A NEW FORM OF THE LORENTZ TRANSFORMATION

(ลอเรนซ์ทรานฟอร์มเมชั่นแบบใหม่)

by

Pratoom Nopakun

B.Sc., Chulalongkorn University, 1965

Thesis

Submitted in partial fullfillment of the requirements for the

Degree of Master of Science

in

The Chulalongkorn University Graduate School

Department of Mathematics

March, 1970

(B.E. 2513)

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in partial fullfillment of the requirements for the Degree of Master of Science.

T. Nilanidhi

....

Dean of the Graduate School

Thesis Committee ....K. Na Sylvant.... Chairman

....R.H.B. Exell....

....Suwawit Kongsama....

....

Thesis Supervisor ....Dr. R.H.B. Exell....

Date ..March 16, 1970..........

ABSTRACT

In this thesis we derive the Lorentz transformation from the postulate that composite transformations and separate transformations producing them all have the same form. The method is important theoretically because nothing is assumed about the velocity of light.

We obtain the Lorentz transformation in the form

$$\left.\begin{aligned} x' &= f(v)x - vt, \\ t' &= \frac{(1 - f^2(v))x}{v} + f(v)t, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

where v is the proper velocity of S' relative to S defined by $v = dx/dt'$. The use of the proper velocities simplifies the study of non-uniform motion in physical applications.

The functional equation for the function f is found to be

$$f\left\{uf(v) + vf(u)\right\} = f(u)f(v) - (1 - f^2(v))\,u/v. \qquad (2)$$

We find the form of f by using a power series expansion method and by ordinary differential calculus.

By these methods we obtain the function f in the following forms:

$$f(v) = 1 + a_2v^2 - \tfrac{1}{2}a_2^2v^4 + \tfrac{1}{2}a_2^3v^6 - \ldots\ldots, \qquad (3)$$

and

$$f(v) = (1 + v^2/k^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad (4)$$

where k is an arbitrary constant.

We verify that if equations (1) are written in terms of the

coordinate velocity $\bar{v} = dx/dt$ of S' relative to S, we obtain the usual form

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{1}{(1 - \bar{v}^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}(x - \bar{v}t), \\ t' &= \frac{1}{(1 - \bar{v}^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}(t - \bar{v}x/c^2), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

of the Lorentz transformation when k is the velocity of light c.

We also derive the equations

$$u' = (1 + v^2/k^2)^{\frac{1}{2}}u - v(1 + u^2/k^2)^{\frac{1}{2}}; \tag{6}$$

$$a' = \left\{(1 + v^2/k^2)^{\frac{1}{2}} - (uv/k^2)(1 + u^2/k^2)^{-\frac{1}{2}}\right\} a, \tag{7}$$

for the transformations of velocity and acceleration in terms of proper velocities and proper accelerations, $a = d^2x/dt''^2$ being the proper acceleration of S" relative to S and $a' = d^2x'/dt''^2$ the proper acceleration of S" relative to S'.

These results are equivalent to the usual equations in terms of coordinate velocities and coordinate accelerations, namely

$$\bar{u}' = \frac{\bar{u} - \bar{v}}{1 - \bar{u}\bar{v}/c^2}, \tag{8}$$

$$a'_x = (1 - \bar{u}\bar{v}/c^2)^{-3}(1 - \bar{v}^2/c^2)^{3/2}a_x, \tag{9}$$

when k is the velocity of light c, $a_x = d^2x/dt^2$ being the coordinate acceleration of S" relative to S and $a'_x = d^2x'/dt'^2$ the coordinate acceleration of S" relative to S'.

บทคัดย่อ

ในวิทยานิพนธ์นี้เราหาลอเรนซ์ทรานฟอร์มเมชั่นจากสมมุติฐาน (postulate) ว่า composite transformation และ separate transformation ทำให้ได้แบบฟอร์มอย่างเดียวกัน วิธีนี้สำคัญในทางทฤษฎีเพราะว่าไม่มีการสมมุติเกี่ยวกับความเร็วของแสง และได้ ลอเรนซ์ทรานฟอร์มเมชั่นในรูป

$$\left.\begin{aligned} x' &= f(v)x - vt \\ t' &= (1 - f^2(v))x/v + f(v)t \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ซึ่ง v คือ proper velocity ของ S' สัมพันธ์กับ S โดยที่ $v = dx/dt'$ ประโยชน์ของ proper velocity ทำให้การศึกษาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ชนิดไม่เป็นเอกรูปในทางฟิสิกส์ประยุกต์ง่ายขึ้น

สมการที่ได้สำหรับฟังก์ชั่น f คือ

$$f\left\{vf(u) + uf(v)\right\} = f(u)f(v) - (1 - f^2(v))u/v \qquad (2)$$

เราหาแบบฟอร์มของ f โดยใช้วิธีการกระจายของ power series และโดยการคำนวนแบบดิฟเฟอร์เรนชิเอทธรรมดา จากวิธีเหล่านี้ จะได้ ฟังก์ชั่น f ในรูปต่อไปนี้

$$f(v) = 1 + a_2v^2 - \tfrac{1}{2}a_2^2v^4 + \tfrac{1}{2}a_2^3v^6 - \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3)$$

และ

$$f(v) = (1 + v^2/k^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad (4)$$

ซึ่ง k คือค่าคงที่ใดๆ

เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า ถ้าสมการ (1) เขียนให้อยู่ในเทอมของ $\bar{v} = dx/dt$ (coordinate velocity) ของ S' สัมพันธ์กับ S, ได้แบบฟอร์มเช่นเดิม คือ

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{1}{(1 - \bar{v}^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}(x - \bar{v}t) \\ t' &= \frac{1}{(1 - \bar{v}^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}(t - \bar{v}x/c^2) \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

ของ ลอเรนซ์ทรานฟอร์มเมชั่น เมื่อ k คือ ความเร็วของแสง c

เราหาสมการต่อไปนี้ได้เช่นเดียวกัน

$$u' = (1 + v^2/k^2)^{\frac{1}{2}}u - v(1 + u^2/k^2)^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

$$a' = \left\{(1 + v^2/k^2)^{\frac{1}{2}} - (uv/k^2)(1 + u^2/k^2)^{-\frac{1}{2}}\right\}a \tag{7}$$

สำหรับทรานฟอร์มเมชั่นของความเร็วและความเร่งในเทอมของ proper velocities และ proper accelerations โดยที่ $a = d^2x/dt''^2$ เป็น proper acceleration ของ S" สัมพันธ์กับ S และ $a' = d^2x'/dt''^2$ เป็น **proper acceleration** ของ S" สัมพันธ์กับ S'.

สมการ (6) และ (7) ก็คือสมการเดิมในเทอมของ coordinate velocities และ coordinate accelerations คือ

$$\bar{u}' = \frac{\bar{u} - \bar{v}}{1 - \bar{u}\bar{v}/c^2} \tag{8}$$

$$a'_x = (1 - \bar{u}\bar{v}/c^2)^{-3}(1 - \bar{v}^2/c^2)^{3/2}a_x \tag{9}$$

เมื่อ k คือ ความเร็วของแสง c, $a_x = d^2x/dt^2$ เป็น coordinate acceleration ของ S" สัมพันธ์กับ S และ $a'_x = d^2x'/dt'^2$ เป็น coordinate acceleration ของ S" สัมพันธ์กับ S'.

ACKNOWLEDGEMENTS

I have much pleasure in expressing here my gratitude to the following persons.

Dr. R.H.B. Exell, my thesis supervisor, for his generous help and instruction at all times and for many stimulating ideas.

Mr. Arnob Prachanronarong, the head - master of Patumwan Engineering School, for giving me leave for my study.

CONTENTS

LIST OF FIGURES