2

หมายเลขเอลิเมนต์	หมายเลขโนด		
	1	2	3
1	1	6	2
2	6	3	2
3	6	4	3
4	5	4	6

ตารางที่ 2.3 ตารางความสัมพันธ์ระหว่างเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมกับโนดของภาพที่ 2.3

หมายเลขเอลิเมนต์	หมายเลขโนด			
	1	2	3	4
1	1	10	3	2
2	10	9	4	3
3	9	6	5	4
4	8	7	6	9

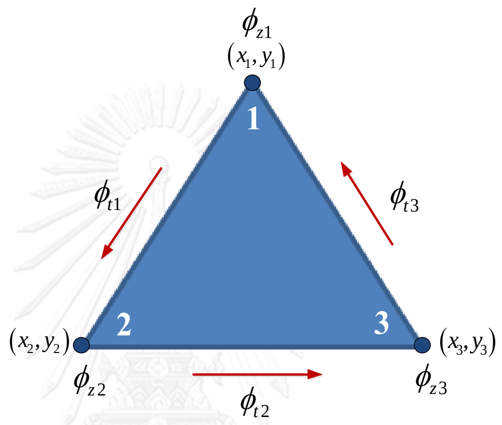
โดยปกติการแบ่งเอลิเมนต์สามารถใช้ซอฟต์แวร์สำเร็จรูปได้ แต่เนื่องจากซอฟท์แวร์สำเร็จรูปที่มีทั่วไปนั้นเป็นซอฟท์แวร์ทางการค้า ในวิทยานิพนธ์นี้จึงทำการประยุกต์ใช้ชุดคำสั่งของโปรแกรม MATLAB แทน ซึ่งมีลิขสิทธิ์อย่างถูกต้องอยู่ในห้องปฏิบัติการ

2.3.2 ฟังก์ชันรูปร่าง (Shape function or Interpolation function)

เมื่อแบ่งบริเวณของโครงสร้างปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆแล้ว ขั้นตอนต่อไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ คือ การประมาณผลเฉลยคำตอบภายในแต่ละเอลิเมนต์หรือที่เรียกว่าฟังก์ชันทดลอง (trial function) ซึ่งถูกสร้างให้อยู่ในรูปฟังก์ชันอย่างง่าย เช่น ฟังก์ชันพหุนาม (polynomial function) ที่ประกอบด้วยฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) หรือที่เรียกว่าฟังก์ชันฐาน (basis function) กับตัวแปรที่ไม่ทราบค่า (unknown parameter) ในแต่ละเอลิเมนต์

ฟังก์ชันรูปร่างจำเป็นต้องเลือกให้เหมาะสมกับรูปร่างของเอลิเมนต์ โดยฟังก์ชันรูปร่างประกอบด้วยฟังก์ชันรูปร่างโนดและฟังก์ชันรูปร่างขอบ สำหรับฟังก์ชันรูปร่างโนดจะใช้ในการประมาณค่าสเกลาร์บนจุดแทนองค์ประกอบของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตามยาว ส่วนฟังก์ชันรูปร่างขอบถูกใช้สำหรับประมาณเวกเตอร์บนขอบแทนองค์ประกอบของสนามตามขวางบนเอลิเมนต์รูปร่างใดๆ

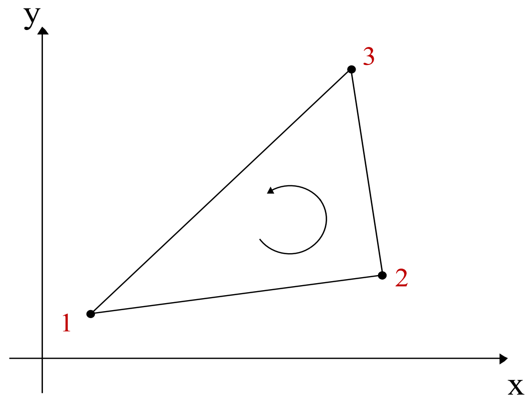
ในกรณีเอลิเมนต์รูปร่างสามเหลี่ยมเมื่อใช้ทั้งฟังก์ชันรูปร่างโนดและฟังก์ชันรูปร่างขอบ จะมีตัวแปรที่ไม่ทราบค่า 3 ตัว บนขอบแทนตำแหน่งของสนามตามขวาง และตัวแปรที่ไม่ทราบค่าอีก 3 ตัว บนโนดแทนตำแหน่งของสนามตามยาวภายในเอลิเมนต์แต่ละเอลิเมนต์ [25] ดังภาพที่ 2.4



ภาพที่ 2.4 เอลิเมนต์รูปร่างสามเหลี่ยมเมื่อใช้ทั้งฟังก์ชันรูปร่างโนดและฟังก์ชันรูปร่างขอบ

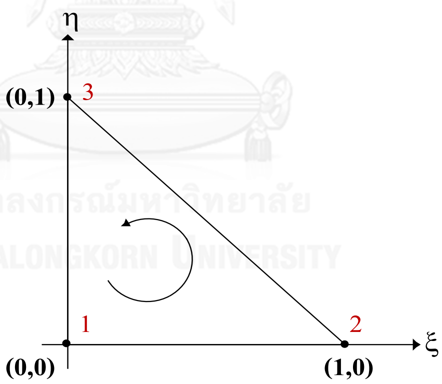
2.3.2.1 ฟังก์ชันรูปร่างสามเหลี่ยมแบบเชิงเส้น (linear triangle interpolation function)

ฟังก์ชันรูปร่างสามเหลี่ยมแบบเชิงเส้นถูกใช้ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบโนด (nodal-based finite element) ซึ่งเป็นฟังก์ชันรูปร่างอย่างง่ายที่นิยมใช้กันในการศึกษาและทำความเข้าใจฟังก์ชันรูปร่างแบบเชิงเส้นจะมีเอลิเมนต์สามเหลี่ยมวางตัวในระนาบ $x-y$ แสดงดังภาพที่ 2.5 ซึ่งฟังก์ชันรูปร่างแบบเชิงเส้นจะมีสามจุดยอด (vertex) สัมพันธ์กับแต่ละโนดของแต่ละเอลิเมนต์ โดยการเรียงหมายเลขของแต่ละโนดจะเรียงตัวแบบทวนเข็มนาฬิกา เพื่อหลีกเลี่ยงไม่ให้พื้นที่ของแต่ละสามเหลี่ยมมีค่าเป็นลบ



ภาพที่ 2.5 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมวางตัวในระนาบ $x-y$

จากภาพที่ 2.5 เพื่อให้ง่ายต่อการวิเคราะห์จึงแปลงเอลิเมนต์สามเหลี่ยมให้อยู่ในระนาบที่แกนอ้างอิงทั้งสองตั้งฉากกัน ดังแสดงในภาพที่ 2.6 โดยที่เรียกสามเหลี่ยมในระนาบ $\xi-\eta$ ว่าสามเหลี่ยมหลัก (master element) โดยแต่ละฟังก์ชันรูปร่างแบบเชิงเส้น $N_1(\xi,\eta)$, $N_2(\xi,\eta)$ และ $N_3(\xi,\eta)$ จะสัมพันธ์กับโนดที่ 1, 2 และ 3 ของแต่ละเอลิเมนต์ตามลำดับ



ภาพที่ 2.6 สามเหลี่ยมหลัก (master element) วางตัวในระนาบ $\xi-\eta$

สมการเชิงเส้นของฟังก์ชันรูปร่างสามารถเขียนได้ ดังสมการที่ (2.10) โดยมีเงื่อนไขคือ $N_i(\xi,\eta)$ จะมีค่าเท่ากับ 1 ที่โนดที่ i และอีก 2 โนดที่เหลือมีค่าเท่ากับ 0

$$N_i(\xi,\eta)=c_1+c_2\xi+c_3\eta \tag{2.10}$$

เมื่อ i คือ หมายเลขของฟังก์ชันรูปร่าง $(i=1,2,3)$

จากสมการที่ (2.10) ยกตัวอย่างฟังก์ชันรูปร่าง $N_1(\xi,\eta)$ จะมีค่าที่โนดที่ 1 เป็น 1 และโนดที่ 2 และที่ 3 มีค่าเป็น 0 จะสามารถเขียนได้ว่า

$$N_1(\xi,\eta) = c_1 + c_2\xi + c_3\eta \tag{2.11}$$

โดยที่ค่า c_1, c_2 และ c_3 สามารถหาได้จากการแก้สมการด้วยการแทนค่า (ξ,η) ของแต่ละโนดที่พิจารณาลงในสมการที่ (2.11) ดังนี้

ที่โนดที่ 1

$\xi = 0, \eta = 0$

$$\begin{aligned} N_1(\xi,\eta) &= c_1 + c_2\xi + c_3\eta \\ 1 &= c_1 + c_2(0) + c_3(0) \\ c_1 &= 1 \end{aligned} \tag{2.12}$$

ที่โนดที่ 2

$\xi = 1, \eta = 0$

$$\begin{aligned} N_2(\xi,\eta) &= c_1 + c_2\xi + c_3\eta \\ 0 &= 1 + c_2(1) + c_3(0) \\ c_2 &= -1 \end{aligned} \tag{2.13}$$

ที่โนดที่ 3

$\xi = 0, \eta = 1$

$$\begin{aligned} N_3(\xi,\eta) &= c_1 + c_2\xi + c_3\eta \\ 0 &= 1 + (-1)(0) + c_3(1) \\ c_3 &= -1 \end{aligned} \tag{2.14}$$

เมื่อแทนค่า c_1, c_2 และ c_3 ลงในสมการที่ (2.11) สามารถเขียนสมการฟังก์ชันรูปร่างของ $N_1(\xi,\eta)$ ได้ดังนี้

$$N_1(\xi,\eta) = 1 - \xi - \eta \tag{2.15}$$

และจากวิธีการทางด้านบน สามารถแทนค่าหาฟังก์ชันรูปร่างของ $N_2(\xi,\eta)$ และ $N_3(\xi,\eta)$ ได้ดังนี้

$$N_2(\xi,\eta) = \xi \tag{2.16}$$

$$N_3(\xi,\eta) = \eta \tag{2.17}$$

ซึ่งฟังก์ชันรูปร่างแบบสามเหลี่ยมเชิงเส้นทั้งสามสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของพิกัดพื้นที่ (area coordinate) ได้ดังนี้

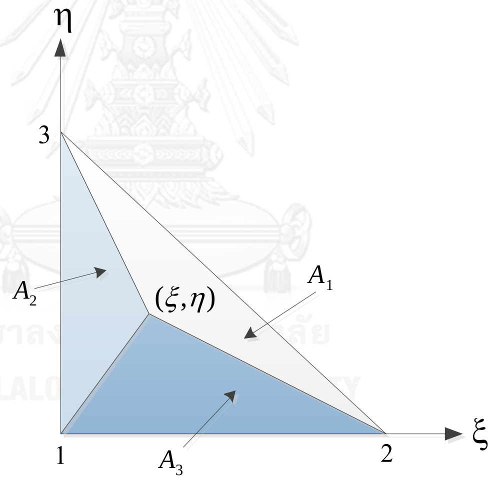
$$N_1 = \frac{A_1}{A} \tag{2.18}$$

$$N_2 = \frac{A_2}{A} \tag{2.19}$$

$$N_3 = \frac{A_3}{A} \tag{2.20}$$

โดยที่ A คือ พื้นที่ทั้งหมดของสามเหลี่ยมหลัก และ $A_1,\ A_2,\ A_3$ คือ พื้นที่ของสามเหลี่ยมย่อยที่เกิดจากการเพิ่มจุดใด ๆ ลงในสามเหลี่ยมหลัก เมื่อรวมฟังก์ชันรูปร่างทั้งสามเข้าด้วยกันจะได้เท่ากับ 1 ดังแสดงในภาพที่ 2.7

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 + N_3 &= \frac{A_1}{A} + \frac{A_2}{A} + \frac{A_3}{A} \\ &= \frac{A_1 + A_2 + A_3}{A} \\ &= \frac{A}{A} \\ N_1 + N_2 + N_3 &= 1 \end{aligned} \tag{2.21}$$



ภาพที่ 2.7 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมวางตัวในระนาบ $\xi-\eta$

สำหรับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างโนดในการประมาณค่าสเกลาร์ จะมีตัวแปรที่ไม่ทราบค่า (u) ในแต่ละเอลิเมนต์ ซึ่งสามารถหาได้จากผลรวมของตัวแปรไม่ทราบค่าของแต่ละโนดในเอลิเมนต์คูณด้วยฟังก์ชันรูปร่างของแต่ละโนด โดยสามารถเขียนเป็นสมการได้ ดังนี้

$$u = u_1^e N_1 + u_2^e N_2 + u_3^e N_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i^e N_i \tag{2.22}$$

และสำหรับในโดเมน $x-y$ จะสามารถแทนค่า x, y ได้ดังนี้

$$x = x_1^e N_1 + x_2^e N_2 + x_3^e N_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i^e N_i \tag{2.23}$$

$$y = y_1^e N_1 + y_2^e N_2 + y_3^e N_3 = \sum_{i=1}^{3} y_i^e N_i \tag{2.24}$$

เมื่อแทนค่าสมการที่ (2.15) - (2.17) ลงในสมการที่ (2.23) และ(2.24) จะได้สมการดังนี้

$$\begin{aligned} x &= x_1^e + \bar{x}_{21}\xi + \bar{x}_{31}\eta \\ y &= y_1^e + \bar{y}_{21}\xi + \bar{y}_{31}\eta \end{aligned} \tag{2.25}$$

โดยที่

$$\begin{aligned} \bar{x}_{ij} &= x_i^e - x_j^e \\ \bar{y}_{ij} &= y_i^e - y_j^e \end{aligned} \tag{2.26}$$

ยกตัวอย่างในการประมาณองค์ประกอบของสนามตามยาว สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลรวมของผลคูณระหว่างฟังก์ชันรูปร่างโนดกับตัวแปรที่ไม่ทราบค่าทั้ง 3 จุด ดังสมการ

$$\phi_z^e = \sum_{i=1}^{3} N_i^e \phi_{zi}^e \tag{2.27}$$

การประมาณฟังก์ชันสเกลาร์ภายในรูปสามเหลี่ยม สามารถใช้ฟังก์ชันพหุนาม (polynomial function) อันดับหนึ่ง หรือฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function) ซึ่งมีรูปสมการดังนี้

$$L_i^e = \frac{1}{2A_e}\left(a_i + b_i x + c_i y\right) \qquad ; \; i = 1,2,3 \tag{2.28}$$

โดยที่

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j \tag{2.29}$$

$$b_i = y_j - y_k \tag{2.30}$$

$$c_i = x_k - x_j \tag{2.31}$$

$$A_e = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \tag{2.32}$$

ซึ่งมีรหัสเวียน (cyclic code) เป็น $(i, j, k) = \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\}$

$$N_i^e = L_i^e \tag{2.33}$$

จากที่กล่าวมาข้างต้นทั้งหมด สรุปได้ว่าฟังก์ชันรูปร่างสามเหลี่ยมแบบเชิงเส้น หรือฟังก์ชันรูปร่างแบบโนด โดยทั่วไปจะมีคุณสมบัติ มีค่าเป็น 1 ในโนดแต่ละโนด และผลรวมของพิกัดพื้นที่มีค่าเท่ากับ 1 โดยที่ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันเป็นไปอย่างเชิงเส้น ส่วนฟังก์ชัน L_2 และ L_3 จะมีคุณสมบัติเช่นเดียวกันกับฟังก์ชัน L_1

อย่างไรก็ตามระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้เพียงการแทนค่าฟังก์ชันรูปร่างแบบโนดนั้นไม่เหมาะกับการใช้เป็นเครื่องมือในสำหรับวิเคราะห์สนามเวกเตอร์ในรูปแม่เหล็กไฟฟ้า เพราะมีข้อจำกัดทางกายภาพ กล่าวคือ ในการคำนวณจะต้องเปลี่ยนรูปแบบเป็นความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างส่วนประกอบในระนาบคาร์ทีเซียนและที่โนด ซึ่งขอบเขตได้เปลี่ยนทิศทาง โดยทิศทางที่สัมผัสกับขอบเขตจะถูกนำมาพิจารณาก่อน เมื่อไม่สามารถทำให้ตัวเงื่อนไขที่ต้องการอยู่ในสภาวะที่เหมาะสมได้ ผลกระทบที่ตามมาคือจะเกิด โหมดปลอม (spurious mode) [26]

สำหรับวิธีการที่นำมาใช้แก้ไขข้อจำกัดของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างโนด คือ การใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบขอบ โดยที่เอลิเมนต์แบบขอบ (edge element) นั้นถูกพัฒนาขึ้นให้เหมาะสมกับสนามเวกเตอร์ (vector field) โดยกำหนดให้เกิดขึ้นที่ขอบเอลิเมนต์ โดยที่ข้อดีของเอลิเมนต์แบบขอบ คือ

- เอลิเมนต์แบบขอบมีการกำหนดความต่อเนื่องเฉพาะส่วนประกอบในแนวเส้นสัมผัสของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก ซึ่งสอดคล้องกับข้อจำกัดทางกายภาพของสนามเหล่านี้
- เงื่อนไขขอบเขตระหว่างเอลิเมนต์ (interelement boundary conditions) สามารถหาได้จากเงื่อนไขขอบเขตธรรมชาติ (natural boundary conditions)
- เงื่อนไขขอบเขต Dirichlet สามารถกำหนดได้ง่ายจากเอลิเมนต์แบบขอบ
- ด้วยเอลิเมนต์แบบขอบ ถูกเลือกเป็น divergence free ดังนั้นคำตอบที่ไม่ถูกต้องในเชิงกายภาพ (the spurious nonphysical solutions) จะถูกลบออกไป

สำหรับการประมาณองค์ประกอบของสนามตามขวางสำหรับเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม ดังแสดงในภาพที่2.4 การเดินทางของสนามตามขวางสามารถแสดงได้ด้วยการทำการซ้อนทับ (superposition) ของเอลิเมนต์แบบขอบ โดยเอลิเมนต์แบบขอบจะให้องค์ประกอบของสนามในแนวสัมผัสคงที่ (constant tangential component) ไปตามแนวขอบของสามเหลี่ยมด้านที่พิจารณาฟังก์ชันรูปร่าง และในขณะเดียวกันก็ให้ส่วนประกอบในแนวสัมผัสเป็นศูนย์ (zero tangential component) ตามแนวขอบด้านที่เหลือ การประมาณองค์ประกอบของสนามตามขวางสามารถเขียนในรูปของผลรวมของผลคูณระหว่างฟังก์ชันรูปร่างกับตัวแปรที่ไม่ทราบค่าทั้งสามด้าน ดังสมการ

$$\phi_t^e = \sum_{i=1}^{3} N_i^e \phi_{ti}^e \tag{2.34}$$

โดยตัวแปรที่ไม่ทราบค่าซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่อยู่บนด้านมีคุณสมบัติเปลี่ยนแปลงในแนวสัมผัสแบบคงที่ตลอดด้านและเปลี่ยนแปลงในแนวตั้งฉากแบบเชิงเส้น (Constant Tangential / Linear Normal : CT/LN)

องค์ประกอบตามขวางประกอบด้วย 2 องค์ประกอบ คือ ϕ_x $(E_x$ หรือ $H_x)$ และ ϕ_y $(E_y$ หรือ $H_y)$ โดยที่องค์ประกอบสนามตามขวางเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\phi_x = \{U(y)\}^T \{\phi_t\}_e = \{U\}^T \{\phi_t\}_e \tag{2.35}$$

$$\phi_y = \{V(x)\}^T \{\phi_t\}_e = \{V\}^T \{\phi_t\}_e \tag{2.36}$$

$$\{U\} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 + \tilde{c}_1 y \\ \tilde{a}_2 + \tilde{c}_2 y \\ \tilde{a}_3 + \tilde{c}_3 y \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

$$\{V\} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 - \tilde{c}_1 x \\ \tilde{b}_2 - \tilde{c}_2 x \\ \tilde{b}_3 - \tilde{c}_3 x \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

โดยที่ $\{U\}$ และ $\{V\}$ เป็นฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ของเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมและมีสัมประสิทธิ์ $\tilde{a}_k, \tilde{b}_k, \tilde{c}_k$ ดังนี้

$$\tilde{a}_k = \frac{(y_{n+3}\cos\theta_{n+3} - x_{n+3}\sin\theta_{n+3})\sin\theta_{l+3} - (y_{l+3}\cos\theta_{l+3} - x_{l+3}\sin\theta_{l+3})\sin\theta_{n+3}}{\Delta} \tag{2.39}$$

$$\tilde{b}_k = \frac{(y_{l+3}\cos\theta_{l+3} - x_{l+3}\sin\theta_{l+3})\cos\theta_{n+3} - (y_{n+3}\cos\theta_{n+3} - x_{n+3}\sin\theta_{n+3})\cos\theta_{l+3}}{\Delta} \tag{2.40}$$

$$\tilde{c}_k = \frac{(\cos\theta_{l+3}\sin\theta_{n+3} - \cos\theta_{n+3}\sin\theta_{l+3})}{\Delta} \tag{2.41}$$

โดยที่

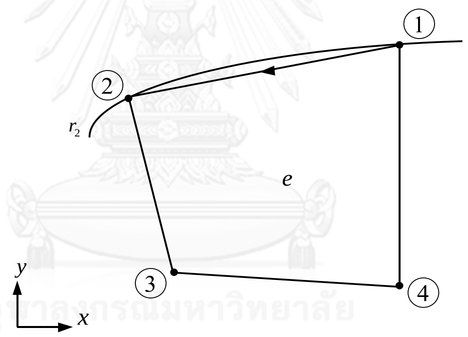
$$0 \le \theta_{k+3} = \tan^{-1}\left(\frac{y_k - y_l}{x_k - x_l}\right) < \pi \tag{2.42}$$

$$\Delta = \sum_{k=1}^{3} \left(y_{k+3} \cos\theta_{k+3} - x_{k+3} \sin\theta_{k+3} \right) \cdot \left(\cos\theta_{l+3} \sin\theta_{n+3} - \cos\theta_{n+3} \sin\theta_{l+3} \right) \qquad (2.43)$$

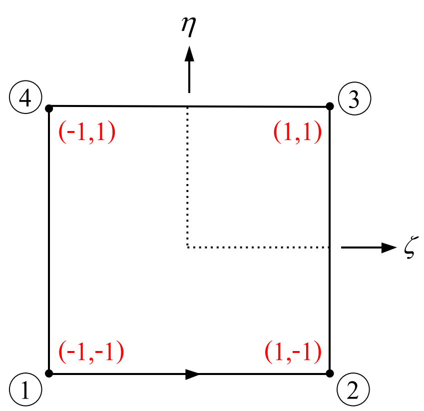
จากสมการทั้งหมดข้างต้นจะเห็นว่าเมื่อต้องพิจารณาสนามในรูปของเวกเตอร์ จะต้องใช้ทั้งฟังก์ชันรูปร่างโนดและฟังก์ชันรูปร่างขอบในการแทนค่า ซึ่งซับซ้อนและยุ่งยาก งานวิจัยนี้จึงทดลองเลือกใช้เพียงฟังก์ชันรูปร่างโนด โดยแบ่งเอลิเมนต์เป็นแบบสี่เหลี่ยมธรรมดา

2.3.2.2 ฟังก์ชันรูปร่างสี่เหลี่ยมแบบเชิงเส้นคู่ (bilinear quadrilateral interpolation function)

เอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมเชิงเส้นคู่ในระนาบ $x-y$ แสดงไว้ในภาพที่ 2.8 โดยรูปสี่เหลี่ยมดังกล่าวถูกสร้างขึ้นจากจุด 4 จุดซึ่งถูกกำหนดหมายเลขไว้ 1 - 4 ตามทิศทวนเข็มนาฬิกา การสร้างฟังก์ชันการประมาณค่าเชิงเส้นคู่สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม ทำได้โดยการแทนค่าแบบไอโซพาราเมทริก (isoparametric) โดยถูกใช้ในการเปลี่ยนรูปฟังก์ชันจากระบบพิกัดธรรมชาติไปเป็นระบบพิกัด $x-y$ และในทางกลับกันก็สามารถแปลงจากระบบพิกัด $x-y$ ไปเป็นระบบพิกัดธรรมชาติ ในส่วนของเอลิเมนต์หลักที่ถูกกำหนดในระบบพิกัดธรรมชาติ $\xi-\eta$ มีรูปทรงสี่เหลี่ยมดังแสดงไว้ในภาพที่ 2.9 [27]



ภาพที่ 2.8 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมวางตัวในระนาบ $x-y$



ภาพที่ 2.9 สี่เหลี่ยมหลัก (master element) วางตัวในระนาบ $\xi-\eta$

ฟังก์ชันการประมาณค่าเชิงเส้นคู่โดยทั่วไปสำหรับจีโอเมทริกโดเมนของโนดที่ 1 ในเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมหลักมีรูปแบบดังนี้

$$N_1(\xi,\eta) = c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\xi\eta \tag{2.44}$$

ซึ่งเมื่อพิจารณาคุณสมบัติของพหุนามลากรองจ์ (Lagrange polynomials) จะได้

$$N_1 = \begin{cases} 1 & at\,node \quad 1 \\ 0 & at \;\; all \;\; othernodes \end{cases} \tag{2.45}$$

ในการประยุกต์ใช้เงื่อนไขเหล่านี้กับโนดทั้ง 4 ของเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมหลัก ผลลัพธ์ที่ได้ก็คือสมการที่มีค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่าทั้ง 4 สมการ โดยสมการจะให้ผลลัพธ์ที่เป็นค่าคงที่

$$N_1(-1,-1) = c_1 - c_2 - c_3 + c_4 = 1 \tag{2.46}$$

$$N_1(1,-1) = c_1 + c_2 - c_3 - c_4 = 0 \tag{2.47}$$

$$N_1(1,1) = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0 \tag{2.48}$$

$$N_1(-1,1) = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 = 0 \tag{2.49}$$

จากสมการข้างต้น ทำให้สามารถหาค่าคงที่ดังกล่าวได้ดังนี้

$$c_1 = \frac{1}{4}, c_2 = -\frac{1}{4}, c_3 = -\frac{1}{4}, c_4 = \frac{1}{4} \tag{2.50}$$

เมื่อแทนค่าลงในฟังก์ชันการประมาณค่าสำหรับโนดที่ 1 จะสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\begin{aligned} N_1(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi-\eta+\xi\eta) \\ &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \end{aligned} \tag{2.51}$$

จะเห็นได้ว่าสามารถใช้วิธีการเดียวกันสร้างฟังก์ชันรูปร่างการประมาณค่าสำหรับโนดทั้ง 4 ในเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมได้ดังนี้

$$\begin{aligned} N_1(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \tag{2.52}$$

ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า และพิกัด x, y ภายในเอลิเมนต์สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันพื้นฐานที่แสดงไว้ในสมการที่ *(2.52)* หรือสามารถเขียนอีกได้อีกแบบหนึ่ง

$$u = u_1^e N_1 + u_2^e N_2 + u_3^e N_3 + u_4^e N_4 = \sum_{i=1}^{4} u_i^e N_i \tag{2.53}$$

และ

$$x = x_1^e N_1 + x_2^e N_2 + x_3^e N_3 + x_4^e N_4 = \sum_{i=1}^{4} x_i^e N_i \tag{2.54}$$

$$y = y_1^e N_1 + y_2^e N_2 + y_3^e N_3 + y_4^e N_4 = \sum_{i=1}^{4} y_i^e N_i \tag{2.55}$$

การหาค่าของเมทริกซ์และเวกเตอร์ของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้นคู่นั้นสามารถคำนวณได้ด้วยวิธีเดียวกับการหาค่าในเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเชิงเส้น โดยฟังก์ชันการประมาณค่าสำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้นคู่แสดงดังสมการ

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \tag{2.56}$$

นอกจากนี้ยังสามารถเขียนฟังก์ชันการประมาณค่าที่อยู่ในรูปตัวแปร x, y และตัวแปรที่ไม่ทราบค่าได้เช่นกัน ดังต่อไปนี้

$$\boldsymbol{u = u_1^e N_1 + u_2^e N_2 + u_3^e N_3 + u_4^e N_4} \tag{2.57}$$

และ

$$\boldsymbol{x = x_1^e N_1 + x_2^e N_2 + x_3^e N_3 + x_4^e N_4} \tag{2.58}$$

$$\boldsymbol{y = y_1^e N_1 + y_2^e N_2 + y_3^e N_3 + y_4^e N_4} \tag{2.59}$$

โดยตัวแปร $\boldsymbol{x_i^e}$ และ $\boldsymbol{y_i^e}$ คือตำแหน่งของโนดในเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม และ $\boldsymbol{u_i^e}$ คือตัวแปรที่ไม่ทราบค่าในกรณีที่มีโนด 4 โนด โดยค่า $i = 1, 2, 3$ และ 4 จากการใช้กฎลูกโซ่ของอนุพันธ์ทำให้สามารถหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันการประมาณค่าในรูปของ ξ และ $\boldsymbol{\eta}$ ได้ดังนี้

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} \tag{2.60}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} \tag{2.61}$$

หรือสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{2.62}$$

เมื่อ J คือเมทริกซ์จาโคเบียนที่มีค่าเท่ากับ

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \tag{2.63}$$

โดยที่

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{1}{4}\left[-(1-\eta)x_1^e + (1-\eta)x_2^e + (1+\eta)x_3^e - (1+\eta)x_4^e\right] \\ J_{12} &= \frac{1}{4}\left[-(1-\eta)y_1^e + (1-\eta)y_2^e + (1+\eta)y_3^e - (1+\eta)y_4^e\right] \\ J_{21} &= \frac{1}{4}\left[-(1-\xi)x_1^e - (1+\xi)x_2^e + (1+\xi)x_3^e + (1-\xi)x_4^e\right] \\ J_{22} &= \frac{1}{4}\left[-(1-\xi)y_1^e - (1+\xi)y_2^e + (1+\xi)y_3^e + (1-\xi)y_4^e\right] \end{aligned} \tag{2.64}$$

ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างอนุพันธ์ย่อยในรูปของ x และ y กับอนุพันธ์ย่อยในรูปของ ξ และ η สามารถหาได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|}\begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{2.65}$$

เมื่อ $|J|$ คือ ดีเทอร์มิแนนต์ (determinant) ของจาโคเบียนเมทริกซ์ ที่มีค่าเท่ากับ

$$|J| = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} \tag{2.66}$$

จากตัวอย่างที่ให้ไว้ข้างต้น เมื่อพิจารณาอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างการประมาณค่าที่สอดคล้องกับโนดที่ 1 จะได้

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1-\eta)$$
$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1-\xi) \tag{2.67}$$

และเมื่อแทนค่า *(2.67)* ใน *(2.65)* จะได้

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|}\begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\dfrac{1}{4}(1-\eta) \\ -\dfrac{1}{4}(1-\xi) \end{Bmatrix} \tag{2.68}$$

เพราะฉะนั้น เราสามารถเขียนอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างการประมาณค่าของโนดที่ 1 ให้อยู่ในรูป

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{1}{4|J|}\left[-J_{22}(1-\eta) + J_{12}(1-\xi)\right]$$
$$\frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{1}{4|J|}\left[J_{21}(1-\eta) - J_{11}(1-\xi)\right] \tag{2.69}$$

ในขณะเดียวกัน เมื่อพิจารณาโนดที่เหลือด้วยวิธีเดียวกันจะได้

อนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างการประมาณค่าของโนดที่ 2 :

$$\frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{1}{4|J|}\left[J_{22}(1-\eta) + J_{12}(1+\xi)\right]$$
$$\frac{\partial N_2}{\partial y} = \frac{1}{4|J|}\left[-J_{21}(1-\eta) - J_{11}(1+\xi)\right] \tag{2.70}$$

อนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างการประมาณค่าของโนดที่ 3 :

$$\frac{\partial N_3}{\partial x} = \frac{1}{4|J|}\left[J_{22}(1+\eta) - J_{12}(1+\xi)\right]$$
$$\frac{\partial N_3}{\partial y} = \frac{1}{4|J|}\left[-J_{21}(1+\eta) + J_{11}(1+\xi)\right] \tag{2.71}$$

อนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างการประมาณค่าของโนดที่ 4 :

$$\frac{\partial N_4}{\partial x} = \frac{1}{4|J|}\left[-J_{22}\left(1+\eta\right) - J_{12}\left(1-\xi\right)\right]$$
$$\frac{\partial N_4}{\partial y} = \frac{1}{4|J|}\left[J_{21}\left(1+\eta\right) + J_{11}\left(1-\xi\right)\right] \tag{2.72}$$

2.3.3 สมการในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

จากการแบ่งพื้นที่ย่อยหรือเอลิเมนต์ดังที่กล่าวมาแล้วนั้นสามารถสรุปได้ว่าคำตอบของสนามประมาณค่า ϕ จะถูกประมาณค่าให้อยู่บนจุดต่อหรือโนดของแต่ละเอลิเมนต์ และค่าคำตอบของสนามสามารถประมาณได้เท่ากับผลรวมของฟังก์ชันรูปร่างของแต่ละโนดคูณกับค่าของสนามของแต่ละโนด ซึ่งเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า โดยการประมาณค่าคำตอบของสนามสามารเขียนให้อยู่รูปสมการดังนี้

$$\phi_t^e(x,y) = \sum_{j=1}^{N} N_j(x,y)\phi_j(z) \tag{2.73}$$

โดยที่ ϕ_t^e คือ คำตอบของสนามประมาณค่าในแต่ละหน้าตัดระนาบ $x-y$

N_j คือ ฟังก์ชันรูปร่างที่โนด j

N คือ จำนวนของโนด

เมื่อแทนคำตอบของสนามประมาณค่าลงในสนามทั่วไปของคลื่นสมการที่ (2.9) และนำมาวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างจะสามารถเขียนสมการของเศษตกค้าง $R(x,y)$ โดยจากวิธีการของกาเลอคินฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักที่ใช้ในการคำนวณนั้นจะเป็นฟังก์ชันเดียวกับฟังก์ชันรูปร่างโดยจะทำการคูณ $R(x,y)$ ด้วยฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (weight function) หลังจากนั้นจะทำการอินทิเกรตบนพื้นที่ของเอลิเมนต์ และบังคับให้เท่ากับศูนย์

$$\int_{\Omega} N_i(x,y)R\left(x,y\right)dxdy = 0 \tag{2.74}$$

หลังจากนั้นด้วยวิธีของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะสามารถประยุกต์รูปของสมการอนุพันธ์อันดับสองของคลื่นให้อยู่ในรูปของสมการเมทริกซ์ (FEM matrix form) ได้ดังนี้

$$\left[M^e\right]\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{\phi_t^e\right\} = \left[K^e\right]\left\{\phi_t^e\right\} \tag{2.75}$$

โดยที่ $\left[M^{e}\right]$ และ $\left[K^{e}\right]$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $N\times N$ และ $\{\phi_{t}^{e}\}$ เป็นคอลัมน์เวกเตอร์ (column vector) ของคำตอบของสนามประมาณค่า และสามารถเขียนกระจายรูปเมทริกซ์ $\left[M^{e}\right]$ และ $\left[K^{e}\right]$ ได้ดังนี้

$$\left[M^{e}\right]=\begin{pmatrix} M_{11}^{e} & M_{12}^{e} & \cdots M_{1N}^{e} \\ M_{21}^{e} & M_{22}^{e} & \cdots M_{2N}^{e} \\ \vdots & \vdots & \ddots \ \vdots \\ M_{N1}^{e} & M_{N2}^{e} & \cdots M_{NN}^{e} \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

$$\left[K^{e}\right]=\begin{pmatrix} K_{11}^{e} & K_{12}^{e} & \cdots K_{1N}^{e} \\ K_{21}^{e} & K_{22}^{e} & \cdots K_{2N}^{e} \\ \vdots & \vdots & \ddots \ \vdots \\ K_{N1}^{e} & K_{N2}^{e} & \cdots K_{NN}^{e} \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

ขั้นตอนต่อไปหลังจากได้เมทริกซ์ที่เป็นตัวแทนของแต่ละเอลิเมนต์ จะต้องทำการรวมเมทริกซ์ของแต่ละเอเลิเมนต์เข้าเป็นเมทริกซ์ครอบคลุม โดยสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ครอบคลุมได้ ยกตัวอย่างดังสมการที่ *(2.78)* โดยที่การรวมเมทริกซ์ของแต่ละเอลิเมนต์เป็นเมทริกซ์ครอบคลุมนั้นต้องอ้างอิงหมายเลขจุดต่อครอบคลุมของแต่ละเอลิเมนต์

$$[M]\frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}}\{\phi_{t}\}=[K]\{\phi_{t}\} \quad (2.78)$$

โดยขั้นตอนสมการทางคณิตศาสตร์ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จะแสดงอย่างละเอียดในรูปของสมการเวกเตอร์ในบทที่ 3 และจากหัวข้อ 2.3.2 ฟังก์ชันรูปร่างนั้น จะเห็นว่าค่าในแต่ละจุดโนดในแต่ละเอลิเมนต์ ของเมทริกซ์ในสมการที่ *(2.76) และ* (2.77) ค่า M^{e} และ K^{e} สามารถหาคำตอบของสมการโดยการแทนสมการของฟังก์ชันรูปร่างที่โนดนั้นไป ยกตัวอย่างเมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างสี่เหลี่ยมแบบเชิงเส้นคู่ในหัวข้อ 2.3.2.2 สามารถแทนค่าสมการฟังก์ชันรูปร่างในเมทริกซ์ K^{e} โดยกำหนดให้

$$K_{ij}^{e}=-\iint_{\Omega^{e}}\left[\frac{\partial N_{i}}{\partial x}\frac{\partial N_{j}}{\partial x}+\frac{\partial N_{i}}{\partial y}\frac{\partial N_{j}}{\partial y}\right]dxdy \quad (2.79)$$

เมื่อ Ω คือโดเมนของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม ซึ่งการอินทิกรัลใน *(2.79)* สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$K_{ij}^{e}=-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\partial N_{i}}{\partial x}\frac{\partial N_{j}}{\partial x}+\frac{\partial N_{i}}{\partial y}\frac{\partial N_{j}}{\partial y}\right]\left|J\right|d\xi d\eta \quad (2.80)$$

โดยการอินทิกรัล 2 ชั้นนั้นทำบนโดเมนของเอลิเมนต์หลักระนาบ ξ-η ซึ่งมีลักษณะเช่นเดียวกับรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ในภาพที่ 2.9 จะสังเกตได้ว่าการทำอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันการประมาณค่าในเทอม

ของ x และ y สามารถทำได้โดยการใช้เมทริกซ์จาโคเบียนบนแกน ξ และ η ดังสมการที่ (2.69) - (2.72)

จากตัวอย่างข้างต้น ในกรณี K_{11}^{e} สามารถหาค่าได้จาก

$$
\begin{aligned}
K_{11}^{e} &= -\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\left(\frac{\partial N_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial N_1}{\partial y}\right)^2\right]|J|\,d\xi d\eta \\
&= -\frac{1}{16}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{|J|}\left\{\begin{matrix}\left[-J_{22}(1-\eta)+J_{12}(1-\xi)\right]^2+ \\ \left[J_{21}(1-\eta)-J_{11}(1-\xi)\right]^2\end{matrix}\right\}d\xi d\eta
\end{aligned}
\tag{2.81}
$$

จะเห็นได้ว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างใน (2.81) นั้นค่อนข้างจะซับซ้อน มีพจน์ของ ξ และ η ติดอยู่ทำให้การวิเคราะห์นั้นทำได้ยาก เมื่อแทนค่าในสมการมีความซับซ้อนยุ่งยากมากกว่าในฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้นเป็นอย่างมาก ซึ่งการอินทิกรัลนี้ต้องการผลลัพธ์เป็นตัวเลข ดังนั้นในการแก้สมการจะใช้วิธีการประมาณค่ามาช่วยในการแก้สมการ วิธีการการประมาณค่าที่ใช้กันอย่างแพร่หลายก็คือการสร้างสี่เหลี่ยมจัตุรัสของเกาส์ (Gauss quadrature) โดยสมการการประมาณค่าอินทิเกรตสองชั้นของเกาส์มีวิธีการหาคำตอบดังนี้

เมื่อพิจารณาสมการด้านล่าง

$$
I=\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi \tag{2.82}
$$

จากการใช้การประมาณค่าสี่เหลี่ยมแบบเกาส์ การอินทิกรัลในสมการที่ (2.82) สามารถประมาณค่าได้ดังนี้

$$
I \approx \sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\xi_i) \tag{2.83}
$$

เมื่อ ω_i คือค่าน้ำหนักเกาส์ (Guass weights) และ ξ_i คือค่าเกาส์ที่จุดใดๆ (Guass points) ตารางที่ 2.2 แสดงให้เห็นถึงค่าน้ำหนักเกาส์และค่าของเกาส์ที่จุดใดๆ โดยเริ่มจากจุดที่ 1 ไปจนถึงจุดที่ 7 ซึ่ง n-point Gauss quadrature จะแสดงอยู่ในรูปของพหุนามที่มีดีกรีเท่ากับ $(2n-1)$ หรือน้อยกว่า

ตารางที่ 2.4 ค่าน้ำหนักและค่าเกาส์ที่จุดใดๆของรูปสี่เหลี่ยมเกาส์

N	ξ	ω_i
1	0.0	2.0
2	±0.5773502692	1.0
3	0.0	0.8888888889
	±0.77445966692	0.5555555556
4	±0.3399810436	0.6521451549
	±0.8611363116	0.3478548451
5	0.0	0.5688888889
	±0.5384693101	0.4786286705
	±0.9061798459	0.2369268851
6	±0.2386191861	0.4679139346
	±0.6612093865	0.3607615730
	±0.9324695142	0.1713244924
7	0.0	0.4179591837
	±0.4058451514	0.3818300505
	±0.7415311856	0.2797053915
	±0.9491079123	0.1294849662

รูปสี่เหลี่ยมเกาส์สามารถคำนวณได้จากการทำอินทิกรัล 2 ชั้นดังสมการ

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f\left(\xi,\eta\right) d\xi d\eta \qquad (2.84)$$

จะเห็นได้ว่าการอินทิกรัลใน (2.81) สามารถหาค่าเชิงตัวเลขได้จากสมการ (2.85) และตารางที่ 2.4

$$
\begin{aligned}
I &\approx \int_{-1}^{1}\left[\sum_{i=1}^{n}\varpi_i f\left(\xi_i,\eta\right)\right]d\eta \\
&\approx \sum_{j=1}^{n}\varpi_j\left[\sum_{i=1}^{n}\varpi_i f\left(\xi_i,\eta_j\right)\right] \\
&\approx \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\varpi_i\varpi_j f\left(\xi_i,\eta_j\right)
\end{aligned} \tag{2.85}
$$

นอกจากนี้ยังมีอีกเมทริกซ์เอลิเมนต์หนึ่งที่เกี่ยวข้องกับการทำไฟไนต์เอลิเมนต์ในโนดสองมิติ นั่นก็คือเมทริกซ์ M ซึ่งจะเห็นได้ว่าการอินทิกรัลในเมทริกซ์ M นั้นจะมีความซับซ้อนเช่นเดียวกับการอินทิกรัลเมทริกซ์ K โดยเมทริกซ์ M แสดงในสมการ

$$
\begin{aligned}
M_{ij}^{e} &= \iint_{\Omega^e} N_i N_j dxdy \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} N_i N_j \left|J\right| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{2.86}
$$

2.4 ระเบียบวิธีบีมโพรพาเกชัน

ขั้นตอนการจำลองการเดินทางของคลื่นแสงในท่อนำคลื่นแสงด้วยระเบียบวิธีบีมโพรพาเกชันจะเริ่มต้นจากการแบ่งระนาบหน้าตัดของท่อนำคลื่นแสงออกเป็นระนาบส่วนย่อย จำนวน n ระนาบ โดยระนาบแต่ละระนาบจะวางตัวตั้งฉากกับทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่นแสง ดังภาพที่ 1.1 ในบทที่ 1 ระนาบ $z = z_0$ จะอยู่ที่ต้นทางที่แสงถูกส่งเข้าสู่ท่อนำคลื่นแสง ส่วนระนาบ $z = z_0 + n\Delta z$ จะอยู่ที่ปลายทางด้านที่แสงออกจากท่อนำคลื่นแสง ต่อมาจึงจัดรูปสมการคลื่น เพื่อให้ได้มาซึ่งสมการระเบียบวิธีบีมโพรพาเกชันที่ใช้แสดงความสัมพันธ์ของคลื่นแสงบนระนาบแต่ละระนาบที่อยู่ต่อเนื่องกันเป็นรายคาบ การกำหนดฟังก์ชันของคลื่นแสงเป็นอินพุตที่ระนาบ $z = z_0$ จะทำให้วิเคราะห์หาค่าฟังก์ชันของคลื่นแสงที่ระนาบถัดไป คือ $z = z_0 + \Delta z$ และฟังก์ชันของคลื่นแสงที่วิเคราะห์ได้จะใช้เป็นคลื่นแสงอินพุตของระนาบถัดไป $z = z_0 + 2\Delta z$ ต่อไป โดยดำเนินการวิเคราะห์เช่นนี้ต่อไปเรื่อยๆ จนกระทั่งสามารถหาค่าฟังก์ชันคลื่นแสงที่ระนาบ $z = z_0 + n\Delta z$ ที่เป็นระยะปลายทางจึงเป็นการสิ้นสุดกระบวนการวิเคราะห์ ทั้งนี้ในการวิเคราะห์หาฟังก์ชันของคลื่นแสงบนระนาบตัดขวางของท่อนำคลื่นแสงจะทำได้โดยอาศัยระเบียบวิธีในการวิเคราะห์เชิงตัวเลขแบบอื่นๆ โดยงานวิจัยนี้ได้เลือกใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ระเบียบวิธีบีมโพรพาเกชันที่เลือกใช้ในงานวิจัยนี้ คือ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชัน (Finite Element Beam Propagation Method) โดยระเบียบวิธีนี้นำวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาแก้ไข

ปัญหาในระนาบตัดขวาง (xy-plane) และใช้วิธีบีมโพรพาเกชันมาแก้ไขปัญหาในแนวแกน (z-axis) ที่เป็นแนวเดียวกับทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่น โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น สามารถแบ่งจำนวนเอลิเมนต์ ให้เล็กมากๆ และมีขนาดใดๆ ตามต้องการได้ซึ่งทำให้สามารถแบ่งพื้นที่ในการวิเคราะห์ได้อย่างมีประสิทธิภาพและลดจำนวนโนดที่ใช้ในการคำนวณลงได้ นอกจากนั้นระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ยังสามารถปรับให้สอดคล้องกับสนามและรูปร่างของท่อนำคลื่นแสงในระหว่างขั้นตอนการคำนวณได้ ทำให้ได้ผลการคำนวณที่ละเอียดแม่นยำยิ่งขึ้น

สมการบีมโพรพาเกชัน เป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามในระนาบสองระนาบ ดังสมการ *(2.87)* เมื่อป้อนสนามอินพุตเข้าที่ระนาบแรกและคำนวณด้วยสมการบีมโพรพาเกชัน เพื่อหาเอาท์พุตที่ระนาบที่สอง ก็จะได้ค่าสนามเอาท์พุตของการคำนวณในระนาบถัดไป ดังภาพที่ 2.10 เมื่อคำนวณทีละระนาบต่อไปเรื่อยๆ จะสามารถหาสนามได้ตลอดความยาวของท่อนำคลื่นแสง

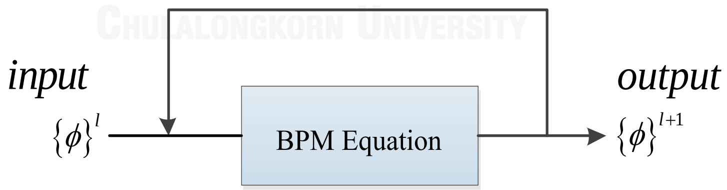
$$[A]_l \{\phi\}^{l+1} = [B]_l \{\phi\}^l \tag{2.87}$$

โดยที่ Δz คือ ระยะห่างทางแกน z ในแต่ละระนาบ (propagation step size)

$\{\phi\}^{l+1}$ คือ ขนาดของสนามที่ระนาบ $l+1$ ตามแนวแกน z

$\{\phi\}^{l}$ คือ ขนาดของสนามที่ระนาบ l ตามแนวแกน z

$[A]_l, [B]_l$ คือ เมทริกซ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธี BPM

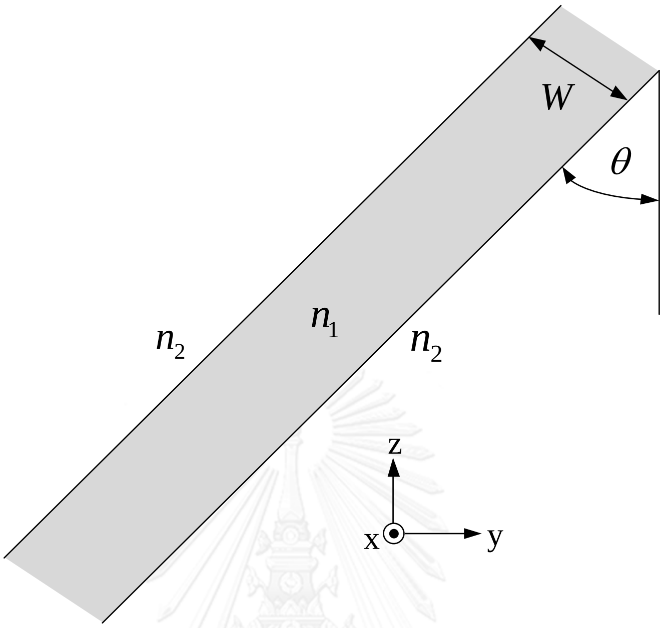


ภาพที่ 2.10 การคำนวณด้วยวิธี BPM

2.5 การประมาณแบบพาเดในการแก้ปัญหามุมกว้างของท่อนำคลื่นแสง (Wide Angle)

การประมาณแบบพาเดในการแก้ปัญหามุมกว้างของท่อนำคลื่นแสงตัวอย่างตามภาพที่ 2.11 เป็นการประมาณค่าในรูปของเศษส่วนที่ให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูง โดยสามารถปรับความละเอียดของการคำนวณได้จากการเพิ่มอันดับของการประมาณค่าให้สูงขึ้นได้ อีกทั้งยังเป็นการคำนวณเพื่อเก็บค่าของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเพียงระนาบเดียว ทำให้ไม่สิ้นเปลืองหน่วยความจำในการคำนวณ อย่างไร

ก็ตาม การประมาณค่าแบบพาเดมีข้อเสียอยู่ที่ความซับซ้อนของสมการ ซึ่งจะต้องมีการหาอินเวอร์สของเมทริกซ์จึงทำให้การประมาณค่านั้นใช้เวลาในการคำนวณที่มากขึ้นและผลการคำนวณอาจจะมีผลลัพธ์ที่คลาดเคลื่อนจากการหาอินเวอร์สของเมทริกซ์ได้ [28]



ภาพที่ 2.11 การประมาณพาเดในการแก้ปัญหามุมกว้างของท่อนำคลื่นแสง

เมื่อพิจารณาสมการอนุพันธ์อันดับสองของคลื่นในเทอมของ z จะได้สมการคลื่นสเกลาร์ ดังนี้

$$2j\beta\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=P\phi \tag{2.88}$$

โดยที่ ϕ คือ สนามไฟฟ้าหรือสนามแม่เหล็กที่ไม่ทราบค่า และเทอมของตัวดำเนินการ P เมื่อพิจารณาใน TE โหมด $P=P_{TE}$ คือ

$$P_{TE}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k_0^2\left(\varepsilon_r-n_{eff}^2\right) \tag{2.89}$$

ในขณะเดียวกัน เมื่อพิจารณา TM โหมด $P=P_{TM}$ จะได้

$$P_{TM}=\varepsilon_r\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial}{\partial x}\right)+k_0^2\left(\varepsilon_r-n_{eff}^2\right) \tag{2.90}$$

จากสมการ *(2.88)* จัดรูปสมการใหม่จะได้

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(1+\frac{j}{2\beta}\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi=-\frac{jP}{2\beta}\phi \tag{2.91}$$

และ

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{-jP/2\beta}{1+\left(j/2\beta\right)\left(\partial/\partial z\right)}\phi \tag{2.92}$$

จากสมการอนุพันธ์ข้างต้น หากไม่นำเทอม z มาคำนวณ สมการ *(2.91)* จะสามารถลดรูปให้อยู่ในรูปของสมการการประมาณค่าแบบเฟรสเนล (Fresnel approximation) ได้ และเมื่อพิจารณาพจน์ของอนุพันธ์ $\frac{\partial}{\partial z}$ จะสามารถมองเป็นรูปแบบการปรากฏซ้ำ ความสัมพันธ์เวียนเกิด (recurrence relation) ได้ดังนี้

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_n = \left.\frac{-jP/2\beta}{1+\left(j/2\beta\right)\left(\partial/\partial z\right)}\right|_{n-1} \tag{2.93}$$

โดยกำหนดให้ค่าเริ่มต้นของสมการอนุพันธ์มีค่าเท่ากับ

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_{-1} = 0 \tag{2.94}$$

จะทำให้สามารถพิจารณาการลดรูปสมการสำหรับลำดับมุมกว้าง (Wide-Angle order : WA-order) ได้โดยการแทนค่าสมการไปเรื่อยๆ ได้ผลดังต่อไปนี้

มุมกว้างลำดับที่ 0 (การประมาณค่าแบบเฟรสเนล)

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_0 &= \frac{-jP/2\beta}{1+\frac{j}{2\beta}\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_{-1}} \\ &= -j\frac{P}{2\beta}\end{aligned} \tag{2.95}$$

มุมกว้างลำดับที่ 1

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_1 &= \frac{-jP/2\beta}{1+\frac{j}{2\beta}\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_0} \\ &= \frac{-jP/2\beta}{1+\frac{j}{2\beta}\left(-\frac{jP}{2\beta}\right)} \\ &= -j\frac{P/2\beta}{1+P/4\beta^2}\end{aligned} \tag{2.96}$$

มุมกว้างลำดับที่ 2

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_2 = \frac{-jP/2\beta}{1+\frac{j}{2\beta}\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_1}$$

$$= \frac{-jP/2\beta}{1+\frac{j}{2\beta}\frac{-jP/2\beta}{\left(1+P/4\beta^2\right)}} \tag{2.97}$$

$$= -j\frac{P/2\beta + P^2/8\beta^3}{1+P/2\beta^2}$$

มุมกว้างลำดับที่ 3

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_3 = \frac{-jP/2\beta}{1+\frac{j}{2\beta}\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_2}$$

$$= \frac{-jP/2\beta}{1+\frac{j}{2\beta}\frac{-j\left(P/2\beta+P^2/8\beta^3\right)}{1+P/2\beta^2}} \tag{2.98}$$

$$= \frac{-\left(jP/2\beta\right)\left(1+P/2\beta^2\right)}{1+P/2\beta^2+P/4\beta^2+P^2/16\beta^4}$$

$$= -j\frac{P/2\beta+P^2/4\beta^3}{1+3P/4\beta^2+P^2/16\beta^4}$$

มุมกว้างลำดับที่ 4

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_4 = \frac{-jP/2\beta}{1+\frac{j}{2\beta}\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_3}$$

$$= \frac{-jP/2\beta}{1+\frac{j}{2\beta}\frac{-j\left(P/2\beta+P^2/4\beta^3\right)}{1+3P/4\beta^2+P^2/16\beta^4}} \tag{2.99}$$

$$= -j\frac{P/2\beta+3P^2/8\beta^3+P^3/32\beta^5}{1+P/\beta^2+3P^2/16\beta^4}$$

มุมกว้างลำดับที่ 5

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_5 &= \frac{-jP/2\beta}{1+\dfrac{j}{2\beta}\left.\dfrac{\partial}{\partial z}\right|_4} \\
&= \frac{-jP/2\beta}{1+\dfrac{j}{2\beta}\dfrac{-j\left(P/2\beta+3P^2/8\beta^3+P^3/32\beta^5\right)}{1+P/\beta^2+3P^2/16\beta^4}} \\
&= -j\frac{P/2\beta+P^2/2\beta^3+3P^3/32\beta^5}{1+5P/4\beta^2+3P^2/8\beta^4+P^3/64\beta^6}
\end{aligned}
\tag{2.100}
$$

มุมกว้างลำดับที่ 6

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_6 &= \frac{-jP/2\beta}{1+\dfrac{j}{2\beta}\left.\dfrac{\partial}{\partial z}\right|_5} \\
&= \frac{-jP/2\beta}{1+\dfrac{j}{2\beta}\dfrac{-j\left(P/2\beta+P^2/2\beta^3+3P^3/32\beta^5\right)}{1+5P/4\beta^2+3P^2/8\beta^4+P^3/64\beta^6}} \\
&= \frac{-j\left(P/2\beta+5P^2/8\beta^3+3P^3/16\beta^5+P^4/128\beta^7\right)}{1+3P/2\beta^2+5P^2/8\beta^4+P^3/16\beta^6} \\
&= -j\frac{P/2\beta+5P^2/8\beta^3+3P^3/16\beta^5+P^4/128\beta^7}{1+3P/2\beta^2+5P^2/8\beta^4+P^3/16\beta^6}
\end{aligned}
\tag{2.101}
$$

มุมกว้างลำดับที่ 7

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_7 &= \frac{-jP/2\beta}{1+\dfrac{j}{2\beta}\left.\dfrac{\partial}{\partial z}\right|_6} \\
&= \frac{-jP/2\beta}{1+\dfrac{j}{2\beta}\dfrac{-j\left(P/2\beta+5P^2/8\beta^3+3P^3/16\beta^5+P^4/128\beta^7\right)}{1+3P/2\beta^2+5P^2/8\beta^4+P^3/16\beta^6}}
\end{aligned}
\tag{2.102}
$$

จะเห็นได้ว่าสมการที่ *(2.93)* สามารถลดรูปตัวดำเนินการ P ได้ดังนี้

$$= -j\frac{P/2\beta + 3P^2/4\beta^3 + 5P^3/16\beta^5 + P^4/32\beta^7}{1 + 7P/4\beta^2 + 15P^2/16\beta^4 + 5P^3/32\beta^6 + P^4/256\beta^8}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = -j\frac{N}{D}\phi \tag{2.103}$$

เมื่อ N และ D คือพหุนามของตัวดำเนินการ P โดยจะได้ลำดับมุมกว้าง (WA) ตรงกับลำดับของการประมาณค่าแบบพาเดดังนี้

$$WA-0 \leftrightarrow pade'(1,0),$$

$$WA-1 \leftrightarrow pade'(1,1),$$

$$WA-2 \leftrightarrow pade'(2,1),$$

$$WA-3 \leftrightarrow pade'(2,2),$$

$$WA-4 \leftrightarrow pade'(3,2),$$

$$WA-5 \leftrightarrow pade'(3,3),$$

$$WA-6 \leftrightarrow pade'(4,3),$$

$$WA-7 \leftrightarrow pade'(4,4)$$

เมื่อพิจารณาสมการ *(2.103)* โดยใช้หลักการของวิธีการของแครงค์-นิโคลสัน (Crank-Nicholson algorithm) ซึ่งเป็นการหาคำตอบของอนุพันธ์อันดับหนึ่งจะได้

ด้านซ้ายมือ (Left-hand side) : $\frac{\partial\phi}{\partial z} \rightarrow \frac{1}{\Delta z}\left(\phi^{l+1} - \phi^{l}\right)$

ด้านขวามือ (Right-hand side) : $-j\frac{N}{D}\phi \rightarrow -j\frac{N}{D}\frac{1}{2}\left(\phi^{l+1} + \phi^{l}\right)$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า สมการด้านขวามือจะถูกเฉลี่ยด้วยค่า l และ $l+1$ และสามารถเขียนสมการ *(2.103)* ในรูปใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{1}{\Delta z}\left(\phi^{l+1} - \phi^{l}\right) = -j\frac{N}{D}\frac{1}{2}\left(\phi^{l+1} + \phi^{l}\right)$$

$$D\left(\phi^{l+1} - \phi^{l}\right) = -jN\Delta z = \frac{1}{2}\left(\phi^{l+1} + \phi^{l}\right) \tag{2.104}$$

ดังนั้น

$$\left(D + j\frac{\Delta z}{2}N\right)\phi^{l+1} = \left(D - j\frac{\Delta z}{2}N\right)\phi^{l} \tag{2.105}$$

จัดรูปสมการใหม่ให้อยู่ในรูป

$$\phi^{l+1} = \frac{D - j\left(\Delta z/2\right)N}{D + j\left(\Delta z/2\right)N}\phi^{l} \tag{2.106}$$

ซึ่งจากสมการที่ *(2.95) – (2.102)* ค่าสัมประสิทธิ์ของพหุนาม ในรูปตัวแปร N และ D ในสมการ (2.106) จะเป็นค่าจริง ดังนั้นจึงสามารถเขียนสมการ (2.106) ใหม่ได้ดังนี้

$$\phi^{l+1} = \frac{D - j\left(\Delta z/2\right)N}{\left[D + j\left(\Delta z/2\right)N\right]^{*}}\phi^{l} \tag{2.107}$$

โดยที่ค่า N และ D สำหรับลำดับมุมกว้างที่ 0 ถึง 7 จากสมการที่ *(2.95)-(2.102)* ตามลำดับ สามารถอธิบายได้ดังต่อไปนี้

1. ลำดับมุมกว้างที่ 0 หรือ พาเด (1,0) หรือ การประมาณค่าแบบ Fresnel: จากสมการ *(2.95)* จะได้

$$D = 1,\quad N = \frac{P}{2\beta} \tag{2.108}$$

ดังนั้น

$$D - j\frac{\Delta z}{2}N = 1 - j\frac{\Delta z}{2}\frac{P}{2\beta} \tag{2.109}$$

2. ลำดับมุมกว้างที่ 1 หรือ พาเด (1,1): จากสมการที่ *(2.96)* จะได้

$$D = 1 + \frac{P}{4\beta^{2}},\quad N = \frac{P}{2\beta} \tag{2.110}$$

ดังนั้น

$$D - j\frac{\Delta z}{2}N = 1 + \frac{P}{4\beta^{2}} - j\Delta\frac{P}{4\beta} = 1 + \frac{1}{4\beta^{2}}\left(1 - j\beta\Delta z\right)P \tag{2.111}$$

3. มุมกว้างลำดับที่ 2 หรือ พาเด (2,1): จากสมการ *(2.97)* จะได้

$$D = 1 + \frac{P}{2\beta^{2}},\quad N = \frac{P}{2\beta} + \frac{P^{2}}{8\beta^{3}} \tag{2.112}$$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
D - j\frac{\Delta z}{2}N &= 1 + \frac{P}{2\beta^2} - j\frac{\Delta z}{2}\left(\frac{P}{2\beta} + \frac{P^2}{8\beta^3}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{4\beta^2}\left(2 - j\beta\Delta z\right)P - j\frac{\Delta z}{16\beta^3}P^2
\end{aligned}
\tag{2.113}
$$

4. มุมกว้างลำดับที่ 3 หรือพาเด(2,2): จากสมการ *(2.98)* จะได้

$$
D = 1 + \frac{3P}{4\beta^2} + \frac{P^2}{16\beta^4},\ \ N = \frac{P}{2\beta} + \frac{P^2}{4\beta^3}
\tag{2.114}
$$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
D - j\frac{\Delta z}{2}N &= 1 + \frac{3P}{4\beta^2} + \frac{P^2}{16\beta^4} - j\frac{\Delta z}{2}\left(\frac{P}{2\beta} + \frac{P^2}{4\beta^3}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{4\beta^2}\left(3 - j\beta\Delta z\right)P + \frac{1}{16\beta^4}\left(1 - j2\beta\Delta z\right)P^2
\end{aligned}
\tag{2.115}
$$

5. มุมกว้างลำดับที่ 4 หรือพาเดา (3,2): จากสมการที่ *(2.99)* จะได้

$$
D = 1 + \frac{P}{\beta^2} + \frac{3P^2}{16\beta^4},\ \ N = \frac{P}{2\beta} + \frac{3P^2}{8\beta^3} + \frac{P^3}{32\beta^5}
\tag{2.116}
$$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
D - j\frac{\Delta z}{2}N &= 1 + \frac{P}{\beta^2} + \frac{3P^2}{16\beta^4} - j\frac{\Delta z}{2}\left(\frac{P}{2\beta} + \frac{3P^2}{8\beta^3} + \frac{P^3}{32\beta^5}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{4\beta^2}\left(4 - j\beta\Delta z\right)P + \frac{1}{16\beta^4}\left(3 - j3\beta\Delta z\right)P^2 - j\frac{\Delta z}{64\beta^5}P^3
\end{aligned}
\tag{2.117}
$$

6. มุมกว้างลำดับที่ 5 หรือ พาเดา (3,3): จากสมการ *(2.100)* จะได้

$$
D = 1 + \frac{5P}{4\beta^2} + \frac{3P^2}{8\beta^4} + \frac{P^3}{64\beta^6},\ \ N = \frac{P}{2\beta} + \frac{P^2}{2\beta^3} + \frac{3P^3}{32\beta^5}
\tag{2.118}
$$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
D - j\frac{\Delta z}{2}N &= 1 + \frac{5P}{4\beta^2} + \frac{3P^2}{8\beta^4} + \frac{P^3}{64\beta^6} - j\frac{\Delta z}{2}\left(\frac{P}{2\beta} + \frac{P^2}{2\beta^3} + \frac{3P^3}{32\beta^5}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{4\beta^2}\left(5 - j\beta\Delta z\right)P + \frac{1}{8\beta^4}\left(3 - j2\beta\Delta z\right)P^2 + \frac{1}{64\beta^6}\left(1 - j3\beta\Delta z\right)P^3
\end{aligned}
\tag{2.119}
$$

7. ปัญหามุมกว้างลำดับที่ 6 หรือ พาเด (4,3): จากสมการ *(2.101)* จะได้

$$D = 1 + \frac{3P}{2\beta^2} + \frac{5P^2}{8\beta^4} + \frac{P^3}{16\beta^6}, \quad N = \frac{P}{2\beta} + \frac{5P^2}{8\beta^3} + \frac{3P^3}{16\beta^5} + \frac{P^4}{128\beta^7} \tag{2.120}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} D - j\frac{\Delta z}{2}N &= 1 + \frac{3P}{2\beta^2} + \frac{5P^2}{8\beta^4} + \frac{P^3}{16\beta^6} \\ &- j\frac{\Delta z}{2}\left(\frac{P}{2\beta} + \frac{5P^2}{8\beta^3} + \frac{3P^3}{16\beta^5} + \frac{P^4}{128\beta^7}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{4\beta^2}\left(6 - j\beta\Delta z\right)P + \frac{1}{16\beta^4}\left(10 - j5\beta\Delta z\right)P^2 \\ &+ \frac{1}{32\beta^6}\left(2 - j3\beta\Delta z\right)P^3 - \frac{j\Delta z}{256\beta^7}P^4 \end{aligned} \tag{2.121}$$

8. มุมกว้างลำดับที่ 7 หรือ พาเด (4,4): จากสมการ *(2.102)* จะได้

$$D = 1 + \frac{7P}{4\beta^2} + \frac{15P^2}{16\beta^4} + \frac{5P^3}{32\beta^6} + \frac{P^4}{256\beta^8}, \; N = \frac{P}{2\beta} + \frac{3P^2}{4\beta^3} + \frac{5P^3}{16\beta^5} + \frac{P^4}{32\beta^7} \tag{2.122}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} D - j\frac{\Delta z}{2}N &= 1 + \frac{7P}{4\beta^2} + \frac{15P^2}{16\beta^4} + \frac{5P^3}{32\beta^6} + \frac{P^4}{256\beta^8} \\ &- j\frac{\Delta z}{2}\left(\frac{P}{2\beta} + \frac{3P^2}{4\beta^3} + \frac{5P^3}{16\beta^5} + \frac{P^4}{32\beta^7}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{4\beta^2}\left(7 - j\beta\Delta z\right)P + \frac{1}{16\beta^4}\left(15 - j6\beta\Delta z\right)P^2 \\ &+ \frac{1}{32\beta^6}\left(5 - j5\beta\Delta z\right)P^3 + \frac{1}{256\beta^8}\left(1 - j4\beta\Delta z\right)P^4 \end{aligned} \tag{2.123}$$

จากการคำนวณข้างต้นจะทำให้สามารถหาค่าสนามทำให้สามารถคำนวณทั้งสองข้างของสมการ (2.106) ได้

ตารางที่ 2.5 สรุปการประมาณค่าแบบพาเดลำดับต่างๆ

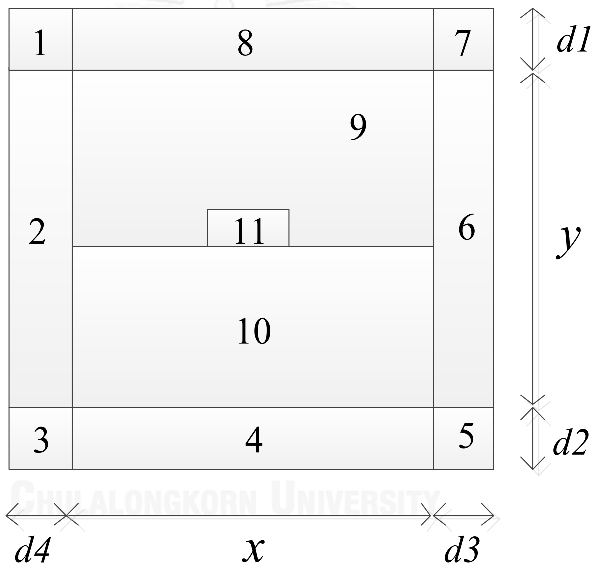
Padé Order (n,d)	Expression $\frac{N}{D}$
$(1,0)$	$\dfrac{\frac{P}{2\beta}}{1}$
$(1,1)$	$\dfrac{\frac{P}{2\beta}}{1+\frac{P}{4\beta^2}}$
$(2,1)$	$\dfrac{\frac{P}{2\beta}+\frac{P^2}{8\beta^3}}{1+\frac{P}{2\beta^2}}$
$(2,2)$	$\dfrac{\frac{P}{2\beta}+\frac{P^2}{4\beta^3}}{1+\frac{3P}{4\beta^2}+\frac{P^2}{16\beta^4}}$
$(3,2)$	$\dfrac{\frac{P}{2\beta}+\frac{3P^2}{8\beta^3}+\frac{P^3}{32\beta^5}}{1+\frac{P}{\beta^2}+\frac{3P^2}{16\beta^4}}$
$(3,3)$	$\dfrac{\frac{P}{2\beta}+\frac{P^2}{2\beta^3}+\frac{3P^3}{32\beta^5}}{1+\frac{5P}{4\beta^2}+\frac{3P^2}{8\beta^4}+\frac{P^3}{64\beta^6}}$
$(4,3)$	$\dfrac{\frac{P}{2\beta}+\frac{5P^2}{8\beta^3}+\frac{3P^3}{16\beta^5}+\frac{P^4}{128\beta^7}}{1+\frac{3P}{2\beta^2}+\frac{5P^2}{8\beta^4}+\frac{P^3}{16\beta^6}}$
$(4,4)$	$\dfrac{\frac{P}{2\beta}+\frac{3P^2}{4\beta^3}+\frac{5P^3}{16\beta^5}+\frac{P^4}{32\beta^7}}{1+\frac{7P}{4\beta^2}+\frac{15P^2}{16\beta^4}+\frac{5P^3}{32\beta^6}+\frac{P^4}{256\beta^8}}$

บทที่ 3
ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชันที่ใช้การประมาณพาเดแบบปรับตัวเพื่อการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแสง

3.1 สมการระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชันที่ใช้การประมาณพาเดแบบปรับตัว

3.1.1 สมการทั่วไปของคลื่นในวัสดุไอโซทรอปิก

เมื่อพิจารณาท่อนำคลื่นแสงจะสามารถพิจารณาคลื่นแสงได้ด้วยสมการแมกซ์เวลล์ โดยใช้ร่วมกับเงื่อนไขขอบเขต (boundary condition) แบบชั้นแมตช์เฟสสมบูรณ์ (perfectly matched layer : PML) [29] ตามภาพที่ 3.1



ภาพที่ 3.1 ภาพหน้าตัดขวางของท่อนำคลื่นแสงตัวอย่างร่วมกับเงื่อนไขขอบเขตแบบชั้นแมตช์เฟสสมบูรณ์ (PML)

เริ่มต้นโดยพิจารณาการคำนวณจากสมการแมกซ์เวลล์ในรูปโดเมนความถี่ที่ไม่มีแหล่งกำเนิดภายใน สำหรับตัวกลางแบบไอโซทรอปิก เมื่อใช้เงื่อนไขขอบเขตแอนไอโซทรอปิก ประเภทขอบเขตแบบชั้นแมตช์เฟสสมบูรณ์ จากบทที่ 2 จะได้สมการคลื่นในรูปสนามแม่เหล็กจากสมการ (2.9) ดังนี้

$$\nabla_s \times \left(\frac{1}{\varepsilon_r} \left(\nabla_s \times \vec{H} \right) \right) - k_0^2 \vec{H} = 0 \tag{3.1}$$

โดยเมื่อแบ่งเวกเตอร์สนามแม่เหล็กออกเป็น 2 องค์ประกอบ คือ องค์ประกอบของสนามแม่เหล็กตามขวาง (ระนาบ $x-y$) และองค์ประกอบของสนามแม่เหล็กตามยาว (แกน z) จะได้

$$\vec{H} = \vec{H}_t + \vec{a}_z H_z \tag{3.2}$$

และตัวดำเนินการเดล (del operator) สามารถแสดงดังต่อไปนี้ [30]

$$\nabla_s = \nabla_{ts} + \frac{1}{S_z}\vec{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{3.3}$$

$$\nabla_{ts} = \vec{a}_x \frac{1}{S_x}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{1}{S_y}\frac{\partial}{\partial y} \tag{3.4}$$

S_x, S_y, S_z เป็นพารามิเตอร์ของเงื่อนไขขอบเขตแบบชั้นแมตซ์เฟสสมบูรณ์ในบริเวณต่างๆ เมื่อพิจารณาหน้าตัดของโครงสร้างตัวอย่างในภาพที่ 3.1 จะได้ผลตามตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 ค่าพารามิเตอร์ (s) ของเงื่อนไขขอบเขตแบบชั้นแมตซ์เฟสสมบูรณ์

พารามิเตอร์ PML	บริเวณของ PML								
	1	2	3	4	5	6	7	8	≥9
s_x	s_4	s_4	s_4	1	s_3	s_3	s_3	1	1
s_y	s_1	1	s_2	s_2	s_2	1	s_1	s_1	1

โดยกำหนดให้ s_z = 1 ทุกบริเวณของ PML

เนื่องจากการวิเคราะห์นี้เป็นแบบแผนคลื่นรั่ว (leaky - mode) ดังนั้นพารามิเตอร์ของ PML จึงอยู่ในรูปของจำนวนเชิงซ้อนดังนี้ โดย $a = 1, 2, 3, 4$

$$s_a = 1 + j\left(1.5\frac{c_0}{\omega n_a}\frac{\rho_a^{\ 2}}{d_a^{\ 3}}\right)\ln R \tag{3.5}$$

เมื่อ c_0 คือ ความเร็วของแสงในสุญญากาศ

ω คือ ความเร็วเชิงมุม

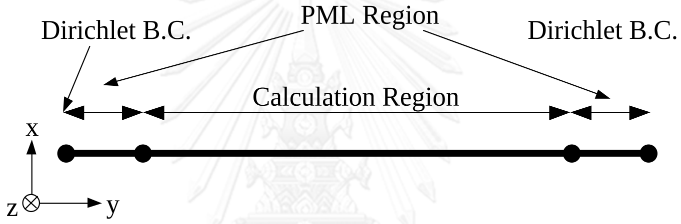
n_a คือ ดัชนีหักเหของบริเวณที่ติดกับชั้น PML

ρ_a คือ ระยะห่างจากขอบของ PML ถึงเอลิเมนต์ที่กำลังพิจารณา

d_a คือ ความหนาของชั้น PML ในแต่ละด้าน

R คือ ค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อน

จากสมการที่ (3.5) ในการคำนวณพบว่าความหนาของชั้นดูดซับมีผลกับการป้องกันการสะท้อนกลับ เมื่อความหนาน้อยจะไม่สามารถลดทอนคลื่นให้หมดไปในชั้นดูดซับได้จะทำให้เกิดการสะท้อนกลับ ในขณะที่ความหนาของชั้นดูดซับและจำนวนเอลิเมนต์ในชั้นดูดซับยิ่งมีความหนามากจะยิ่งป้องกันการสะท้อนกลับได้ดีแต่ทำให้การคำนวณต้องใช้หน่วยความจำมากขึ้นและต้องเสียเวลาในการคำนวณเพิ่มขึ้น ส่วนค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนตามทฤษฎีมีการเสนอใช้งานหลายค่า เช่น $R=10^{-20},10^{-100}$ เป็นต้น ถ้าค่า R มีค่าน้อยจะทำให้เทอม $\ln R$ มีค่าน้อยตาม ซึ่งทำให้เกิดการลดทอนมาก อย่างไรก็ตามการทำให้เกิดการลดทอนมากๆ เมื่ออยู่ในชั้นดูดซับจะมีผลให้สนามมีการเปลี่ยนแปลงแบบทันทีทันใดเมื่อแพร่กระจายเข้าไปในชั้นดูดซับซึ่งอาจทำให้เกิดการสะท้อนกลับได้ ดังนั้นจึงควรเลือกค่า R ให้เหมาะสมเพื่อป้องกันการสะท้อนกลับ เงื่อนไขขอบเขตแบบ PML จะให้ปลายของผนังชั้นดูดซับมีเงื่อนไขขอบเขตแบบ dirichlet หรือบังคับให้สนามเป็นศูนย์ที่ปลายชั้นดูดซับ ดังภาพที่ 3.2



ภาพที่ 3.2 ขอบเขตของ PML

จัดรูปสมการคลื่นใหม่โดยนำสมการ (3.2) และ (3.3) แทนลงใน (3.1) จะได้สมการที่มีทั้งสนามแม่เหล็กตามแนวขวางและสนามแม่เหล็กตามแนวแกน z แสดงวิธีทำดังต่อไปนี้

$$\frac{1}{\varepsilon_r}(\nabla_S \times \vec{H}) = \frac{1}{\varepsilon_r}(\nabla_{ts} + \vec{a}_z \frac{\partial}{\partial z}) \times \left(\vec{H}_T + \vec{a}_z H_z\right) \tag{3.6}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_r}\left[(\nabla_{ts} \times \vec{H}_T) + \left(\nabla_{ts} \times \vec{a}_z H_z\right) + \vec{a}_z \times \frac{\partial \vec{H}_T}{\partial z}\right]$$

$$\nabla_S \times \frac{1}{\varepsilon_r}(\nabla_S \times \vec{H}) = (\nabla_{ts} + \vec{a}_z \frac{\partial}{\partial z}) \times \frac{1}{\varepsilon_r}\left[(\nabla_{ts} \times \vec{H}_T) + \left(\nabla_{ts} \times \vec{a}_z H_z\right) + \left(\vec{a}_z \times \frac{\partial \vec{H}_T}{\partial z}\right)\right] \tag{3.7}$$

$$
\begin{aligned}
& \qquad \nabla_{ts}\times\frac{1}{\varepsilon_r}(\nabla_{ts}\times\vec{H}_T)+\vec{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\times\frac{1}{\varepsilon_r}(\nabla_{ts}\times\vec{H}_T) \\
\nabla_S\times\frac{1}{\varepsilon_r}(\nabla_S\times\vec{H}) &= +\nabla_{ts}\times\frac{1}{\varepsilon_r}(\nabla_{ts}\times\vec{a}_zH_z)+\vec{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\times\frac{1}{\varepsilon_r}(\nabla_{ts}\times\vec{a}_zH_z) \\
&\quad +\nabla_{ts}\times\frac{1}{\varepsilon_r}(\vec{a}_z\times\frac{\partial\vec{H}_T}{\partial z})+\vec{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\times\frac{1}{\varepsilon_r}(\vec{a}_z\times\frac{\partial\vec{H}_T}{\partial z}) \\
&= \nabla_{ts}\times\frac{1}{\varepsilon_r}(\nabla_{ts}\times\vec{H}_T) \\
&\quad +\nabla_{ts}\times\frac{1}{\varepsilon_r}(\nabla_{ts}\times\vec{a}_zH_z)+\vec{a}_z\times\frac{1}{\varepsilon_r}(\nabla_{ts}\times\vec{a}_z\frac{\partial H_z}{\partial z}) \\
&\quad +\nabla_{ts}\times\frac{1}{\varepsilon_r}(\vec{a}_z\times\frac{\partial\vec{H}_T}{\partial z})+\vec{a}_z\times\frac{1}{\varepsilon_r}(\vec{a}_z\times\frac{\partial^2\vec{H}_T}{\partial z^2})
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

สมการ (3.1) สามารถเขียนในรูปใหม่ได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
&\nabla_{ts}\times\frac{1}{\varepsilon_r}(\nabla_{ts}\times\vec{H}_T)+\nabla_{ts}\times\frac{1}{\varepsilon_r}(\nabla_{ts}\times\vec{a}_zH_z)+\vec{a}_z\times\frac{1}{\varepsilon_r}(\nabla_{ts}\times\vec{a}_z\frac{\partial H_z}{\partial z}) \\
&+\nabla_{ts}\times\frac{1}{\varepsilon_r}(\vec{a}_z\times\frac{\partial\vec{H}_T}{\partial z})+\vec{a}_z\times\frac{1}{\varepsilon_r}(\vec{a}_z\times\frac{\partial^2\vec{H}_T}{\partial z^2})-k_0^2\left(\vec{H}_T+\vec{a}_zH_z\right)=0
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

เมื่อจัดรูปสมการ (3.9) ใหม่ โดยแยกองค์ประกอบตามแนวขวางและตามแนวแกน z จะได้สมการ (3.10) และ (3.11) ตามลำดับ

$$
\nabla_{ts}\times\frac{1}{\varepsilon_r}(\nabla_{ts}\times\vec{H}_T)+\vec{a}_z\times\frac{1}{\varepsilon_r}(\nabla_{ts}\times\vec{a}_z\frac{\partial H_z}{\partial z})+\vec{a}_z\times\frac{1}{\varepsilon_r}(\vec{a}_z\times\frac{\partial^2\vec{H}_T}{\partial z^2})-k_0^2\vec{H}_T=0 \tag{3.10}
$$

$$
\nabla_{ts}\times\frac{1}{\varepsilon_r}(\nabla_{ts}\times\vec{a}_zH_z)+\nabla_{ts}\times\frac{1}{\varepsilon_r}(\vec{a}_z\times\frac{\partial\vec{H}_T}{\partial z})-\vec{a}_zk_0^2H_z=0 \tag{3.11}
$$

เมื่อพิจารณาร่วมกับกฎของเกาส์ (Gauss's law) เงื่อนไขไดเวอร์เจนซ์ของสนามแม่เหล็ก $\nabla_s\cdot\vec{H}=0$ จะได้

$$
\frac{\partial}{\partial z}H_Z=-\nabla_{ts}\cdot\vec{H}_T \tag{3.12}
$$

นำสมการที่ (3.12) แทนลงในสมการที่ (3.10) และจัดรูปจะได้

$$
\nabla_{ts}\times\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\nabla_{ts}\times\vec{H}_T\right)-\frac{1}{\varepsilon_r}\vec{a}_z\times\left(\nabla_{ts}\times\vec{a}_z\left(\nabla_{ts}\cdot\vec{H}_T\right)\right)-\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{H}_T=k_0^2\vec{H}_T \tag{3.13}
$$

$$-\frac{1}{\varepsilon_r}\vec{a}_z\times(\nabla_{ts}\times\vec{a}_z\nabla_{ts}\cdot\vec{H}_T)=-\frac{1}{\varepsilon_r}\vec{a}_z\times\left[(\nabla_{ts}\cdot\vec{H}_T)\nabla_{ts}\times\vec{a}_z-\vec{a}_z\times\nabla_{ts}(\nabla_{ts}\cdot\vec{H}_T)\right]$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon_r}\vec{a}_z\times\left[-\vec{a}_z\times\nabla_{ts}(\nabla_{ts}\cdot\vec{H}_T)\right] \qquad (3.14)$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon_r}\nabla_{ts}(\nabla_{ts}\cdot\vec{H}_T)$$

จัดรูปสมการ (3.13) ให้อยู่ในรูปสนามแม่เหล็กตามขวาง จะได้สมการคลื่นขององค์ประกอบตามแนวขวางดังนี้

$$\nabla_{ts}\times\frac{1}{\varepsilon_r}(\nabla_{ts}\times\vec{H}_T)-\frac{1}{\varepsilon_r}\nabla_{ts}(\nabla_{ts}\cdot\vec{H}_T)-\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial^2\vec{H}_T}{\partial z^2}-k_0^2\vec{H}_T=0 \qquad (3.15)$$

3.1.2 ระเบียบวิธีบีมโพรพาเกชัน

ระเบียบวิธีบีมโพรพาเกชันที่เลือกใช้ในงานวิจัยนี้ คือ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชัน (finite element beam propagation method) โดยการหาคำตอบของอนุพันธ์อันดับหนึ่งซึ่งเป็นสมการบีมพรอพาเกชัน ด้วยวิธีการของแครงค์-นิโคลสัน (Crank-Nicholson algorithm)

เมื่อสมมติผลเฉลยของเวกเตอร์สนามแม่เหล็กในสมการที่ (3.15) ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลแปรตามระยะทางตามแกน z โดยใช้การประมาณแบบ slowly varying envelope (SVEA) ดังนี้

$$\vec{H}_T(x,y,z)=\vec{h}_T(x,y,z)e^{(-jk_0n_0z)} \qquad (3.16)$$

โดย $\vec{h}_T$ คือ สนามของลำคลื่นแสงแนวหน้าตัดขวาง

n_0 คือ ดัชนีหักเหอ้างอิง (reference refractive index)

เมื่อแทนสมการ (3.16) ลงในสมการ (3.15) จะได้สมการรูปใหม่ดังขั้นตอนต่อไปนี้

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{H}_T=\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\vec{h}_Te^{-jk_0n_0z}\right)\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial z}\left[e^{-jk_0n_0z}\left(\frac{\partial}{\partial z}\vec{h}_T-jk_0n_0\vec{h}_T\right)\right] \qquad (3.17)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{H}_T=e^{-jk_0n_0z}\left[-jk_0n_0\left(\frac{\partial}{\partial z}\vec{h}_T-jk_0n_0\vec{h}_T\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{h}_T-jk_0n_0\frac{\partial}{\partial z}\vec{h}_T\right)\right] \qquad (3.18)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{H}_T = e^{-jk_0n_0z}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{h}_T - j2k_0n_0\frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{h}_T - k_0^2n_0^2\vec{h}_T\right] \tag{3.19}$$

แทนลงในสมการ (3.15) จะได้

$$\nabla_{ts}\times\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\nabla_{ts}\times\vec{h}_T\right)-\frac{1}{\varepsilon_r}\nabla_{ts}\times(\nabla_{ts}\cdot\vec{h}_T)-\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{h}_T+j2k_0n_0\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial}{\partial z}\vec{h}_T+\left(k_0^2n_0^2\frac{1}{\varepsilon_r}-k_0^2\right)\vec{h}_T=0 \tag{3.20}$$

แทนค่า $\varepsilon_r = n^2$ โดยที่ n คือค่าดัชนีหักเหของตัวกลาง

$$-\varepsilon_r\nabla_{ts}\times\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\nabla_{ts}\times\vec{h}_T\right)+\nabla_{ts}(\nabla_{ts}\cdot\vec{h}_T)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{h}_T-j2k_0n_0\frac{\partial}{\partial z}\vec{h}_T+k_0^2\left(n^2-n_0^2\right)\vec{h}_T=0 \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial^2\vec{h}_t}{\partial z^2}-2jk_0n_0\frac{\partial\vec{h}_t}{\partial z}+k_0^2(n^2-n_0^2)\vec{h}_t-\varepsilon_r\nabla_{ts}\times\frac{1}{\varepsilon_r}(\nabla_{ts}\times\vec{h}_t)+\nabla_{ts}(\nabla_{ts}\cdot\vec{h}_t)=0 \tag{3.22}$$

3.1.3 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตามที่กล่าวถึงในบทที่ 2 เราสามารถประมาณให้องค์ประกอบสนาม $\vec{h}_t$ เมื่อ $i = x, y, z$ อยู่ในรูปของผลคูณของฟังก์ชันรูปร่างและตัวแปรที่ไม่ทราบค่าดังสมการที่ (3.23) โดยในงานวิจัยนี้ใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบโนดและแบ่งเอลิเมนต์เป็นแบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก โดยใช้ฟังก์ชันการประมาณค่าสี่เหลี่ยมแบบเชิงเส้นคู่ในแต่ละเอลิเมนต์ ในหัวข้อ 2.3.2.2 เนื่องจากการแบ่งพื้นที่เป็นพื้นที่ย่อยหรือเอลิเมนต์นั้น ค่าคำตอบของสนาม ϕ_j จะถูกประมาณค่าให้อยู่บนจุดต่อของแต่ละเอลิเมนต์ และค่าคำตอบของสนามสามารถประมาณได้เท่ากับผลรวมของฟังก์ชันรูปร่างของแต่ละจุดต่อคูณกับค่าของสนามของแต่ละจุดต่อซึ่งเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า

$$\vec{h}_t(x,y)=\sum_{j=1}^{N_n}\vec{N}_j(x,y)\phi_j(z) \tag{3.23}$$

จากสมการด้านบน $\vec{N}_j(x,y)$ คือเวกเตอร์ฟังก์ชันรูปร่าง โดยที่ $j = 1,2,3,\ldots,8$ มีค่าดังต่อไปนี้

$$\vec{N}_1 = N_1\vec{a}_x \qquad \vec{N}_5 = N_1\vec{a}_y$$

$$\vec{N}_2 = N_2\vec{a}_x \qquad \vec{N}_6 = N_2\vec{a}_y$$

$$\vec{N}_3 = N_3\vec{a}_x \qquad \vec{N}_7 = N_3\vec{a}_y$$

$$\vec{N}_4 = N_4\vec{a}_x \qquad \vec{N}_8 = N_4\vec{a}_y$$

เมื่อฟังก์ชันรูปร่าง N_1, N_2, N_3 และ N_4 มีค่าตามสมการที่ *(2.56)* ในบทที่ 2

การสร้างชุดสมการเพื่อหาคำตอบของสนามสามารถทำได้โดยใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (weighted residual method) ซึ่งสมการของเศษตกค้าง $\vec{R}(x,y)$ คือ

$$R(x,y)=\frac{\partial^2\vec{h}_t}{\partial z^2}-2jk_0n_0\frac{\partial\vec{h}_t}{\partial z}+k_0^2(n^2-n_0^2)\vec{h}_t-\varepsilon_r\nabla_{ts}\times\frac{1}{\varepsilon_r}(\nabla_{ts}\times\vec{h}_t)+\nabla_{ts}(\nabla_{ts}\cdot\vec{h}_t) \qquad (3.24)$$

โดยหาผลคูณภายในตามระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักแบบวิธีกาเลอคิน (Galerkin's method) โดยเลือกฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก $\vec{N}_i(x,y)$ ให้มีรูปแบบเดียวกันกับเวกเตอร์ฟังก์ชันรูปร่าง $\vec{N}_j(x,y)$ หลังจากนั้นทำการอินติเกรตบนพื้นที่ของเอลิเมนต์ และสุดท้ายบังคับให้เท่ากับศูนย์ดังสมการต่อไปนี้

$$\int_\Omega \vec{N}_i(x,y)\cdot\vec{R}(x,y)\,dxdy=0 \qquad (3.25)$$

แทนค่าและจัดรูปสมการที่ (3.25) ด้วยสมการที่ (3.23) และ (3.24) จะได้

$$\begin{aligned}
&-\sum_{j=1}^{N_n}\left\{\int_\Omega\left(\left(\nabla_{ts}\times\vec{N}_j\right)\cdot\left(\nabla_{ts}\times\vec{N}_i\right)\right)dxdy\right\}\phi_j\\
&-\sum_{j=1}^{N_n}\left\{\int_\Omega\left(\left(\nabla_{ts}\cdot\vec{N}_j\right)\left(\nabla_{ts}\cdot\vec{N}_i\right)\right)dxdy\right\}\phi_j\\
&+\sum_{j=1}^{N_n}\left\{\frac{\partial^2}{\partial z^2}\int_\Omega\left(\vec{N}_i\cdot\vec{N}_j\right)dxdy\right\}\phi_j\\
&-\sum_{j=1}^{N_n}\left\{2jk_0n_0\frac{\partial}{\partial z}\int_\Omega\left(\vec{N}_i\cdot\vec{N}_j\right)dxdy\right\}\phi_j\\
&+\sum_{j=1}^{N_n}\left\{k_0^2(n^2-n_0^2)\int_\Omega\left(\vec{N}_i\cdot\vec{N}_j\right)dxdy\right\}\phi_j=0
\end{aligned} \qquad (3.26)$$

จากนั้นจัดรูปสมการ (*3.26*) ใหม่ให้อยู่ในรูปของสมการเมทริกซ์ตามระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้านล่าง

$$[M]\frac{\partial^2}{\partial z^2}\{\phi\}-2jk_0n_0[M]\frac{\partial}{\partial z}\{\phi\}+\left([K]+k_0^2(n^2-n_0^2)[M]\right)\{\phi\}=\{0\} \qquad (3.27)$$

โดยที่ $\{\phi\}$ คือ เมทริกซ์ครอบคลุมของค่าคำตอบของเวกเตอร์สนาม (global column vector)

$\{0\}$ คือ เวกเตอร์ศูนย์ (null vector)

$[M]$ และ $[K]$ คือเมทริกซ์ครอบคลุมจัตุรัส (Square Global Matrix) โดยในแต่ละเอลิเมนต์แทนค่าในเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$M_{ij}^{e} = \int_{\Omega} \left(\vec{N}_i \cdot \vec{N}_j \right) dxdy \tag{3.28}$$

$$K_{ij}^{e} = -\int_{\Omega} \left(\nabla_{ts} \times \vec{N}_j \right) \cdot \left(\nabla_{ts} \times \vec{N}_i \right) dxdy - \int_{\Omega} \left(\nabla_{ts} \cdot \vec{N}_j \right) \left(\nabla_{ts} \cdot \vec{N}_i \right) dxdy \tag{3.29}$$

3.1.4 การประมาณพาเดแบบปรับตัว

เนื่องจากงานวิจัยนี้ เมื่อเราพิจารณาคลื่นแสงที่ส่งในท่อนำคลื่นแสงซึ่งมีความไม่สม่ำเสมอหรือไม่เอกรูป (non uniform) ตามแนวแกน z เราจึงต้องการความละเอียดในการแก้สมการหาค่าคำตอบของสนามมากยิ่งขึ้น วิธีที่เลือกใช้ในงานวิจัยนี้คือใช้การประมาณแบบพาเด (Padé approximation) ในการประมาณค่าสมการโดยจะกระทำการลดอันดับของอนุพันธ์ของสมการ *(3.27)* ให้เป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่งก่อนโดยมีรูปแบบดังนี้ $\frac{\partial^2}{\partial z^2} \approx f\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$ ซึ่งเราเลือกใช้วิธีพาเดนี้แทนการประมาณค่าสมการอนุพันธ์อันดับสองด้วยวิธีการประมาณค่าแบบเฟรสเนลที่นิยมใช้ทั่วไปเนื่องจากง่าย และลดความยุ่งยากในการคำนวณค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่า ซึ่งมีรูปแบบดังนี้ $\frac{\partial^2}{\partial z^2} \approx 0$

เริ่มต้นพิจารณาเพื่อหาคำตอบของเวกเตอร์สนามโดยการประมาณค่าด้วยวิธีพาเดในการแก้สมการอนุพันธ์อันดับสอง โดยนำสมการที่ *(3.27)* มาจัดรูปสมการใหม่ แสดงวิธีทำดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} &[M]^{-1}[M]\frac{\partial^2}{\partial z^2}\{\phi\} - 2jk_0 n_0 [M]^{-1}[M]\frac{\partial}{\partial z}\{\phi\} \\ &+\left([M]^{-1}[K] + [M]^{-1} k_0^2 \left(n^2 - n_0^2\right)[M]\right)\{\phi\} = \{0\} \end{aligned} \tag{3.30}$$

เนื่องจาก $[M]^{-1}[M] = \mathrm{I}$ และ $\mathrm{I}\{\phi\} = \{\phi\}$ ซึ่ง I คือเมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix*)* จะได้สมการ *(3.30)* ดังนี้

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\{\phi\} - 2jk_0 n_0 \frac{\partial}{\partial z}\{\phi\} + [M]^{-1}\left([K] + k_0^2\left(n^2 - n_0^2\right)[M]\right)\{\phi\} = \{0\} \tag{3.31}$$

ลดรูปสมการโดยกำหนดให้ $[P]$ คือ

$$[P] = [K] + k_0^2 (n^2 - n_0^2)[M] \tag{3.32}$$

สามารถเขียนสมการ *(3.31)* และจัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{1}{2jk_0 n_0}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\{\phi\} - \frac{\partial}{\partial z}\{\phi\} + [M]^{-1}\frac{1}{2jk_0 n_0}[P]\{\phi\} = \{0\} \tag{3.33}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2jk_0 n_0}\frac{\partial}{\partial z}\{\phi\} - \{\phi\}\right) = -[M]^{-1}\frac{1}{2jk_0 n_0}[P]\{\phi\} \tag{3.34}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2jk_0n_0}\frac{\partial}{\partial z}-1\right)\{\phi\}=-[M]^{-1}\frac{1}{2jk_0n_0}[P]\{\phi\} \tag{3.35}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\{\phi\}=\frac{-[M]^{-1}\dfrac{1}{2jk_0n_0}[P]}{\left(\dfrac{1}{2jk_0n_0}\dfrac{\partial}{\partial z}-1\right)}\{\phi\} \tag{3.36}$$

สุดท้ายจะได้สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งเพื่อใช้หาคำตอบของเวกเตอร์สนามในรูปของสมการการประมาณค่าด้วยวิธีพาเด

$$\frac{\partial}{\partial z}\{\phi\}=\frac{[M]^{-1}\dfrac{1}{2jk_0n_0}[P]}{1-\dfrac{1}{2jk_0n_0}\dfrac{\partial}{\partial z}}\{\phi\} \tag{3.37}$$

โดยกำหนดให้ $\beta=k_0n_0$

$$\frac{\partial}{\partial z}\{\phi\}=\frac{[M]^{-1}\dfrac{1}{2j\beta}[P]}{1-\dfrac{1}{2j\beta}\dfrac{\partial}{\partial z}}\{\phi\} \tag{3.38}$$

รูปของสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยการประมาณค่าด้วยวิธีพาเดจะถูกจัดรูปให้อยู่ในรูปเศษส่วนพหุนาม N และ D ดังสมการที่ *(3.39)* ในเทอมของเมทริกซ์ $[M]$ และ $[P]$

$$\frac{\partial}{\partial z}\{\phi\}=-j\frac{N}{D}\{\phi\} \tag{3.39}$$

โดยการประมาณค่าด้วยวิธีพาเดจากบทที่ 2 จะสามารถมองสมการที่ *(3.38)* ในรูปแบบการปรากฏซ้ำ (recurrence formula) ได้ดังนี้

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_n=\left.\frac{[M]^{-1}\left(\dfrac{1}{j2\beta}[P]\right)}{1-\dfrac{1}{j2\beta}\dfrac{\partial}{\partial z}}\right|_{n-1} \tag{3.40}$$

โดยกำหนดให้ค่าเริ่มต้นของสมการอนุพันธ์มีค่าเท่ากับ

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_{-1}=0 \tag{3.41}$$

จะทำให้สามารถพิจารณาการลดรูปสมการสำหรับลำดับมุมกว้าง (Wide-Angle Order) หรือลำดับพาเด (Padé Order) ได้โดยการแทนค่าสมการต่อกันไปเรื่อยๆ ซึ่งได้ผลดังต่อไปนี้

มุมกว้างลำดับที่ 0 (การประมาณค่าแบบ Fresnel) หรือพาเดอันดับ (1,0)

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_0 &= \frac{[M]^{-1}\left(\frac{1}{j2\beta}[P]\right)}{1-\frac{1}{j2\beta}\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_{-1}} \\ &= [M]^{-1}\frac{[P]}{j2\beta} \\ &= -j[M]^{-1}\frac{[P]}{2\beta} \end{aligned} \tag{3.42}$$

เมื่อเทียบสมการ(3.42) กับสมการ (*3.39*) จะได้

$$\frac{N}{D} = \frac{[P]/2\beta}{[M]} \qquad \text{โดยที่} \qquad N = \frac{[P]}{2\beta}, D = [M] \tag{3.43}$$

กระทำขั้นตอนด้านบนซ้ำ จะได้มุมกว้างลำดับที่ 1 หรือพาเดอันดับ (1,1) ดังนี้

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_1 = \frac{[M]^{-1}\left(\frac{1}{j2\beta}[P]\right)}{1-\frac{1}{j2\beta}\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_0} \tag{3.44}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_1 = \frac{[M]^{-1}\left(\frac{1}{j2\beta}[P]\right)}{1-\frac{1}{j2\beta}\left([M]^{-1}\frac{1}{j2\beta}[P]\right)} \tag{3.45}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_1 = \frac{[M]^{-1}\left(\frac{-j[P]}{2\beta}\right)}{1+\frac{1}{4\beta^2}[M]^{-1}[P]}$$

$$= \frac{[M]^{-1}\left(\frac{-j[P]}{2\beta}\right)}{\frac{4\beta^2+[M]^{-1}[P]}{4\beta^2}}$$

$$=[M]^{-1}\times\frac{-j[P]}{2\beta}\times\frac{4\beta^2}{4\beta^2+[M]^{-1}[P]} \tag{3.46}$$

$$=\frac{1}{[M]}\times -j[P]\times\frac{2\beta}{4\beta^2+\frac{[P]}{[M]}}$$

$$=-j\frac{[P]}{[M]}\times\frac{2\beta[M]}{4\beta^2[M]+[P]}$$

$$=\frac{-j[P]\times 2\beta}{4\beta^2[M]+[P]}\times\frac{\frac{1}{4\beta^2}}{\frac{1}{4\beta^2}}$$

จัดให้อยู่ในรูปสมการ (3.39) จะได้

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_1 = \frac{-j\frac{[P]}{2\beta}}{[M]+\frac{[P]}{4\beta^2}} \tag{3.47}$$

กรณีมุมกว้างลำดับที่ 2 หรือพาเดอันดับ (2,1)

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_2 = \frac{[M]^{-1}\left(\frac{1}{j2\beta}[P]\right)}{1-\frac{1}{j2\beta}\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_1} \tag{3.48}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_2 = \frac{-j\dfrac{[P]}{2\beta[M]}}{1+\dfrac{j}{2\beta}\left(\dfrac{-j\dfrac{[P]}{2\beta}}{[M]+\dfrac{[P]}{4\beta^2}}\right)} \tag{3.49}$$

จัดรูปสมการ

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_2 &= \frac{-j\dfrac{[P]}{2\beta[M]}}{1+\dfrac{\dfrac{[P]}{4\beta^2}}{\dfrac{[M]4\beta^2+[P]}{4\beta^2}}} \\
&= \frac{-j\dfrac{[P]}{2\beta[M]}}{1+\dfrac{[P]}{[M]4\beta^2+[P]}} \\
&= -j\frac{[P]}{2\beta[M]}\frac{\left([M]4\beta^2+[P]\right)}{\left([M]4\beta^2+2[P]\right)} \\
&= \frac{-j\dfrac{[P]}{2\beta[M]}}{\dfrac{[M]4\beta^2+[P]+[P]}{[M]4\beta^2+[P]}} \\
&= -j\left(\frac{4\beta^2[M][P]+[P]^2}{8\beta^3[M]^2+4\beta[M][P]}\right)
\end{aligned} \tag{3.50}$$

จัดให้อยู่ในรูปสมการ (3.39) จะได้

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_2 = -j\left(\frac{\dfrac{[M][P]}{2\beta}+\dfrac{[P]^2}{8\beta^3}}{[M]^2+\dfrac{[M][P]}{2\beta^2}}\right) \tag{3.51}$$

กรณีมุมกว้างลำดับที่ 3 หรือพาเดอันดับ (2,2)

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_3 = \frac{[M]^{-1}\left(\dfrac{1}{j2\beta}[P]\right)}{1-\dfrac{1}{j2\beta}\left.\dfrac{\partial}{\partial z}\right|_2} \tag{3.52}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_3 = \frac{[M]^{-1}\left(\dfrac{1}{j2\beta}[P]\right)}{1-\dfrac{1}{j2\beta}\left(-j\left(\dfrac{\dfrac{[M][P]}{2\beta}+\dfrac{[P]^2}{8\beta^3}}{[M]^2+\dfrac{[M][P]}{2\beta^2}}\right)\right)} \tag{3.53}$$

จัดรูปสมการ

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_3 = \frac{-j\dfrac{[P]}{2\beta[M]}}{1+\dfrac{1}{2\beta}\left(\dfrac{\dfrac{4\beta^2[M][P]+[P]^2}{8\beta^3}}{\dfrac{2\beta^2[M]^2+[M][P]}{2\beta^2}}\right)}$$

$$= \frac{-j\dfrac{[P]}{2\beta[M]}}{1+\dfrac{1}{2\beta}\left(\dfrac{4\beta^2[M][P]+[P]^2}{4\beta\left(2\beta^2[M]^2+[M][P]\right)}\right)} \tag{3.54}$$

$$= \frac{-j\dfrac{[P]}{2\beta[M]}}{1+\left(\dfrac{4\beta^2[M][P]+[P]^2}{16\beta^4[M]^2+8\beta^2[M][P]}\right)}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_3 = \frac{-j\dfrac{[P]}{2\beta[M]}}{\dfrac{16\beta^4[M]^2+8\beta^2[M][P]+4\beta^2[M][P]+[P]^2}{16\beta^4[M]^2+8\beta^2[M][P]}}$$

$$= -j\left(\frac{8\beta^3[M][P]+4\beta[P]^2}{16\beta^4[M]^2+12\beta^2[M][P]+[P]^2}\right)$$

$$= -j\frac{[P]\left(16\beta^4[M]^2+8\beta^2[M][P]\right)}{2\beta[M]\left(16\beta^4[M]^2+12\beta^2[M][P]+[P]^2\right)}$$

จัดให้อยู่ในรูปสมการ (3.39) จะได้

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_3 = -j\frac{\dfrac{[M][P]}{2\beta}+\dfrac{[P]^2}{4\beta^3}}{[M]^2+\dfrac{3[M][P]}{4\beta^2}+\dfrac{[P]^2}{16\beta^4}} \tag{3.55}$$

กรณีมุมกว้างลำดับที่ 4 หรือพาเดอันดับ (3,2)

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_4 = \frac{[M]^{-1}\left(\dfrac{1}{j2\beta}[P]\right)}{1-\dfrac{1}{j2\beta}\left.\dfrac{\partial}{\partial z}\right|_3} \tag{3.56}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_4 = \frac{[M]^{-1}\left(\dfrac{1}{j2\beta}[P]\right)}{1-\dfrac{1}{j2\beta}\left(-j\left(\dfrac{\dfrac{[M][P]}{2\beta}+\dfrac{[P]^2}{4\beta^3}}{[M]^2+\dfrac{3[M][P]}{4\beta^2}+\dfrac{[P]^2}{16\beta^4}}\right)\right)} \tag{3.57}$$

จัดรูปสมการ

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_4 &= \frac{-j\,\dfrac{[P]}{2\beta[M]}}{1+\dfrac{1}{2\beta}\left(\dfrac{\dfrac{2\beta^2[M][P]+[P]^2}{4\beta^3}}{\dfrac{16\beta^4[M]^2+12\beta^2[M][P]+[P]^2}{16\beta^4}}\right)} \\
&= \frac{\dfrac{-j[P]}{2\beta[M]}}{1+\left(\dfrac{4\beta^2[M][P]+2[P]^2}{16\beta^4[M]^2+12\beta^2[M][P]+[P]^2}\right)} \\
&= \frac{\dfrac{-j[P]}{2\beta[M]}}{1+\dfrac{4\beta}{2\beta}\left(\dfrac{2\beta^2[M][P]+[P]^2}{16\beta^4[M]^2+12\beta^2[M][P]+[P]^2}\right)} \qquad (3.58) \\
&= \frac{\dfrac{-j[P]}{2\beta[M]}}{\dfrac{16\beta^4[M]^2+12\beta^2[M][P]+[P]^2+4\beta^2[M][P]+2[P]^2}{16\beta^4[M]^2+12\beta^2[M][P]+[P]^2}} \\
&= -j\,\frac{[P]\left(16\beta^4[M]^2+12\beta^2[M][P]+[P]^2\right)}{2\beta[M]\left(16\beta^4[M]^2+16\beta^2[M][P]+3[P]^2\right)} \\
&= -j\left(\frac{16\beta^4[M]^2[P]+12\beta^2[M][P]^2+[P]^3}{32\beta^5[M]^3+32\beta^3[M]^2[P]+6\beta[M][P]^2}\right)
\end{aligned}
$$

จัดให้อยู่ในรูปสมการ (3.39) จะได้

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_4 = -j\frac{\dfrac{[M]^2[P]}{2\beta}+\dfrac{3[M][P]^2}{8\beta^3}+\dfrac{[P]^3}{32\beta^5}}{[M]^3+\dfrac{[M]^2[P]}{\beta^2}+\dfrac{3[M][P]^2}{16\beta^4}} \tag{3.59}$$

กรณีมุมกว้างลำดับที่ 5 หรือพาเดอันดับ (3,3)

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_5 = \frac{[M]^{-1}\left(\dfrac{1}{j2\beta}[P]\right)}{1-\dfrac{1}{j2\beta}\left.\dfrac{\partial}{\partial z}\right|_4} \tag{3.60}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_5 = \frac{[M]^{-1}\left(\dfrac{1}{j2\beta}[P]\right)}{1-\dfrac{1}{j2\beta}\left(-j\left(\dfrac{\dfrac{[M]^2[P]}{2\beta}+\dfrac{3[M][P]^2}{8\beta^3}+\dfrac{[P]^3}{32\beta^5}}{[M]^3+\dfrac{[M]^2[P]}{\beta^2}+\dfrac{3[M][P]^2}{16\beta^4}}\right)\right)} \tag{3.61}$$

จัดรูปสมการ

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_5 = \frac{-j\dfrac{[P]}{2\beta[M]}}{1+\dfrac{1}{2\beta}\left(\dfrac{\dfrac{16\beta^4[M]^2[P]+12\beta^2[M][P]^2+[P]^3}{32\beta^5}}{\dfrac{16\beta^4[M]^3+16\beta^2[M]^2[P]+3[M][P]^2}{16\beta^4}}\right)}$$

$$= \frac{-j\dfrac{[P]}{2\beta[M]}}{1+\left(\dfrac{16\beta^4[M]^2[P]+12\beta^2[M][P]^2+[P]^3}{64\beta^6[M]^3+64\beta^4[M]^2[P]+12\beta^2[M][P]^2}\right)} \tag{3.62}$$

$$= -j\left(\frac{32\beta^5[M]^2[P]+32\beta^3[M][P]^2+6\beta[P]^3}{64\beta^6[M]^3+80\beta^4[M]^2[P]+24\beta^2[M][P]^2+[P]^3}\right)$$

จัดให้อยู่ในรูปสมการ (3.39) จะได้

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_5 = -j\frac{\dfrac{[M]^2[P]}{2\beta}+\dfrac{[M][P]^2}{2\beta^3}+\dfrac{3[P]^3}{32\beta^5}}{[M]^3+\dfrac{5[M]^2[P]}{4\beta^2}+\dfrac{3[M][P]^2}{8\beta^4}+\dfrac{[P]^3}{64\beta^6}} \tag{3.63}$$

ตารางที่ 3.2 สรุปการประมาณค่าแบบพาเดลำดับต่างๆ

Padé Order (n,d)	**Expression** $\frac{N}{D}$
$(1,0)$	$\dfrac{\frac{[P]}{2\beta}}{[M]}$
$(1,1)$	$\dfrac{\frac{[P]}{2\beta}}{[M]+\frac{[P]}{4\beta^2}}$
$(2,1)$	$\dfrac{\frac{[M][P]}{2\beta}+\frac{[P]^2}{8\beta^3}}{[M]^2+\frac{[M][P]}{2\beta^2}}$
$(2,2)$	$\dfrac{\frac{[M][P]}{2\beta}+\frac{[P]^2}{4\beta^3}}{[M]^2+\frac{3[M][P]}{4\beta^2}+\frac{[P]^2}{16\beta^4}}$
$(3,2)$	$\dfrac{\frac{[M]^2[P]}{2\beta}+\frac{3[M][P]^2}{8\beta^3}+\frac{[P]^3}{32\beta^5}}{[M]^3+\frac{[M]^2[P]}{\beta^2}+\frac{3[M][P]^2}{16\beta^4}}$
$(3,3)$	$\dfrac{\frac{[M]^2[P]}{2\beta}+\frac{[M][P]^2}{2\beta^3}+\frac{3[P]^3}{32\beta^5}}{[M]^3+\frac{5[M]^2[P]}{4\beta^2}+\frac{3[M][P]^2}{8\beta^4}+\frac{[P]^3}{64\beta^6}}$

เมื่อพิจารณาสมการ *(3.39)* โดยใช้หลักการของวิธีการแครงค์-นิโคลสัน (Crank-Nicholson algorithm) ซึ่งเป็นการหาคำตอบของอนุพันธ์อันดับหนึ่งมาแก้ไขปัญหาในแนวแกน z มีกล่าวถึงในบทที่ 2 สมการบีมพรอพาเกชัน สมการที่ *(2.87)* ดังนี้

$$[A]_l \{\phi\}^{l+1} = [B]_l \{\phi\}^l \tag{3.64}$$

จากสมการ (3.64) เราจะสามารถหาคำตอบของสนามเวกเตอร์ได้โดยแทนเมทริกซ์ $[A]_l$ และ $[B]_l$ ด้วยพจน์ของ N และ D ดังนี้

$$[A]_l = D_l + j\frac{\Delta z}{2} N_l \tag{3.65}$$

$$[B]_l = D_l - j\frac{\Delta z}{2}N_l \tag{3.66}$$

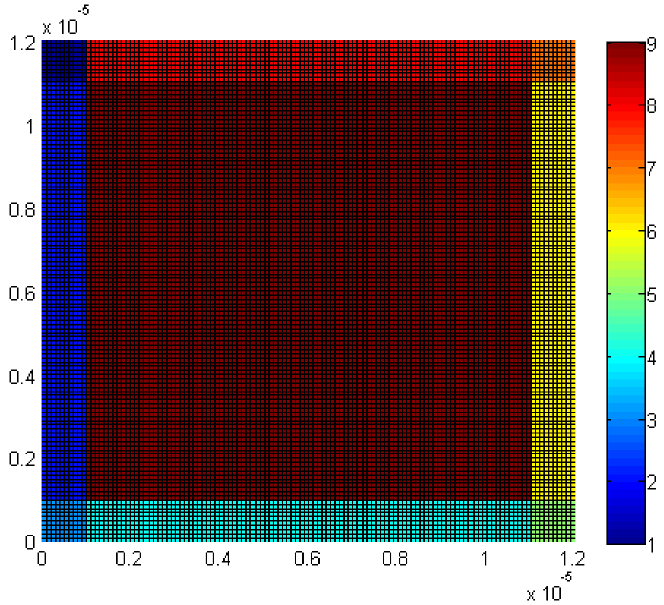
หลักการวิเคราะห์ คือเริ่มคำนวณสนามที่ระนาบหน้าตัดแรกด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ แล้วจึงใช้สมการบีมพรอพาเกชันแก้สมการเพื่อหาสนามในระนาบที่สองและใช้สนามที่ได้จากระนาบที่สองไปหาสนามในระนาบที่สามต่อไป โดยทำการคำนวณเช่นนี้ทีละระนาบหน้าตัดต่อไปเรื่อยๆ จะสามารถหาสนามไฟฟ้าที่ระยะต่าง ๆ ตามที่ต้องการวิเคราะห์ได้ตลอดความยาวของท่อนำคลื่นแสง

3.1.5 ขั้นตอนของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชันที่ใช้การประมาณพาเด

ภาพที่ 3.3 ขั้นตอนของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชัน

บทที่ 4
การทดสอบและผลการวิเคราะห์

ในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีการทดสอบและวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงในท่อนำคลื่นจากวิธีประมาณค่าเพื่อหาคำตอบของสนามทางคณิตศาสตร์ตามที่กล่าวมาแล้วในบทที่ 3 ซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้วิธีที่นำเสนอจะถูกนำมาทดสอบในท่อนำคลื่นที่มีโครงสร้างต่างๆด้วยการสร้างโปรแกรมจำลองจากโปรแกรม MATLAB เวอร์ชั่น r2012a โดยจะทำการสร้างหน้าตัดในแต่ละหน้าตัดของท่อนำคลื่นทุกๆระยะ Δz ตามระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ดังที่กล่าวมาแล้วในบทที่ 2 ผลที่ได้จากการแบ่งเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้วยโปรแกรม MATLAB แสดงไว้ในภาพที่ 4.1



ภาพที่ 4.1 ผลที่ได้จากการแบ่งเอลิเมนต์ด้วยโปรแกรม MATLAB

ในวิทยานิพนธ์นี้จะทำการทดสอบในโครงสร้างที่ถูกจำลองขึ้น 3 โครงสร้าง ประกอบไปด้วยท่อนำคลื่นแบบสี่เหลี่ยม (rectangular waveguide) ท่อนำคลื่นแบบสี่เหลี่ยมขนาน (parallel waveguide) และท่อนำคลื่นแบบ tapered (tapered waveguide) ซึ่งในแต่ละการทดสอบจะมีวัตถุประสงค์ที่แตกต่างกันออกไปตามลักษณะเฉพาะของโครงสร้างท่อนำคลื่นแต่ละชนิด

สำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงและตรวจสอบความถูกต้องของวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่นำเสนอ ในการทดสอบที่ระยะ $z=0$ จะเริ่มต้นจากการปล่อยลำแสงแบบเกาส์เซียนเข้าไปที่จุดกึ่งกลางแกนในของท่อนำคลื่น โดยสมการรูปคลื่นฟังก์ชันเกาส์ใน 2 มิติคือ

$$f(x,y) = Ae^{\left(-\frac{(x-x_{center})^2}{2\sigma_x^2}-\frac{(y-y_{center})^2}{2\sigma_y^2}\right)} \quad (4.1)$$

โดยที่ A คือ แอมพลิจูดของเกาส์เซียนพัลส์

x_{center} , y_{center} คือ พิกัดจุดกึ่งกลางของเกาส์เซียนพัลส์

σ_x , σ_y คือ ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation)

หลังจากปล่อยลำแสงแบบเกาส์เซียนเข้าไปในท่อนำคลื่น จากนั้นจะทำการพิจารณาคลื่นแสงที่แพร่กระจายอยู่ภายในท่อนำคลื่นที่ระยะ z ต่างๆโดยจะทำการวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นในแต่ละระนาบหน้าตัดของท่อนำคลื่นทุกๆระยะ $+\Delta z$ จากการแพร่กระจายของคลื่นแสงเราสามารถหาค่ากำลังของสนามประมาณค่า (power in core : P_{core}) ที่เกิดขึ้นภายในแกนในของท่อนำคลื่นได้จากสมการ

$$P_{core} = \sum_{n=1}^{N_e} P^e_{core,i} \quad (4.2)$$

เมื่อ P_{core} คือ กำลังของสนามประมาณค่าภายในแกนในของท่อนำคลื่น

$P^e_{core,i}$ คือ กำลังของสนามประมาณค่าในแต่ละเอลิเมนต์

N_e คือ จำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมดภายในแกนในของท่อนำคลื่น

โดยที่ $P^e_{core,i}$ หาได้จาก

$$P^e_{core,i} = \frac{\sum_{i=1}^{4} P_{node,i}}{4} A^e \quad (4.3)$$

เมื่อ $P_{node,i}$ คือ กำลังของสนามที่ได้ในแต่ละจุดโนด i

A^e คือ พื้นที่ของแต่ละเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม

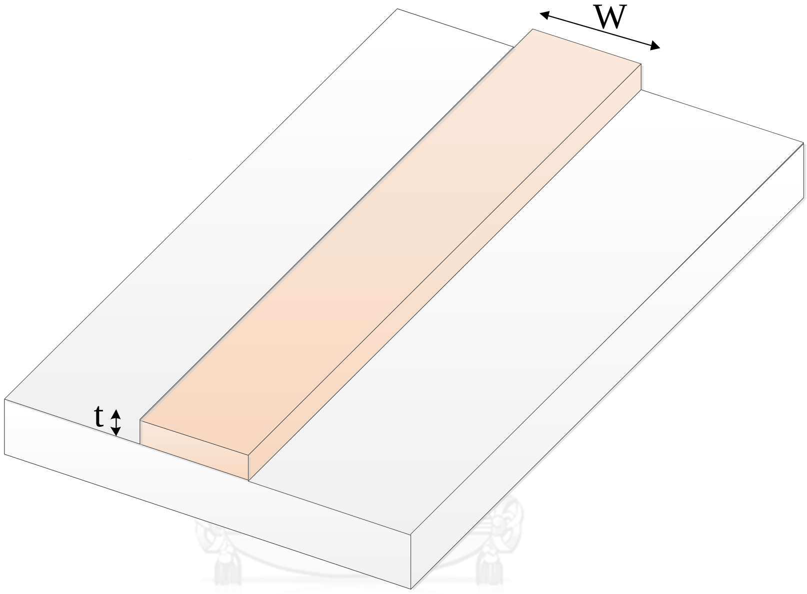
ซึ่ง $P_{node,i}$ สามารถหาได้จาก

$$P_{node,i} = \sqrt{\left|\phi_{x,i}^2 + \phi_{y,i}^2\right|} \quad (4.4)$$

เมื่อ $\phi_{x,i}, \phi_{y,i}$ คือ ค่าสนามประมาณค่าที่คำนวณได้ในแต่ละจุดโนด i

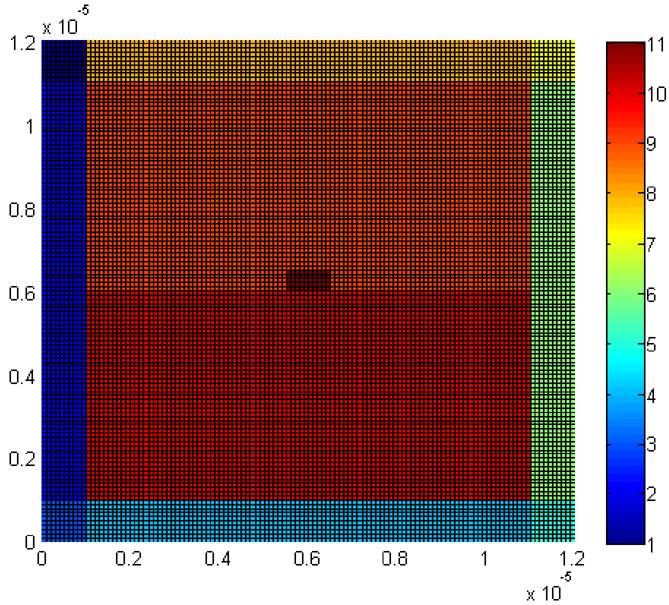
4.1 ท่อนำคลื่นแบบสี่เหลี่ยม (rectangular waveguide)

โครงสร้างท่อนำคลื่นแบบสี่เหลี่ยมเป็นโครงสร้างอย่างง่ายที่มีแกนใน (core) เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีความกว้าง (W) และความหนา (t) สม่ำเสมอทอดยาวไปตามความยาวของท่อนำคลื่น ซึ่งตำแหน่งของแกนใน (core), แผ่นฐาน (substrate) และ วัสดุหุ้ม (cladding) ของท่อนำคลื่นแบบสี่เหลี่ยมสามารถแสดงได้ดังภาพที่ 4.2 โดยการทดลองในท่อนำคลื่นแบบสี่เหลี่ยมมีวัตถุประสงค์เพื่อทดสอบความถูกต้องของโปรแกรมที่เขียนจากวิธีหาคำตอบทางคณิตศาสตร์ที่นำเสนอในบทที่ 3 รวมไปถึงการเปรียบเทียบผลที่ได้ด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับหนึ่งและสองตามลำดับ



ภาพที่ 4.2 ท่อนำคลื่นแบบสี่เหลี่ยมที่ใช้ในการทดสอบ

การจำลองหน้าตัดของท่อนำคลื่นแบบสี่เหลี่ยมตามระนาบ x-y ด้วยโปรแกรม MATLAB แสดงได้ดังภาพที่ 4.3 โดยมีค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในการทดสอบแสดงในตารางที่ 4.1 เมื่อกำหนดในโครงสร้างท่อนำคลื่นแบบสี่เหลี่ยมที่จำลองจากโปรแกรม MATLAB มีจำนวนเอลิเมนต์เท่ากับ 14,400 เอลิเมนต์ และทำการพิจารณาขอบเขตพื้นที่หน้าตัด หรือหน้าต่างในการคำนวณ (computation window) ที่ 10x10 μm



ภาพที่ 4.3 การจำลองหน้าตัดของท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยมด้วยโปรแกรม MATLAB

ตารางที่ 4.1 พารามิเตอร์ที่ใช้ในการทดสอบท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยม

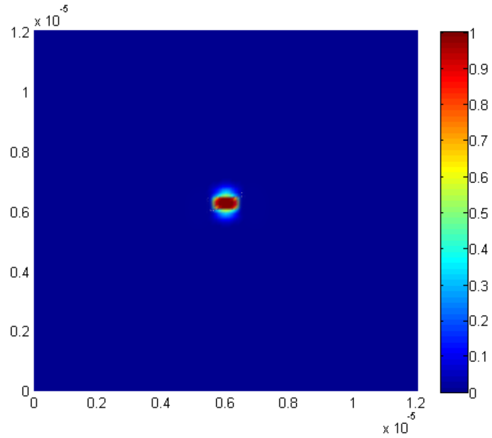
ความยาวของท่อนำคลื่น (l_z)	1000 μm
ความกว้างของแกน (W)	1 μm
ความหนาของแกน (t)	0.5 μm
ดัชนีหักเหของแกน (n_{core})	3.44
ดัชนีหักเหของวัสดุหุ้ม $(n_{cladding})$	1
ดัชนีหักเหของฐาน $(n_{substrate})$	3.34
ดัชนีหักเหอ้างอิง (n_0)	3.345
ระยะห่างระหว่างหน้าตัด (Δz)	0.5 μm
ขนาดของเกาส์เซียนพัลส์	0.4 μm
ความยาวคลื่น (λ)	1.55 μm

ในการทดสอบนี้จะพิจารณาท่อนำคลื่นในระยะความยาว 1000 μm โดยที่มีระยะห่างระหว่างหน้าตัดในการคำนวณ Δz = 0.5 μm โดยในภาพที่ 4.4 แสดงให้เห็นถึงการแพร่กระจาย

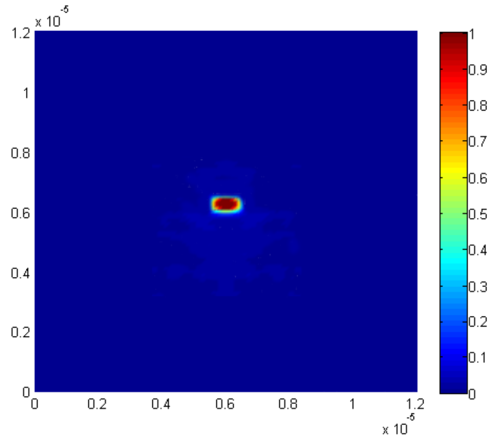
ของคลื่นแสงด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับหนึ่ง เมื่อเริ่มทำการปล่อยลำแสงเกาส์เซียนพัลส์เข้าไปในท่อนำคลื่นที่ระยะ $l_z = 0\ \mu m$ จากนั้นคลื่นแสงจะเริ่มแพร่กระจายอยู่ภายในท่อนำคลื่น โดยที่ลักษณะการแพร่กระจายจะเริ่มจากจุดกึ่งกลางของแกนและแพร่กระจายออกแบบรอบทิศทาง เมื่อคลื่นแสงปะทะกับขอบของแกนในก็จะเริ่มมีการสะท้อนกลับเข้ามาที่จุดกึ่งกลางของแกนอีกครั้งหนึ่ง การแพร่กระจายจะเป็นลักษณะนี้ไปเรื่อยๆจนกระทั่งจบการทดสอบที่ $l_z = 1000\ \mu m$ เมื่อพิจารณาถึงค่ากำลังของสนามประมาณค่าที่เกิดขึ้นภายในท่อนำคลื่นจะพบว่าค่ากำลังที่เกิดขึ้นมีค่าค่อนข้างสม่ำเสมอดังแสดงในภาพที่ 4.5 เนื่องจากคลื่นแสงอยู่ภายในแกนในตลอดการทดสอบ ซึ่งสอดคล้องกับผลที่ได้ในภาพที่ 4.4

ในขณะที่การทดสอบการแพร่กระจายของคลื่นแสงในท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยมด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับสองได้ให้ผลการทดสอบไปในทิศทางเดียวกับผลการทดสอบด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับหนึ่ง กล่าวคือเมื่อมีการปล่อยลำแสงเกาส์เซียนพัลส์เข้าไปในแกนในท่อนำคลื่นแล้วคลื่นจะแพร่กระจายอยู่ภายในขอบเขตแกนในจนกระทั่งจบการทดสอบดังแสดงในภาพที่ 4.6 ซึ่งสอดคล้องกับภาพที่ 4.7 ที่แสดงให้เห็นถึงค่ากำลังของสนามประมาณค่าที่ไปในทิศทางเดียวกับการแพร่กระจายของคลื่นภายในแกนอีกด้วย

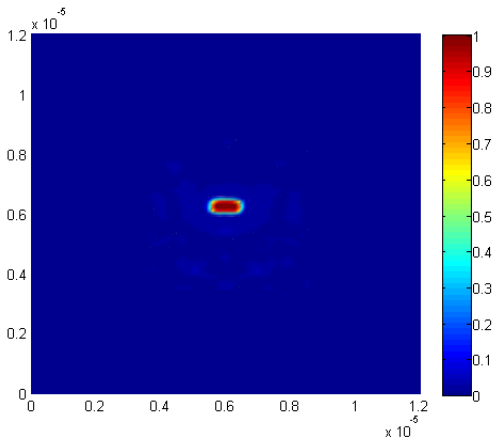
จากผลการทดสอบของท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยมด้วยการประมาณค่าแบบพาเดทั้งสองอันดับจะพบว่า คลื่นแสงที่ได้จากการประมาณค่าด้วยวิธีการที่นำเสนอมีการแพร่กระจายอยู่ภายในขอบเขตของแกนในของท่อนำคลื่นตลอด ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าวิธีที่นำเสนอสามารถใช้วิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงที่เกิดขึ้นภายในแกนของท่อนำคลื่นได้อย่างถูกต้อง



a) $l_z = 0um$

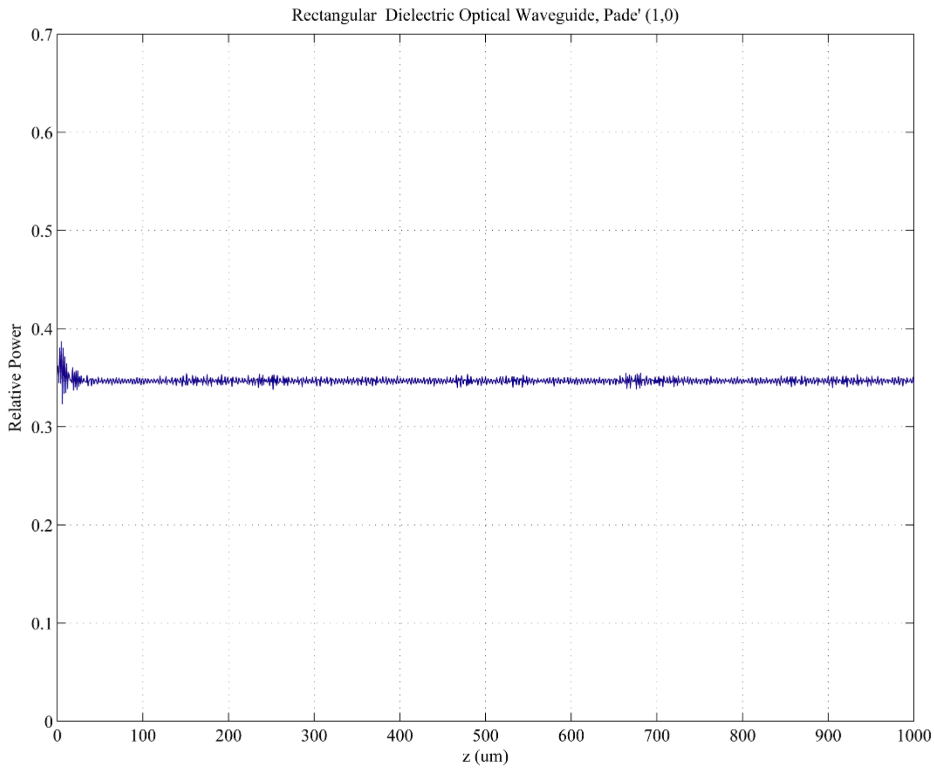


b) $l_z = 500um$

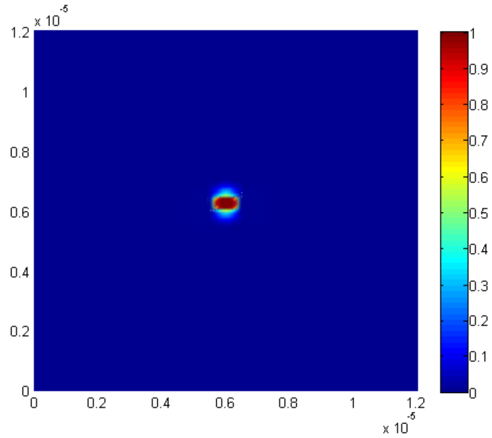


c) $l_z = 1000um$

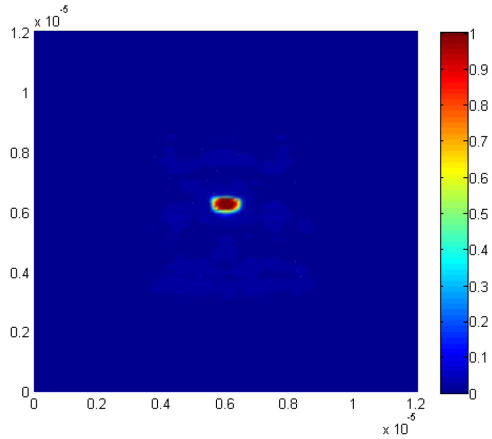
ภาพที่ 4.4 ผลการทดสอบการแพร่กระจายของคลื่นภายในท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยมด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับหนึ่ง



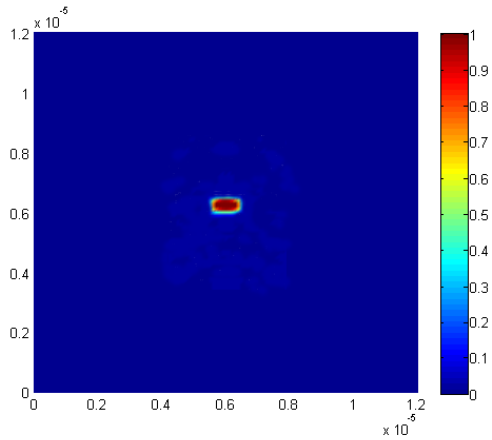
ภาพที่ 4.5 ค่ากำลังของสนามประมาณค่าที่เกิดขึ้นภายในท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยมตลอดการทดสอบด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับหนึ่ง



ก) $l_z = 0um$

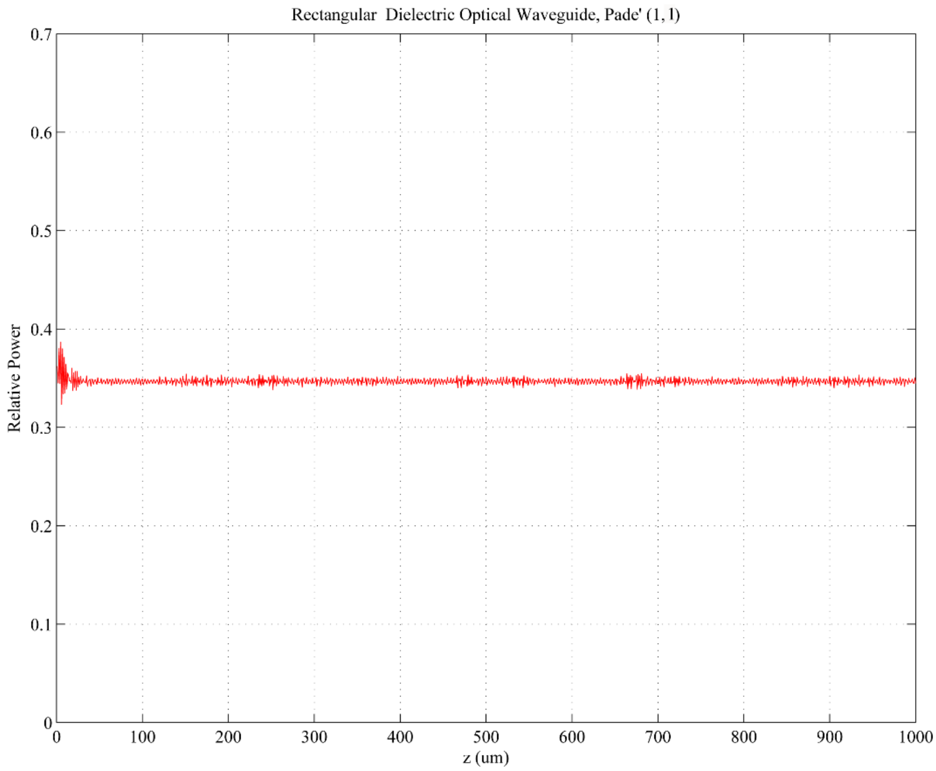


ข) $l_z = 500um$



ค) $l_z = 1000um$

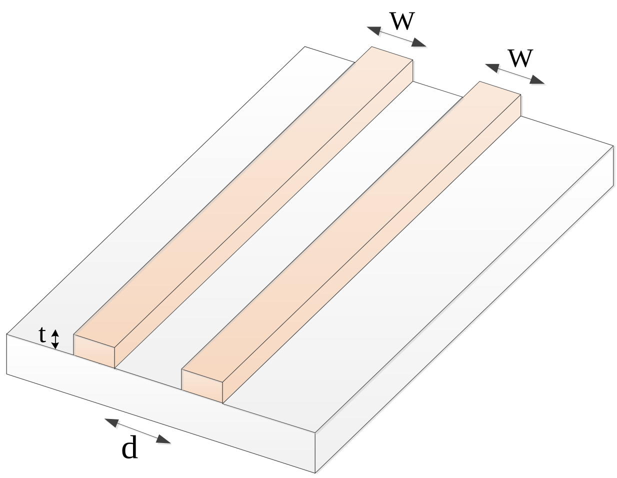
ภาพที่ 4.6 ผลการทดสอบการแพร่กระจายของคลื่นภายในท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยมด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับสอง



ภาพที่ 4.7 ค่ากำลังของสนามประมาณค่าที่เกิดขึ้นภายในท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยมตลอดการทดลองด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับสอง

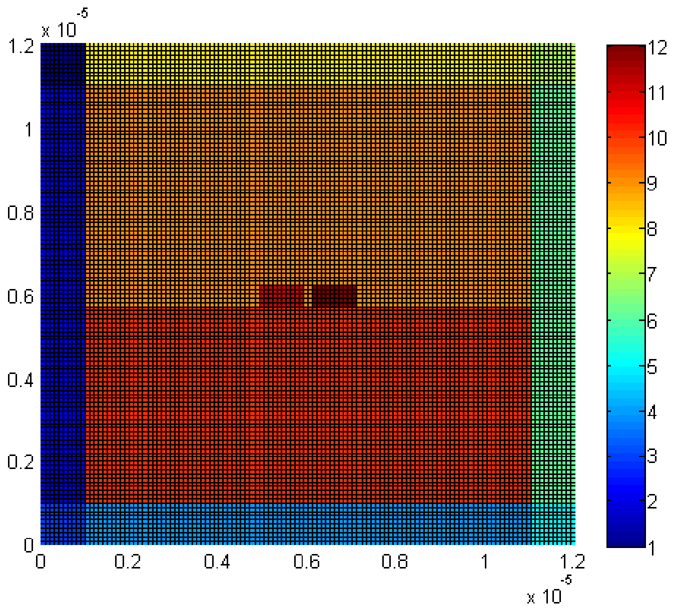
4.2 ท่อนำคลื่นแบบขนาน (parallel waveguide)

โครงสร้างท่อนำคลื่นแบบขนานเป็นท่อนำคลื่นที่ประกอบไปด้วยแกนในรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจำนวน 2 แกนใน ที่มีขนาดเท่ากันและวางตัวขนานกันมีระยะห่างเท่ากับ d โดยส่วนที่เป็นแกนจะมีความกว้าง (W) และความหนา (t) ทอดยาวไปตามความยาวของท่อนำคลื่น ซึ่งตำแหน่งของแกน แผ่นฐาน และวัสดุหุ้ม ของท่อนำคลื่นแบบขนานแสดงไว้ดังภาพที่ 4.8 การทดสอบด้วยท่อนำคลื่นแบบขนานมีวัตถุประสงค์เพื่อทดสอบความถูกต้องของวิธีทางคณิตศาสตร์ที่นำเสนอและพิสูจน์ปรากฏการณ์คัปปลิ้ง (coupling) ที่เกิดจากการถ่ายทอดพลังงานจากแกนหนึ่งไปยังอีกแกนหนึ่ง การทดสอบจะเริ่มต้นจากการปล่อยเกาส์เซียนพัลส์เข้าไปที่แกนด้านทางซ้ายมือของท่อนำคลื่น จากนั้นจะทำการสังเกตและวิเคราะห์คลื่นแสงที่แพร่กระจายอยู่ภายในท่อนำคลื่นแบบขนาน โดยจะทำการวิเคราะห์การแพร่กระจายในแต่ละหน้าตัดของท่อนำคลื่นตามระยะ Δz



ภาพที่ 4.8 ท่อนำคลื่นแบบขนานที่ใช้ในการทดสอบ

ในการจำลองหน้าตัดโครงสร้างท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยมแบบขนานในระนาบ x-y ด้วยโปรแกรม MATLAB แสดงได้ดังภาพที่ 4.9 โดยมีค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในการทดสอบแสดงในตารางที่ 4.2 เมื่อกำหนดให้โครงสร้างท่อนำคลื่นแบบสี่เหลี่ยมที่จำลองจากโปรแกรม MATLAB มีจำนวนเอลิเมนต์เท่ากับ 14,400 เอลิเมนต์ และทำการพิจารณาขอบเขตหน้าต่างการคำนวณ (computational window) ที่10x10 μm

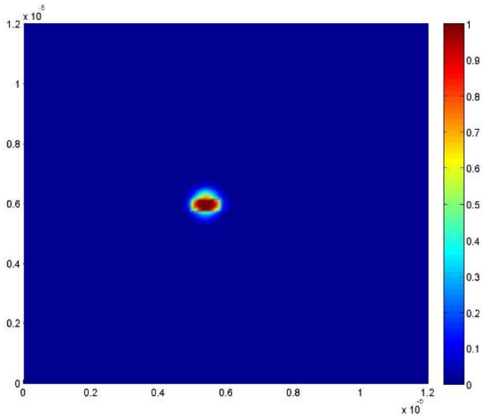


ภาพที่ 4.9 การจำลองหน้าตัดของท่อนำคลื่นแบบขนานด้วยโปรแกรม MATLAB

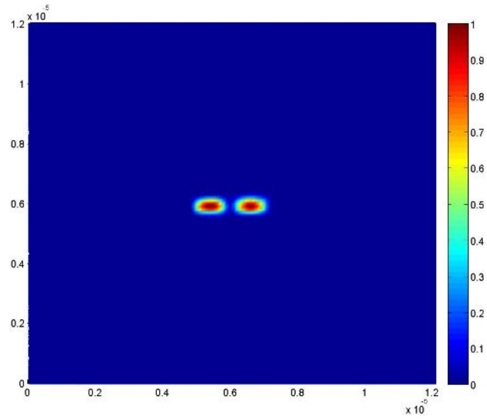
ตารางที่ 4.2 พารามิเตอร์ที่ใช้ในการทดสอบท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยม

ความยาวของท่อนำคลื่น (l_z)	1000 μm
ความกว้างของแกน (W)	1 μm
ความหนาของแกน (t)	0.5 μm
ดัชนีหักเหของแกน (n_{core})	3.44
ดัชนีหักเหของวัสดุหุ้ม $(n_{cladding})$	1
ดัชนีหักเหของฐาน $(n_{substrate})$	3.34
ดัชนีหักเหอ้างอิง (n_0)	3.345
ระยะห่างระหว่างหน้าตัด (Δz)	0.5 μm
ขนาดของเกาส์เซียนพัลส์	0.4 μm
ความยาวคลื่น (λ)	1.55 μm
ความห่างระหว่างแกน (d)	0.25 μm

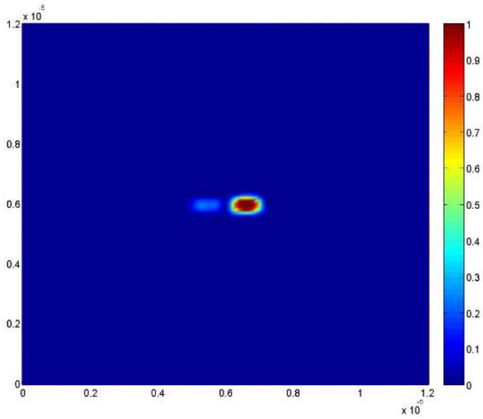
ในการทดสอบนี้จะพิจารณาท่อนำคลื่นจนถึงระยะ 1000 μm โดยที่มีระยะห่างระหว่างหน้าตัดที่ใช้ในการคำนวณ Δz = 0.5 μm ซึ่งภาพที่ 4.10 แสดงให้เห็นถึงการแพร่กระจายของคลื่นแสงด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับหนึ่ง เมื่อเริ่มทำการปล่อยเกาส์เซียนพัลส์เข้าไปในแกนในที่อยู่ทางด้านซ้ายที่ระยะ l_z = 0 μm ดังแสดงในภาพที่ 4.10 ก) คลื่นแสงจะเริ่มแพร่กระจายอยู่ภายในขอบเขตของแกนด้านซ้ายโดยจะค่อยๆถ่ายทอดกำลังของคลื่นแสงไปยังแกนที่อยู่ด้านขวาจนกระทั่งกำลังของคลื่นแสงในแกนในทั้งสองมีค่าเท่ากันที่ระยะ l_z = 180 μm ดังแสดงในภาพที่ 4.10 ข) จากนั้นกำลังของคลื่นแสงในแกนทางด้านซ้ายทั้งหมดจะถูกถ่ายทอดไปยังแกนด้านขวาที่ระยะ l_z = 415 μm ดังแสดงในภาพที่ 4.10 ค) หลังจากนั้นกำลังของคลื่นแสงจะเริ่มถ่ายทอดกลับจากแกนด้านขวากลับไปอยู่ที่แกนด้านซ้ายอีกครั้งหนึ่งดังแสดงในภาพที่ 4.10 ง) ซึ่งการถ่ายทอดกำลังจะเป็นไปในลักษณะนี้เรื่อยๆจนกระทั่งจบการทดสอบที่ l_z = 1000 μm เมื่อพิจารณาถึงค่ากำลังของสนามประมาณค่าที่เกิดขึ้นภายในท่อนำคลื่นจะพบว่าค่าพลังงานที่เกิดในแกนในทั้ง 2 มีการถ่ายทอดสลับกันไปมาทำให้เกิดปรากฏการณ์คัปปลิ้งระหว่างกันดังแสดงในภาพที่ 4.11



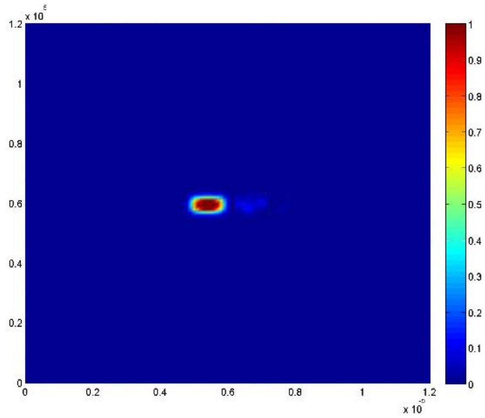
ก) $l_z = 0\mu m$



ข) $l_z = 180\mu m$

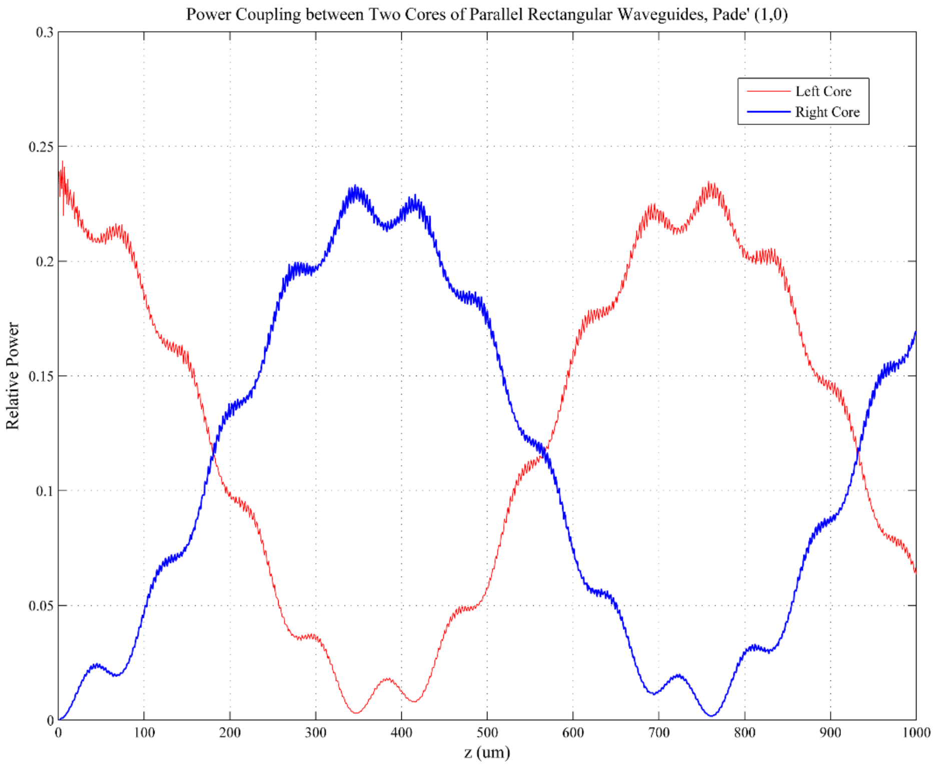


ค) $l_z = 415\mu m$



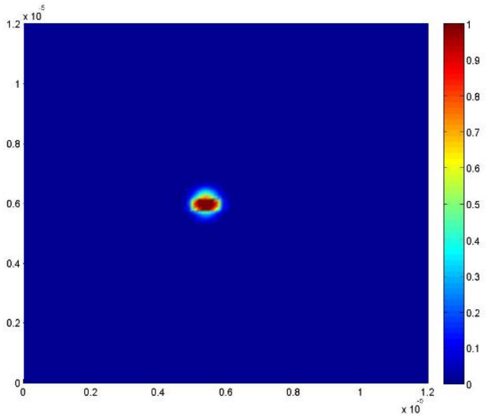
ง) $l_z = 753\mu m$

ภาพที่ 4.10 ผลการทดสอบการแพร่กระจายของคลื่นภายในท่อนำคลื่นแบบขนานด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับหนึ่ง

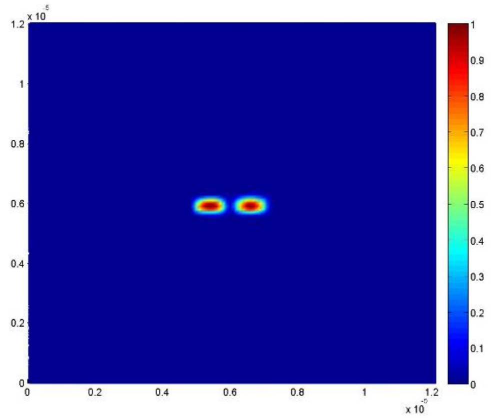


ภาพที่ 4.11 ค่ากำลังของสนามประมาณค่าที่เกิดขึ้นภายในท่อนำคลื่นแบบขนานตลอดการทดลองด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับหนึ่ง

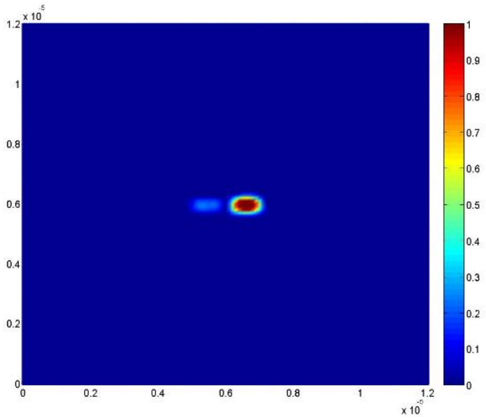
ในขณะที่การทดสอบการแพร่กระจายของคลื่นแสงในท่อนำคลื่นแบบขนานด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับสองได้ให้ผลการทดสอบไปในทิศทางเดียวกับผลการทดสอบด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับหนึ่ง กล่าวคือเมื่อมีการปล่อยลำแสงเกาส์เซียนพัลส์เข้าไปในแกนด้านซ้ายแล้ว คลื่นจะมีการถ่ายทอดกำลังจากแกนด้านซ้ายไปยังแกนด้านขวา จากนั้นจะมีการถ่ายทอดกำลังกลับจากแกนด้านขวากลับมายังแกนด้านซ้าย เป็นอย่างนี้ไปเรื่อยๆจนจบการทดสอบดังแสดงในภาพที่ 4.12 นอกจากนี้ภาพที่ 4.13 ยังแสดงให้เห็นถึงค่ากำลังของสนามประมาณค่าที่สอดคล้องไปกับการแพร่กระจายของคลื่นภายในแกนในอีกด้วย



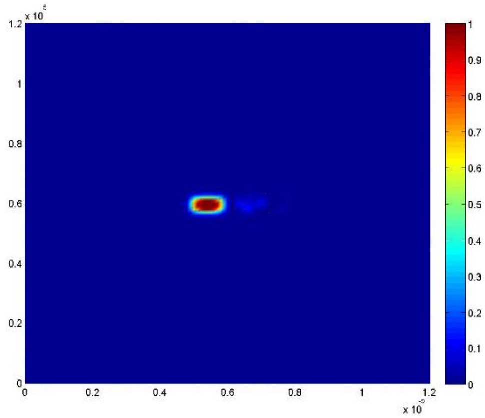
ก) $l_z = 0\mu m$



ข) $l_z = 180\mu m$

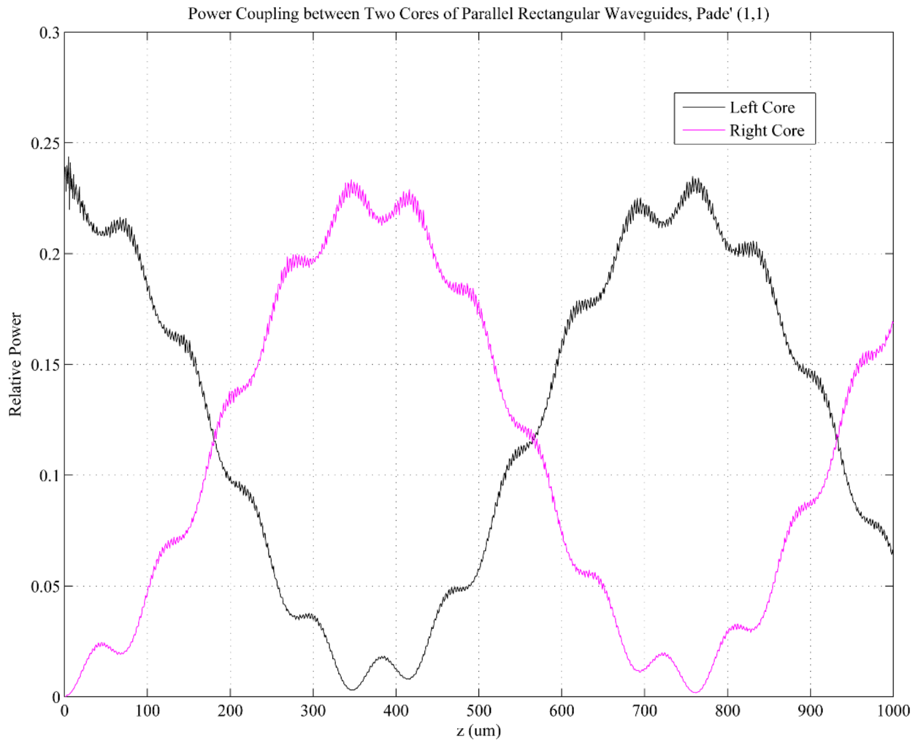


ค) $l_z = 415\mu m$



ง) $l_z = 753\mu m$

ภาพที่ 4.12 ผลการทดสอบการแพร่กระจายของคลื่นภายในท่อนำคลื่นแบบขนานด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับสอง



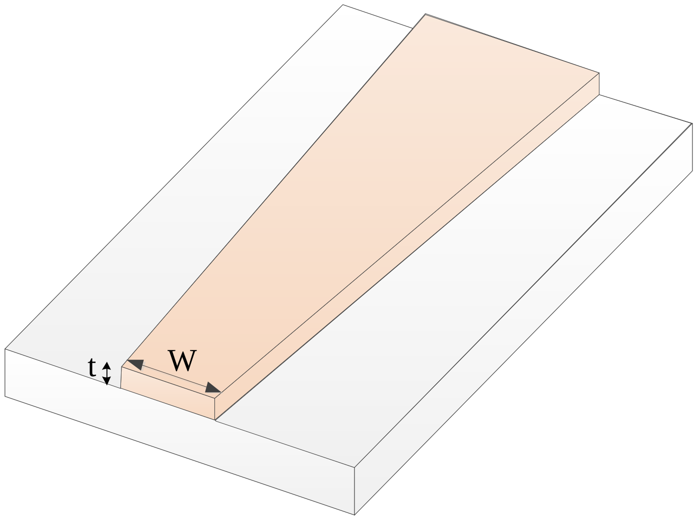
ภาพที่ 4.13 ค่ากำลังของสนามประมาณค่าที่เกิดขึ้นภายในท่อนำคลื่นแบบขนานตลอดการทดลองด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับสอง

จากผลการทดสอบของท่อนำคลื่นแบบขนานด้วยการประมาณค่าแบบพาเดทั้งสองอันดับจะพบว่า คลื่นแสงจะมีการถ่ายทอดกำลังจากแกนหนึ่งไปยังอีกแกนหนึ่ง โดยที่ค่ากำลังของสนามประมาณค่าบริเวณทั้งสองแกนในจะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงสลับกันไปเรื่อยๆ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าวิธีที่นำเสนอสามารถใช้วิเคราะห์การคัปปลิ้งที่เกิดขึ้นภายในแกนทั้งสองของท่อนำคลื่นแบบขนานได้อย่างถูกต้อง

จากโครงสร้างตัวอย่างในหัวข้อ 4.1 และ 4.2 สามารถสรุปได้ว่าวิธีที่นำเสนอนี้สามารถนำมาใช้งานในการวิเคราะห์ดูผลของสนามภายในท่อนำคลื่นในระยะทางต่างๆได้

4.3 ท่อนำคลื่นแบบ Tapered (Tapered Waveguide)

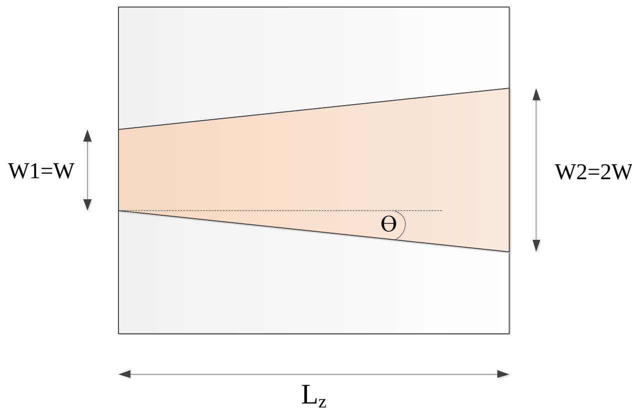
โครงสร้างท่อนำคลื่นแบบ tapered เป็นโครงสร้างท่อนำคลื่นที่มีแกนในเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีความหนา (t) มีขนาดคงที่ แต่ความกว้าง (W) จะมีขนาดไม่คงที่ ซึ่งความกว้างของแกนในนี้จะมีขนาดบานออกหรือแคบลงด้วยความชันคงที่ตลอดแนวยาวของท่อนำคลื่น ซึ่งตำแหน่งของแกนในแผ่นฐาน และวัสดุหุ้มของโครงสร้างแบบ tapered ทีใช้ในการทดสอบสามารถแสดงได้ดังภาพที่ 4.14



ภาพที่ 4.14 ท่อนำคลื่นแบบ tapered ที่ใช้ในการทดสอบ

ในวิทยานิพนธ์นี้จะจำลองโครงสร้างท่อนำคลื่นแบบ tapered โดยกำหนดให้ความกว้างที่จุดเริ่มต้นของแกนของท่อนำคลื่นมีค่าเท่ากับ W จากนั้นท่อนำคลื่นจะมีขนาดกว้างขึ้นด้วยมุม θ จนกระทั่งแกนของท่อนำคลื่นมีความกว้างเท่ากับ $2W$ ดังแสดงในภาพที่ 4.15 การทดสอบด้วยท่อนำคลื่นแบบ tapered มีวัตถุประสงค์เพื่อวิเคราะห์ปัญหามุมกว้างด้วยการประมาณค่าแบบพาเดจากวิธีทางคณิตศาสตร์ที่นำเสนอ โดยจะทำการเปรียบเทียบผลที่ได้จากการทดสอบด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับหนึ่ง กับผลที่ได้จากการประมาณค่าแบบพาเดอันดับสองในท่อนำคลื่นที่มีมุม θ แตกต่างกัน 4 ค่า คือ 0.1 องศา 0.5 องศา 1 องศา และ 2 องศา ตามลำดับ ในการทดสอบจะเริ่มต้นจากการปล่อยคลื่นแสงแบบจุดเกาส์ไปที่แกน w1 ของท่อนำคลื่น จากนั้นจะทำการวิเคราะห์ผลการแพร่กระจายของท่อนำคลื่นของทุกหน้าตัดทุกๆระยะ Δz เช่นเดียวกับการทดสอบที่ผ่านมา

สำหรับการจำลองด้วยโปรแกรม MATLAB ในการทดสอบนี้จะกำหนดให้โครงสร้างท่อนำคลื่นแบบ tapered มีจำนวนเอลิเมนต์ท่ากับ 17,600 เอลิเมนต์ และทำการพิจารณาขอบเขตหน้าต่างการคำนวณที่ 10x10 μm โดยมีค่าพารามิเตอร์ต่างที่ใช้ในการทดสอบดังแสดงในตารางที่ 4.3



ภาพที่ 4.15 ท่อนำคลื่นแบบ tapered จากมุมสูง (top view) ระนาบ $x-z$

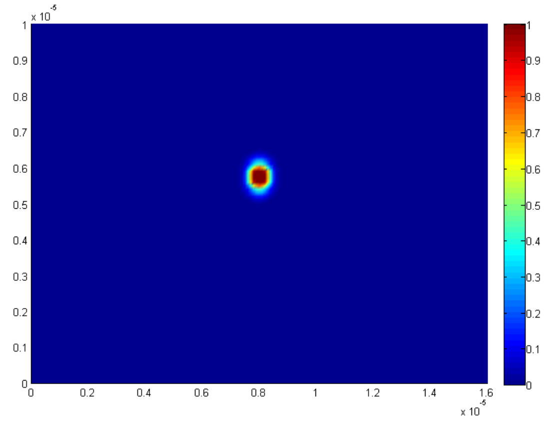
ตารางที่ 4.3 พารามิเตอร์ที่ใช้ในการทดสอบท่อนำคลื่นแบบ tapered [31]

พารามิเตอร์	0.1 องศา	0.5 องศา	1 องศา	2 องศา
ความยาวของท่อนำคลื่น (l_z)	287 μm	57 μm	29 μm	19 μm
ความกว้างของแกน (w)	1 μm	1 μm	1 μm	1 μm
ความหนาของแกน (t)	0.5 μm	0.5 μm	0.5 μm	0.5 μm
ดัชนีหักเหของแกน (n_{core})	3.455	3.455	3.455	3.455
ดัชนีหักเหของวัสดุหุ้ม $(n_{cladding})$	1	1	1	1
ดัชนีหักเหของฐาน $(n_{substrate})$	1.445	1.445	1.445	1.445
ดัชนีหักเหอ้างอิง(n_0)	2.455	2.455	2.455	2.455
ระยะห่างระหว่างหน้าตัด (Δz)	0.1 μm	0.1 μm	0.1 μm	0.1 μm
ขนาดของเกาส์เซียนพัลส์	0.4 μm	0.4 μm	0.4 μm	0.4 μm
ความยาวคลื่น(λ)	1.55 μm	1.55 μm	1.55 μm	1.55 μm

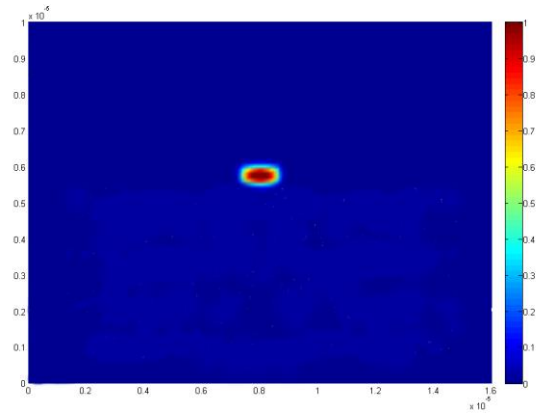
4.3.1 ผลการทดสอบท่อนำคลื่นแบบ tapered ด้วยมุมกว้าง 0.1 องศา

ในการทดสอบนี้จะพิจารณาท่อนำคลื่นที่มีระยะ l_z = 287 μm ผลการทดสอบท่อนำคลื่นแบบ tapered ด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับหนึ่งแสดงดังภาพที่ 4.16 เมื่อเริ่มทำการปล่อยคลื่นแสงเกาส์เซียนพัลส์เข้าไปในแกนในของท่อนำคลื่น คลื่นแสงจะแพร่กระจายอยู่ภายในขอบเขตของแกนในท่อนำคลื่น โดยจะสังเกตได้ว่าขนาดของคลื่นแสงจะมีขนาดกว้างมากขึ้นเรื่อยๆตามความกว้าง W ที่เปลี่ยนไปจนกระทั่งจบการทดสอบ ในขณะเดียวกันผลการทดสอบด้วยการประมาณค่าพาเดอันดับสองนั้นก็ให้ผลไปในทิศทางเดียวกันดังแสดงในภาพที่ 4.17

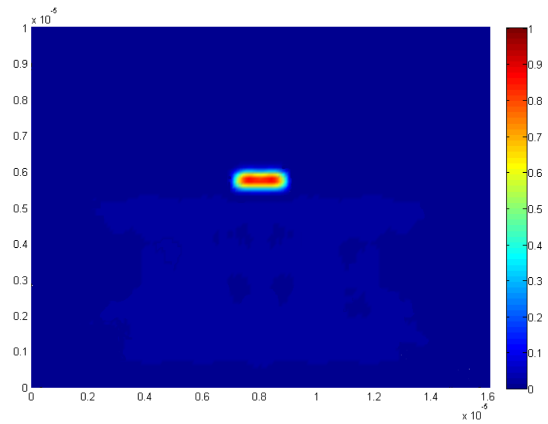
จากการทดสอบท่อนำคลื่นแบบ tapered ที่มีมุมกว้าง 0.1 องศา ด้วยการประมาณพาเดอันดับหนึ่งและอันดับสอง เมื่อทำการเปรียบเทียบค่ากำลังของสนามประมาณค่าที่เกิดขึ้นภายในแกนของท่อนำคลื่นจะพบว่าค่ากำลังของสนามประมาณค่าได้จากการประมาณค่าทั้งสองอันดับมีแนวโน้มลดลงดังแสดงในภาพที่ 4.18 ทั้งนี้เป็นเพราะคลื่นแสงที่แพร่กระจายอยู่ภายในท่อนำคลื่นมีการรั่วออกจากแกนเล็กน้อย จะสังเกตุได้จากภาพที่ 4.16 และ 4.17 อย่างไรก็ตามภาพรวมของค่ากำลังของสนามที่ได้จากการประมาณค่าทั้งสองอันดับถือว่าเป็นไปทิศทางเดียวกัน



ก) $l_z = 0 \mu m$

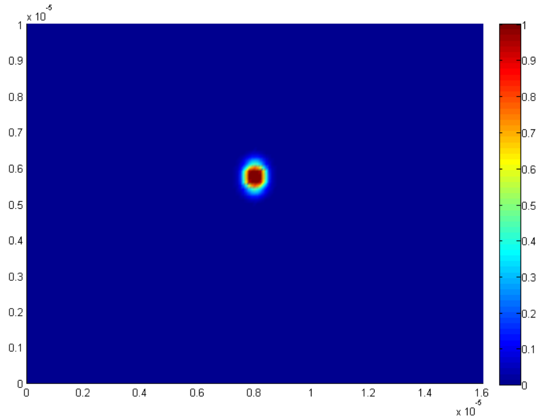


ข) $l_z = 144 \mu m$

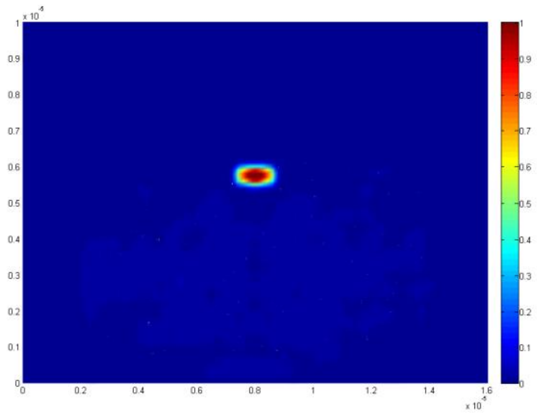


ค) $l_z = 287 \mu m$

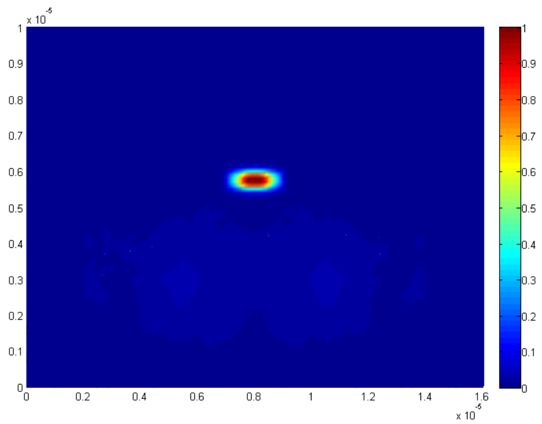
ภาพที่ 4.16 ผลการทดสอบการแพร่กระจายของคลื่นภายในท่อนำคลื่นแบบ tapered ที่มีมุมกว้าง 0.1 องศา ด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับหนึ่ง



ก) $l_z = 0\mu m$

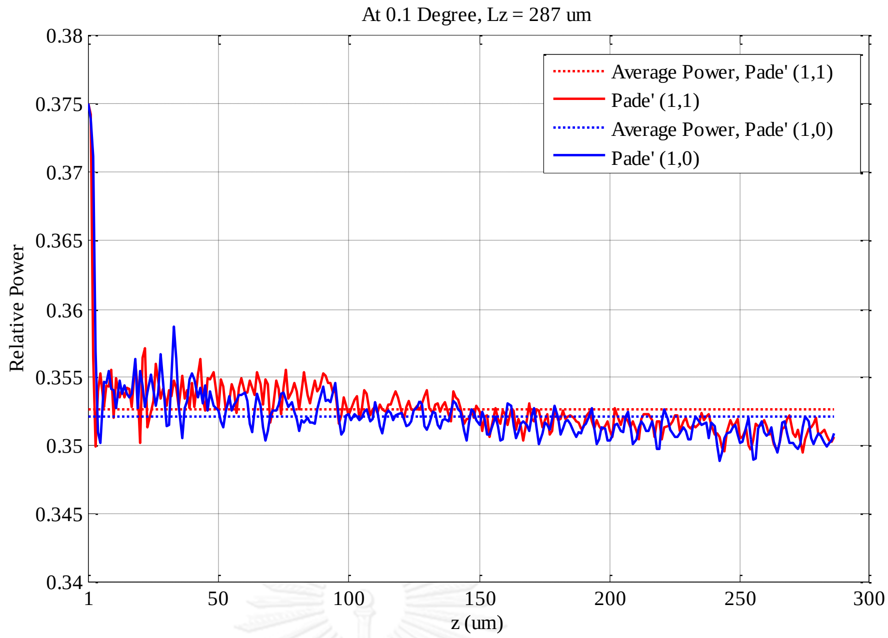


ข) $l_z = 144\mu m$



ค) $l_z = 287\mu m$

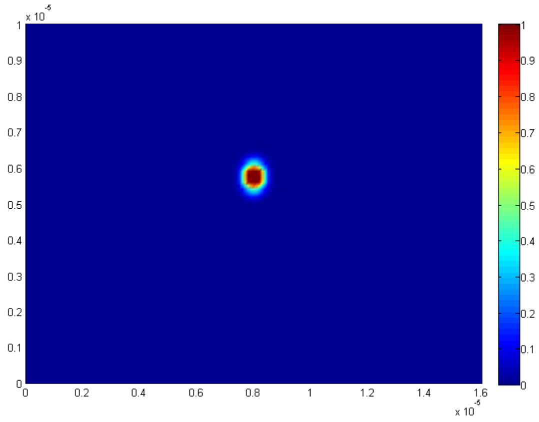
ภาพที่ 4.17 ผลการทดสอบการแพร่กระจายของคลื่นภายในท่อนำคลื่นแบบ tapered ที่มีมุมกว้าง 0.1 องศา ด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับสอง



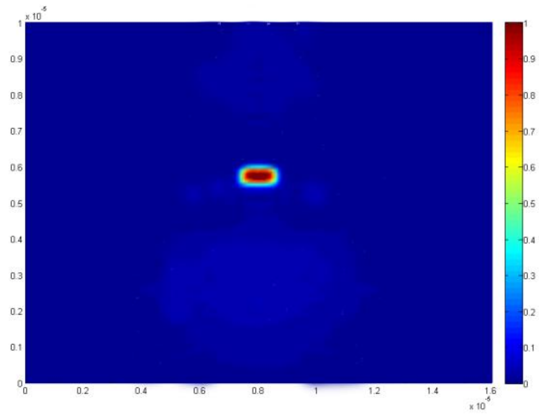
ภาพที่ 4.18 ค่ากำลังของสนามประมาณค่าภายในแกนในของท่อนำคลื่นแบบ tapered ที่มุมกว้าง 0.1 องศา

4.3.2 ผลการทดสอบท่อนำคลื่นแบบ tapered ที่มีมุมกว้าง 0.5 องศา

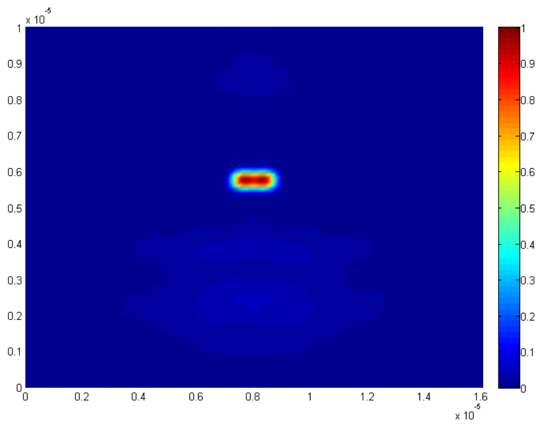
ในการทดสอบนี้จะพิจารณาท่อนำคลื่นที่มีระยะ l_z = 57 μm ผลการทดสอบท่อนำคลื่นแบบ tapered ที่มีมุมกว้าง 0.5 องศา ด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับหนึ่งแสดงดังภาพที่ 4.19 เมื่อเริ่มทำการปล่อยเกาส์เซียนพัลส์เข้าไปในแกนในของท่อนำคลื่น คลื่นแสงจะแพร่กระจายอยู่ภายในขอบเขตของแกนท่อนำคลื่น โดยจะสังเกตได้ว่าขนาดของคลื่นแสงจะมีขนาดกว้างมากขึ้นเรื่อยๆตามความกว้าง W ที่เปลี่ยนไปจนกระทั่งถึงความกว้าง $2W$ ในขณะเดียวกันผลการทดสอบด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับสอง ก็ให้ผลไปในทิศทางเดียวกันดังแสดงในภาพที่ 4.20



ก) $l_z = 0\mu m$

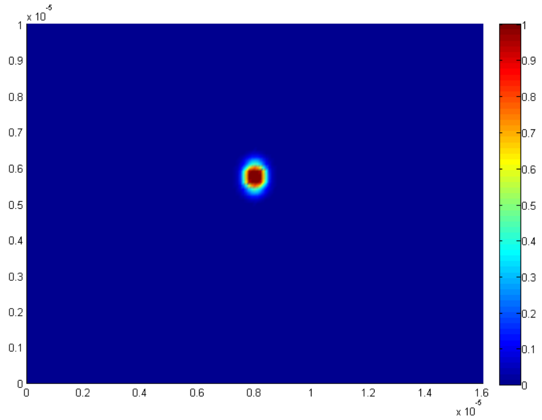


ข) $l_z = 29\mu m$

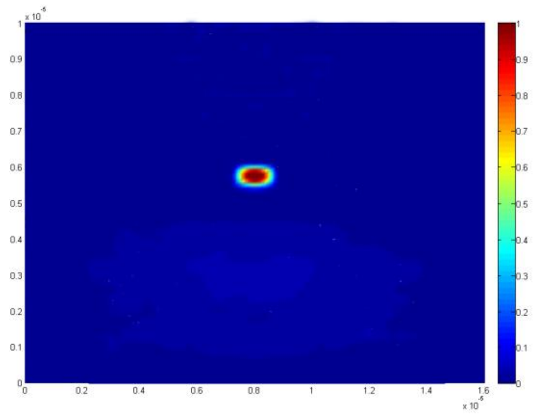


ค) $l_z = 57\mu m$

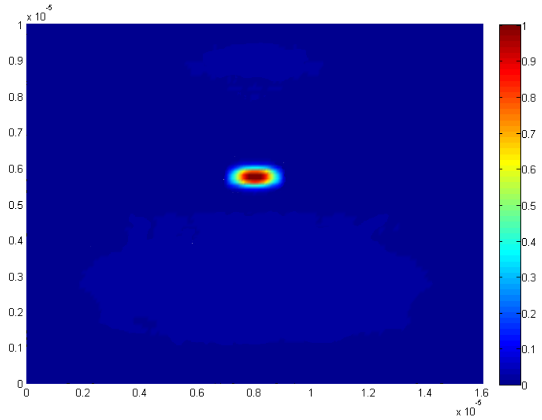
ภาพที่ 4.19 ผลการทดสอบการแพร่กระจายของคลื่นภายในท่อนำคลื่นแบบ tapered ที่มีมุมกว้าง 0.5 องศา ด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับหนึ่ง



ก) $l_z = 0\mu m$

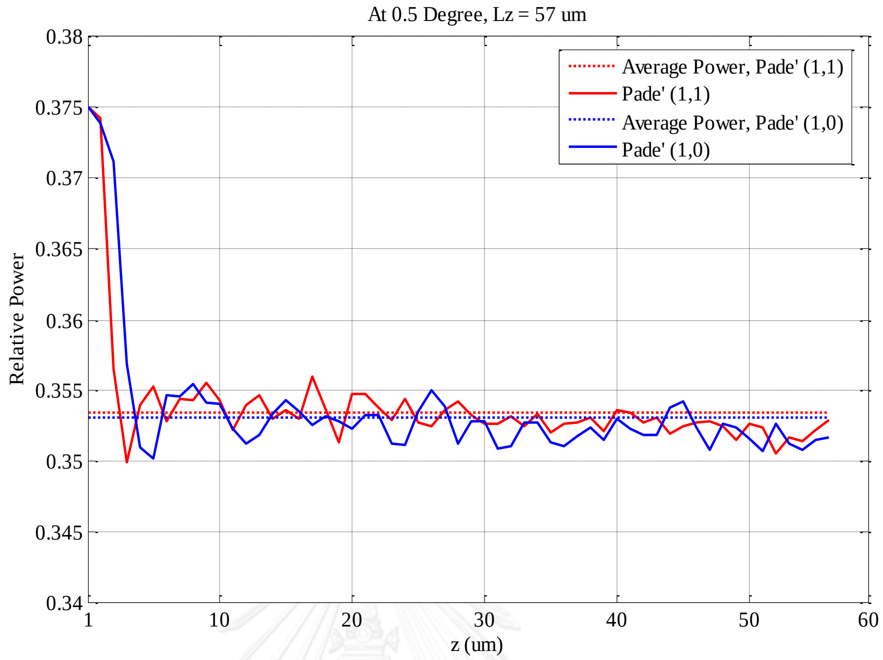


ข) $l_z = 29\mu m$



ค) $l_z = 57\mu m$

ภาพที่ 4.20 ผลการทดสอบการแพร่กระจายของคลื่นภายในท่อนำคลื่นแบบ tapered ที่มีมุมกว้าง 0.5 องศา ด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับสอง

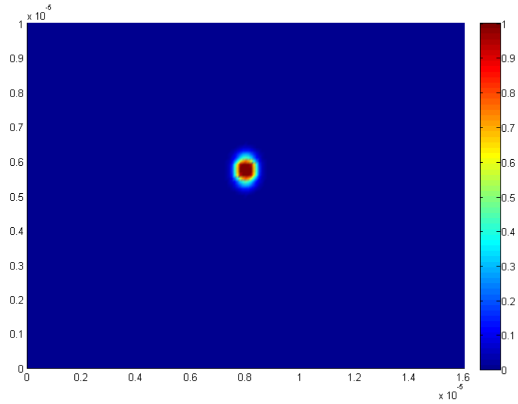


ภาพที่ 4.21 ค่ากำลังของสนามประมาณค่าภายในแกนในของท่อนำคลื่นแบบ tapered ที่มุมกว้าง 0.5 องศา

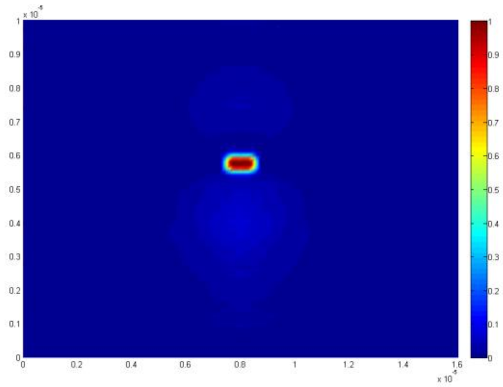
จากการทดสอบท่อนำคลื่นแบบ tapered ที่มีมุมกว้าง 0.5 องศา ด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับหนึ่งและอันดับสอง เมื่อทำการเปรียบเทียบค่ากำลังของสนามประมาณค่าที่เกิดขึ้นภายในแกนในของท่อนำคลื่นจะพบว่า ค่ากำลังของสนามประมาณค่าภายในแกนในของท่อนำคลื่นที่ได้จากการประมาณค่าทั้งสองอันดับมีแนวโน้มลดลงเล็กน้อยดังแสดงในภาพที่ 4.21 ซึ่งภาพรวมของค่ากำลังของสนามประมาณค่าที่ได้จากการประมาณค่าทั้งสองอันดับถือว่าเป็นไปในแนวทางเดียวกัน

4.3.3 ผลการทดสอบท่อนำคลื่นแบบ tapered ที่มีมุมกว้าง 1 องศา

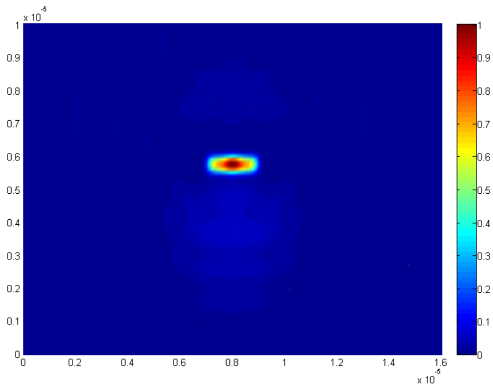
ในการทดสอบนี้จะพิจารณาท่อนำคลื่นแบบ tapered ที่มีมุมกว้าง 1 องศา ดังนั้นระยะที่ใช้ในการทดสอบจึงมีค่าเท่ากับ $l_z = 29\,\mu m$ โดยผลการทดสอบด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับหนึ่งแสดงดังภาพที่ 4.22 เมื่อเริ่มทำการปล่อยเกาส์เซียนพัลส์เข้าไปในแกนของท่อนำคลื่น คลื่นแสงจะแพร่กระจายอยู่ภายในขอบเขตของแกนท่อนำคลื่นในลักษณะเดียวกับการทดสอบที่ผ่านมา กล่าวคือขนาดของคลื่นแสงจะมีขนาดกว้างมากขึ้นเรื่อยๆตามความกว้าง W ที่เปลี่ยนไปจนกระทั่งจบการทดสอบ ซึ่งผลการทดสอบดังกล่าวเป็นไปในทิศทางเดียวกันกับผลการทดสอบด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับสองดังแสดงในภาพที่ 4.23



ก) $l_z = 0\mu m$

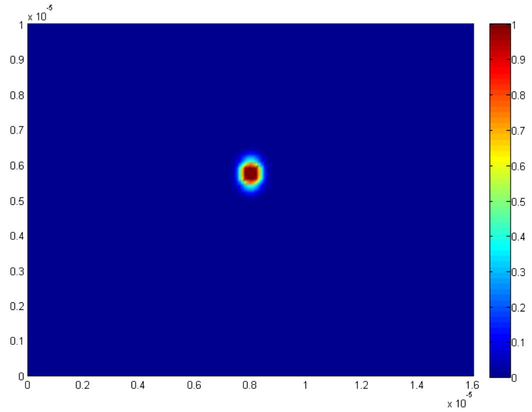


ข) $l_z = 15\mu m$

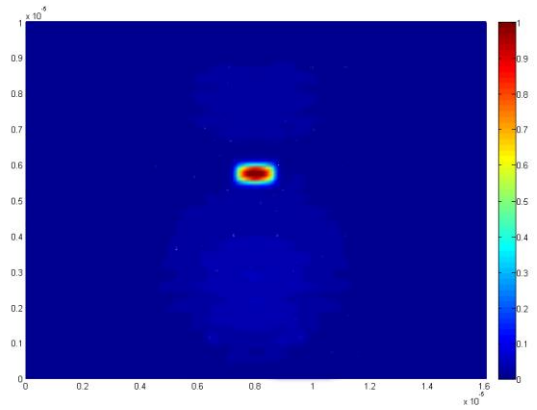


ค) $l_z = 29\mu m$

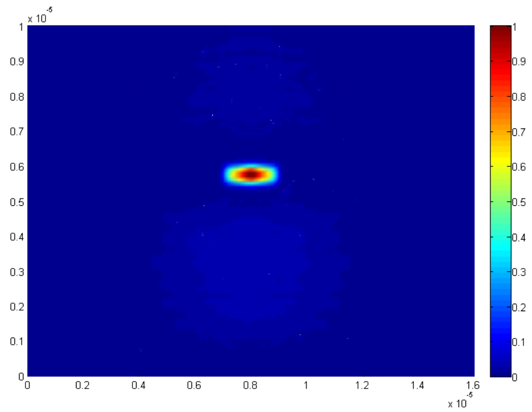
ภาพที่ 4.22 ผลการทดสอบการแพร่กระจายของคลื่นภายในท่อนำคลื่นแบบ tapered ที่มีมุมกว้าง 1 องศา ด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับหนึ่ง



ก) $l_z = 0\mu m$



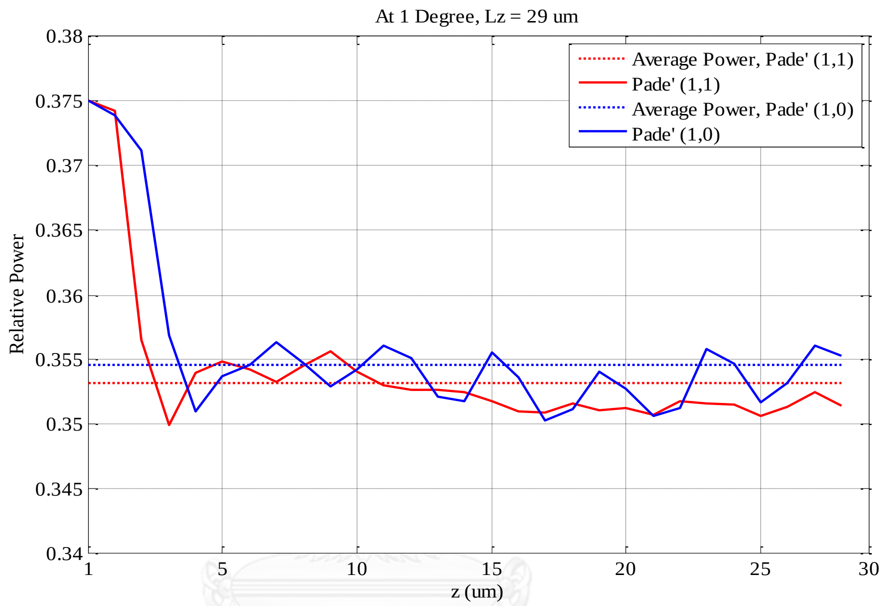
ข) $l_z = 15\mu m$



ค) $l_z = 29\mu m$

ภาพที่ 4.23 ผลการทดสอบการแพร่กระจายของคลื่นภายในท่อนำคลื่นแบบ tapered ที่มีมุมกว้าง 1 องศา ด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับสอง

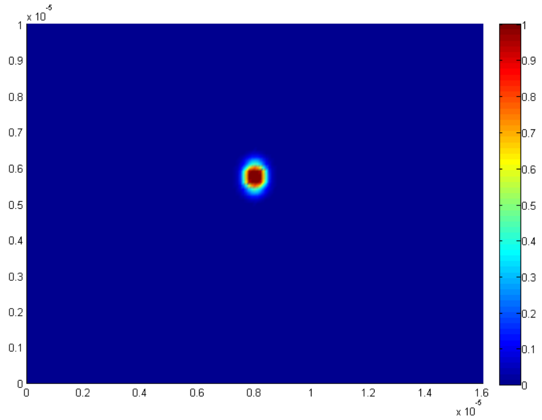
จากการทดสอบท่อนำคลื่นแบบ tapered ที่มีมุมกว้าง 1 องศา ด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับหนึ่งและอันดับสอง เมื่อทำการเปรียบเทียบค่ากำลังของสนามประมาณค่าที่เกิดขึ้นภายในแกนในของท่อนำคลื่นจะพบว่า ค่ากำลังของสนามประมาณค่าภายในแกนในของท่อนำคลื่นที่ได้จากการประมาณค่าทั้งสองอันดับมีการแกว่งขึ้นและลงโดยมีแนวโน้มคงที่ดังแสดงในภาพที่ 4.24 โดยที่กำลังของสนามประมาณค่าภายในแกนในของท่อนำคลื่นที่ได้จากการประมาณค่าแบบพาเดอันดับสองมีค่าเฉลี่ยที่น้อยกว่าการประมาณค่าแบบพาเดอันดับหนึ่ง



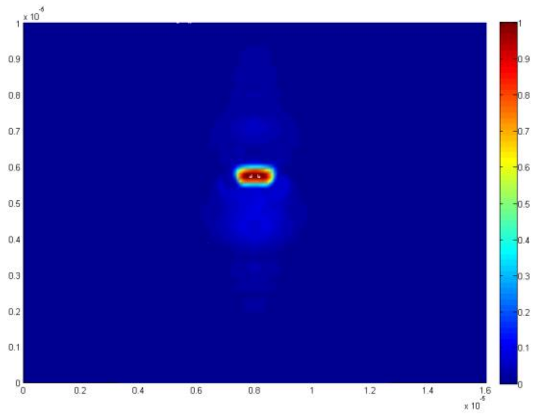
ภาพที่ 4.24 ค่ากำลังของสนามประมาณค่าภายในแกนในของท่อนำคลื่นแบบ tapered ที่มุมกว้าง 1 องศา

4.3.4 ผลการทดสอบท่อนำคลื่นแบบ tapered ที่มีมุมกว้าง 2 องศา

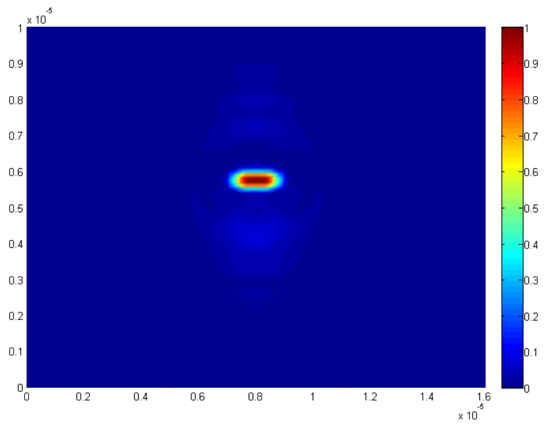
เนื่องจากในการทดสอบนี้จะพิจารณาท่อนำคลื่นแบบ tapered ที่มีมุมกว้าง 2 องศา ดังนั้นระยะที่ใช้ในการทดสอบจึงมีระยะ l_z เพียง 19 μm โดยผลการทดสอบด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับหนึ่งแสดงดังภาพที่ 4.25 เมื่อเริ่มทำการปล่อยเกาส์เซียนพัลส์เข้าไปในแกนในของท่อนำคลื่นคลื่นแสงจะแพร่กระจายอยู่ภายในขอบเขตของแกนท่อนำคลื่นในลักษณะเดียวกับการทดสอบที่ผ่านมา กล่าวคือขนาดของคลื่นแสงจะมีขนาดกว้างมากขึ้นเรื่อยๆตามของ W ที่เปลี่ยนไปจนกระทั่งถึงจุดที่แกนของท่อนำคลื่นมีความกว้างเท่ากับ $2W$ ที่ l_z = 19 μm ซึ่งผลการทดสอบดังกล่าวเป็นไปในทิศทางเดียวกันกับผลการทดสอบด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับสองดังแสดงในภาพที่ 4.26



ก) $l_z = 0\mu m$

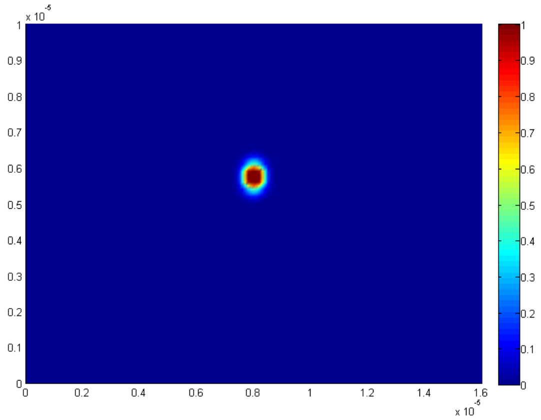


ข) $l_z = 10\mu m$

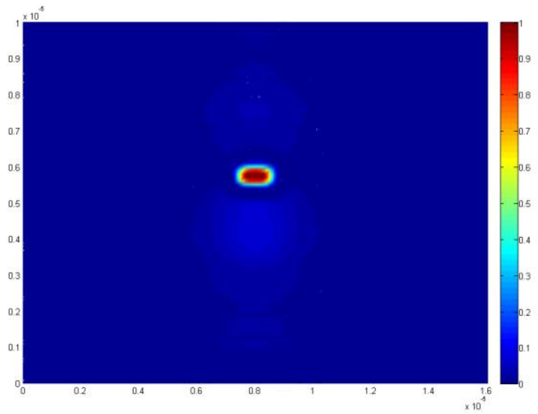


ค) $l_z = 19\mu m$

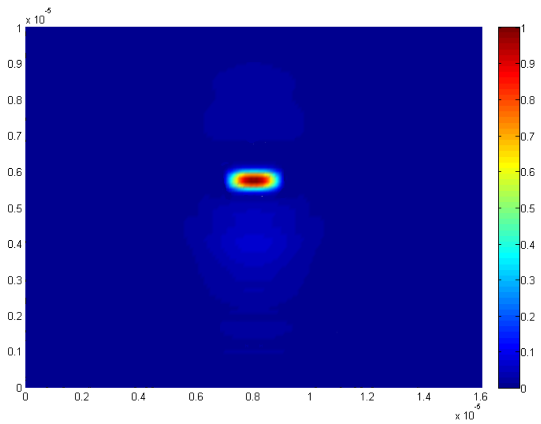
ภาพที่ 4.25 ผลการทดสอบการแพร่กระจายของคลื่นภายในท่อนำคลื่นแบบ tapered ที่มีมุมกว้าง 2 องศา ด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับหนึ่ง



ก) $l_z = 0\mu m$

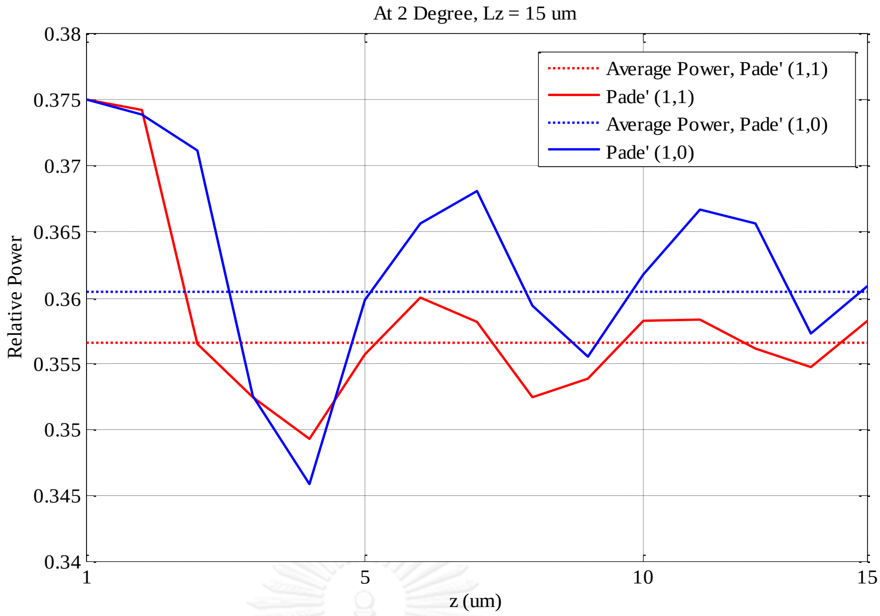


ข) $l_z = 10\mu m$



ค) $l_z = 19\mu m$

ภาพที่ 4.26 ผลการทดสอบการแพร่กระจายของคลื่นภายในท่อนำคลื่นแบบ tapered ที่มีมุมกว้าง 2 องศา ด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับสอง



ภาพที่ 4.27 ค่ากำลังของสนามประมาณค่าภายในแกนในของท่อนำคลื่นแบบ tapered ที่มุมกว้าง 2 องศา

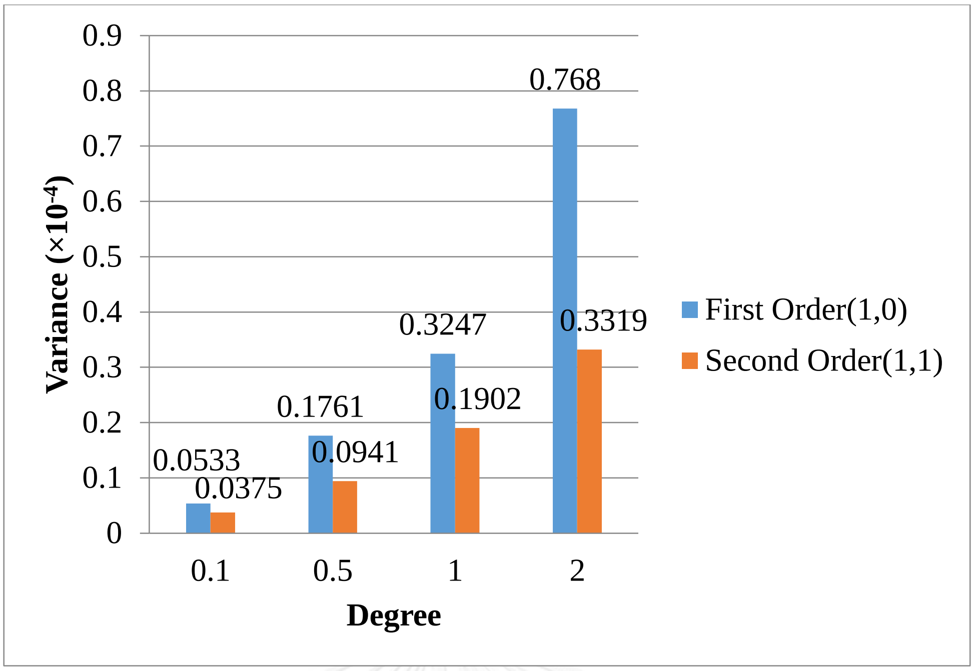
จากการทดสอบท่อนำคลื่นแบบ tapered ที่มีมุมกว้าง 2 องศา ด้วยการประมาณค่าแบบพาเดอันดับหนึ่งและอันดับสอง เมื่อทำการเปรียบเทียบค่ากำลังของสนามประมาณค่าที่เกิดขึ้นภายในแกนของท่อนำคลื่นจะพบว่า กำลังของสนามประมาณค่าภายในแกนในของท่อนำคลื่นที่ได้จากการประมาณค่าแบบพาเดทั้งสองอันดับมีการแกว่งขึ้นและลงโดยมีแนวโน้มคงที่ดังแสดงในภาพที่ 4.27 โดยที่ค่ากำลังของสนามประมาณค่าที่ได้จากการประมาณค่าพาเดอันดับสองมีค่าเฉลี่ยที่น้อยกว่าการประมาณค่าพาเดอันดับหนึ่ง

เราสามารถสรุปผลการทดสอบท่อนำคลื่นแบบ tapered ที่มีมุมกว้างต่างกันทั้ง 4 กรณี ได้ตามตารางที่ 4.4 โดยจะเห็นได้ว่า ผลที่ได้จากการประมาณค่าแบบพาเดทั้งสองอันดับมีค่าไม่แตกต่างกันมากนักในการทดสอบด้วยท่อนำคลื่นที่มีมุมกว้างบานออก 0.1 และ 0.5 องศา แต่ในการทดสอบด้วยท่อนำคลื่นแบบ tapered ที่มีมุมกว้างมากขึ้น ในกรณีมุมกว้าง 1 และ 2 องศา เมื่อพิจารณาจากผลต่างของค่าเฉลี่ยจะพบว่าผลที่ได้จากการประมาณพาเดทั้ง 2 อันดับนั้นมีแนวโน้มของผลต่างกันมากขึ้นเรื่อยๆ เพราะฉะนั้นการประมาณด้วยพาเดอันดับต่ำจะมีความคลาดเคลื่อนมากกว่าในกรณีที่เราพิจารณาโครงสร้างที่ไม่เอกรูปหรือมีการเปลี่ยนแปลงตามแนวแกนยาวมากๆ นอกจากนี้เมื่อสังเกตถึงค่ากำลังของสนามประมาณค่าภายในแกนในของท่อนำคลื่นจะเห็นว่าค่าเฉลี่ยเมื่อใช้การประมาณด้วยพาเดอันดับสองมีค่าใกล้เคียงกันมากกว่าเมื่อพิจารณาทั้ง 4 มุมกว้าง และความแปรปรวน

(variance) ของผลที่ได้จากการประมาณค่าพาเดอันดับหนึ่งมีค่ามากกว่าพาเดอันดับสองในทั้ง 4 กรณี ดังแสดงในภาพที่ 4.28 นั่นหมายถึงความสามารถในการประมาณค่าที่ได้จากการประมาณค่าพาเดอันดับสองสามารถนำไปใช้วิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงในท่อนำคลื่นได้ละเอียดกว่าการประมาณค่าพาเดอันดับหนึ่ง มีความแกว่งของผลข้อมูลน้อยกว่าอย่างเห็นได้ชัด ดังนั้นการปรับอันดับของพาเดที่ใช้ในการประมาณค่าควรปรับให้เหมาะสมกับโครงสร้างที่ต้องการวิเคราะห์ เนื่องจากเมื่อเราเลือกใช้การประมาณพาเดอันดับที่สูงขึ้นมาใช้ในการประมาณค่าเพื่อหาคำตอบของสมการสนามที่ไม่ทราบค่า แม้ว่าจะได้ผลลัพธ์ที่ละเอียดยิ่งขึ้นตามหลักการทางคณิตศาสตร์ แต่ต้องแลกกับเวลาในการคำนวณและพื้นที่หน่วยความจำในการประมวลผลสมการที่ซับซ้อนมากยิ่งขึ้น ในวิทยานิพนธ์นี้เราจึงเสนอวิธีการประมาณพาเดแบบปรับตัว ตามโครงสร้างที่เราต้องการวิเคราะห์ ให้ยืดหยุ่นเหมาะสมกับโครงสร้างรูปแบบต่างๆ

ตารางที่ 4.4 สรุปผลการทดลองด้วยท่อนำคลื่นแบบ tapered

θ $(Degree)$	l_z (μm)	Mean of Power in core			Variance of Power in core		Power in core at $z = l_z$	
		Padé (1,0)	Padé (1,1)	Δ Mean	Padé (1,0)	Padé (1,1)	Padé(1,0)	Padé(1,1)
0.1	287	0.3521	0.3527	0.0006	0.0533	0.0375	0.35093	0.35064
0.5	57	0.3530	0.3536	0.0006	0.1711	0.0941	0.35171	0.35295
1	29	0.3546	0.3537	0.0009	0.3247	0.1902	0.35532	0.35146
2	15	0.3605	0.3566	0.0039	0.7680	0.3319	0.36096	0.35826



ภาพที่ 4.28 ค่าความแปรปรวนที่ได้จากการทดสอบด้วยท่อนำคลื่นแบบ tapered

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

ในวิทยานิพนธ์นี้ได้นำเสนอระเบียบวิธีวิเคราะห์คลื่นแสงในท่อนำคลื่นแบบ 3 มิติ ในรูปของสมการสนามแม่เหล็กแบบเวกเตอร์ โดยลดความซับซ้อนในการคำนวณด้วยการใช้เพียงฟังก์ชันรูปร่างสี่เหลี่ยมแบบโนด และในกรณีที่ต้องการวิเคราะห์คลื่นแสงในท่อนำคลื่นแบบ 3 มิติที่มีโครงสร้างไม่เอกรูป ได้ทำการเพิ่มความถูกต้องในการประมาณค่าให้ละเอียดขึ้นด้วยการปรับการประมาณค่าเทอมของอนุพันธ์อันดับสองในสมการคลื่นให้เป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่งด้วยการประยุกต์ใช้การประมาณพาเดอันดับสูงที่ใช้ในการแก้ปัญหามุมกว้าง โดยการวิเคราะห์หาคำตอบของสนามประมาณค่าได้ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชันตามที่นำเสนอมาวิเคราะห์สมการคลื่นในโดเมนความถี่ที่ไม่มีแหล่งกำเนิดภายในสำหรับตัวกลางแบบไอโซทรอปิก โดยใช้ร่วมกับเงื่อนไขขอบเขต (boundary condition) แบบชั้นแมตซ์เฟสสมบูรณ์ (Perfectly Matched Layer : PML) เพื่อนำมาสร้างโปรแกรมวิเคราะห์คลื่นแสงในท่อนำคลื่นจากวิธีการที่นำเสนอด้วยโปรแกรม MATLAB และทำการทดสอบในท่อนำคลื่นที่มีลักษณะแตกต่างกัน 3 แบบ คือ ท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยม ท่อนำคลื่นแบบขนานและท่อนำคลื่นแบบ tapered โดยการทดสอบมีวัตถุประสงค์เพื่อพิสูจน์ความถูกต้องของวิธีการที่นำเสนอด้วยการสังเกตการณ์แพร่กระจายของคลื่นแสงภายในท่อนำคลื่นดังที่กล่าวมาข้างต้น

ผลจากการทดสอบแสดงให้เห็นว่าวิธีการที่นำเสนอสามารถใช้ในการวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงภายในท่อนำคลื่นที่มีแกนเป็นรูปร่างสี่เหลี่ยมได้ เนื่องจากวิธีที่นำเสนอแสดงให้เห็นถึงคลื่นแสงที่แพร่กระจายอยู่ภายในขอบเขตของท่อนำคลื่นดังแสดงในหัวข้อที่ 4.1 อีกทั้งยังสามารถใช้วิเคราะห์ปรากฏการณ์คับปลิ้งที่เกิดขึ้นภายในแกนในของท่อนำคลื่นแบบขนานได้ ซึ่งผลการทดสอบในหัวข้อที่ 4.2 ได้อธิบายถึงการถ่ายทอดกำลังที่เกิดขึ้นระหว่างแกนในด้านซ้ายและแกนในด้านขวาของท่อนำคลื่นแบบขนาน นอกจากนี้ การทดสอบเพื่อเปรียบเทียบการประมาณค่าแบบพาเดอันดับหนึ่งและอันดับสองได้ถูกอธิบายไว้ในหัวข้อที่ 4.3 อันเป็นการทดสอบในท่อนำคลื่นแบบ tapered ที่มีลักษณะเป็นมุมกว้าง โดยการวิเคราะห์ในท่อนำคลื่นแบบ tapered จะทำการวิเคราะห์โครงสร้างที่มีมุมกว้างต่างกัน 4 มุม คือ 0.1 องศา 0.5 องศา 1 องศา และ 2 องศา ซึ่งผลการทดสอบแสดงให้เห็นว่า การประมาณค่าแบบพาเดอันดับสองสามารถใช้ประมาณค่ากำลังของสนามประมาณค่าที่เกิดขึ้นภายในท่อนำคลื่นที่มีมุมกว้างได้ละเอียดกว่าการประมาณค่าแบบพาเดอันดับหนึ่ง

5.2 ข้อเสนอแนะ

ในวิทยานิพนธ์นี้การวิเคราะห์สนามภายในท่อนำคลื่นแสงโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชันด้วยการใช้การประมาณค่าแบบพาเดมาช่วยในการประมาณค่าสมการแบบเวกเตอร์เพื่อหาค่าคำตอบของสนาม ในการแบ่งเอลิเมนต์ใช้เอลิเมนต์รูปร่างสี่เหลี่ยมที่สามารถประยุกต์ใช้ได้ดีกับโครงสร้างที่มีรูปร่างเหลี่ยม ซึ่งในงานวิจัยนี้ยังไม่ได้ให้ความสำคัญกับการปรับแต่งรูปร่างเอลิเมนต์ การปรับแต่งระยะขั้นการคำนวณ การปรับแต่งค่าดัชนีหักเหอ้างอิง รวมไปถึงพิจารณาการประมาณค่าแบบพาเดที่มีอันดับสูงกว่าอันดับสอง เนื่องจากในวิธีที่นำเสนอไม่สามารถรองรับการคำนวณเวกเตอร์ที่มีขนาดใหญ่ได้เนื่องจากข้อจำกัดของเครื่องคำนวณเนื่องจากสมการมีความซับซ้อนมากกว่า ดังนั้นในวิทยานิพนธ์นี้จึงทำการทดสอบด้วยการประมาณค่าแบบพาเดเพียงอันดับหนึ่งและอันดับสองเท่านั้น

ในอนาคตอาจมีการศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับการปรับแต่งตัวแปรต่างๆ เช่น วัสดุที่ใช้ รูปร่างของเอลิเมนต์ โดยอาจมีการพิจารณาแบ่งเอเลเมนต์แบบปรับตัวให้เหมาะสมกับลักษณะของโครงสร้างของท่อนำคลื่น หรือพิจารณาการทดสอบด้วยการประมาณค่าแบบพาเดที่มีอันดับสูงขึ้น นอกจากนี้ยังสามารถทำการทดสอบเพิ่มเติมในท่อนำคลื่นที่ทำมาจากวัสดุอื่นๆ เช่น วัสดุแอนไอโซทรอปิก วัสดุไบแอนไอโซทรอปิก วัสดุที่มีความสูญเสีย วัสดุที่ไม่เป็นเชิงเส้น วัสดุที่แปรไปตามความถี่ เป็นต้น

รายการอ้างอิง

[1] (March 2003). *Integrated Optics: Why monolithic integration will win for optical components*. Available: www.optun.com

[2] Y. Weiming, G. Gilardi, N. Calabretta, M. K. Smit, and M. J. Wale, "Experimental and Numerical Study of Electrical Crosstalk in Photonic-Integrated Circuits," *Lightwave Technology, Journal of,* vol. 33, pp. 934-942, 2015.

[3] H. P. Nolting and R. Marz, "Results of benchmark tests for different numerical BPM algorithms," *Lightwave Technology, Journal of,* vol. 13, pp. 216-224, 1995.

[4] S. Obayya, *Computational Photonics*: J. Wiley & Sons,Ltd., 2001.

[5] C. Chun-Ping, Y. Kamiji, J. Oda, N. Nagaoka, T. Anada, and S. Takeda, "A novel bandpass filter using higher-order degenerate modes of planar photonic crystal microcavity in terahertz regime," in *Microwave Conference (EuMC), 2012 42nd European*, 2012, pp. 1186-1189.

[6] C. Youngchul and N. Dagli, "An assessment of finite difference beam propagation method," *Quantum Electronics, IEEE Journal of,* vol. 26, pp. 1335-1339, 1990.

[7] M. S. Stern, "Semivectorial polarised finite difference method for optical waveguides with arbitrary index profiles," *Optoelectronics, IEE Proceedings J,* vol. 135, pp. 56-63, 1988.

[8] J. Yamauchi, T. Mugita, and H. Nakano, "Implicit Yee-mesh-based finite-difference full-vectorial beam-propagation method," *Lightwave Technology, Journal of,* vol. 23, pp. 1947-1955, 2005.

[9] Y. Tsuji, M. Koshiba, and T. Shiraishi, "Finite element beam propagation method for three-dimensional optical waveguide structures," *Lightwave Technology, Journal of,* vol. 15, pp. 1728-1734, 1997.

[10] Y. Tsuji and M. Koshiba, "Guided-mode and leaky-mode analysis by imaginary distance beam propagation method based on finite element scheme," *Lightwave Technology, Journal of,* vol. 18, pp. 618-623, 2000.

[11] O. Mitomi and K. Kasaya, "An improved semivectorial beam propagation method using a finite-element scheme," *Photonics Technology Letters, IEEE,* vol. 10, pp. 1754-1756, 1998.

[12] E. Montanari, S. Selleri, L. Vincetti, and M. Zoboli, "Finite-element formulation for full-vectorial propagation analysis in three-dimensional optical waveguides," *Photonics Technology Letters, IEEE,* vol. 9, pp. 1244-1246, 1997.

[13] S. S. A. Obayya, B. M. A. Rahman, and H. A. El-Mikati, "Full-vectorial finite-element beam propagation method for nonlinear directional coupler devices," *Quantum Electronics, IEEE Journal of,* vol. 36, pp. 556-562, 2000.

[14] Y. Tsuji and M. Koshiba, "A finite element beam propagation method for strongly guiding and longitudinally varying optical waveguides," *Lightwave Technology, Journal of,* vol. 14, pp. 217-222, 1996.

[15] K. K. a. T. Kitoh, *Introduction to Optical Waveguide Analysis*: John Wiley & Son. Inc, 2001.

[16] O. Mitomi and K. Kasaya, "Wide-angle finite-element beam propagation method using Pade approximation," *Electronics Letters,* vol. 33, pp. 1461-1462, 1997.

[17] Y. Tsuji, M. Koshiba, and T. Tanabe, "A wide-angle beam propagation method based on a finite element scheme," *Magnetics, IEEE Transactions on,* vol. 33, pp. 1544-1547, 1997.

[18] G. R. Hadley, "Wide-angle beam propagation using Padé approximant operators," *Optics Letters,* vol. 17, pp. 1426-1428, 1992/10/15 1992.

[19] M. Koshiba and Y. Tsuji, "A wide-angle finite-element beam propagation method," *Photonics Technology Letters, IEEE,* vol. 8, pp. 1208-1210, 1996.

[20] M. Koshiba and Y. Tsuji, "Curvilinear hybrid edge/nodal elements with triangular shape for guided-wave problems," *Lightwave Technology, Journal of,* vol. 18, pp. 737-743, 2000.

[21] K. Saitoh and M. Koshiba, "Full-vectorial finite element beam propagation method with perfectly matched layers for anisotropic optical waveguides," *Lightwave Technology, Journal of,* vol. 19, pp. 405-413, 2001.

[22] Surapus.Ch, "Analysis of Optical Beam Propagation in an Anisotropic Optical Waveguide by The Finite Element Method," Master Degree, Electrical Engineering, Chulalongkorn University, 2001.

[23] M. H. a. T. S. H. Nishihara, *Optical Integrated Circuits*. New York: McGraw-Hill, 1985.

[24] P. Limjunyawong, "Finite-element time-domain beam propagation method for analyzing 2-D anisotropic photonic crystal waveguide circuits," Master Degree, Engineering Faculty, Chulalongkorn University, 2011.

[25] M. D. D. C. J. Reddy, C. R. Cockrell, Fred B. Beck, "Finite Element Method for Eigenvalue Problems in Electromagnetics," *NASA Technical Paper,* pp. 1-19, Dec 1994.

[26] S. Din, J. Manges, Y. Xingchao, and Z. Cendes, "Spurious modes in finite-element methods," *Antennas and Propagation Magazine, IEEE,* vol. 37, pp. 12-24, 1995.

[27] A. C. Polycarpou, *Introduction to the Finite Element Method in Electromagnetics*. United State of America: Morgan & Claypool, 2006.

[28] J. George A. Baker, Perter Graves- Morris, *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications Padé Approximants*, 2rd ed.: Cambridge University Press, 2007.

[29] M. Koshiba, Y. Tsuji, and M. Hikari, "Finite element beam propagation method with perfectly matched layer boundary conditions," *Magnetics, IEEE Transactions on,* vol. 35, pp. 1482-1485, 1999.

[30] S. F. W. Shin, "Choice of the Perfectly Matched Layer Boundary Conidtion for Frequency-Domain Maxwells Equations Sovers," *Journal of Computational Physics,* vol. 231, 2012.

[31] D. Dai, Y. Tang, and J. E. Bowers, "Mode conversion in tapered submicron silicon ridge optical waveguides," *Optics Express,* vol. 20, pp. 13425-13439, 2012/06/04 2012.

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาวมาลินดา หงษ์ทอง เกิดเมื่อวันที่ 24 พฤศจิกายน พ.ศ. 2531 เป็นบุตรของ นายศิริวัฒน์ หงษ์ทอง และ นางอรวรรณ หงษ์ทอง สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรี ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ เมื่อปีการศึกษา 2553 และได้เข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาคต้นปีการศึกษา 2554 ณ ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กลุ่มวิจัยการสื่อสารทางคลื่นแสงและไมโครเวฟ