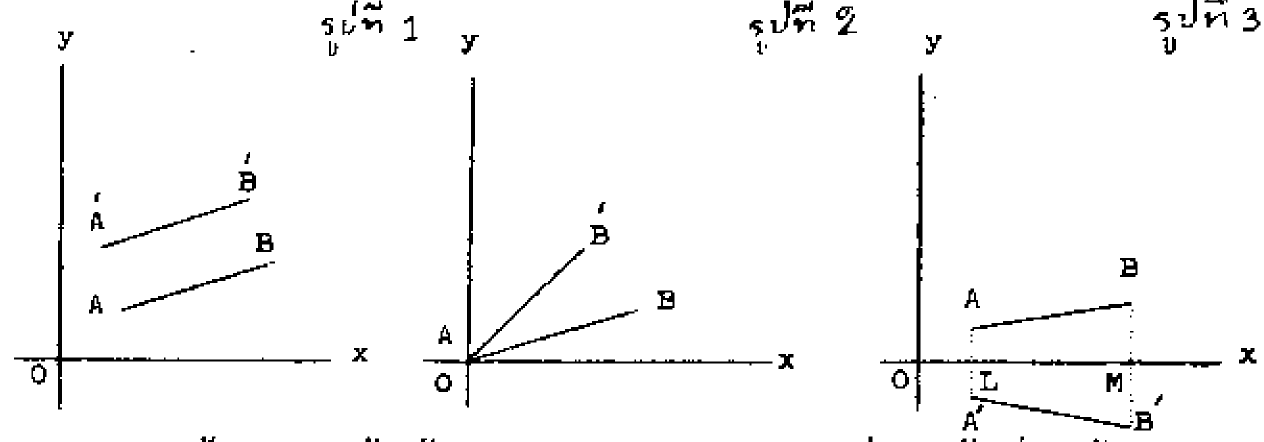
บทที่ ๒

Euclidean Group

Physical Transformations

จะพิจารณาการเคลื่อนที่ของไม้คานอันหนึ่งบนพื้นราบ ให้ AB เป็นไม้คานอันนั้น และให้มีความยาวคงที่ตลอดเวลาของการเคลื่อนที่ ไม้คาน AB จะเขียนแทนด้วยเส้นตรง AB ที่มีความยาวจำกัด ระหว่างจุด 2 จุด บน Rectangular Cartesian Coordinate Plane ในที่นี้จะพิจารณาการเคลื่อนที่ของไม้คาน AB เพียง 3 แบบ ดังนี้



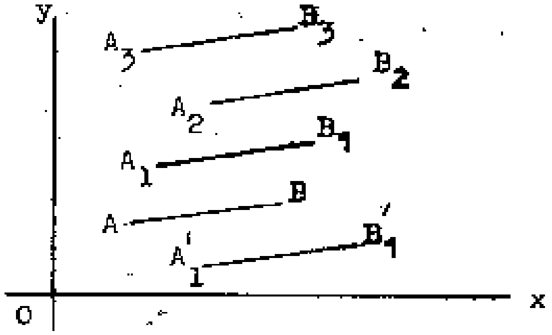
วางไม้คาน AB ไว้บนพื้นราบ xy (xy-plane) ดังรูปที่ 1 แล้วเลื่อนไม้คานจากตำแหน่ง AB ให้ไปอยู่ที่ตำแหน่ง A′B′ โดยให้ A′B′ ขนานกับตำแหน่งของไม้คาน AB เดิมก่อนการเลื่อน จะเรียกการเคลื่อนที่แบบนี้ว่า "Translation"

วางไม้คาน AB ไว้บนพื้นราบ xy ดังรูปที่ 2 โดยตรึงปลาย A ให้อยู่กับที่ ที่จุด (0, 0) แล้วหมุนปลาย B ให้เคลื่อนที่ไป เช่นหมุนไม้คานจากตำแหน่ง AB ไปอยู่ที่ตำแหน่ง AB′ จะเรียกการเคลื่อนที่แบบนี้ว่า "Rotation" รอบจุด (0, 0)

วางไม้คาน AB ไว้บนพื้นราบ xy ดังรูปที่ 3 แล้วเลื่อนไม้คานจากตำแหน่ง AB ให้ไปอยู่ที่ตำแหน่ง A′B′ โดยให้ระยะตั้งฉาก AL เท่ากับระยะตั้งฉาก A′L และระยะตั้งฉาก BM เท่ากับระยะตั้งฉาก B′M จะเรียกการเคลื่อนที่แบบนี้ว่า "Reflection" บนเส้นตรง $y = 0$.

การเคลื่อนที่ของไม้คาน AB ทั้งสามแบบดังกล่าว เป็น Physical transformations

<u>Set of translations ของไม้คานบนพื้นราบเป็นกรุป (group)</u>



วางไม้คาน AB ไว้บนพื้นราบ xy ดังรูป ครั้งแรกเลื่อนไม้คาน AB จากตำแหน่ง AB ไปอยู่ที่ตำแหน่ง A_1B_1 ให้ชื่อการเคลื่อนที่ครั้งนี้ว่า T_1

ครั้งที่สองเลื่อนไม้คานจากตำแหน่ง A_1B_1 ไปอยู่ที่ตำแหน่ง A_2B_2 ให้ชื่อการเคลื่อนที่ครั้งนี้ว่า T_2

การเคลื่อนที่ของไม้คานจากตำแหน่ง AB ไปยังตำแหน่ง A_2B_2 โดย T_1 ตามด้วย T_2 จะใช้สัญลักษณ์เป็น T_2T_1 ผลของการเคลื่อนที่นี้จะเท่ากับการเคลื่อนที่ของไม้คานจากตำแหน่ง AB ไปยังตำแหน่ง A_2B_2 โดยตรง ซึ่งจะให้ชื่อการเคลื่อนที่นี้ว่า T'

$\therefore$ $T' = T_2T_1$ .... แสดงว่ามีคุณสมบัติ Closure

ครั้งที่สามเลื่อนไม้คานจากตำแหน่ง A_2B_2 ไปอยู่ที่ตำแหน่ง A_3B_3 ให้ชื่อการเคลื่อนที่ครั้งนี้ว่า T_3

การเคลื่อนที่ของไม้คานจากตำแหน่ง A_1B_1 ไปยังตำแหน่ง A_3B_3 โดย T_2 ตามด้วย T_3 จะใช้สัญลักษณ์เป็น T_3T_2 ผลของการเคลื่อนที่นี้จะเท่ากับการเคลื่อนที่ของไม้คาน จากตำแหน่ง A_1B_1 ไปยังตำแหน่ง A_3B_3 โดยตรงซึ่งจะให้ชื่อการเคลื่อนที่ครั้งนี้ว่า T''

$\therefore$ $T'' = T_3T_2$

การเคลื่อนที่ของไม้คานจากตำแหน่ง AB ไปยังตำแหน่ง A_3B_3 โดย T' ตามด้วย T_3 จะใช้สัญลักษณ์เป็น T_3T'

การเคลื่อนที่ของไม้คานจากตำแหน่ง AB ไปยังตำแหน่ง A_3B_3 โดย T_1 ตามด้วย T'' จะใช้สัญลักษณ์เป็น $T''T_1$

จะเห็นว่าผลของการเคลื่อนที่ของไม้คาน AB โดย T_3T' จะเท่ากับผลของการเคลื่อนที่ของไม้คาน AB โดย $T''T_1$ กล่าวคือต่างก็ทำให้ไม้คานเคลื่อนที่จากตำแหน่ง AB ไปยังตำแหน่ง A_3B_3 เหมือนกัน

$\therefore \quad T_3T' = T''T_1$

$T_3(T_2T_1) = (T_3T_2)\,T_1$ .....แสดงว่ามีคุณสมบัติ Associative

ให้การเคลื่อนที่ที่ทำให้ไม้คานอยู่กับที่เป็น identity ใช้สัญลักษณ์เป็น T_o

การเคลื่อนที่ของไม้คานจากตำแหน่ง AB ไปยังตำแหน่ง A_1B_1 โดย T_o ตามด้วย T_1 จะใช้สัญลักษณ์เป็น T_1T_o

การเคลื่อนที่ของไม้คานจากตำแหน่ง AB ไปยังตำแหน่ง A_1B_1 โดย T_1 ตามด้วย T_o จะใช้สัญลักษณ์เป็น T_oT_1

จะเห็นว่าผลของการเคลื่อนที่ของไม้คาน AB โดย T_1T_o จะเท่ากับผลของการเคลื่อนที่ของไม้คาน AB โดย T_oT_1 กล่าวคือต่างก็ทำให้ไม้คานเคลื่อนที่จากตำแหน่ง AB ไปยังตำแหน่ง A_1B_1 เหมือนกัน

$\therefore \quad T_1T_o = T_oT_1 = T_1$ .... แสดงว่า T_o เป็น Identity

ให้ไม้คานเคลื่อนที่จากตำแหน่ง AB ไปยังทิศทางตรงกันข้ามกับตำแหน่ง A_1B_1 กล่าวคือให้มาอยู่ที่ $A_1'B_1'$ โดยให้ระยะห่างระหว่าง AB กับ $A_1'B_1'$ เท่ากับระยะห่างระหว่าง AB กับ $A_1'B_1'$ ให้การเคลื่อนที่นี้เป็น inverse ของ T_1 ใช้สัญลักษณ์เป็น T_1^{-1}

ดังนั้นถ้าไม้คานเคลื่อนที่จากตำแหน่ง AB ไปอยู่ที่ตำแหน่ง A_1B_1 โดย T_1 ไม้คานจะเคลื่อนที่จากตำแหน่ง A_1B_1 กลับมายังตำแหน่ง AB ได้โดย T_1^{-1}

ทำนองเดียวกันก็จะมี T_2^{-1}, T_3^{-1}

การเคลื่อนที่ของไม้คาน AB จากตำแหน่ง AB ไปยังตำแหน่ง A_1B_1 โดย T_1 ตามด้วยการเคลื่อนที่ของไม้คาน AB จากตำแหน่ง A_1B_1 กลับมายังตำแหน่ง AB โดย T_1^{-1} จะใช้สัญลักษณ์เป็น $T_1^{-1}T_1$ ผลของการเคลื่อนที่นี้จะเท่ากับการเคลื่อนที่ที่ทำให้ไม้คานอยู่กับที่ กล่าวคือ ผลเสมือนหนึ่งว่าไม้คานไม่ได้เคลื่อนที่เลย

$\therefore T_1^{-1}T_1 = T_o$

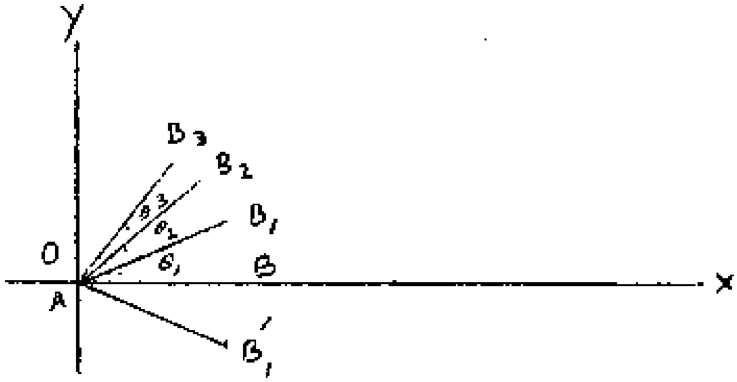
การเคลื่อนที่ของไม้คาน AB จากตำแหน่ง AB ไปยังตำแหน่ง $A_1'B_1'$ โดย T_1^{-1} ตามด้วยการเคลื่อนที่ของไม้คาน AB จากตำแหน่ง $A_1'B_1'$ กลับมายังตำแหน่ง AB โดย T_1 จะใช้สัญลักษณ์เป็น $T_1T_1^{-1}$ ผลของการเคลื่อนที่นี้จะเท่ากับการเคลื่อนที่ที่ทำให้ไม้คานอยู่กับที่

$\therefore T_1T_1^{-1} = T_o$

$\therefore T_1T_1^{-1} = T_1^{-1}T_1 = T_o$ .... แสดงว่า T_1^{-1} เป็น Inverse ของ T_1

$\therefore$ set of translations ของไม้คานบนพื้นราบเป็นกรุป

<u>Set of rotations รอบจุด (0, 0) ของไม้คานบนพื้นราบเป็นกรุป</u>



วางไม้คาน AB ไว้บนพื้นราบ xy ดังรูป โดยตรึงปลาย A ให้อยู่กับที่ที่จุด (0,0) แล้วหมุนไม้คานรอบจุด A ครั้งแรกหมุนไม้คานจากตำแหน่ง AB ไปอยู่ที่ตำแหน่ง AB_1 โดยหมุนทวนเข็มนาฬิกาไปเป็นมุม θ ให้ชื่อการหมุนครั้งนี้ว่า θ_1

ครั้งที่สองหมุนไม้คานจากตำแหน่ง AB_1 ไปอยู่ที่ตำแหน่ง AB_2 โดยหมุนทวนเข็มนาฬิกาไปเป็นมุม θ_2 ให้ชื่อการหมุนครั้งนี้ว่า θ_2

การเคลื่อนที่ของไม้คานจากตำแหน่ง AB ไปยังตำแหน่ง AB_2 โดย θ_1 ตามด้วย θ_2 จะใช้สัญลักษณ์เป็น $\theta_1 + \theta_2$ ผลการเคลื่อนที่นี้จะเท่ากับการเคลื่อนที่ของไม้คานจากตำแหน่ง AB ไปยังตำแหน่ง AB_2 โดยตรง ซึ่งจะให้ชื่อการเคลื่อนที่ครั้งนี้ว่า θ'

$\therefore \theta' = \theta_1 + \theta_2$ ....แสดงว่ามีคุณสมบัติ Closure

ครั้งที่สามหมุนไม้คานจากตำแหน่ง AB_2 ไปยังตำแหน่ง AB_3 โดยหมุนทวนเข็มนาฬิกาไปเป็นมุม θ_3 ให้ชื่อการหมุนครั้งนี้ว่า θ_3

การเคลื่อนที่ของไม้คานจากตำแหน่ง AB_1 ไปยังตำแหน่ง AB_3 โดย θ_2 ตามด้วย θ_3 จะใช้สัญลักษณ์เป็น $\theta_2 + \theta_3$ ผลของการเคลื่อนที่นี้จะเท่ากับการเคลื่อนที่ของไม้คานจากตำแหน่ง AB_1 ไปยังตำแหน่ง AB_3 โดยตรง ซึ่งจะให้ชื่อการเคลื่อนที่นี้ว่า θ''

$\therefore \theta'' = \theta_2 + \theta_3$

การเคลื่อนที่ของไม้คานจากตำแหน่ง AB ไปยังตำแหน่ง AB_3 โดย θ' ตามด้วย θ_3 จะใช้สัญลักษณ์เป็น $\theta' + \theta_3$

การเคลื่อนที่ของไม้คานจากตำแหน่ง AB ไปยังตำแหน่ง AB_3 โดย θ_1 ตามด้วย θ'' จะใช้สัญลักษณ์เป็น $\theta_1 + \theta''$

จะเห็นว่าผลของการเคลื่อนที่ของไม้คาน AB โดย $\theta' + \theta_3$ จะเท่ากับผลของการเคลื่อนที่ของไม้คาน AB โดย $\theta_1 + \theta''$ กล่าวคือ ต่างก็ทำให้ไม้คานเคลื่อนที่จากตำแหน่ง AB ไปยังตำแหน่ง AB_3 เหมือนกัน

$\therefore \theta' + \theta_3 = \theta_1 + \theta''$

$(\theta_1 + \theta_2) + \theta_3 = \theta_1 + (\theta_2 + \theta_3)$....แสดงว่ามีคุณสมบัติ Associative

ให้ θ_o เป็นการหมุนที่ไม่ทำให้ไม้คานเคลื่อนที่เลย จะเรียก θ_o ว่าเป็น identity

การเคลื่อนที่ของไม้คานจากตำแหน่ง AB ไปยังตำแหน่ง AB_1 โดย θ_o ตามด้วย θ_1 จะใช้สัญลักษณ์เป็น $\theta_o + \theta_1$

การเคลื่อนที่ของไม้คานจากตำแหน่ง AB ไปยังตำแหน่ง AB_1 โดย θ_1 ตามด้วย θ_o จะใช้สัญลักษณ์เป็น $\theta_1 + \theta_o$

จะเห็นว่าผลของการเคลื่อนที่ของไม้คาน AB โดย $\theta_o + \theta_1$ จะเท่ากับผลของการเคลื่อนที่ของไม้คาน AB โดย $\theta_1 + \theta_o$ กล่าวคือต่างก็ทำให้ไม้คานเคลื่อนที่จากตำแหน่ง AB ไปยังตำแหน่ง AB_1 เหมือนกัน

$\therefore \theta_o + \theta_1 = \theta_1 + \theta_o = \theta_1$ ...... แสดงว่า θ_o เป็น Identity

หมุนไม้คาน AB ตามเข็มนาฬิกาให้มาอยู่ที่ AB_1' โดยหมุนมาเป็นมุม θ_1 ให้เป็น inverse ของ θ_1 ใช้สัญญลักษณ์เป็น $-\theta_1$

ดังนั้นถ้าไม้คานเคลื่อนที่จากตำแหน่ง AB ไปอยู่ที่ตำแหน่ง AB_1 โดย θ_1 ไม้คานจะเคลื่อนที่จากตำแหน่ง AB_1 กลับมายังตำแหน่ง AB ได้โดย $-\theta_1$

ทำนองเดียวกันก็จะมี $-\theta_2$, $-\theta_3$

การเคลื่อนที่ของไม้คาน AB จากตำแหน่ง AB ไปยังตำแหน่ง AB_1 โดย θ_1 ตามด้วย การเคลื่อนที่ของไม้คาน AB จากตำแหน่ง AB_1 กลับมายังตำแหน่ง AB โดย $-\theta_1$ จะใช้สัญญลักษณ์เป็น $\theta_1 + (-\theta_1)$ ผลของการเคลื่อนที่นี้จะเท่ากับการเคลื่อนที่ที่ทำให้ไม้คานอยู่กับที่ กล่าวคือ ผลเสมือนหนึ่งว่าไม้คานไม่ได้หมุนเลย

$\therefore \theta_1 + (-\theta_1) = \theta_o$

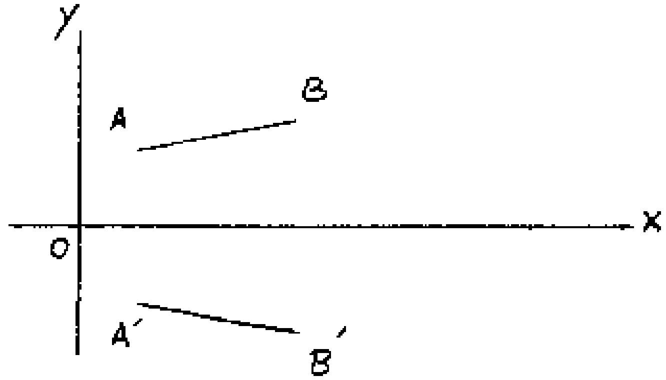
การเคลื่อนที่ของไม้คาน AB จากตำแหน่ง AB ไปยังตำแหน่ง AB_1' โดย $-\theta_1$ ตามด้วยการเคลื่อนที่ของไม้คาน AB จากตำแหน่ง AB_1 กลับมายังตำแหน่ง AB โดย θ_1 จะใช้สัญญลักษณ์เป็น $-\theta_1 + \theta_1$ ผลของการเคลื่อนที่นี้จะเท่ากับการเคลื่อนที่ที่ทำให้ไม้คานอยู่กับที่นั่นเอง

$\therefore (-\theta_1) + \theta_1 = \theta_o$

$\therefore \theta_1 + (-\theta_1) = (-\theta_1) + \theta_1 = \theta_o$ แสดงว่า $-\theta_1$ เป็น Inverse ของ θ_1

$\therefore$ set of rotations รอบจุด (0,0) ของไม้คานบนพื้นราบเป็นกรุป

Set of reflections ของไม้คานบนเส้นตรง $y = 0$ บนพื้นราบเป็นกรุป



วางไม้คาน AB ไว้บนพื้นราบ xy ดังรูป แล้วเลื่อนไม้คานจากตำแหน่ง AB ไปยังตำแหน่ง A'B' ให้ชื่อการเคลื่อนที่ครั้งนี้ว่า ε

ในการเคลื่อนที่ที่ทำให้ไม้คานอยู่กับที่เป็น Identity ใช้สัญลักษณ์เป็น e จะเห็นได้ว่า set of reflections ของไม้คานบนเส้นตรง $y = 0$ ประกอบด้วย element เพียง 2 ตัว เพราะการ reflect ด้วย ε สองครั้ง มีผลเสมือนหนึ่งว่าไม่มีการเคลื่อนที่เลย จึงสามารถจัดทำ multiplication table ได้ดังนี้.

	e	ε
e	e	ε
ε	ε	e

คุณสมบัติข้อ Closure การมี Identity และ Inverse นั้น สามารถอ่านได้จาก table นี้

ส่วนคุณสมบัติข้อ Associative จะเห็นได้จาก

$$e(\varepsilon\varepsilon) = e\,e = e$$

$$(e\varepsilon)\varepsilon = \varepsilon\varepsilon = e$$

ดังนั้น $e(\varepsilon\varepsilon) = (e\varepsilon)\varepsilon$

$\therefore$ set of reflections ของไม้คานบนเส้นตรง $y = 0$ บนพื้นราบเป็นกรุป

ความเป็นกรุ๊ปของการเคลื่อนที่ของไม้คานดังกล่าวแล้ว นั้นจะช่วยให้เราพิจารณาการเคลื่อนที่ของไม้คาน AB ในทางคณิตศาสตร์ได้ เนื่องจากเราใช้เส้นตรง AB ที่มีความยาวจำกัดระหว่างจุดสองจุดบน Rectangular Cartesian Coordinate Plane xy แทนไม้คาน AB ดังนั้น เราจะพิจารณาการเคลื่อนที่ของเส้นตรง AB บนพื้นราบ xy แทนการเคลื่อนที่ของไม้คาน โดยให้เส้นตรง AB มีความยาวคงที่ทั้งก่อนและหลังการเคลื่อนที่

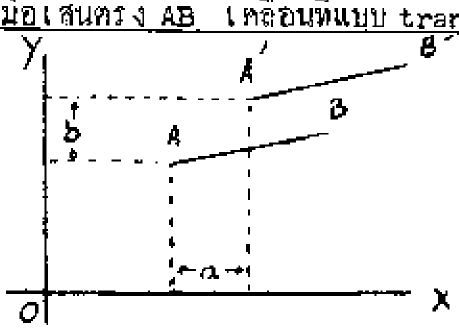
การใช้ Matrices แทน Physical Transformations

เส้นตรง AB ประกอบด้วยจุดต่างๆ เซท (set) หนึ่ง แต่ละจุดมีสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one correspondence) กับเลขคู่ลำดับ (x, y) เมื่อ x และ y เป็น real numbers.

เมื่อเส้นตรง AB เคลื่อนที่ไปในลักษณะใดลักษณะหนึ่ง ในสามแบบ กล่าวคือ แบบ translation แบบ rotation และแบบ reflection นั่นก็คือ การทำให้โคออดิเนตของจุดบนเส้นตรง AB เปลี่ยนไป ซึ่งจะเรียกว่า transformations of points with fixed reference system.

ถ้าให้ (x, y) เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง AB เมื่อเส้นตรง AB เคลื่อนที่ไปก็จะทำให้จุด (x, y) เคลื่อนที่ไปด้วย สมมุติว่าจุด (x, y) เคลื่อนที่ไปยังจุด (x', y') โดย (x, y) มีสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง กับ (x', y') จะหาความสัมพันธ์ระหว่าง (x, y) กับ (x', y') อ้างอิงกับ Rectangular axes อันเดียวกัน เมื่อเส้นตรง AB เคลื่อนที่แบบ translation, แบบ rotation และแบบ reflection

<u>เมื่อเส้นตรง AB เคลื่อนที่แบบ translation</u>



ให้เส้นตรง AB อยู่บนพื้นราบ xy ดังรูป

สมมุติว่าจุด A มีโคออดิเนต (x, y)

ให้แกน ox , oy คงที่แล้ว เลื่อนเส้นตรง AB จากตำแหน่ง AB ให้ไปอยู่ที่ตำแหน่ง $A'B'$ โดยให้ $A'B'$ ขนานกับ AB จุด A จะเลื่อนไปอยู่ที่จุด A' สมมุติให้จุด A' มีโคออดิเนต (x', y')

ระยะตามแกน x (abscissa) ของจุด A จะเปลี่ยนไป $= x' - x$

และระยะตามแกน y (ordinate) ของจุด A จะเปลี่ยนไป $= y' - y$

สมมุติให้ $x' - x = a$ .... เมื่อ a, b เป็น real numbers

และ $y' - y = b$

$$\therefore \quad x' = x + a$$

$$\therefore \quad y' = y + b \qquad \text{.............} \quad (1)$$

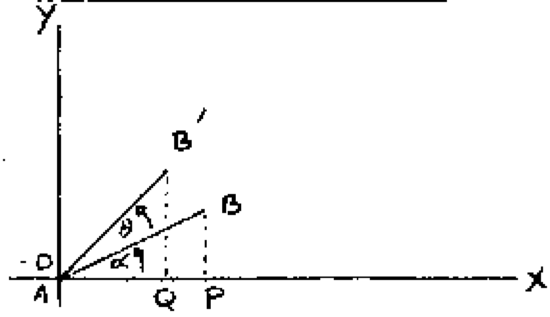
ดังนั้น เมื่อเส้นตรง AB เคลื่อนที่แบบ translation หนึ่งครั้ง จะทำให้โคออดิเนตของจุด A เปลี่ยนจาก (x, y) ไปเป็น (x', y') โดยมีความสัมพันธ์กันดังสมการ(1) ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแมทริกซ์ (matrix) ได้คือ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad \text{.........} \quad (2)$$

ทำนองเดียวกัน โคออดิเนตของจุดอื่น ๆ บนเส้นตรง AB ก็จะเปลี่ยนไปโดยมีความสัมพันธ์ระหว่างโคออดิเนตใหม่และเก่าดัง (2)

<u>เมื่อเส้นตรง AB เคลื่อนที่แบบ rotation</u>



ให้เส้นตรง AB อยู่บนพื้นราบ xy ดังรูป

สมมุติว่าจุด B มีโคออดิเนต (x, y)

ให้แกน ox, oy คงที่ ตรึงปลาย A ไว้ที่จุด (0,0) แล้วให้เส้นตรง AB เคลื่อนที่ไปอยู่ที่ตำแหน่ง AB' กล่าวคือ เส้นตรง AB หมุนทวนเข็มนาฬิการอบจุด A ไปเป็นมุม θ เรเดียน (radian)

ลาก BP, B'Q ตั้งฉากกับแกน ox

สมมุติให้ $\hat{BAP} = \alpha$ เรเดียน

$\therefore$ จุด B จะเลื่อนไปอยู่ที่จุด B' สมมุติให้จุด B' มีโคออดิเนต (x', y')

$$
\begin{aligned}
x' &= OB' \cos(\alpha + \theta) \\
&= OB' (\cos\alpha \cos\theta - \sin\alpha \sin\theta) \\
&= OB' \left(\frac{x}{OB} \cos\theta - \frac{y}{OB} \sin\theta\right) \\
&= x \cos\theta - y \sin\theta \\
y' &= OB' \sin(\alpha + \theta) \\
&= OB' (\sin\alpha \cos\theta + \cos\alpha \sin\theta) \\
&= OB' \left(\frac{y}{OB} \cos\theta + \frac{x}{OB} \sin\theta\right) \\
&= x \sin\theta + y \cos\theta
\end{aligned}
$$

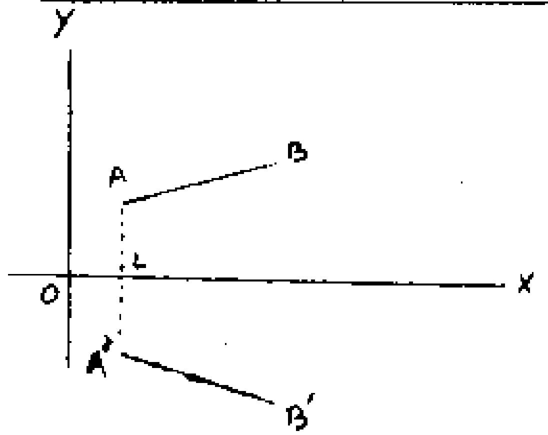
$$
\begin{aligned}
x' &= x \cos\theta - y \sin\theta \\
\therefore\ y' &= x \sin\theta + y \cos\theta
\end{aligned}
\qquad \text{............} \quad (3)
$$

ดังนั้นเมื่อเส้นตรง AB เคลื่อนที่แบบ rotation หนึ่งครั้ง จะทำให้โคออดิเนตของจุด B เปลี่ยนจาก (x, y) ไปเป็น (x', y') โดยมีความสัมพันธ์กันดังสมการ (3) ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแมทริกซ์ได้ คือ

$$
\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \text{......} \quad (4)
$$

ทำนองเดียวกันโคออดิเนตของจุดอื่น ๆ บนเส้นตรง AB ก็จะเปลี่ยนไป โดยมีความสัมพันธ์ระหว่างโคออดิเนตใหม่และเก่า ดัง (4)

<u>เมื่อเส้นตรง AB เคลื่อนที่แบบ Reflection</u>



ให้เส้นตรง AB อยู่บนพื้นราบ xy ดังรูป

สมมุติว่าจุด A มีโคออดิเนต (x, y)

ให้แกน ox, oy คงที่ แล้วให้เส้นตรง AB reflect บนเส้นตรง y = 0 มาอยู่ที่ $A'B'$

∴ จุด A จะเลื่อนไปอยู่ที่ A' สมมุติให้ A' มีโคออดิเนต (x', y')

$$x' = x$$
$$\therefore \quad y' = -y \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

ดังนั้น เมื่อเส้นตรง AB reflect บนเส้นตรง y = 0 หนึ่งครั้ง จะทำให้โคออดิเนตของจุด A เปลี่ยนจาก (x, y) ไปเป็น (x', y') โดยมีความสัมพันธ์กันดังสมการ (5) ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแมทริกซ์ ได้คือ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

ทำนองเดียวกัน โคออดิเนตของจุดอื่น ๆ บนเส้นตรง AB ก็จะเปลี่ยนไปโดยมีความสัมพันธ์ระหว่างโคออดิเนตใหม่และเก่า ดัง (6)

จะเห็นว่าสูตรที่ 4 และ 6 อยู่ในรูปแมทริกซ์เดียวกัน กล่าวคือ เป็นแมทริกซ์ที่เป็นตัวคูณกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ส่วนสูตรที่ 2 เป็น แมทริกซ์ที่อยู่ในรูปผลบวก ถ้าเราจะทำสูตรที่ 2,4 และ 6 ให้เป็นแมทริกซ์รูปผลคูณให้เหมือนกันหมด เราจะใช้ homogeneous coordinates โดยเขียน (x, y, z) แทน (x, y) กรณีนี้จะกล่าวถึงจุดคือ สมมุติให้ z = 1

<u>นิยาม 2.1</u>

เราจะเขียน (x, y, 1) แทน (x, y)

จากนิยาม 2.1 เราสามารถเขียน (2),(4) และ (6) ให้อยู่ในรูปแมทริกซ์แบบเดียวกันได้ดังนี้

จาก (2) จะเขียนได้ในรูป
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{.........(7)}$$

จาก (4) จะเขียนได้ในรูป
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{...(8)}$$

จาก (6) จะเขียนได้ในรูป
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{...(9)}$$

<u>นิยาม 2.2</u>

การเลื่อนจุด (transformations of points) คือการที่จุดซึ่งมีโคออดิเนต (x, y) ถูกเลื่อนไปที่จุดซึ่งมีโคออดิเนต (x', y') ซึ่งจะเป็นจุดใดจุดหนึ่ง เมื่อให้แทนโคออดิเนตคงที่ โดย (x, y) และ (x', y') มีความสัมพันธ์กันดังสมการ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{เมื่อ } c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12} \neq 0$$

จะเรียก $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ว่าเป็น matrix transformation ที่ส่งจุด (x, y) ไปยังจุด (x', y')

ถ้าเซทของจุดเซทหนึ่งถูกเลื่อนไปเป็นเซทของจุดอีกเซทหนึ่งอย่างสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง ด้วย matrix transformation อันเดียวกันได้จะเรียกว่า การเลื่อนเซทของจุด

ถ้า matrix transformation เท่ากับ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เมื่อ a, b เป็น real number จะเรียก transformations แบบนี้ว่า "transtation" .... (10)

ถ้า matrix transformation เท่ากับ $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เมื่อ θ เป็นมุม วัดเป็นเรเดียน จะเรียก transformation แบบนี้ว่า " Rotation " รอบจุด (0, 0) .... (11)

ถ้า matrix transformation เท่ากับ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ จะเรียก transformation แบบนี้ว่า " Reflection " บนเส้นตรง $y = 0$ .... (12)

<u>Product transformations</u>

ถ้า R_i เป็น transformation อันหนึ่งที่ส่งจุด $P(x, y)$ ไปยังจุด $P'(x', y')$ และ R_j เป็น transformation อีกอันหนึ่งที่ส่งจุด $P'(x', y')$ ไปยังจุด $P''(x'', y'')$ แล้ว transformation R_i ตามด้วย transformation R_j จะใช้สัญลักษณ์เป็น R_jR_i

R_jR_i จะเป็น transformation อีกอันหนึ่งที่จะส่งจุด P (x, y) ไปยังจุด $P''(x'', y'')$ โดยตรง

transformation R_jR_i นี้จะเรียกว่า "product transformation" ของ R_i และ R_j เช่น

$$R_i = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_jR_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_iR_j = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า R_jR_i ไม่เท่ากับ R_iR_j ในกรณีที่ R_iR_j เท่ากับ R_jR_i จะเรียกว่าผลคูณ (product) มีคุณสมบัติ commutative

<u>The inverse and identity transformations</u>

ถ้า R_i เป็น transformation อันหนึ่งที่ส่งจุด P (x,y) ไปยังจุด $P'(x', y')$ แล้ว R_i^{-1} จะเรียกว่าเป็น inverse ของ transformation R_i ต่อเมื่อ R_i^{-1} เป็น transformation ที่ส่งจุด $P'(x', y')$ กลับมายังจุด P (x, y) ได้

R_i^{-1} R_i จะเป็น transformation อีกอันหนึ่งที่ทำให้จุดอยู่กับที่ ซึ่งจะเรียกว่า "Identity transformation " ใช้สัญลักษณ์เป็น I

$$\therefore \quad R_i^{-1} \; R_i = I$$

เช่นตัวอย่าง ถ้า
$$R_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad R_i^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

จากสูตร
$$R_i^{-1} = \frac{\operatorname{adj} R_i}{|R_i|}$$

$$\operatorname{adj} R_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|R_i| = 1$$

$$\therefore \quad R_i^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_i^{-1} \; R_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_i R_i^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad R_i R_i^{-1} = R_i^{-1} R_i = I$$

$\therefore$ identity transformation จะแสดงด้วย matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

กล่าวคือ identity transformation ก็คือ transformation ที่ทำให้จุดอยู่กับที่

ดังนั้นเมื่อให้ไม้ถาน AB หรือ เส้นตรง AB เคลื่อนที่แบบ translation หนึ่งครั้ง เราจะแสดงด้วย matrix transformation หนึ่งแมทริกซ์ ซึ่งอยู่ในรูป $\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ แต่เราทราบว่า set of translations ของไม้ถาน AB เป็นกรุ๊ป

เพราะฉะนั้น set of matrices $\begin{bmatrix} 1 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & b_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เมื่อ a_i, b_i เป็น real number ใด ๆ และ $i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots n$ จึงเป็นกรุ๊ปด้วย ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้เช่น จะพิสูจน์ให้เห็นว่ามีคุณสมบัติ Closure

สมมุติว่า $T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad T_2T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 + a_2 \\ 0 & 1 & b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_3 \\ 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ เมื่อ $a_3 = a_1 + a_2$, $b_3 = b_1 + b_2$

$$= T_3$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า transformation T_3 มีรูปแบบเกี่ยวกับ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & b_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore$ จึงมีคุณสมบัติ Closure

จะเรียกกรุปนี้ว่า Translation Group เพราะ isomorphic กับ group of translations ของไม้คาน AB

เมื่อให้ไม้คาน AB หรือเส้นตรง AB เคลื่อนที่แบบ rotation รอบจุด (0,0) หนึ่งครั้ง เราจะแสดงด้วย matrix transformation หนึ่งแมทริกซ์ซึ่งอยู่ในรูป

$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ แต่เราทราบแล้วว่า set of rotations ของไม้คาน AB เป็นกรุป เพราะฉนั้น set of metrices $\begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

เมื่อ θ_i เป็นมุม วัดเป็นเรเดียน และ $i = 1, 2, \ldots\ldots n$ จึงเป็นกรุปด้วย ซึ่งจะเรียกว่า Rotation Group รอบจุด (0,0) เพราะ isomorphic กับ group of rotations ของไม้คาน AB

เมื่อให้ไม้คาน AB หรือเส้นตรง AB reflect บนเส้นตรง $y = 0$ หนึ่งครั้ง เราก็จะแสดงด้วย matrix transformation หนึ่งแมทริกซ์ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

พิจารณาการ reflection บนเส้นตรง $y = 0$ สองครั้งติดต่อกัน ซึ่งเราจะแสดงด้วย matrix transformotion ได้ดังนี้

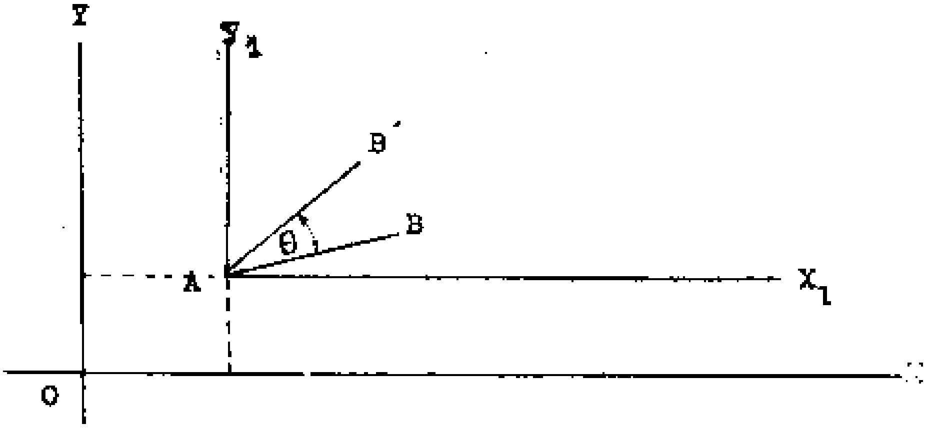
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งเป็น Identity transformation

แต่เราทราบแล้วว่า set of reflections ของไม้คาน AB ซึ่งประกอบด้วย element e และ ε เป็นกรุป ดังนั้น set of matrices $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ จึงเป็นกรุปด้วย ซึ่งจะเรียกว่า Reflection group เพราะ isomorphic กับ group of reflections ของไม้คาน AB โดยที่

$$e \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{และ } \varepsilon \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ความสัมพันธ์ระหว่าง (x,y) กับ (x', y') อ้างอิงกับ Rectangular axes อันเดียวกัน เมื่อเส้นตรง AB เคลื่อนที่แบบ Rotation รอบจุด (x_o, y_o)



ให้เส้นตรง AB อยู่บนพื้นราบ xy ดังรูป

สมมุติให้จุด A มีโคออดิเนต (x_o, y_o) และจุด B มีโคออดิเนต (x, y)

ตั้งแกนโคออดิเนต Ax_1, Ay_1 โดยให้จุด A เป็นจุด origin และให้แกนโคออดิเนตใหม่ ขนานกับแกนโคออดิเนตเดิม

∴ จุด A จะมีโคออดิเนต (0,0) เมื่ออ้างอิงกับแกนโคออดิเนตใหม่

และจุด B ก็จะมีโคออดิเนตใหม่เป็น ($x - x_o$, $y - y_o$)

ตรึงปลาย A ให้อยู่กับที่ที่จุด (x_o, y_o) แล้วหมุนเส้นตรง AB ทวนเข็มนาฬิการอบจุด A ไปเป็นมุม θ เรเดียน

∴ จุด B จะเลื่อนไปอยู่ที่ B'

สมมุติว่าจุด B' มีโคออดิเนต (x_1, y_1) เมื่ออ้างอิงกับแกนโคออดิเนตใหม่

∴ จาก (8) จะได้

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_o \\ y - y_o \\ 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งหมายความว่า

$$x_1 = (x - x_o)\cos\theta - (y - y_o)\sin\theta$$
$$y_1 = (x - x_o)\sin\theta + (y - y_o)\cos\theta$$

แต่จุด B' จะมีโคออดิเนตเป็น $(x_1 + x_o, y_1 + y_o)$ เมื่ออ้างอิงกับแกน ox, oy

ให้ $x' = x_1 + x_o$

และ $y' = y_1 + y_o$

$$x' = (x - x_o)\cos\theta - (y - y_o)\sin\theta + x_o$$
$$y' = (x - x_o)\sin\theta + (y - y_o)\cos\theta + y_o$$

ซึ่งเขียนเป็นรูปแมทริกซ์ได้ คือ

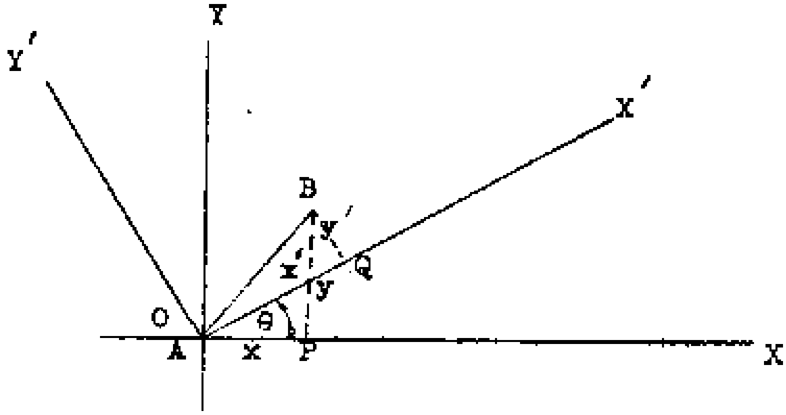
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_o(1-\cos\theta) + y_o\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & -x_o\sin\theta + y_o(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \ldots(13)$$

จะเห็นได้ว่า $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_o(1-\cos\theta) + y_o\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & -x_o\sin\theta + y_o(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็น matrix transformation ที่ส่งจุด (x, y) ไปยังจุด (x', y') .... (14)

ฉนั้นในการที่เส้นตรง AB หมุนรอบจุด (x_o, y_o) ไปเป็นมุม θ เรเดียน ก็จะทำให้โคออดิเนตของจุดบนเส้นตรง AB เปลี่ยนไป ดัง (13)

ซึ่งถ้า (x_o, y_o) เท่ากับ (0, 0) แล้ว (13) ก็จะเท่ากับ (8) นั่นเอง ดังนั้นก็จะเรียก transformation (14) ว่า "Rotation" รอบจุด (x_o, y_o)

การเปลี่ยนโคออดิเนตเมื่อหมุนพื้นราบ xy รอบจุด (0, 0)



ให้เส้นตรง AB อยู่บนพื้นราบ xy ดังรูป
ตรึงปลาย A ให้อยู่กับที่ที่จุด (0, 0) และให้จุด B มีโคออดิเนต (x, y)
หมุนพื้นราบ xy รอบจุด (0, 0) หวนเข็มนาฬิกาไปเป็นมุม θ เรเดียน
แล้วสมมุติให้จุด B มีโคออดิเนต (x', y') เมื่ออ้างอิงกับแกน ox', oy'
จากสูตรในเรขาคณิตวิเคราะห์ได้ว่า

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปแมทริกซ์ ได้คือ

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$= R\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$R^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

แต่ $R^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$$\therefore \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots (15)$$

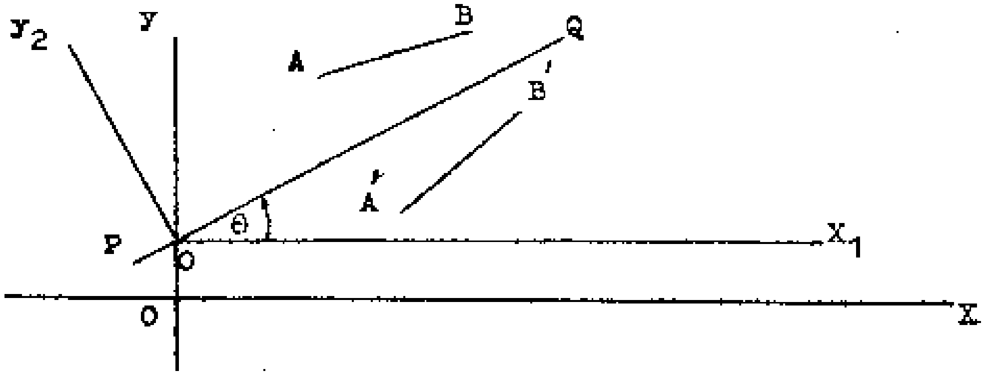
$\therefore$ เมื่อหมุนพื้นราบ xy รอบจุด (0, 0) ทวนเข็มนาฬิกาไปเป็นมุม θ เรเดียน จะทำให้โคออดิเนตของจุดเปลี่ยนไปดัง (15) เมื่อ (x, y) เป็นโคออดิเนตของจุดที่อ้างอิงกับแกน ox, oy และ (x', y') เป็นโคออดิเนตของจุดที่อ้างอิงกับแกน ox', oy'

ทำนองเดียวกัน เมื่อหมุนพื้นราบ xy รอบจุด (0, 0) ตามเข็มนาฬิกาไปเป็นมุม θ เรเดียน ก็จะทำให้โคออดิเนตของจุดเปลี่ยนไปดังสมการ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) & 0 \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots (16)$$

<u>ความสัมพันธ์ระหว่าง (x, y) กับ (x', y') อ้างอิงกับ Rectangular axes อันเดียวกัน เมื่อเส้นตรง AB เคลื่อนที่แบบ Reflection บนเส้นตรง $y = mx + c$</u>



ให้เส้นตรง AB อยู่บนพื้นราบ xy ดังรูป และให้จุด A มีโคออดิเนต (x, y)

PQ เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่งที่มีสมการเป็น $y = mx + c$

จากสมการ $y = mx + c$ จะทราบว่าเส้นตรง PQ ตัดแกน y ที่จุด O' โดยระยะ $OO' = c$ ซึ่งเราจะหาโคออดิเนตของจุด O' เทียบกับแกน ox, oy ได้ สมมุติให้เป็น (x_o, y_o)

ตั้งแกนโคออดิเนต $o'x$, $o'y$ โดยมีจุด O' เป็นจุด origin และให้แกนโคออดิเนตใหม่ขนานกับแกนโคออดิเนตเดิม

∴ จุด O' จะมีโคออดิเนต $(0, 0)$ เมื่ออ้างอิงกับแกนใหม่ และให้จุด A มีโคออดิเนต (x_1, y_1) เมื่ออ้างอิงกับแกนใหม่ โดย

$$x_1 = x - x_o$$

$$y_1 = y - y_o$$

ต่อมาหมุนแกน $o'x_1$, $o'y$ ทวนเข็มนาฬิการอบจุด O' จนแกน $o'x_1$ ทับเส้นตรง PQ และแกน $o'y$ ก็จะไปอยู่ที่ $o'y_2$

สมมุติว่า $x_1\hat{O'}Q = \theta$ เรเดียน

ซึ่ง $\tan \theta = m =$ slop ของเส้นตรง PQ

เมื่อเราทราบค่า $\tan \theta$ จากสมการ $y = mx + c$ ก็จะหาค่า $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ ได้

ให้จุด A มีโคออดิเนต (x_2, y_2) เมื่ออ้างอิงกับแกน $O'Q$, $O'y_2$

จุด O' จะมีโคออดิเนต $(0, 0)$ เมื่ออ้างอิงกับแกน $O'Q$, $O'y_2$ และเส้นตรง PQ ก็จะมีสมการเป็น $y = 0$

จาก (15) จะได้

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ให้เส้นตรง AB reflect บนเส้นตรง PQ สมมุติมาอยู่ที่ $A'B'$

$\therefore$ จุด A (x_2, y_2) ก็จะเลื่อนมาอยู่ที่ A' สมมุติให้ A' มีโคออดิเนต (x_3, y_3) เมื่ออ้างอิงกับแกน OQ', Oy_2' จาก (9) จะได้

$$
\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_o \\ y - y_o \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & -x_o\cos\theta - y_o\sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta & -x_o\sin\theta + y_o\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}
$$

หมุนแกน OQ' และ Oy_2' กลับมาอยู่ที่ Ox_1' และ Oy' กล่าวคือ หมุนตามเข็มนาฬิกามาเป็นมุม θ เรเดียน

$\therefore$ จุด A' (x_3, y_3) จะมีโคออดิเนตเปลี่ยนไปเป็น (x_4, y_4) เมื่ออ้างอิงกับแกน Ox_1' และ Oy'

จาก (16) จะได้

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & -x_o\cos\theta - y_o\sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta & -x_o\sin\theta + y_o\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta & -(\cos^2\theta - \sin^2\theta)x_o - 2y_o\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta & -2x_o\sin\theta\cos\theta - (\sin^2\theta - \cos^2\theta)y_o \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งหมายความว่า

$$x_4 = (\cos^2\theta - \sin^2\theta)x + 2y\sin\theta\cos\theta - (\cos^2\theta - \sin^2\theta)x_o - 2y_o\sin\theta\cos\theta$$

$$y_4 = 2x\sin\theta\cos\theta + (\sin^2\theta - \cos^2\theta)y - 2x_o\sin\theta\cos\theta - (\sin^2\theta - \cos^2\theta)y_o$$

จุด A (x_4, y_4) จะเปลี่ยนไปเป็น A (x', y') เมื่ออ้างอิงกับแกน Ox, Oy

โดย

$$x' = x_4 + x_o$$

$$y' = y_4 + y_o$$

$$\therefore\ x' = (\cos^2\theta - \sin^2\theta)x + 2y\sin\theta\cos\theta - (\cos^2\theta - \sin^2\theta)x_o - 2y_o\sin\theta\cos\theta + x_o$$

$$y' = 2x\sin\theta\cos\theta + (\sin^2\theta - \cos^2\theta)y - 2x_o\sin\theta\cos\theta - (\sin^2\theta - \cos^2\theta)y_o + y_o$$

ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปของแมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta & -(\cos^2\theta - \sin^2\theta)x_o - 2y_o\sin\theta\cos\theta + x_o \\ 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta & -2x_o\sin\theta\cos\theta - (\sin^2\theta - \cos^2\theta)y_o + y_o \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & x_o(1-\cos 2\theta) - y_o \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta & -x_o \sin 2\theta + y_o(1+\cos 2\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \ldots(17)$$

จะเห็นได้ว่า

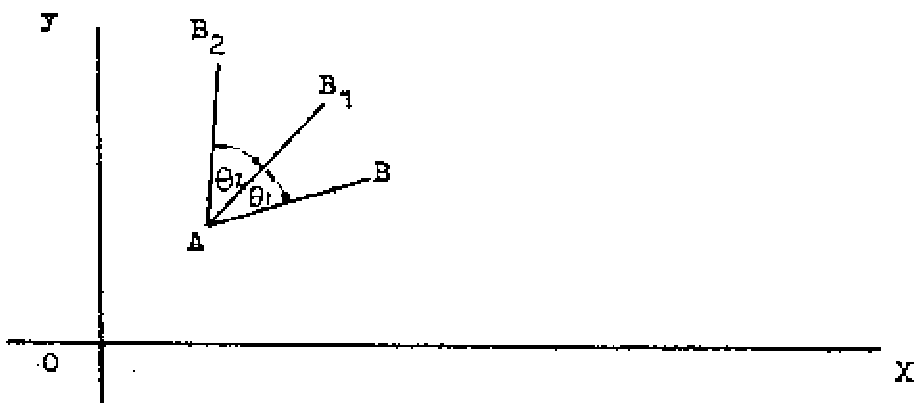
$$\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & x_o(1-\cos 2\theta) - y_o \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta & -x_o \sin 2\theta + y_o(1+\cos 2\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ เป็น matrix

transformation ที่ส่งจุด (x, y) ไปยังจุด (x', y') .... (18)

ดังนั้นเมื่อเส้นตรง AB reflect บนเส้นตรง $y = mx + c$ โคออดิเนตของจุดบนเส้นตรง AB จะเปลี่ยนไปดัง(17) โดยที่ค่า x_o, y_o หาได้จากค่า c และค่า $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ หาได้จากค่า $m \equiv \tan\theta$

ถ้าเส้นตรง PQ มีสมการเป็น $y = 0$ แล้วค่า m และ c ต่างก็จะมีค่าเท่ากับศูนย์ ซึ่งจะทำให้ (17) เท่ากับ (9) จึงเรียก matrix transformation (18) ว่าเป็น "Reflection" บนเส้นตรง $y = mx + c$

<u>Set of rotations ของเส้นตรง AB รอบจุด (x_o, y_o) เป็นกรุป</u>



ให้เส้นตรง AB อยู่บนพื้นราบ ดังรูป

ให้จุด A มีโคออดิเนต (x_o, y_o) และจุด B มีโคออดิเนต (x, y) ตรึงปลาย A ให้อยู่กับที่ที่จุด (x_o, y_o) แล้วหมุนปลาย B ให้เคลื่อนที่ไปอยู่ที่ B_1 กล่าวคือ AB หมุนทวนเข็มนาฬิการอบจุด A ไปเป็นมุม θ_1 เรเดียน

สมมุติให้ B_1 มีโคออดิเนต (x_1, y_1)

จาก (13) จะได้

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & x_o(1-\cos\theta_1)+y_o\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & -x_o\sin\theta_1+y_o(1-\cos\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= s_1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $s_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & x_o(1-\cos\theta_1)+y_o\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & -x_o\sin\theta_1+y_o(1-\cos\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ซึ่งเป็น matrix transformations ที่ส่งจุด (x, y) ไปยังจุด (x_1, y_1)

ต่อมาหมุนเส้นตรง AB จากตำแหน่ง AB_1 ให้ไปอยู่ที่ตำแหน่ง AB_2 โดยหมุนทวนเข็มนาฬิกาไปเป็นมุม θ_2 เรเดียน

สมมุติให้ B_2 มีโคออดิเนต (x_2, y_2)

จาก (13) จะได้

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & x_o(1-\cos\theta_2)+y_o\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & -x_o\sin\theta_2+y_o(1-\cos\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= s_2 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $s_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & x_o(1-\cos\theta)+y_o\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & -x_o\sin\theta_2 + y_o(1-\cos\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ซึ่งเป็น

matrix transformation ที่ส่งจุด (x_1, y_1) ไปยังจุด (x_2, y_2)

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = s_2 s_1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= s_3 \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $s_3 = s_2 s_1$ ซึ่งเป็น matrix transformations ที่ส่งจุด (x, y) ไปยังจุด (x_2, y_2) โดยตรง

$$\therefore \quad s_3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) & x_o\{1-\cos(\theta_1+\theta_2)\} + y_o\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) & -x_o\sin(\theta_1+\theta_2) + y_o\{1-\cos(\theta_1+\theta_2)\} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & x_o(1-\cos\theta_3)+y_o\sin\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & -x_o\sin\theta_3 + y_o(1-\cos\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$

จะเห็นได้ว่า s_3 มีรูปแบบเดียวกับ s_1 และ s_2

$\therefore$ แสดงว่ามีคุณสมบัติ Closure

จากคุณสมบัติ Closure **เราสามารถ**จะพิสูจน์ได้ว่ามีคุณสมบัติ Associative

ให้ s_1^{-1} เป็น inverse ของ s_1 ดังนั้น s_1^{-1} จะเป็น matrix transformation ที่นำจุด (x_1, y_1) กลับมายังจุด (x, y) ได้

ถ้า s_1^{-1} มีจริง

$\therefore \quad s_1^{-1} s_1 = I$

เมื่อ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ซึ่งเป็น Identity กล่าวคือเป็น matrix transformations ที่ทำให้จุดอยู่กับที่

$$\because \quad s_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & x_o(1-\cos\theta_1) + y_o\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & -x_o\sin\theta_1 + y_o(1-\cos\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\because \quad s_1^{-1} = \frac{\text{adj } s_1}{|s_1|}$$

$$\text{adj } s_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & x_o(1-\cos\theta_1) - y_o\sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & x_o\sin\theta_1 + y_o(1-\cos\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|s_1| = 1$$

$$\therefore \quad s_1^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & x_o(1-\cos\theta_1) - y_o\sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & x_o\sin\theta_1 + y_o(1-\cos\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จะเห็นได้ว่า s_1^{-1} มีรูปแบบเดียวกับ s_1 และ $s_1^{-1} s_1 = I$

$\therefore$ s_1^{-1} เป็น inverse ของ s_1 และ s_1^{-1} ก็เป็น element อยู่ในเซทนี้ด้วย ทำนองเดียวกันเราก็จะหา inverse ของ s_2 ได้

$\therefore$ set of rotations ของเส้นตรง AB รอบจุด (x_o, y_o) เป็นกรุ๊ปซึ่งจะให้ชื่อกรุ๊ปนี้ว่า Rotation Group ทั่วไป

โดยทำนองเดียวกันก็อาจพิสูจน์ได้ว่า set of reflections ของเส้นตรง AB บนเส้นตรง $y = mx + c$ เป็นกรุ๊ป ซึ่งจะให้ชื่อกรุ๊ปนี้ว่า Reflection Group ทั่วไป

<u>เซท E</u>

ถ้า translation $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

rotation $M = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_o(1-\cos\theta) + y_o \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & -x_o \sin\theta + y_o(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

และ reflection $N = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & x_o(1-\cos 2\theta) - y_o \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta & -x_o \sin 2\theta + y_o(1+\cos 2\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore LM = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_o(1-\cos\theta) + y_o \sin\theta + a \\ \sin\theta & \cos\theta & -x_o \sin\theta + y_o(1-\cos\theta) + b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \ldots. (19)$$

$$\therefore ML = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & a\cos\theta - b\sin\theta + x_o(1-\cos\theta) + y_o\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & a\sin\theta + b\cos\theta - x_o\sin\theta + y_o(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ldots (20)$$

$$\therefore LN = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & x_o(1-\cos 2\theta) - y_o \sin 2\theta + a \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta & -x_o \sin 2\theta + y_o(1+\cos 2\theta) + b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ldots\ldots (21)$$

$$\therefore LMN = \begin{bmatrix} \cos 3\theta & \sin 3\theta & -x_o(1-\cos 3\theta) - y_o \sin 3\theta + a \\ \sin 3\theta & -\cos 3\theta & -x_o \sin 3\theta + y_o(1+\cos 3\theta) + b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ldots\ldots (22)$$

$$NML = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & x_o(1-\cos\theta) - y_o\sin\theta + a\cos\theta + b\sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta & -x_o\sin\theta + y_o(1+\cos\theta) + a\sin\theta - b\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ldots (23)$$

โดยทำนองเดียวกัน เราอาจจะหา N L M, L N M, ... ได้

เซทที่ประกอบด้วย element จาก translation Gruop, Rotation Group ทั่วไป, Reflection Group ทั่วไป และ matrix transformations ที่เกิดจากผลคูณของ element ในกรุปดังกล่าว จะเป็นแมทริกซ์รูปเดียวกันหมด คืออยู่ในรูป

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ -fc_{12} & fc_{11} & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $c_{11}^2 + c_{12}^2 = 1$ และ $f^2 = 1$; c_{ij} เป็น real number กล่าวคือ $fc_{11}^2 - (-fc_{12}^2)$ จะมีค่าเป็น +1 หรือ -1 ซึ่งเราจะเรียกเซทนี้ว่า "เซท E"

<u>เซท E เป็นกรุป</u>

1. เซท E มีคุณสมบัติ closure กล่าวคือ ถ้า E_1, E_2 เป็น element ในเซท E แล้ว E_1E_2 จะเป็น element ในเซท E ด้วย

ให้ $E_1 = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & c_1 \\ -fd_2 & fd_1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

เมื่อ $d_1^2 + d_2^2 = 1$ และ $f^2 = 1$

$E_2 = \begin{bmatrix} d_3 & d_4 & c_3 \\ -fd_4 & fd_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

เมื่อ $d_3^2 + d_4^2 = 1$, $f^2 = 1$

$$\therefore E_1E_2 = \begin{bmatrix} d_1d_3 - fd_2d_4 & d_1d_4 + fd_2d_3 & c_3d_1 + c_4d_2 + c_1 \\ -(d_1d_4 + fd_2d_3) & d_1d_3 - fd_2d_4 & -fc_3d_2 + fc_4d_1 + c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & c_5 \\ -F_2 & F_1 & c_6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $F_1 = d_1d_3 - f\,d_2d_4$, $c_5 = c_3d_1 + c_4d_2 + c_1$

$F_2 = d_1d_4 + f\,d_2d_3$, $c_6 = -f\,c_3d_2 + f\,c_4d_1 + c_2$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า $F_1^2 + F_2^2 = 1$ เมื่อ $f^2 = 1$

2. element แต่ละตัวในเซท E มี inverse และอยู่ในเซท E ด้วย

ถ้า $E_1 = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & c_1 \\ -fd_2 & fd_1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เมื่อ $d_1^2 + d_2^2 = 1$ และ $f^2 = 1$

$$\therefore E_1^{-1} = \frac{\operatorname{adj} E_1}{|E_1|}$$

$$\operatorname{adj} E_1 = \begin{bmatrix} fd_1 & -d_2 & d_2c_2 - f\,d_1c_1 \\ fd_2 & d_1 & -d_1c_2 - f\,c_1d_2 \\ 0 & 0 & fd_1^2 + f\,d_2^2 \end{bmatrix}$$

$$|E_1| = f\,d_1^2 + f\,d_2^2 = f$$

$$\therefore E_1^{-1} = \begin{bmatrix} d_1 & -\frac{d_2}{f} & \frac{d_2c_2 - f\,d_1c_1}{f} \\ d_2 & \frac{d_1}{f} & \frac{-d_1c_2 - f\,c_1d_2}{f} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่ง $\frac{d_1^2}{f} - \left(-\frac{d_2^2}{f}\right)$ จะเท่ากับ +1 หรือ -1 เมื่อ $f^2 = 1$

จากคุณสมบัติข้อ 1 เราก็อาจพิสูจน์ได้ว่า เซท E มีคุณสมบัติ Associative และจากคุณสมบัติข้อ 2 ก็อาจพิสูจน์ได้ว่า เซท E มี Identity

$$\therefore E_1^{-1}\;E_1 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ เซท E เป็นกรุ๊ป

คุณสมบัติของกรุป E

1. ทำให้ระยะระหว่างจุด 2 จุด ก่อนการเลื่อนเท่ากับระยะระหว่างจุด 2 จุดนั้นภายหลังการเลื่อน กล่าวคือ:-

ถ้า $P(x_1, y_1)$ และ $Q(x_2, y_2)$ เป็นจุด 2 จุด ถูกส่งไปอยู่ที่ $P'(x_1', y_1')$ และ $Q'(x_2', y_2')$ ตามลำดับด้วย matrix transformations อันหนึ่ง ซึ่งเป็น element ในกรุป E แล้วระยะ PQ จะเท่ากับระยะ $P'Q'$

ระยะ D ระหว่างจุด 2 จุด $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ บนพื้นราบคือ

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ถ้า $E_1 = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & c_1 \\ -f\,d_2 & f\,d_1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เมื่อ $d_1^2 + d_2^2 = 1$ และ $f^2 = 1$

ให้ $P(x_1, y_1)$ และ $Q(x_2, y_2)$ ถูกส่งไปที่จุด $P'(x_1', y_1')$ และ $Q'(x_2', y_2')$ ตามลำดับด้วย E_1

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & c_1 \\ -f\,d_2 & f\,d_1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งหมายความว่า

$$x_1' = d_1x_1 + d_2y_1 + c_1$$

$$y_1' = -f\,d_2x_1 + f\,d_1y_1 + c_2$$

$$\text{และ} \begin{bmatrix} x_2' \\ y_2' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & c_1 \\ -f\,d_2 & f\,d_1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งหมายความว่า

$$x_2' = d_1x_2 + d_2y_2 + c_1$$

$$y_2' = -f\,d_2x_2 + f\,d_1y_2 + c_2$$

$$x_2' - x_1' = (x_2 - x_1)\, d_1 + (y_2 - y_1)\, d_2$$
$$y_2' - y_1' = -(x_2 - x_1)\, f\, d_2 + (y_2 - y_1)\, f\, d_1$$
$$(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$
$$\sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$|P'Q'| = |PQ|$$

ระยะ $P'Q'$ = ระยะ PQ

2. ทำให้มุมระหว่างเส้นตรง 2 เส้น ที่เกิดจากจุด 3 จุด ก่อนการเลื่อนเท่ากับมุมระหว่างเส้นตรงของเส้นที่เกิดจากจุด 3 จุดนั้น ภายหลังการเลื่อน กล่าวคือ

ถ้า เส้นตรง PQ เกิดจากจุด P (x_1, y_1) และ Q (x_2, y_2)
เส้นตรง $P'Q'$ เกิดจากจุด P' (x_1', y_1') และ Q' (x_2', y_2')
เส้นตรง PR เกิดจากจุด P (x_1, y_1) และ R (x_2, y_2)
เส้นตรง $P'R'$ เกิดจากจุด P' (x_1', y_1') และ R' (x_2', y_2')

เมื่อจุด P, Q, R ถูกส่งไปที่จุด P', Q', R' ตามลำดับด้วย matrix transformation อันหนึ่ง ซึ่งเป็น element ในกรุป E แล้ว มุม QPR จะเท่ากับมุม $Q'P'R'$

จากสูตรในเรขาคณิตวิเคราะห์ ได้ว่าสมการของเส้นตรงใด ๆ บนพื้นราบ คือ

$$y = mx + c$$

ให้จุด P (x_1, y_1), $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$ ถูกส่งไปที่จุด $P'(x_1', y_1')$, $Q'(x_2', y_2')$ $R'(x_3', y_3')$ ตามลำดับด้วย E_1 ในข้อ 1

$$\therefore \begin{bmatrix} x_3' \\ y_3' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & c_1 \\ -fd_2 & fd_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งหมายความว่า

$$x_3' = d_1 x_3 + d_2 y_3 + c_1$$
$$y_3' = -fd_2 x_3 + f\, d_1 y_3 + c_2$$

สมมุติให้เส้นตรง PQ มีสมการเป็น $y = m_1x + c_1$ ดังนั้น

$$y_1 = m_1x_1 + c_1$$

$$y_2 = m_1x_2 + c_1$$

$$y_2 - y_1 = (x_2 - x_1)\, m_1$$

$$\therefore \quad m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ให้เส้นตรง PR มีสมการเป็น $y = m_2x + c_2$ ดังนั้น

$$m_2 = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$$

ให้มุม QPR เท่ากับ α

จากสูตรในเรขาคณิตวิเคราะห์ได้ว่า

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$$

$$\therefore \alpha = \tan^{-1} \frac{(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_1)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1)}$$

ให้เส้นตรง $P'Q'$ มีสมการเป็น $y = m_3x + c_3$ ดังนั้น

$$m_3 = \frac{-(x_2 - x_1)f\, d_2 + (y_2 - y_1)\, f\, d_1}{(x_2 - x_1)\, d_1 + (y_2 - y_1)\, d_2}$$

และให้เส้นตรง $P'R'$ มีสมการเป็น $y = m_4x + c_4$ ดังนั้น

$$m_4 = \frac{-(x_3 - x_1)f\, d_2 + (y_3 - y_1)f\, d_1}{(x_3 - x_1)\, d_1 + (y_3 - y_1)\, d_2}$$

ให้มุม $Q'P'R'$ เท่ากับ β

$$\therefore \beta = \tan^{-1} \frac{(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_1)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1)}$$

$$\therefore |\alpha| = |\beta|$$

เนื่องจากกรุป E มีคุณสมบัติ 2 ข้อดังกล่าว ซึ่งเป็นคุณสมบัติที่สำคัญของเรขาคณิตแบบยูคลิด เราจึงเรียกกรุป E นี้ว่า " Euclidean Group "

ในเรขาคณิตแบบยูคลิดเบื้องต้น ได้มีการศึกษาถึงเรื่องรูปสามเหลี่ยม 2 รูปเท่ากันทุกประการ วิธีการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับเรื่องสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการนี้ก็ทำโดยการยกรูปสามเหลี่ยมหนึ่งไปซ้อนบนสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง ถ้าซ้อนกันสนิทเป็นรูปเดียวกันก็กล่าวได้ว่าสามเหลี่ยมทั้งสองเท่ากันทุกประการ

เนื่องจากรูปสามเหลี่ยม คือรูปที่เกิดจากเส้นตรงสามเส้น ปลายทั้งสองข้างของแต่ละเส้นพบและต่อกันล้อมพื้นที่และทำให้เกิดมุม 3 มุม จุดตรงที่เส้นตรงพบกันจะเรียกว่าจุดยอด ซึ่งมี 3 จุด ดังนั้นถ้าเราเลื่อนจุดทั้งสามของสามเหลี่ยมรูปหนึ่งให้ไปทับจุดทั้งสามของสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งได้พร้อมกันด้วย matrix transformation แมทริกซ์หนึ่ง ซึ่งเป็น element ใน Euclidean Group ก็จะทำให้สามเหลี่ยมทั้งสองซ้อนกันสนิทเป็นรูปเดียวกัน สามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ ซึ่งจะได้กล่าวต่อไปในบทที่ 3