บทที่ 2

สมการเพื่อคำนวณหาความสูงของผิวน้ำ

ในหัวข้อนี้เราจะเสนอสมการของการไหลแบบสม่ำเสมอ ของ Incompressible, homogeneous, inviscid fluid ภายใต้แรงดึงดูดของโลกจากกรณีเฉพาะของทฤษฎี Fluid sheets ที่ไม่คิดแรงตึงผิวของของเหลว โดยที่ความดันที่กระทำกับทุกๆจุดที่ผิวบนของ Fluid sheet มีค่าคงที่เท่ากับความดันบรรยากาศ และมีแรงดึงดูดโลกกระทำตามแกน $-\underset{\sim}{e}_3$ ถ้าของเหลวไหลในทิศทางเดียวคือตามแกน x เท่านั้น เราจะได้สมการอธิบายการเคลื่อนที่ของของเหลว 4 สมการ(ดูภาคผนวก B-2)ซึ่งสามารถนำมาหาสมการเพื่อคำนวณหาความสูงของผิวน้ำได้ ดังจะได้แสดงวิธีการต่อไปนี้

จากภาคผนวก B-2 สมการของการเคลื่อนที่ คือ

$$(hu)_x = 0 \qquad 2.1_a$$

$$\rho h u u_x = -p_x - p_0(h+H) - \bar{p}H_x \qquad 2.1_b$$

$$\rho h u \lambda_x = -\rho g h + p - p_0 \qquad 2.1_c$$

$$\frac{1}{12}\rho h u w_x = \frac{-1}{2}p_0 \frac{-1}{2}\bar{p} + \frac{p}{h} \qquad 2.1_d$$

เมื่อ subscript x หมายถึง อนุพันธ์เทียบกับ x และเทอมต่างๆในสมการ(2.1) มีความหมายต่อไปนี้

h = ความสูงของผิวน้ำ

p_0 = ความดันบรรยากาศ

$\bar{p}$ = ความดันที่ผิวล่างของ fluid sheet

ρ = ความหนาแน่นของมวลสารของของเหลว

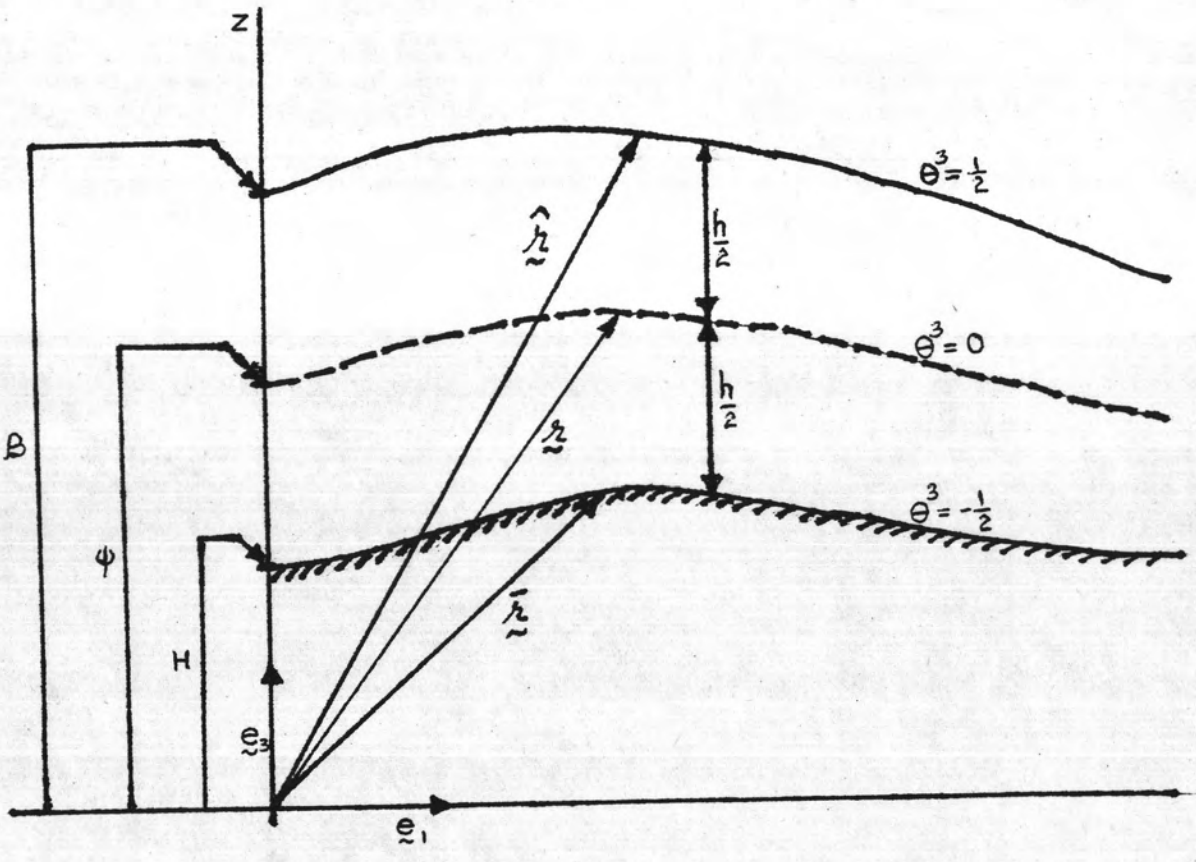
$\lambda = \dot{\psi} = u\psi_x$

$w = \dot{h} = uh_x$

$u = \dot{x}$ = ความเร็วของการไหลในแนวนอนในทิศทาง x

g = ค่าคงที่ของแรงดึงดูดโลก

และค่าอื่นๆกำหนดตามรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1

จากสมการ 2.1_a เราสามารถสรุปได้ว่า

$$hu = K \tag{2.2}$$

เมื่อ K เป็นค่าคงที่ซึ่งมีความหมายเท่ากับอัตราการไหลของของเหลวต่อหนึ่งหน่วยความกว้างและสามารถทราบได้จากเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา เมื่อแทนค่า $\bar{p}$ กับ p จากสมการ$(2.1_{c,d})$ลงในสมการ(2.1_b) และใช้สมการ(2.2)ช่วยในการจัดรูปเราจะสามารถอินทิเกรดสมการที่ได้หลังจากการหารด้วย h และได้สมการ

$$h_{xx} - \frac{1}{2}\frac{h_x^2}{h} + \frac{3}{2h} + \frac{3}{K^2}gh(H+h) + \frac{3Rh}{K^2} + \frac{3}{2}\left(H_{xx}+\frac{H_x^2}{h}\right) + 3\frac{p_0 h}{K^2} = 0 \tag{2.3}$$

เมื่อ R เป็นค่าคงที่ของการอินทิเกรดซึ่งจะทราบค่าได้เมื่อกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา นอกจากนี้โดยสมการ (2.3, 2.1_c และ 2.1_d) เราสามารถหาค่าความดันรวม p และความดันที่ผิวล่าง $\bar{p}$ ได้ดังนี้

$$p = -\frac{1}{2}p_0 + \rho\{K^2[\frac{1}{4}\frac{H_{xx}}{h} - \frac{H_x h_x}{h^2} - \frac{3}{4}\left(\frac{H_x}{h}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{h_x}{h}\right)^2 - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{h}\right)^2]$$

$$-\frac{1}{2}g(3H+h) - \frac{3}{2}R\} \tag{2.4}$$

$$\bar{p} = -\rho g\{\frac{1}{2}K^2[\left(\frac{H_x}{h}\right)^2 + \frac{H_x h_x}{h^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{h_x}{h}\right)^2 + \frac{1}{h^2}] + g\left(H+\frac{h}{2}\right) + R\} \tag{2.5}$$