พลสมุทกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 2

หฤษฎีการสร้างภาพและการจำลองภาพวัตถุบนจอภาพ

2.1 ลักษณะของการสร้างภาพทั่วไป

2.1.1 องค์ประกอบการแสดงภาพบนจอภาพ

การแสดงภาพบนจอภาพของไมโครคอมพิวเตอร์ระบบราสเตอร์ (Raster System) มีส่วนประกอบการทำงานพื้นฐาน 3 อย่าง คือ

2.1.1.1 เฟรมบัฟเฟอร์ (Frame Buffer) หรือ กราฟพิคเพจ (Graphics Page) คือ พื้นที่หน่วยความจำที่ใช้สำหรับเก็บข้อมูลสัญญาณภาพ เพื่อส่งออกไปแสดงทางจอภาพ โดยเก็บสัญญาณเหล่านั้นด้วยระบบเลขฐานสอง ซึ่งแต่ละตัวเลขเหล่านั้นใช้แทนหน่วยแสดงภาพที่เล็กที่สุดที่สามารถแสดงบนจอภาพได้ เรียกหน่วยแสดงภาพที่เล็กที่สุดนั้นว่า จุดภาพ (Pixel) โดยที่เลข "1" แทนจุดภาพที่สว่าง และเลข "0" แทนจุดภาพที่มืด และในหนึ่งแถวแนวนอนของจุดภาพ ของตารางในเฟรมบัฟเฟอร์เรียกว่า 1 ราสเตอร์ลายน์ (Raster Line)

2.1.1.2 จอภาพ คือ อุปกรณ์ที่ใช้ในการแสดงภาพ

2.1.1.3 อุปกรณ์ควบคุมการแสดงภาพบนจอภาพ (Display Controller) คือ อุปกรณ์คอยอ่านค่าที่เก็บอยู่บนเฟรมบัฟเฟอร์ แล้วส่งค่าที่ได้นำไปแปลงเป็นสัญญาณภาพ เพื่อส่งไปแสดงบนจอภาพ โดยลักษณะการอ่านค่าเป็นแบบการอ่านค่าจากด้านบนของเฟรมบัฟเฟอร์สู่ด้านล่างสุดของเฟรมบัฟเฟอร์ และเมื่อสิ้นสุดแล้วกลับไปอ่านซ้ำอีกเรื่อยๆ ด้วยความเร็วประมาณ 30 ครั้งต่อวินาทีหรือมากกว่า เพื่อที่จะทำให้ภาพที่เห็นบนจอภาพคงอยู่เสมอ

2.1.2 ชนิดภาพบนจอภาพของเครื่องไมโครคอมพิวเตอร์

การสร้างภาพด้วยโปรแกรม ภาพที่แสดงบนจอภาพของเครื่องไมโครคอมพิวเตอร์มี 2 ประเภท คือ

2.1.2.1 ภาพในโมดของตัวอักษร (Text Mode) คือ การแสดงภาพในรูป ตัวอักษร ตัวเลข หรือเครื่องหมายที่ปรากฏอยู่บนแป้นพิมพ์

2.1.2.2 ภาพในโมดของรูปภาพ (Graphics Mode) คือ การแสดงภาพในลักษณะ จุด เส้น ฯลฯ ที่จะประกอบกันเป็นรูปภาพที่ต้องการ ซึ่งในการสร้างภาพด้วยไมโครคอมพิวเตอร์จะต้องทำงานด้วยภาพประเภทนี้ ภาพในโมดของรูปภาพแบ่งออกเป็น 2 แบบ คือ

ก. ภาพในโมดของรูปภาพแบบหยาบ (Low Resolution Graphics Mode) เป็นการแสดงรูปภาพบนจอภาพ ด้วยการแทนตำแหน่งของจุดแต่ละจุดโดยใช้กลุ่มของจุดของจอภาพ

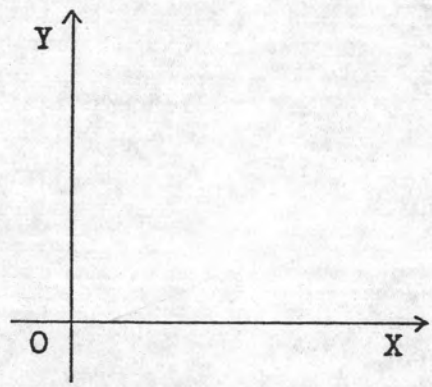
ข. ภาพในโมดของรูปภาพแบบละเอียด (High Resolution Graphics Mode) เป็นการแสดงรูปภาพบนจอภาพ ด้วยการแทนตำแหน่งของจุดแต่ละจุดด้วยจำนวนของจุดบนจอภาพน้อยกว่า เมื่อเทียบกับการแสดงตำแหน่งของจุดในภาพ ในโมดของรูปภาพแบบหยาบ

การสร้างภาพแต่ละชนิดบนจอภาพนั้น จะต้องใช้คำสั่งที่กำหนดให้ใช้ได้เฉพาะประเภทของภาพที่กำหนดเท่านั้น (รายละเอียดแสดงในภาคผนวก ค.)

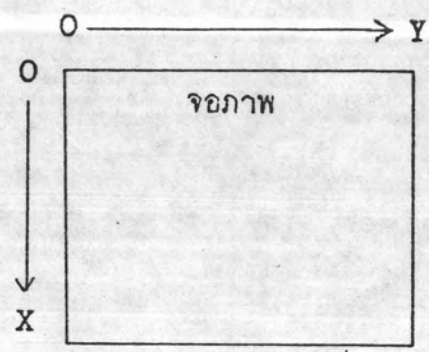
2.1.3 ส่วนประกอบของภาพ

จากการนำรูปภาพต่างๆ มาวิเคราะห์ สามารถแยกรูปภาพออกเป็นส่วนๆ โดยแต่ละส่วนยังประกอบด้วยส่วนย่อยๆ หนึ่งๆ หรือมากกว่าหนึ่ง ซึ่งแต่ละส่วนย่อยนั้นได้มาจากการนำเส้นตรง จุด และส่วนเส้นตรงย่อยๆ มาประกอบกัน ส่วนย่อยแต่ละส่วนดังกล่าวมีวิธีการสร้าง ดังต่อไปนี้

ก. จุด (Point) คือ การกำหนดจุดภาพบนจอภาพ ตามระบบพิกัดเรขาคณิต (Co-ordinate Geometry System) หรืออาจเรียกว่า ระบบพิกัดแกน (Co-ordinate Axis System)

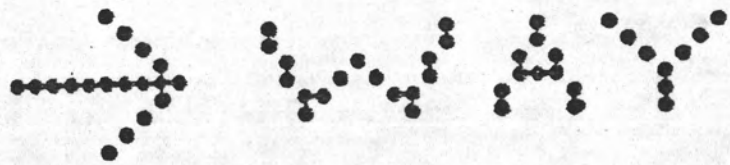


รูปที่ 2.1 แสดงระบบพิกัดแกน



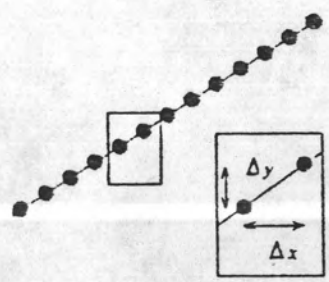
รูปที่ 2.2 แสดงระบบพิกัดแกนบนจอภาพ

ในการที่จะกำหนดตำแหน่งของแต่ละจุดภาพ ว่าอยู่ตรงที่ใดบนจอภาพ จะต้องใช้คำสั่งการสร้างภาพในโมดของรูปภาพ



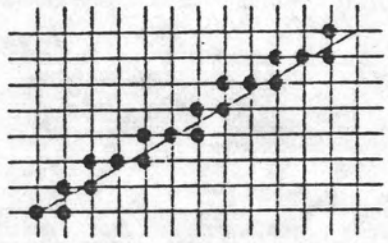
รูปที่ 2.3 แสดงการสร้างภาพด้วยวิธีการกำหนดจุดภาพ

ข. เส้นตรง (Line) คือ การนำจุดมาเรียงชิดกันในทิศทางเดียวกัน แต่จุดที่แสดงบนจอภาพยังไม่ถึงกับชิดติดกันเป็นเส้นเดียว ซึ่งเป็นผลเนื่องมาจากความละเอียดของจอภาพที่ใช้แสดง



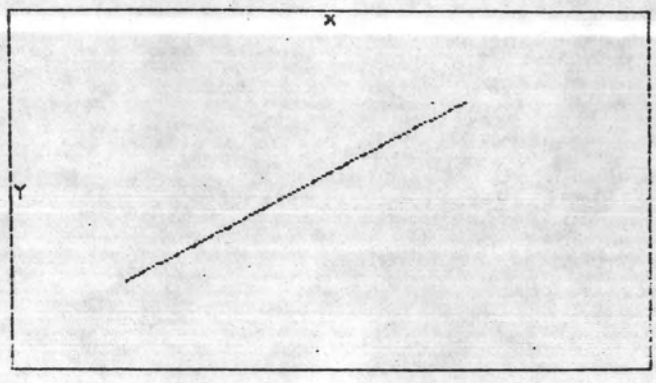
รูปที่ 2.4 แสดงภาพเส้นตรงในอุดมคติบนจอภาพ
ΔX, ΔY คือค่าความห่างแต่ละจุดภาพ

ซึ่งในทางปฏิบัติ การกำหนดจุดภาพให้เป็นเส้นตรง อุปกรณ์ควบคุมการแสดงภาพบนจอภาพไม่สามารถแสดงได้ เนื่องจากในทิศทางของภาพเส้นตรงที่ต้องการนั้น ไม่สามารถกำหนดตำแหน่งให้ตรงกับจุดภาพที่อยู่บนจอภาพได้ แต่จะกำหนดตำแหน่งจุดภาพที่ใกล้เคียงกับตำแหน่งที่กำหนดมากที่สุด



รูปที่ 2.5 แสดงภาพเส้นตรงบนจอภาพที่เป็นไปได้จริง

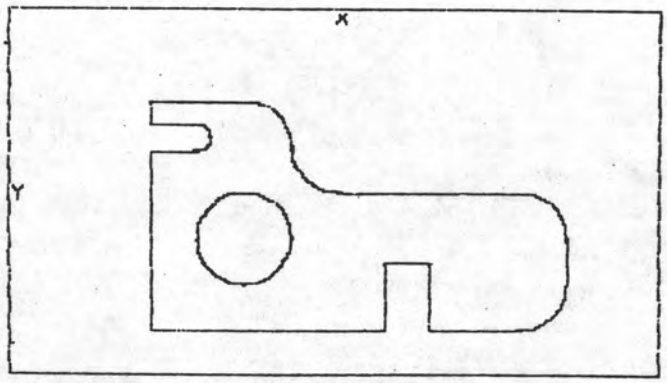
ในการเขียนภาพเส้นตรงบนจอภาพ โดยใช้คำสั่งภาษาเบสิค โปรแกรมระบบของภาษาเบสิคจะจัดการกำหนดตำแหน่งจุดภาพ ในทิศทางที่ใกล้เคียงกันให้เป็นลักษณะเส้นตรงที่ต้องการ




```
HPLOT 50,120 TO 200,40
```

รูปที่ 2.6 แสดงการเขียนภาพเส้นตรงบนจอภาพ โดยใช้คำสั่งภาษาเบสิค

ก. เส้นโค้ง (Arc) คือ ส่วนของเส้นรอบวงกลม ซึ่งเกิดจากทางเดินของจุดที่ห่างจากจุดศูนย์กลางเท่ากัน ดังนั้น ถ้าลากเส้นตรงระหว่างจุดที่เกิดขึ้น เส้นโค้งที่เกิดขึ้นบนจอภาพ เป็นผลมาจากการนำเส้นตรงสั้นๆ มาต่อกัน



รูปที่ 2.7 แสดงภาพที่เกิดจากเส้นโค้งมาต่อกัน

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2.2 การสร้างภาพ 2 มิติบนจอภาพ

2.2.1 ขนาดของจอภาพ

วิธีการสร้างภาพบนจอภาพของไมโครคอมพิวเตอร์ แตกต่างกันออกไปตามบริษัทผู้ผลิต ทั้งนี้เน้นเฉพาะในส่วนของการแสดงรูปภาพ ในโหมดของรูปภาพแบบละเอียด

จอภาพของไมโครคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการวิจัยนี้ จอภาพมีขนาดกว้าง 192 จุดภาพ ขนาดยาว 280 จุดภาพ ดังนั้น ขนาดภาพบนจอภาพมีขนาดกว้างเป็น 192/280 ของขนาดความยาวของจอภาพ ซึ่งมีผลทำให้ภาพที่ออกมาจำเป็นต้องปรับปรุงเสียก่อน เพื่อให้มีรูปร่างเป็นธรรมชาติ แต่ถ้าความกว้างและความยาวของจอภาพมีการเปลี่ยนแปลงไปจากนี้ ย่อมมีผลต่อรูปร่างภาพบนจอภาพด้วย

2.2.2 ทรานฟอร์มเมชัน (Transformation)

ทรานฟอร์มเมชัน คือ ความสามารถในการปรับปรุงภาพที่แสดงบนจอภาพ โดยปฏิบัติทางคณิตศาสตร์ เพื่อเปลี่ยนภาพจากจุดพิกัด (X,Y) ไปเป็นจุดพิกัด (X',Y') ใหม่ ตามรูปแบบที่ต้องการ มีลักษณะที่สำคัญ คือ

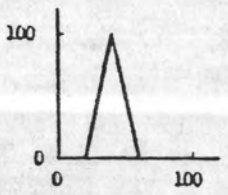
ก. การเลื่อนภาพ (Translation Transformation)

สามารถเขียนเป็นสูตรการคำนวน ในรูปของเรขาคณิตวิเคราะห์ ดังนี้

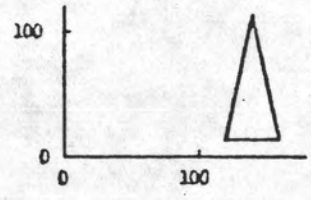
$$X' = X + Tx$$

$$Y' = Y + Ty$$

ตัวอย่างการเลื่อนภาพ ในรูปที่ 2.8 กำหนดรูปสามเหลี่ยมมีจุดยอดที่ (20,0) , (60,0) , (40,100) ต้องการเลื่อนภาพไปทางขวามือ 100 หน่วย และเลื่อนขึ้นข้างบนอีก 10 หน่วย ซึ่งจะได้ว่า $Tx=100$, $Ty = 10$ ดังนั้นภาพที่ทำการเลื่อนภาพเรียบร้อยแล้ว จะมีจุดยอดที่ (120,6) , (160,10) , (140,110) ดังแสดงในรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.8 แสดงรูปสามเหลี่ยมก่อนทำการเลื่อนภาพ



รูปที่ 2.9 แสดงรูปสามเหลี่ยมหลังทำการเลื่อนภาพ

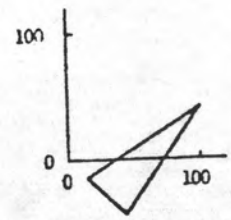
ข. การหมุนภาพ (Rotation Transformation)

การหมุนภาพหมายถึง การหมุนจุดพิกัด (X,Y) ไปเป็นจุดพิกัด (X',Y') รอบจุดกำเนิด (0,0) ไปในแนวทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม θ สูตรการคำนวนจุดพิกัดจุดใหม่มีรูป ดังนี้

$$X' = XCOS\theta + YSIN\theta$$

$$Y' = -YSIN\theta + YCOS\theta$$

ตัวอย่างภาพรูปสามเหลี่ยม ในรูปที่ 2.8 ถ้าต้องการหมุนภาพรูปสามเหลี่ยมนี้ ในแนวทิศ 45 องศา ทวนเข็มนาฬิกา รอบจุดกำเนิด (0,0) จะได้จุดยอดของรูปสามเหลี่ยมหลังจากทำการหมุนภาพเรียบร้อยแล้ว มีจุดพิกัดดังนี้ (14.14,-14.14) , (42.43,-42.43) , (98.99,42.43) ดังแสดงในรูปที่ 2.10



รูปที่ 2.10 แสดงรูปสามเหลี่ยมหลังทำการหมุนภาพ

ค. การขยายภาพ (Scaling Transformation)

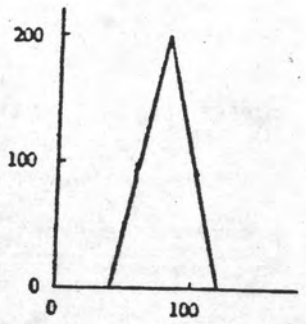
การขยายภาพ คือ การทำให้ภาพบนจอภาพมีขนาดเปลี่ยนแปลงแบบสัมพัทธ์กับรูปภาพเดิม จุดพิกัดภาพจุดใหม่ได้จากการคำนวน

$$X' = XS_x$$

$$Y' = YS_y$$

ตัวอย่างการขยายภาพ ถ้าต้องการขยายภาพรูปสามเหลี่ยมในรูปที่ 2.8 ให้มีขนาดใหญ่เป็นสองเท่าของขนาดรูปภาพเดิม นั่นคือ $S_x = S_y = 2$ ดังนั้นจุดยอดใหม่ของรูปสามเหลี่ยมมีจุดพิกัดที่ (40,0) , (120,0) , (80,200) ดังแสดงในรูปที่ 2.11

แต่ถ้าขนาดของตัวแปร S_x และ S_y ไม่เท่ากัน จะทำให้รูปภาพที่ได้รับการขยายแล้วนั้น มีรูปร่างเปลี่ยนแปลงไปจากเดิมได้



รูปที่ 2.11 แสดงรูปสามเหลี่ยมหลังทำการขยายภาพ 2 เท่า

2.2.3 การเขียนทรานฟอร์มเมชั่นในรูปของเมตริกซ์

ทรานฟอร์มเมชั่นรูปภาพ 2 มิติ จากจุดพิกัด (X,Y) ไปยังจุดพิกัดใหม่ (X',Y') สามารถเขียนทรานฟอร์มเมชั่นในรูปของเมตริกซ์ขนาด 3 x3 และเพื่อเหตุผลการดำเนินวิธีการทางคณิตศาสตร์กับเมตริกซ์ จึงเขียนจุดพิกัดอ้างอิงจากรูปแบบเดิม ซึ่งเป็นการเขียนจุดพิกัด ในระบบพิกัดเรขาคณิต 2 แกน เป็นการเขียนจุดพิกัดในระบบพิกัดโฮโมจีเนียส (Homogeneous Co-ordinate) แทน (รายละเอียดแสดงในภาคผนวก จ.)

ทรานฟอร์มเมชั่นในรูปของเมตริกซ์ทั่วไป มีรูปดังนี้

$$(X',Y',1) = (X,Y,1)\begin{bmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ c & f & 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อ ค่า c,f ควบคุมการเลื่อนภาพ

ค่า a,b,c,d ควบคุมการหมุนภาพ

ค่า a,e ควบคุมการขยายภาพตามแนวแกน X และแกน Y ตามลำดับ

และสามารถเขียนทรานฟอร์มเมชั่นเฉพาะอย่าง ในรูปแบบของเมทริกซ์ได้ดังนี้

การเลื่อนภาพ มีรูปแบบเมทริกซ์ คือ

$$(X',Y',1) = (X,Y,1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{bmatrix}$$

การหมุนภาพ มีรูปแบบเมทริกซ์ คือ

$$(X',Y',1) = (X,Y,1)\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

การขยายภาพ มีรูปแบบเมทริกซ์ คือ

$$(X',Y',1) = (x,y,1)\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ทรานฟอร์มเมชั่นซึ่งเขียนอยู่ในรูปแบบของเมทริกซ์นี้ สามารถรวมจำกับการทำงานของทรานฟอร์มเมชั่น นำมาเขียนไว้ในรูปแบบของเมทริกซ์รูปเดียวกันได้ ตัวอย่าง ถ้าต้องการทรานฟอร์มเมชั่นแบบขยายภาพ และเลื่อนภาพต่อเนื่องกันไป ดังนั้นพิกัดของจุด (X',Y') ใหม่ที่เกิดขึ้น สามารถเขียนแทนด้วยเมทริกซ์ในรูป

$$(X',Y',1) = (X,Y,1)\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(X'',Y'',1) = (X',Y',1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{bmatrix}$$

012688

สามารถเขียนเมทริกซ์รูปใหม่ รวมการทำงานของลำดับทรานฟอร์มเมชั่น ทั้งการขยายภาพ และการเลื่อนภาพ ดังนี้

$$(X'',Y'',1) = (X,Y,1)\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (X,Y,1)\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{bmatrix}$$

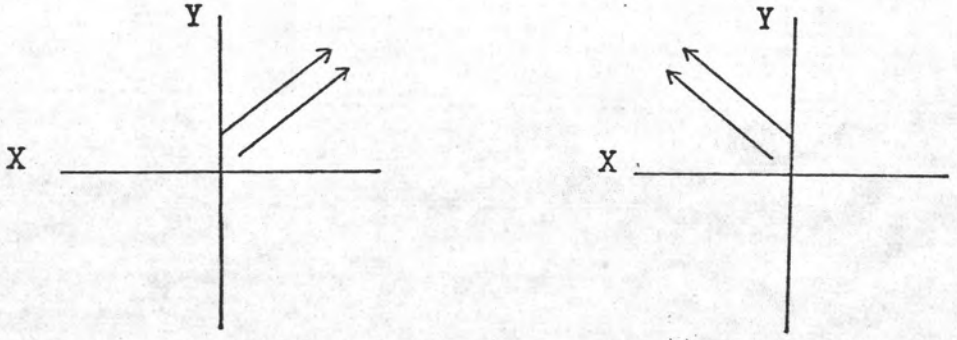
จากรูปเมทริกซ์รูปใหม่ จะได้ผลการทำงานเหมือนเดิม และถ้าเป็นทรานฟอร์มเมชั่นแบบอื่นๆ จะเขียนและทำงานในทำนองเดียวกัน

2.2.4 ทรานฟอร์มเมชั่นแบบอื่นๆ

ก. การสะท้อนภาพ

การสะท้อนภาพกับแกนใดแกนหนึ่ง หมายถึง การจำลองภาพนั้นอีกภาพหนึ่ง ในทิศทางตรงข้ามกับแกนนั้น ดังนั้น รูปเมทริกซ์ที่ใช้แสดงการสะท้อนภาพ จึงทำหน้าที่เสมือนผู้เปลี่ยนเครื่องหมายสมาชิกของคู่ลำดับ ที่สมนัยกับแกนที่สะท้อนนั้นให้เป็นเครื่องหมายตรงข้าม มีรูปแบบดังต่อไปนี้

ก.1 การสะท้อนภาพกับแกน Y



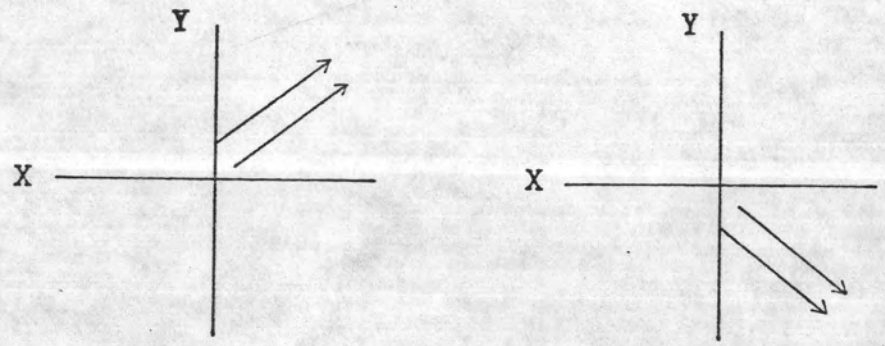
(ก) ภาพก่อนสะท้อน (ข) ภาพหลังสะท้อน

รูปที่ 2.12 แสดงภาพการสะท้อนกับแกน Y

มีรูปเมตริกซ์ คือ

$$R_Y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ก.2 การสะท้อนภาพกับแกน X



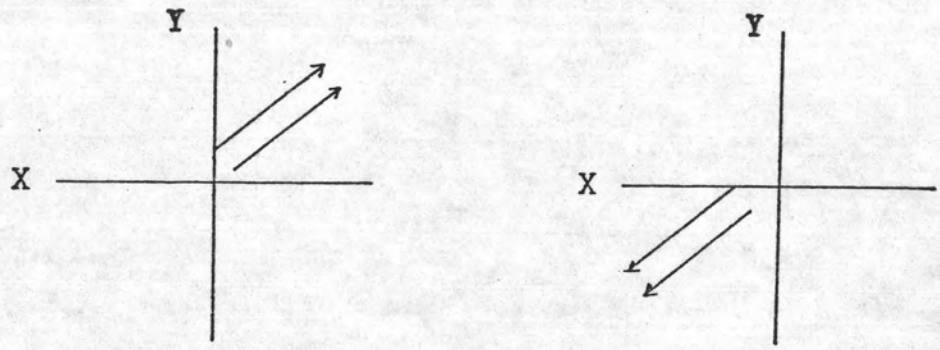
(ก) ภาพก่อนสะท้อน (ข) ภาพหลังสะท้อน

รูปที่ 2.13 แสดงภาพการสะท้อนกับแกน X

มีรูปเมทริกซ์ คือ

$$R_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ก.3 การสะท้อนภาพกับจุดกำเนิด



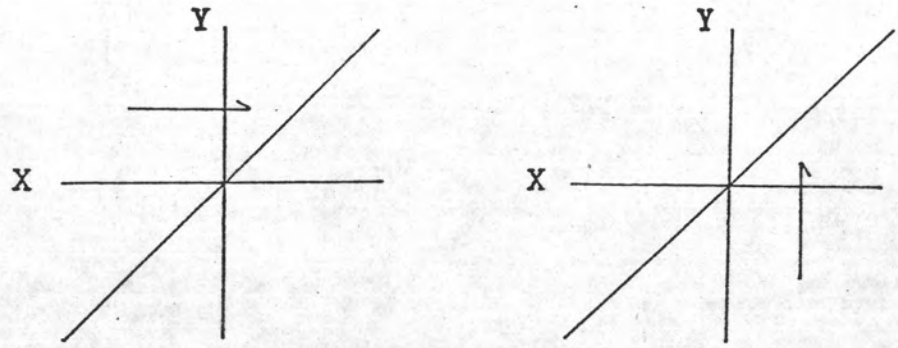
(ก) ภาพก่อนสะท้อน (ข) ภาพหลังสะท้อน

รูปที่ 2.14 แสดงภาพสะท้อนกับจุดกำเนิด

มีรูปเมทริกซ์ คือ

$$R_O = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ก.4 การสะท้อนภาพรอบเส้น ที่มีสมการ $Y = X$



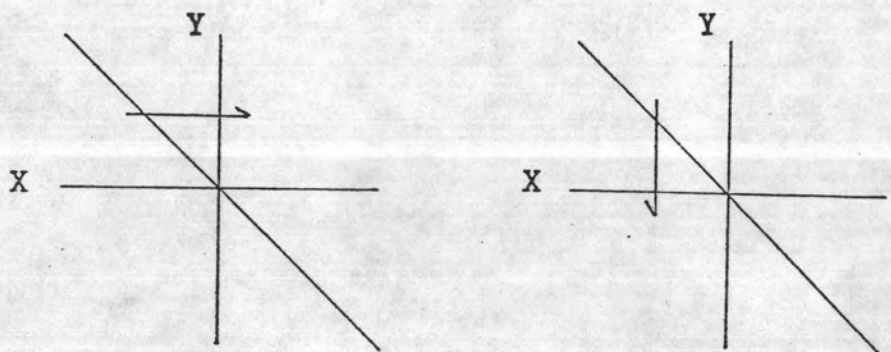
(ก) ภาพก่อนสะท้อน (ข) ภาพหลังสะท้อน

รูปที่ 2.15 แสดงภาพการสะท้อนรอบเส้นสมการ $Y = X$

มีรูปเมตริกซ์ คือ

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ก.5 การสะท้อนภาพรอบเส้น ที่มีสมการ $Y = -X$



(ก) ภาพก่อนสะท้อน (ข) ภาพหลังสะท้อน

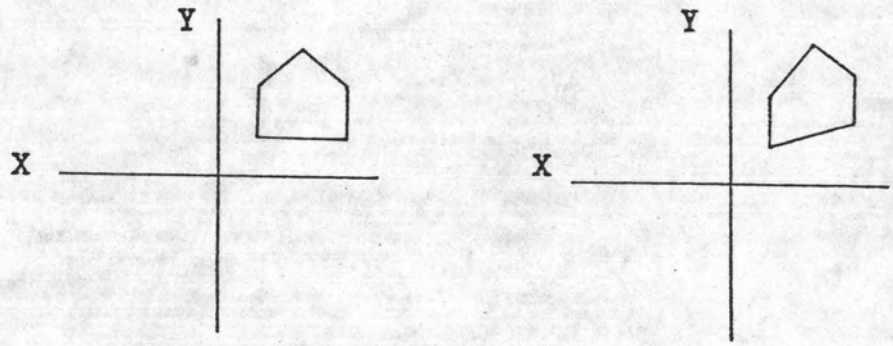
รูปที่ 2.16 แสดงภาพการสะท้อนรอบเส้นสมการ $Y = -X$

มีรูปเมตริกซ์ คือ

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ข. การดึงภาพ (Shear)

ข.1 การดึงภาพตามแนวแกน Y



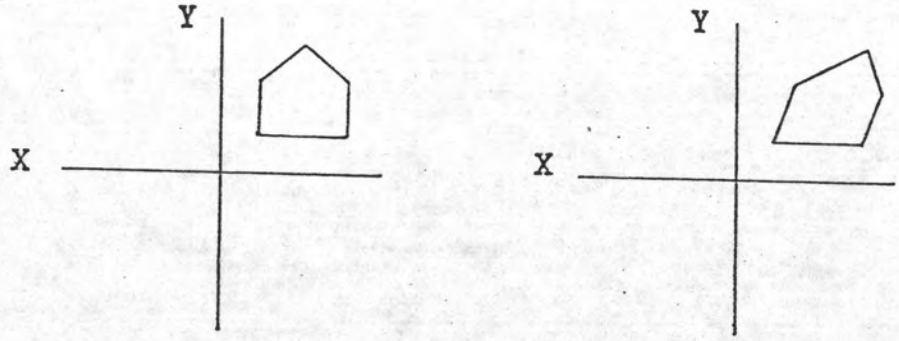
(ก) ภาพก่อนการดึงภาพ (ข) ภาพหลังการดึงภาพ

รูปที่ 2.17 แสดงการดึงภาพตามแนวแกน Y

มีรูปเมตริกซ์ คือ

$$R = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ข.2 การคึงภาพตามแนวแกน X



(ก) ภาพก่อนการคึงภาพ (ข) ภาพหลังการคึงภาพ

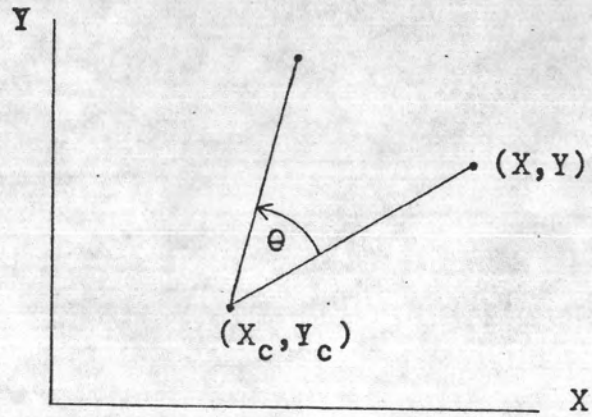
รูปที่ 2.18 แสดงการคึงภาพตามแนวแกน X

มีรูปเมตริกซ์ คือ

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.5 ทรานฟอร์มเมชั่นแบบทั่วไป

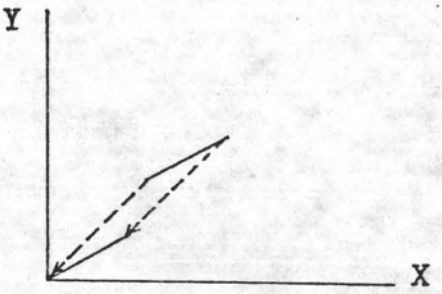
กรณีการหมุนภาพ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา รอบจุดใดๆ



รูปที่ 2.19 แสดงภาพการหมุนภาพรอบจุดใดๆ

ขั้นตอนการทำงานมี 3 ขั้นตอน คือ

ก. เลื่อนภาพจากจุดพิกัด (X_c, Y_c) ไปยังจุดกำเนิด (0,0)

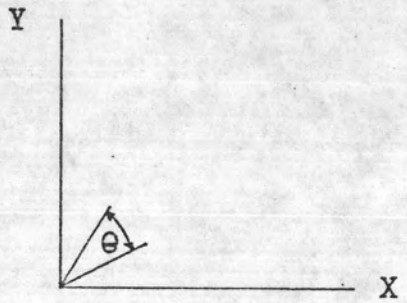


รูปที่ 2.20 แสดงภาพการเลื่อนภาพจากจุดพิกัด (X_c, Y_c) ไปยังจุดกำเนิด (0,0)

มีรูปเมตริกซ์ ดังนี้

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -X_c & -Y_c & 1 \end{bmatrix}$$

ข. หมุนภาพที่จุดกำเนิด (0,0) เป็นมุม θ ตามที่ต้องการ

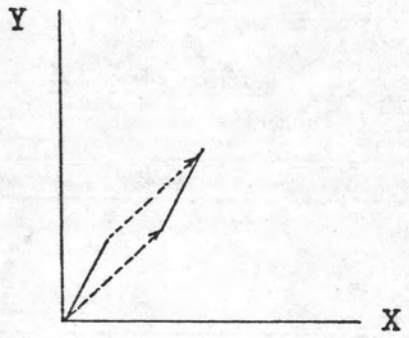


รูปที่ 2.21 แสดงการหมุนภาพที่จุดกำเนิด (0,0) เป็นมุม θ

มีรูปเมตริกซ์ ดังนี้

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ค. เลื่อนภาพจากจุดกำเนิด (0,0) กลับไปที่จุดพิกัด (X_c, Y_c) ซึ่งเป็นจุดพิกัดเดิม



รูปที่ 2.22 แสดงภาพการเลื่อนภาพจากจุดกำเนิด (0,0) ไปที่จุดพิกัด (X_c, Y_c)

มีรูปเมตริกซ์ ดังนี้

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ X_c & Y_c & 0 \end{bmatrix}$$

ในกรณีที่เขียนจุดพิกัดแบบระบบโฮโมจีเนียส ถ้าจุด (X_w, Y_w, Z_w) เป็นจุดพิกัดที่หมุนรอบจุดใดๆ เป็นมุม θ โดยคุณสมบัติของเมตริกซ์ จุดพิกัดที่ได้หลังจากการหมุนภาพแล้ว มีรูปเมตริกซ์ดังนี้

$$= (((\begin{bmatrix} X_w, Y_w, Z_w \end{bmatrix} T_1) R) T_2)$$

$$= \begin{bmatrix} X_w, Y_w, Z_w \end{bmatrix} (T_1 (RT_2))$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -X_c & -Y_c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ X_c & Y_c & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -X_c & -Y_c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ X_c & Y_c & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -X_c\cos\theta + Y_c\sin\theta + X_c & -X_c\sin\theta - Y_c\cos\theta + Y_c & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น จุดพิกัด (X,Y) ที่หมุนรอบจุด (X_c,Y_c) ใดๆ เป็นมุม θ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา เขียนในรูประบบพิกัดโฮโมจีเนียส ดังนี้

$$(X',Y',1) = 1/W \begin{bmatrix} X_w & Y_w & 1 \end{bmatrix}$$

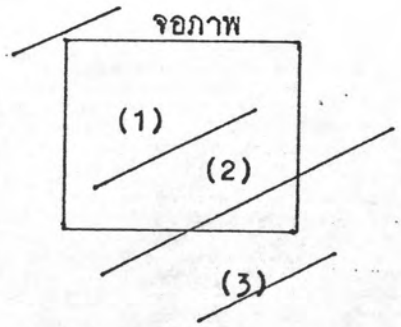
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -X_c\cos\theta+Y_c\sin\theta+X_c & -X_c\sin\theta-Y_c\cos\theta+Y_c & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.6 การตัดบางส่วนของภาพ (Clipping)

เนื่องจากขนาดความกว้างและความยาวของจอภาพมีขนาดคงที่ และเพื่อที่สามารถแสดงภาพที่มีขนาดใหญ่กว่าจอภาพ โดยไม่ต้องการเปลี่ยนรูปภาพนั้นให้มีขนาดเล็กลง จึงใช้วิธีการแสดงเฉพาะบางส่วนของภาพด้วยการตัดบางส่วนของภาพออกไป ลักษณะการตัดบางส่วนของภาพที่สำคัญ มีดังนี้

ก. การตัดบางส่วนของภาพที่ลักษณะภาพเป็นจุด (Point Clipping) ขั้นตอนการทำงาน ทำโดยการทดสอบว่า ตำแหน่งพิกัดของจุดนั้นอยู่ในขอบเขตของจอภาพหรือไม่ ซึ่งถ้าผลปรากฏว่า จุดนั้นอยู่นอกเหนือขอบเขตของจอภาพ จะไม่แสดงจุดดังกล่าวบนจอภาพ

ข. การตัดบางส่วนของภาพที่ลักษณะภาพเป็นเส้นตรง (Line Clipping)



รูปที่ 2.23 แสดงลักษณะตำแหน่งเส้นตรงที่เป็นไปได้บนจอภาพ
เส้นตรง หมายเลข 1 แสดงบนจอภาพได้ตลอดเส้น
เส้นตรง หมายเลข 2 แสดงบนจอภาพได้เฉพาะบางส่วน
เส้นตรง หมายเลข 3 ไม่สามารถแสดงได้บนจอภาพ

จากรูปที่ 2.23 พบว่ามีภาพเส้นตรงบางเส้น ที่ไม่สามารถแสดงบนจอภาพตลอดทั้งเส้นได้ ดังนั้นจึงต้องทำการตัดบางส่วนของภาพออกไป เพื่อที่ให้เส้นตรงนั้นสามารถแสดงบนจอภาพได้ ซึ่งถ้าไม่ทำการตัดบางส่วนของภาพที่อยู่นอกขอบเขตของจอภาพออกไป จะทำให้โปรแกรมหยุดทำงานได้

ขั้นตอนการตัดบางส่วนของภาพ ทำโดยการแบ่งพื้นที่ที่ใช้สำหรับกำหนดตำแหน่งภาพ ออกเป็น 9 ส่วน และกำหนดให้พื้นที่ตรงกลางเป็นตำแหน่งพื้นที่ที่สามารถแสดงจุดภาพได้ พื้นที่ส่วนออกนอกเหนือเป็นส่วนที่ไม่สามารถแสดงจุดภาพบนจอภาพได้ ดังรูปที่ 2.24

1001	1000	1010
	จอภาพ	
0001	0000	0010
0101	0100	0110

รูปที่ 2.24 แสดงการแบ่งพื้นที่จำลอง ที่ใช้สำหรับแสดงภาพ
ออกเป็นส่วนที่สามารถแสดงภาพได้ และส่วนที่แสดงภาพไม่ได้

การใช้โปรแกรมตัดบางส่วนของภาพเส้นตรง ทำโดยพิจารณาตำแหน่งพิกัดของจุดปลายเส้นตรง ถ้าจุดปลายเส้นตรงใดอยู่นอกเหนือพื้นที่ที่สามารถแสดงภาพได้ จะเลื่อนตำแหน่งพิกัดของจุดปลายเส้นตรงนั้น ให้อยู่ในเขตพื้นที่ที่สามารถแสดงภาพได้ ขั้นตอนการตัดบางส่วนของภาพเส้นตรง มีดังนี้

ข.1 กำหนดจุดพิกัดของจุดปลายเส้นตรงทั้งสอง คือ P_1P_2

ข.2 กำหนดรหัสสำหรับจุดปลายเส้นตรงแต่ละข้าง ถ้าจุดปลายเส้นตรงข้างหนึ่ง อยู่นอกเส้นที่กำหนดด้านจอภาพทางด้านซ้าย ด้านขวา ด้านบน ด้านล่าง (L, R, T, B กำหนดให้รหัสตำแหน่งที่สมนัย L(1), R(1), T(1), B(1) มีค่าเท่ากับ 1 แต่ถ้าจุดปลายเส้นตรงด้านนี้ อยู่ในขอบเขตที่สามารถแสดงภาพได้ รหัสที่สมนัยจะมีค่าเท่ากับ 0 หรืออาจกล่าวอีกนัยหนึ่ง คือ

รหัสตำแหน่งที่ 1 มีค่าเท่ากับ 1 เมื่อตำแหน่งจุดปลายนั้นอยู่นอกขอบเขตจอภาพด้านซ้าย

รหัสตำแหน่งที่ 2 มีค่าเท่ากับ 1 เมื่อตำแหน่งจุดปลายนั้นอยู่นอกขอบเขตจอภาพด้านขวา

รหัสตำแหน่งที่ 3 มีค่าเท่ากับ 1 เมื่อตำแหน่งจุดปลายนั้นอยู่นอกขอบเขตจอภาพด้านบน

รหัสตำแหน่งที่ 4 มีค่าเท่ากับ 1 เมื่อตำแหน่งจุดปลายนั้นอยู่นอกขอบเขตจอภาพด้านล่าง

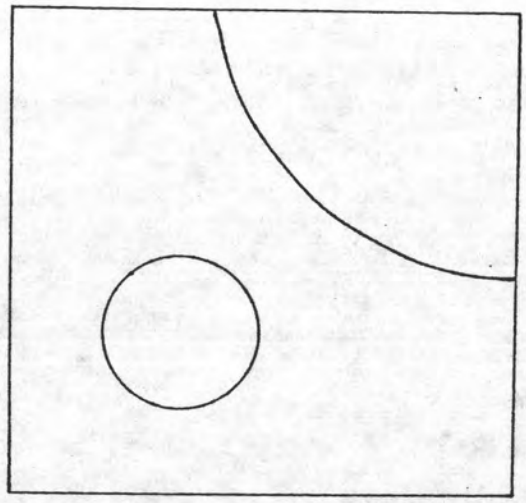
ข.3 กำหนดรหัสที่จุดปลายข้างที่เหลือในทำนองเดียวกัน จะได้รหัสของ L(2), R(2), T(2), B(2)

ข.4 พิจารณาผลบวกของ

(L(1)xL(2)) + (R(1)xR(2)) + (T(1)xT(2)) + (B(1)xB(2))

ถ้าผลบวกมีค่าเท่ากับ 0 แสดงว่าภาพเส้นตรงนั้นทั้งเส้น หรือบางส่วนของเส้นตรงอยู่ในกรอบของจอภาพ ในกรณีที่เส้นตรงอยู่ในกรอบของจอภาพทั้งเส้น จุดปลายทั้งสองต้องมีรหัสเป็น (0000) ทั้งคู่ แต่ถ้าผลบวกมีค่าไม่เท่ากับ 0 แสดงว่ามีบางส่วนของภาพเส้นตรง หรือภาพเส้นตรงนั้นทั้งเส้นอยู่นอกกรอบของจอภาพ ในกรณีที่มีบางส่วนของภาพเส้นตรงอยู่นอกกรอบของจอภาพ จะต้องพิจารณาว่าส่วนใดของเส้นตรง อยู่นอกเหนือกรอบของจอภาพ เมื่อทราบว่าเป็นส่วนใดแล้ว จึงทำการตัดส่วนของเส้นตรงที่อยู่นอกกรอบของจอภาพนั้นออกไป ให้เหลือความยาวเส้นตรงอยู่บนพื้นที่ที่สามารถแสดงภาพบนจอภาพได้

ค. การตัดบางส่วนของภาพที่มีลักษณะเป็นเส้นโค้ง (Arc Clipping) จากที่กล่าวมาแล้วว่า ภาพเส้นโค้งได้จากการนำเส้นตรงส่วนย่อยๆ มาต่อกัน โดยการกำหนดจุดปลายตามลักษณะของการเขียนภาพเส้นตรง การตัดบางส่วนของภาพที่มีลักษณะเป็นเส้นโค้ง ที่ภาพเส้นโค้งนั้นไม่สามารถแสดงบนจอภาพได้ ทำด้วยวิธีการ ก่อนที่จะกำหนดจุดปลายของเส้นตรงสั้นๆ นั้นบนจอภาพ จะทำการพิจารณาก่อนเสมอว่า ถ้าจุดปลายของเส้นตรงเส้นสั้นๆ นั้น อยู่นอกเหนือขอบเขตจอภาพ จะยกเลิกการแสดงเส้นตรงเส้นสั้นๆ เฉพาะเส้นนั้น และทำในทำนองเดียวกันจนกระทั่งวาดภาพเส้นโค้งเสร็จ



รูปที่ 2.25 แสดงการตัดบางส่วนของภาพที่มีลักษณะเป็นเส้นโค้ง

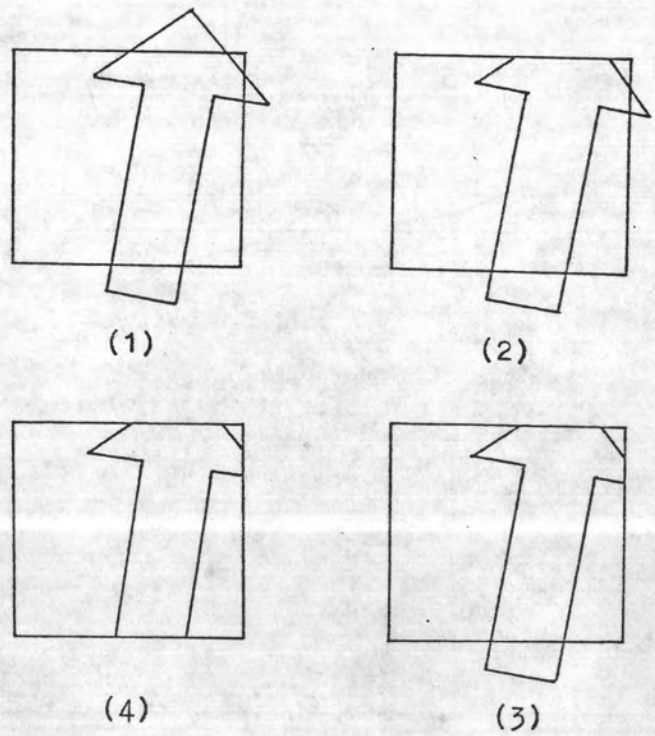
ง. การตัดบางส่วนของภาพที่มีลักษณะเป็นตัวหนังสือ (Text Clipping) กรณีที่ภาพตัวหนังสือมีขนาดปกติ การตัดบางส่วนของภาพที่มีลักษณะเป็นตัวหนังสือจะพิจารณาว่า ถ้าภาพตัวหนังสือใดมีบางส่วนที่ไม่สามารถแสดงบนจอภาพได้ แล้วจะไม่แสดงภาพตัวหนังสือนั้นบนจอภาพด้วยวิธีการลากเส้นรอบรูปตัวหนังสือเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า แล้วทดสอบถ้ารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้สามารถแสดงบนจอภาพได้ แสดงว่าตัวหนังสือที่อยู่ในกรอบสามารถแสดงบนจอภาพได้

กรณีที่ภาพตัวหนังสือมีขนาดใหญ่กว่าปกติ ใช้วิธีการแบบเดียวกับการตัดบางส่วนของภาพที่มีลักษณะเป็นเส้นโค้ง แต่การทำดังนี้ จะทำให้การวาดภาพทั้งจอภาพใช้เวลามากกว่าปกติ

จ. การตัดบางส่วนของภาพที่มีลักษณะเป็นรูปหลายเหลี่ยม (Polygon Clipping) ในบางกรณี ไม่เหมาะสมที่จะแบ่งภาพออกเป็นลายเส้น เป็นส่วนๆ เพื่อสำหรับตัดภาพ เนื่องจากสิ่งที่ต้องการหลังจากทำการตัดภาพแล้ว ภาพที่เหลือไม่คงความหมายเหมือนเดิม

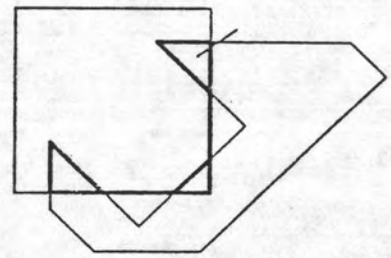
การตัดบางส่วนของภาพที่มีลักษณะเป็นรูปหลายเหลี่ยม ที่มีบางส่วนไม่สามารถแสดงบนจอภาพได้ ทำโดยกำหนดบัญชีจุดยอดของรูปหลายเหลี่ยม เฉพาะที่สามารถแสดงบนจอภาพได้เท่านั้น และมีโปรแกรมย่อยควบคุมการกำหนดจุดยอด ในรายการบัญชีนี้ด้วย

ในรูปที่ 2.26 แสดงการตัดบางส่วนของรูปภาพหลายเหลี่ยม โดยการพิจารณาที่ละด้านกับขอบจอภาพ เมื่อได้จุดตัดจุดใหม่ของด้านรูปภาพ จะถือจุดนั้นเป็นจุดยอดจุดใหม่ของรูปภาพหลายเหลี่ยม และนำจุดยอดใหม่นั้นเก็บในรายการบัญชีจุดยอดของรูปหลายเหลี่ยมที่สามารถแสดงบนจอภาพได้ และกระทำในทำนองเดียวกันกับขอบจอภาพทั้ง 4 ด้าน แล้วจึงนำจุดยอดทั้งหมดในรายการบัญชี ไปทำการวาดบนจอภาพเป็นรูปหลายเหลี่ยมหลังการตัดภาพแล้ว



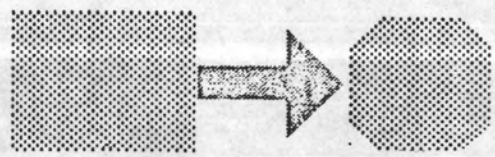
รูปที่ 2.26 แสดงการตัดบางส่วนของภาพที่มีลักษณะเป็นรูปหลายเหลี่ยม

ตัวอย่างการตัดบางส่วนของภาพรูปหลายเหลี่ยม ในรูปที่ 2.27 ขอบจอภาพเป็นตัวกำหนดขอบเขตภาพ ดังนั้น ด้วยวิธีการแยกรูปหลายเหลี่ยมออกเป็นเส้นๆ แล้วทำวิธีการตัดบางส่วนของภาพ แบบการตัดบางส่วนของภาพที่มีลักษณะเป็นเส้น จะได้ภาพที่เหลือ ดังรูปที่ 2.27



รูปที่ 2.27 แสดงการตัดบางส่วนของภาพที่มีลักษณะเป็นรูปหลายเหลี่ยม โดยวิธีการพิจารณาด้านแบบเส้นตรง

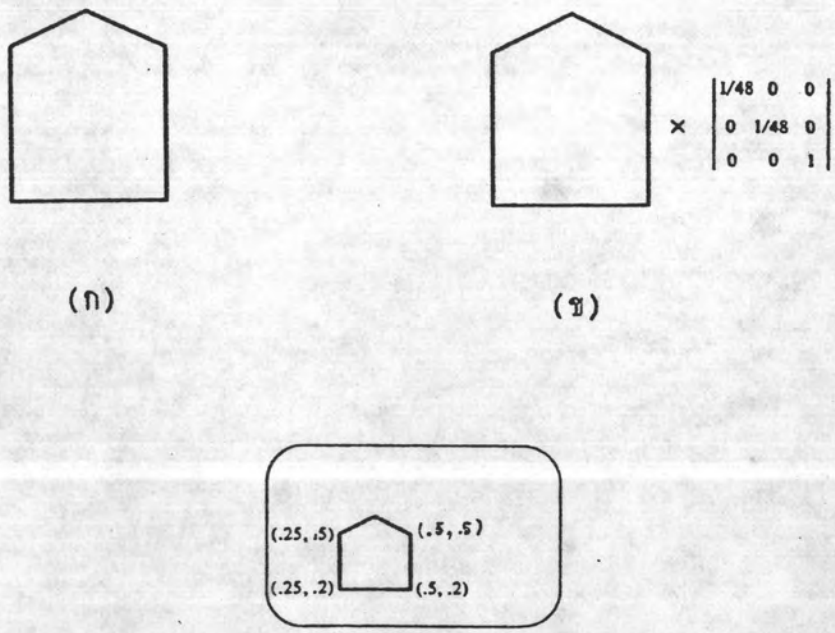
แต่ถ้ารูปหลายเหลี่ยมนั้นมีลักษณะปิด ระบายสีพื้นเต็ม ดังรูปที่ 2.28 หลังจากทำการตัดบางส่วนของภาพออกไปแล้ว ภาพที่เหลือยังคงเป็นภาพรูปปิดหลายเหลี่ยมเหมือนเดิม ดังรูปที่ 2.28



รูปที่ 2.28 แสดงการตัดบางส่วนของภาพที่มีลักษณะเป็นรูปหลายเหลี่ยมปิด

2.2.7 ช่วงมองภาพและช่วงแสดงภาพ (Windowing and Viewport)

ภาพในโลกทัศน์มีขนาดต่างๆ มาก เพื่อที่ให้สามารถมองเห็นทั้งภาพ จำเป็นต้องจำกัดขนาดภาพที่สามารถมองเห็นได้ ในกรณีที่ภาพมีขนาดใหญ่เกินไป จะมองเห็นเฉพาะบางส่วนของภาพเท่านั้น ซึ่งเฉพาะส่วนของภาพที่สามารถมองเห็นได้นี้ เรียกว่า ช่วงมองภาพ และเมื่อต้องการนำภาพที่เห็นได้มาแสดงบนจอภาพ สามารถกำหนดขนาดของภาพและตำแหน่งของภาพบนจอภาพ โดยอาศัยวิธีการ การตัดภาพ การเลื่อนภาพ การย่อ หรือการขยายภาพ ฯลฯ เพื่อให้ภาพที่ต้องการยังคงรูปร่าง และอยู่ในกรอบพื้นที่กำหนดไว้บนจอภาพ กรอบพื้นที่กำหนดบนจอภาพนี้เรียกว่า ช่วงแสดงภาพ



(ก) (ข)

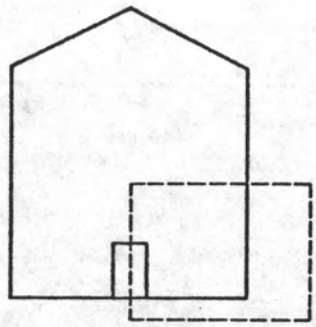
(ค)

รูปที่ 2.29 แสดงขั้นตอนการแสดงภาพจากโลกทัศน์มาแสดงบนจอภาพทั้งภาพ

ก. ภาพวัตถุ เท่าขนาดจริงในโลกทัศน์

ข. ย่อภาพเพื่อให้มีขนาดเหมาะสมบนจอภาพ

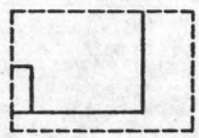
ค. แสดงภาพวัตถุบนจอภาพ



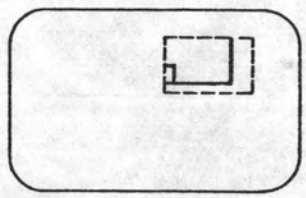
(ก)

ช่วงมองภาพ

ภาพวัตถุ



(ข)



ช่วงแสดงภาพ (ค)

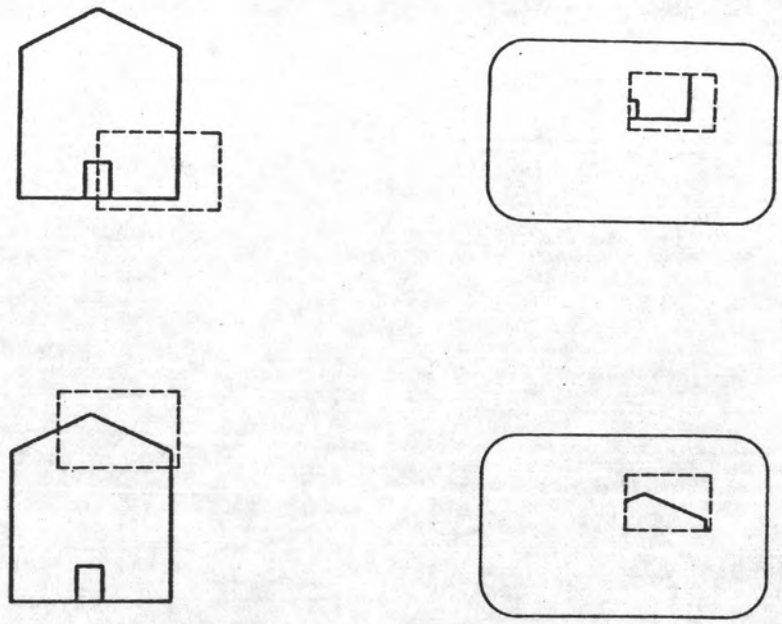
จอภาพ

รูปที่ 2.30 แสดงขั้นตอนการแสดงภาพจากโลกทัศน์มาแสดงบนจอภาพ

ก. กำหนดช่วงมองภาพ

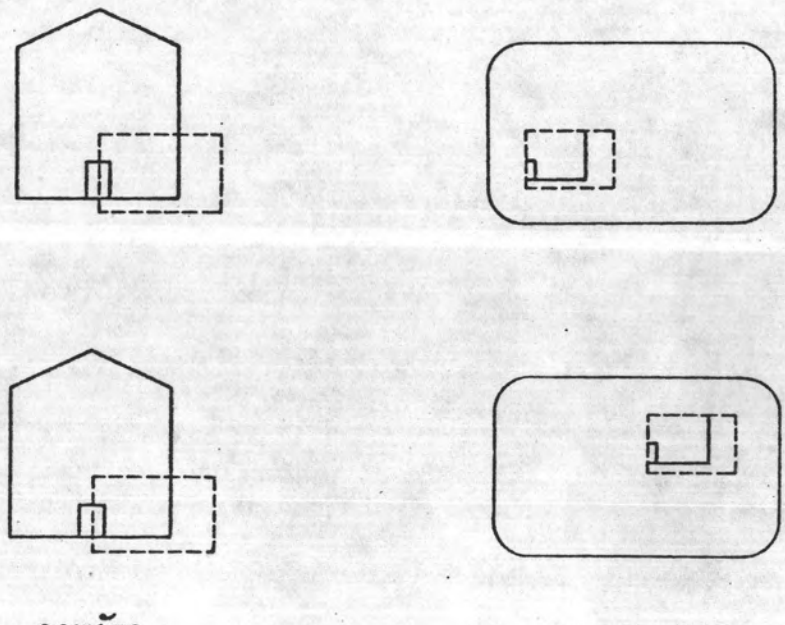
ข. ภาพวัตถุที่ได้หลังจากกำหนดช่วงมองภาพ

ค. แสดงภาพในเขตช่วงแสดงภาพที่กำหนดบนจอภาพ



ภาพวัตถุ จอภาพ

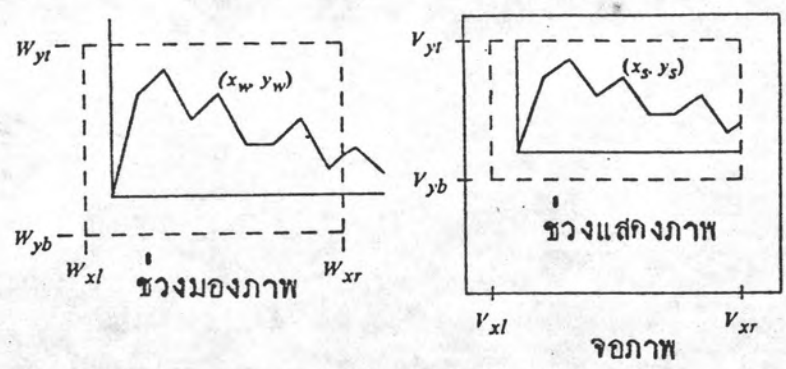
รูปที่ 2.31 แสดงการกำหนดตำแหน่งช่วงมองภาพต่างกัน แต่กำหนดตำแหน่งช่วงแสดงภาพบนจอภาพที่เดียวกัน



ภาพวัตถุ จอภาพ

รูปที่ 2.32 แสดงการกำหนดตำแหน่งช่วงมองภาพที่เดียวกัน แต่กำหนดตำแหน่งช่วงแสดงภาพบนจอภาพต่างกัน

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



W_{yt} = ขอบของช่วงมองภาพในโลกทัศน์ด้าน บน ตามแนวแกน Y

W_{yb} = ขอบของช่วงมองภาพในโลกทัศน์ด้าน ล่าง ตามแนวแกน Y

W_{xl} = ขอบของช่วงมองภาพในโลกทัศน์ด้าน ซ้าย ตามแนวแกน X

W_{xr} = ขอบของช่วงมองภาพในโลกทัศน์ด้าน ขวา ตามแนวแกน X

V_{yt} = ขอบของช่วงแสดงภาพบนจอภาพด้าน บน ตามแนวแกน Y

V_{yb} = ขอบของช่วงแสดงภาพบนจอภาพด้าน ล่าง ตามแนวแกน Y

V_{xl} = ขอบของช่วงแสดงภาพบนจอภาพด้าน ซ้าย ตามแนวแกน X

V_{xr} = ขอบของช่วงแสดงภาพบนจอภาพด้าน ขวา ตามแนวแกน X

X_w = จุดพิกัด X ของภาพในโลกทัศน์

Y_w = จุดพิกัด Y ของภาพในโลกทัศน์

X_s = จุดพิกัด X ของภาพบนจอภาพ

Y_s = จุดพิกัด Y ของภาพบนจอภาพ

รูปที่ 2.33 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างช่วงมองภาพและช่วงแสดงภาพ

1 10295781

ขั้นตอน การนำภาพจากช่วงมองภาพมาแสดง ในช่วงแสดงภาพบนจอภาพ มีดังนี้

ก. กำหนดช่วงมองภาพ เพื่อให้ได้ภาพที่จะแสดงบนจอภาพตามต้องการ ในขั้นตอนนี้อาจมีทั้งการตัดภาพ การเลื่อนภาพ การขยายภาพ ฯลฯ

ข. กำหนดขอบเขตช่วงแสดงภาพบนจอภาพ

ค. แปลงรูปจากจุดพิกัดของภาพในโลกทัศน์ (X_w, Y_w) ให้เป็นจุดพิกัดจอภาพ (X_s, Y_s) ในลักษณะการจับคู่แบบหนึ่งต่อหนึ่ง

$$X_s = \frac{V_{xr} - V_{xl}}{W_{xr} - W_{xl}} (X_w - W_{xl}) + V_{xl}$$

$$Y_s = \frac{V_{yt} - V_{yb}}{W_{yt} - W_{yb}} (Y_w - W_{yb}) + V_{yb}$$

สามารถเขียนนิพจน์ให้อยู่ในรูปใหม่ ดังนี้

$$X_s = aX_w + b$$

$$Y_s = cY_w + d$$

2.3 ภาพวัตถุ 3 มิติ

การแสดงภาพบนจอภาพ ให้เป็นภาพวัตถุ 3 มิติ สิ่งพื้นฐานที่ควรทราบมีดังนี้

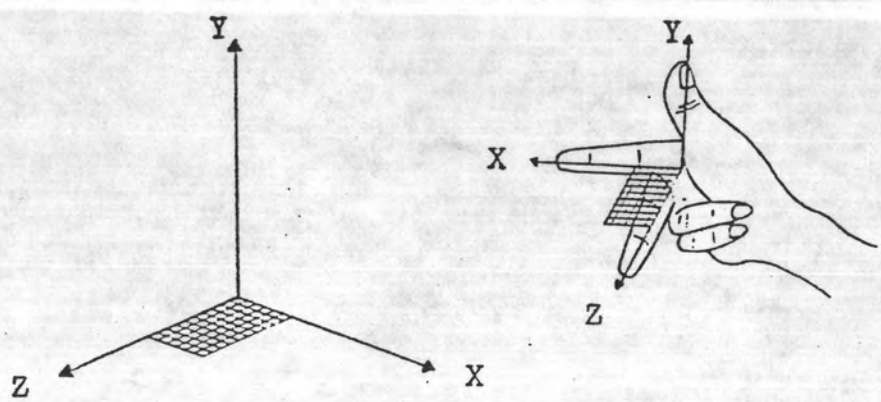
2.3.1 ระบบพิกัด

การสร้างภาพวัตถุ 3 มิติ จำเป็นต้องอาศัยระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian Co-ordinate) โดยมีแกน X แกน Y และแกน Z ตั้งฉากซึ่งกันและกัน สามารถแสดงลักษณะแกนดังกล่าวนี้ให้ชัดเจน โดยกฎมือขวา (แสดงในรูปที่ 2.34) และในการอ้างถึงจุดพิกัดใดๆ ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน จะต้องอ้างอยู่ในรูปลำดับจุดพิกัด (X,Y,Z) เมื่อ

X คือ ค่าระยะห่างจากจุดกำเนิด (0,0,0) ถึงจุดพิกัดที่ต้องการอ้างถึง ในแนวทิศทางแกน X

Y คือ ค่าระยะห่างจากจุดกำเนิด (0,0,0) ถึงจุดพิกัดที่ต้องการอ้างถึง ในแนวทิศทางแกน Y

Z คือ ค่าระยะห่างจากจุดกำเนิด (0,0,0) ถึงจุดพิกัดที่ต้องการอ้างถึง ในแนวทิศทางแกน Z



รูปที่ 2.34 แสดงภาพระบบพิกัดคาร์ทีเซียน 3 แกน

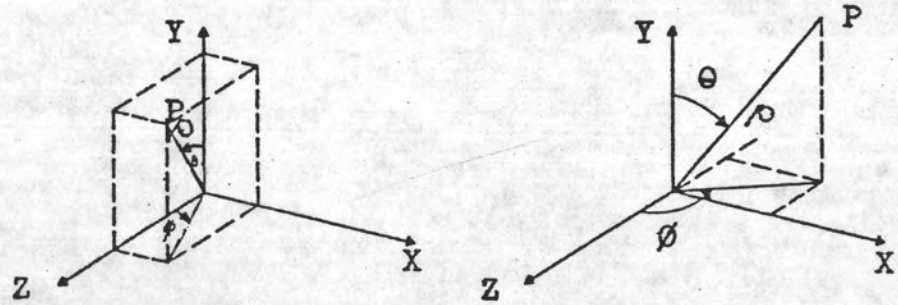
นอกจากนี้ สามารถสร้างภาพวัตถุ 3 มิติ ด้วยระบบพิกัดขั้ว (Polar Co-ordinate)(แสดงในรูปที่ 2.35) ซึ่งในระบบนี้แต่ละจุดพิกัด อ้างอยู่ในรูปลำดับจุดพิกัด (ρ,θ,ϕ) เมื่อ

ρ (อ่านว่า โรห์ (Rho)) คือ ค่าระยะห่างจากจุดกำเนิด (0,0,0) ถึงจุดพิกัดที่ต้องการอ้างถึง ในระยะทางรัศมี

ϕ (อ่านว่า ฟีห์ (Phi)) คือ ค่ามุมบวกระหว่าง $\overline{OP}$ กับแกน Z ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

θ (อ่านว่า ซีห์ตา (Theta)) คือ ค่ามุมบวกระหว่าง $\overline{OP}$ กับระนาบ XY ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

P คือ จุดสังเกตภาพ



รูปที่ 2.35 แสดงภาพระบบพิกัดขั้ว 3 แกน

และความสัมพันธ์ระหว่าง ระบบพิกัดคาร์ทีเซียนและระบบพิกัดขั้ว มีดังนี้

$$X = \rho \sin\phi \cos\theta$$

$$Y = \rho \sin\phi \sin\theta$$

$$Z = \rho \cos\theta$$

$$\rho = X^2 + Y^2 + Z^2$$

การแสดงภาพ 3 มิติ ขึ้นกับจุดสังเกตภาพเป็นสำคัญ กล่าวคือ จะต้องกำหนดจุดสังเกตภาพ หรือจุดมองภาพของ ผู้สังเกตก่อน จึงสามารถแสดงภาพ 3 มิติบนจอภาพได้ ดังรูปที่ 2.35 แสดงการกำหนดจุดพิกัดภาพวัตถุในระบบพิกัดชั้ว ให้ผู้สังเกตภาพอยู่ที่จุด P และมีจุด O เป็นจุดกำเนิด และวัดตำแหน่งของจุดสังเกตุเทียบกับแกน X แกน Y และแกน Z ใช้ค่า ρ,ϕ,θ เป็นข้อมูลในการคำนวณลักษณะรูปภาพ แต่ถ้าจุดสังเกตภาพเปลี่ยนแปลงไป ภาพที่ได้จะเปลี่ยนแปลงรูปร่างไปด้วย

2.3.2 ทรานฟอร์มเมชัน ภาพวัตถุ 3 มิติ

ทรานฟอร์มเมชั่นโดยทั่วไป กำหนดจุดพิกัดภาพวัตถุ 3 มิติแบบจุดพิกัดโฮโมจีเนียส และในการแสดงรูปแบบทรานฟอร์มเมชั่นจะเขียนแทนด้วยเมตริกซ์ขนาด 4x4 ลักษณะทรานฟอร์มเมชั่นที่สำคัญ คือ

ก. การเลื่อนภาพ

ในการเลื่อนภาพจากจุดพิกัด (X,Y,Z) เดิม ไปยังจุดพิกัดตำแหน่งใหม่ เป็นระยะทางเวคเตอร์ (H,K,L) สามารถเขียนแทนด้วยเมตริกซ์ ดังนี้

$$(X',Y',Z',1) = \begin{bmatrix} X & Y & Z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ H & K & L & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} X+H & Y+K & Z+L & 1 \end{bmatrix}$$

ข. การขยายภาพ

รูปทั่วไปของการขยายภาพ ใช้ไดอะโกนอลเมตริกซ์ (Diagonal Matrix) มีรูปดังนี้

$$(X',Y',Z',1) = \begin{bmatrix} X & Y & Z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} AX & BY & CZ & 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งแต่ละค่า A,B,C แทนค่าสัมประสิทธิ์ของการขยายภาพในแต่ละแกน X,Y,Z ตามลำดับ

ถ้าเป็นการขยายภาพแบบทั้งหมดรูปภาพ ดังนั้น ค่า A = B = C = K มีรูปเมทริกซ์ ดังนี้

$$(X',Y',Z',1) = \begin{bmatrix} X & Y & Z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} KX & KY & KZ & 1 \end{bmatrix}$$

แต่เนื่องจาก จุดพิกัดที่เขียนอยู่ในรูปพิกัดโฮโมจีเนียส สามารถเปลี่ยนรูปจาก (X,Y,Z,D) ให้เป็นรูป (X/D,Y/D,Z/D,1)ดังนั้น การขยายภาพแบบทั้งภาพ มีรูปทั่วไปดังนี้

$$(X',Y',Z',1) = \begin{bmatrix} X & Y & Z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/K \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} X & Y & Z & 1/K \end{bmatrix}$$

โดยที่ K คือขนาดของสัมประสิทธิ์ของการขยายภาพ

ค. การหมุนภาพ

จากการหมุนภาพ(ในหัวข้อ 2.2.2 ข.) มีเมตริกซ์การหมุนภาพรอบจุดกำเนิดในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน 2 แกน ด้วยมุม θ แบบทวนเข็มนาฬิกา ดังนี้

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อพิจารณาภาพในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน 3 แกน โดยให้แกน Z ชี้จากระนาบ XY ตรงมายังผู้สังเกต ดังนั้นการหมุนภาพจึงเสมือนการหมุนภาพรอบแกน Z เขียนแทนด้วยเมตริกซ์มีรูปดังนี้

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ในทำนองเดียวกัน การหมุนภาพรอบแกน X เขียนแทนด้วยรูปเมตริกซ์ ดังนี้

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ในทำนองเดียวกัน การหมุนภาพรอบแกน Y เขียนแทนด้วยรูปเมตริกซ์ ดังนี้

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งทั้งหมดนี้ เป็นการหมุนภาพในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา เป็นมุม θ ผู้สังเกตอยู่ที่พิกัดตำแหน่งด้านบวกหันเข้าหาจุดกำเนิด (0,0,0)

ง. การสะท้อนภาพ

การสะท้อนภาพกับระนาบใดระนาบหนึ่ง หมายถึงการจำลองภาพนั้นอีกภาพหนึ่ง ในทิศทางตรงข้ามกับระนาบนั้น เช่น ถ้าต้องการสะท้อนจุดพิกัด (X,Y,Z) กับระนาบ XY จุดพิกัดใหม่ที่ได้คือ (X,Y,-Z)

ดังนั้น รูปเมตริกซ์ที่ใช้แสดงการสะท้อนภาพ จึงทำหน้าที่เสมือนเป็นผู้เปลี่ยนเครื่องหมายสมาชิกลำดับของจุดพิกัด ที่สมนัยกับระนาบที่สะท้อนนั้น มีรูปดังต่อไปนี้

ง.1 รูปเมตริกซ์แสดงการสะท้อนภาพกับระนาบ XY

$$M_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ง.2 รูปเมตริกซ์แสดงการสะท้อนภาพกับระนาบ YZ

$$M_{yz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

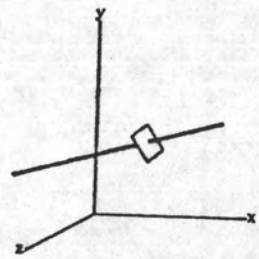
ง.3 รูปเมตริกซ์แสดงการสะท้อนภาพกับระนาบ XZ

$$M_{xz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

๖. ทรานฟอร์มเมชั่นแบบทั่วไป

กรณีการหมุนภาพรอบแกนใดๆ มีขนาดมุม θ องศา ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา มีขั้นตอนดังนี้

๖.1 กำหนดแกนของภาพ ที่ต้องการหมุนภาพรอบแกนนั้น



หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รูปที่ 2.36 แสดงภาพการกำหนดแกนภาพ

จากรูป กำหนดให้สมการเส้นตรงนี้มีรูปแบบสมการพาราเมตริกซ์ (Parametric Equation) ดังนี้

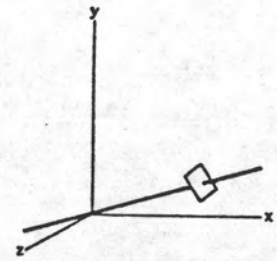
$$X = AU + X_1$$

$$Y = BU + Y_1$$

$$Z = CU + Z_1$$

ซึ่งมีคุณสมบัติ คือ มีจุด (X_1, Y_1, Z_1) อยู่บนสมการเส้นตรงนี้ และทิศทางของเส้นตรงนี้กำหนดโดยเวคเตอร์ $\begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix}$

๖.2 เลื่อนภาพจากแกนที่กำหนด ไปยังจุดกำเนิด (0,0,0)

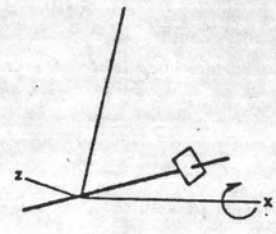


รูปที่ 2.37 แสดงภาพการเลื่อนภาพจากแกนที่กำหนด ไปยังจุดกำเนิด

มีรูปเมตริกซ์ ดังนี้

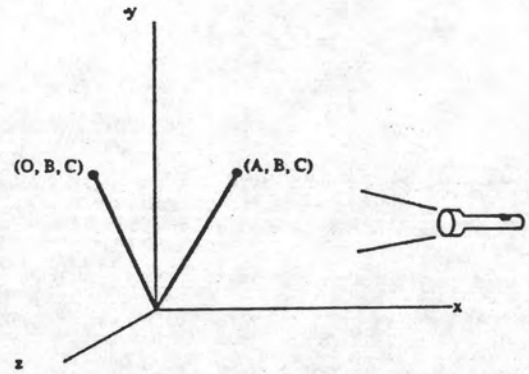
$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -X_1 & -Y_1 & -Z_1 & 1 \end{bmatrix}$$

จ.3 หมุนภาพรอบแกน X จนกระทั่งแกนที่กำหนด อยู่บนระนาบ XZ



รูปที่ 2.38 แสดงภาพการหมุนภาพรอบแกน X ด้วยมุม I

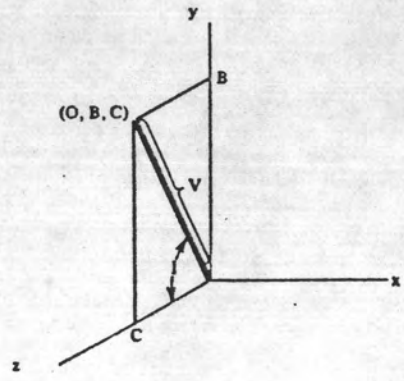
ในการกำหนดมุมที่หมุนรอบแกน X เพื่อที่ให้แกนที่กำหนดปรากฏอยู่บนระนาบ XZ นั้น จะพิจารณาจากทิศทางของเวคเตอร์จากจุดกำเนิด (0,0,0) ถึงจุดที่ภาพนั้นอยู่ แล้วฉายภาพเวคเตอร์นี้ไปบนระนาบ YZ ดังรูปที่ 2.39



รูปที่ 2.39 แสดงภาพฉายของเวคเตอร์บนระนาบ XZ

ผลจากการฉายภาพ มีเงาเกิดขึ้นที่ระนาบ YZ คือ เส้นตรงระหว่างจุด (0,0,0) และจุด (0,B,C)

ถ้าต้องการหมุนแกนที่กำหนด ให้อยู่บนระนาบ XZ มีความหมายในทำนองเดียวกับหมุนเงาของเส้นตรงระหว่างจุด (0,0,0) และจุด (0,B,C) ให้อยู่บนระนาบ XZ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า หมุนภาพเงาเส้นตรงระหว่างจุด (0,0,0) และจุด (0,B,C) ให้ทับแกน Z พอดี ด้วยขนาดเท่ากับมุม I ดังรูปที่ 2.40



รูปที่ 2.40 แสดงภาพการกำหนดค่าบนภาพฉายเวคเตอร์

วิธีการกำหนดความกว้างของมุม I

ให้ V คือ ขนาดความยาวเงาของเส้นตรงระหว่างจุด (0,0,0) และจุด (A,B,C)

$$V = (B^2 + C^2)^{1/2}$$

และจากนิยามของ SINE และ COSINE ได้ว่า

$$\text{SIN I} = B/V$$
$$\text{COS I} = C/V$$

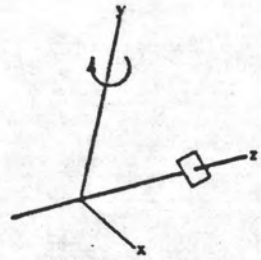
และรูปเมตริกซ์ของการหมุนรอบแกน X ด้วยขนาดของมุม I มีรูปดังนี้

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{COS I} & \text{SIN I} & 0 \\ 0 & -\text{SIN I} & \text{COS I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

หลังจากแทนค่า COS I และ SIN I ในเมตริกซ์ของการหมุนรอบแกน X มีรูปดังนี้

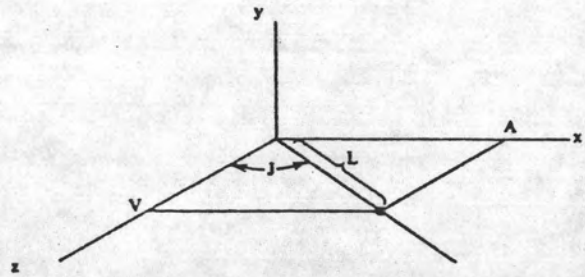
$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C/V & B/V & 0 \\ 0 & -B/V & C/V & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จ.4 หมุนภาพรอบแกน Y จนกระทั่งแกนที่กำหนด ตรงกับแกน Z



รูปที่ 2.41 แสดงภาพการหมุนภาพรอบแกน Y ด้วยมุม J

ในการกำหนดมุมที่หมุนรอบแกน Y จนกระทั่งแกนที่กำหนดตรงกับแกน Z นั้นพิจารณาจากการฉายภาพแกนลงบนระนาบ XZ



รูปที่ 2.42 แสดงภาพการกำหนดค่าบนภาพฉายเวคเตอร์บนระนาบ XZ

จากภาพ ความยาวเงา L ที่เกิดจากการฉายภาพ คือ

$$L = (A^2 + B^2 + C^2)^{1/2}$$

แต่เนื่องจาก ความยาวของเงา L และความยาวเงา V เท่ากันเสมอ ดังนั้น

$$(L^2 - A^2)^{1/2} = (B^2 + C^2)^{1/2}$$
$$= V$$

และหมุนภาพรอบแกน Y เป็นมุม J องศา เพื่อให้เส้นที่กำหนดทับกับแกน Z

จากกฎของ SINE และ COSINE

$$\text{SIN } J = A/L$$
$$\text{COS } J = V/L$$

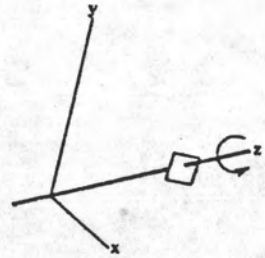
ดังนั้น รูปเมตริกซ์ของการหมุนรอบแกน Y ด้วยขนาดของมุม J มีรูปดังนี้

$$R_y = \begin{bmatrix} \text{COS } J & 0 & \text{SIN } J & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{SIN } J & 0 & \text{COS } J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

หลังจากแทนค่า SINE และ COSINE ในเมตริกซ์ของการหมุนรอบแกน Y มีรูปดังนี้

$$R_y = \begin{bmatrix} V/L & 0 & A/L & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -A/L & 0 & V/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

๓.5 หมุนภาพรอบแกนที่กำหนด เป็นมุม θ องศา แต่เนื่องจากขณะนี้แกนที่กำหนดตรงกันกับแกน Z ดังนั้นจึงเสมือนกับหมุนภาพรอบแกน Z เป็นมุม θ องศา

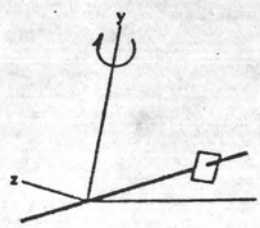


รูปที่ 2.43 แสดงภาพการหมุนภาพรอบแกนที่กำหนด ด้วยมุม θ

มีรูปเมตริกซ์ ดังนี้

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จ.6 หมุนภาพรอบแกน Y ย้อนกลับยังจุดเดิม เป็นมุม -J องศา (ย้อนทรงข้ามกับ จ.4)

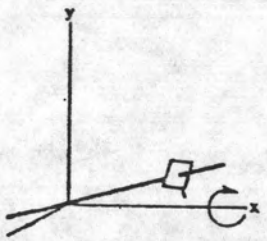


รูปที่ 2.44 แสดงภาพการหมุนภาพรอบแกน Y ด้วยมุม -J

มีรูปเมทริกซ์ ดังนี้

$$R_y^{-1} = \begin{bmatrix} V/L & 0 & -A/L & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ A/L & 0 & V/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จ.7 หมุนภาพรอบแกน X ย้อนกลับยังจุดเดิม เป็นมุม -I องศา (ย้อนทรงข้ามกับ จ.3)

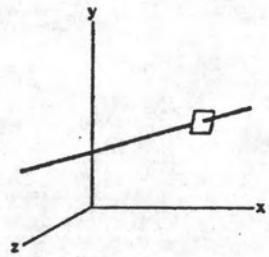


รูปที่ 2.45 แสดงภาพการหมุนภาพรอบแกน X ด้วยมุม -I

มีรูปเมทริกซ์ ดังนี้

$$R_x^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C/V & -B/V & 0 \\ 0 & B/V & C/V & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จ.8 เลื่อนภาพจากจุดกำเนิด ไปยังจุดพิกัด (X_1, Y_1, Z_1)เดิม (ย้อนตรงข้ามกับ จ.2)



รูปที่ 2.46 แสดงการเลื่อนภาพจากจุดกำเนิดไปยังจุดพิกัดตำแหน่งเดิม

มีรูปเมตริกซ์ ดังนี้

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 \end{bmatrix}$$

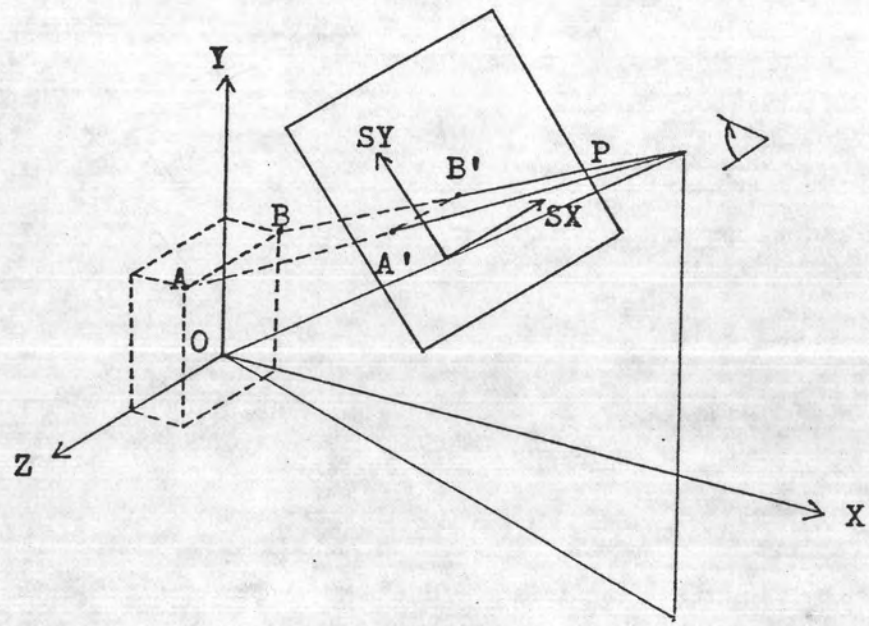
ดังนั้น รูปเมตริกซ์การหมุนภาพรอบแกนใดๆ มีขนาดมุม θ องศา ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา คือ

$$R_\theta = TR_xR_yR_zR_y^{-1}R_x^{-1}T^{-1}$$

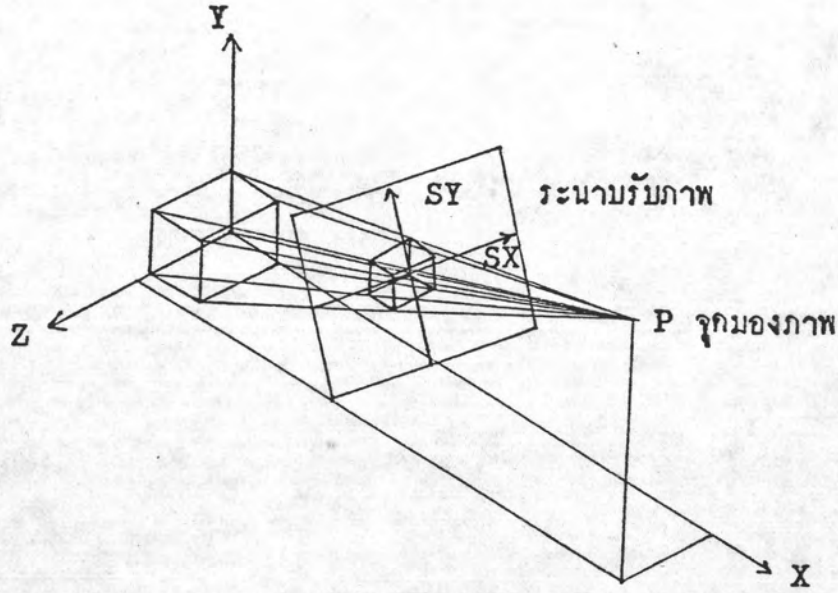
2.4 ความสัมพันธ์ระหว่างภาพ 2 มิติและภาพวัตถุ 3 มิติ

ภาพวัตถุที่แสดงบนจอภาพ เกิดจากการฉายภาพจากจุดพิกัดของภาพวัตถุ 3 มิติ ลงบนระนาบรับภาพ แล้วจึงนำระนาบรับภาพนั้นมาแสดงบนจอภาพ (หรืออาจกล่าวว่า จอภาพ คือระนาบรับภาพ) ดังรูปที่ 2.47 และรูปที่ 2.48 แสดงให้เห็นว่า จุดพิกัด (X,Y,Z) ของภาพวัตถุ 3 มิติ ถูกฉายภาพมาแสดงเป็นจุดพิกัด (S_x, S_y) ของภาพ 2 มิติ บนระนาบรับภาพแบบจุดต่อจุด โดยที่

จุด P คือ จุดมองภาพ
เส้น OP คือ เส้นที่ลากระหว่างจุดมองภาพ P และจุดกำเนิด (0,0,0) และมีคุณสมบัติตั้งฉากกับระนาบรับภาพ
ระยะ D คือ ระยะห่างระหว่างจุดมองภาพ P กับระนาบรับภาพ



รูปที่ 2.47 แสดงการมองภาพวัตถุในระบบพิกัด 3 แกน ผ่านระนาบรับภาพในระบบพิกัด 2 แกน

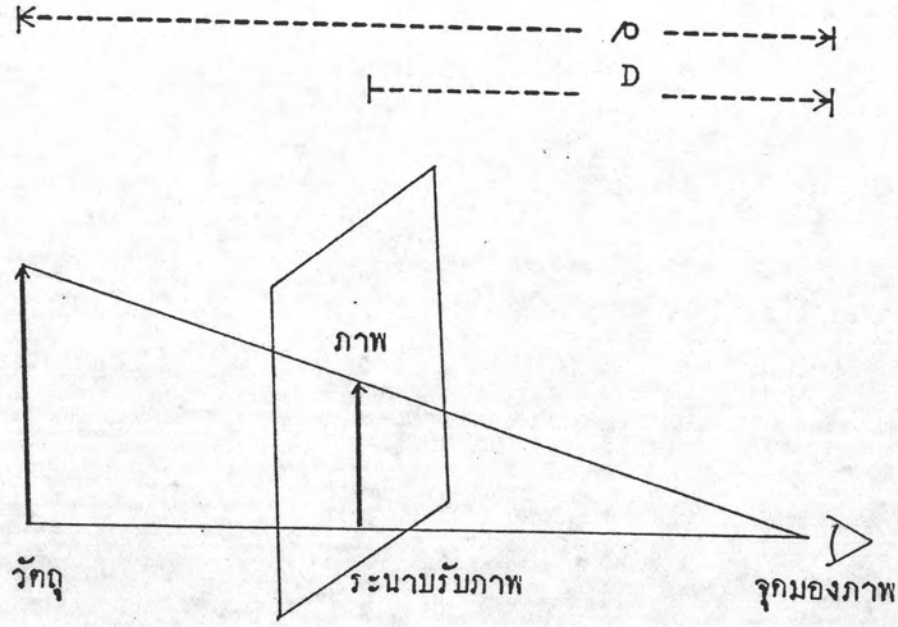


รูปที่ 2.48 แสดงการฉายภาพวัตถุ 3 มิติบนระนาบรับภาพ

เนื่องจากการวาดภาพบนจอภาพอาศัยการฉายภาพบนระนาบรับภาพเป็นสำคัญ ดังนั้น สามารถควบคุมขนาดของภาพบนระนาบรับภาพได้ โดยการควบคุมระยะห่างระหว่างจุดมองภาพกับระนาบรับภาพ ซึ่งเมื่อเลื่อนระนาบรับภาพเข้าใกล้จุดมองภาพ จะทำให้ขนาดภาพบนระนาบรับภาพมีขนาดเล็กลง และเมื่อเลื่อนระนาบรับภาพห่างจากจุดมองภาพออกไป ทำให้ขนาดของภาพบนระนาบรับภาพมีขนาดใหญ่ขึ้น

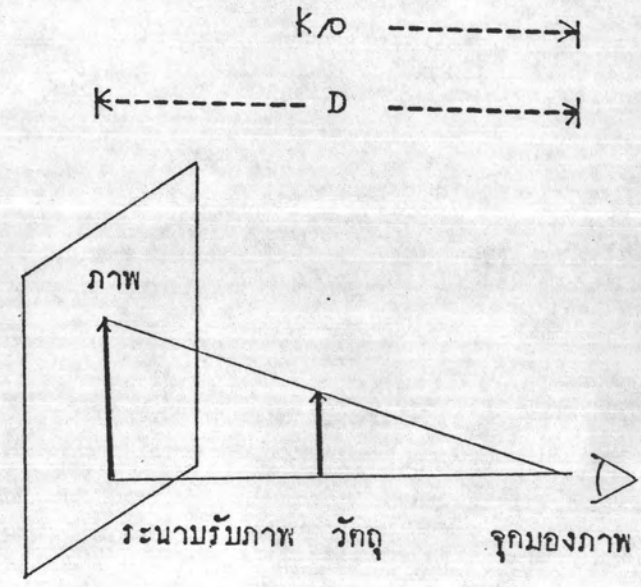
กำหนดให้ D คือ ระยะห่างระหว่างจุดมองภาพ P กับระนาบรับภาพ

ρ คือ ระยะห่างระหว่างจุดมองภาพ P กับตำแหน่งวัตถุ



รูปที่ 2.49 แสดงขนาดภาพเปรียบเทียบกับขนาดวัตถุ เมื่อตำแหน่งระนาบรับภาพอยู่ระหว่าง จุดมองภาพและวัตถุ

(D < ƒ)

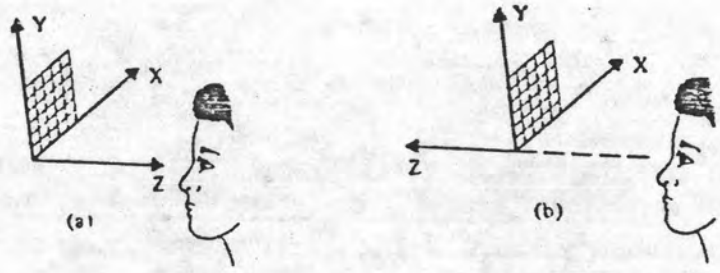


รูปที่ 2.50 แสดงขนาดภาพเปรียบเทียบกับขนาดวัตถุ เมื่อตำแหน่งวัตถุอยู่ระหว่าง จุดมองภาพและระนาบรับภาพ

(D > ƒ)

2.4.1 การแปลงภาพวัตถุในระบบพิกัด 3 แกน ให้เป็นภาพวัตถุในระบบ 2 แกน

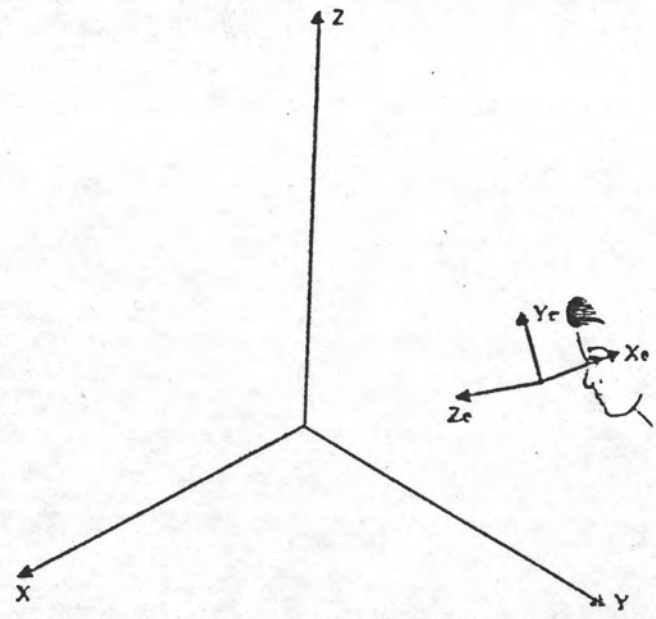
การสร้างรูปภาพจำลองวัตถุจริงในระบบพิกัด 3 แกน ผู้สร้างจะต้องกำหนดจุดพิกัด ในรูปลำดับจุดพิกัด (X,Y,Z) หรือรูปลำดับจุดพิกัด (ρ,θ,ϕ) ซึ่งแสดงไว้ในรูปที่ 2.34 และรูปที่ 2.35 แต่ภาพวัตถุเหล่านั้นถ้ามองโดยใช้ระนาบระบบพิกัด 3 แกน พบว่า ระนาบ XY ที่มีแกน Z ตั้งฉากอยู่นั้น แกน Z จะชี้ตรงมายังจุดมองภาพ



รูปที่ 2.51 แสดงภาพการมองวัตถุในระบบพิกัด 3 แกน

ทั้งนี้เนื่องจาก ภาพบนจอภาพแสดงในระบบพิกัด 2 แกน (คือ แกน X และแกน Y) ดังนั้น จุดมองภาพจึงลอยอยู่เหนือระนาบ XY และเมื่อเปรียบเทียบภาพวัตถุในระบบพิกัด 3 แกน กับการมองภาพวัตถุบนจอภาพในระบบพิกัด 2 แกน พบว่าแกน Z มีทิศทางชี้ออกจากจุดมองภาพไปยังจุดกำเนิด เมื่อกลับทิศทางการชี้ของแกน Z ให้ชี้ไปในทิศตรงข้าม จะได้ว่าแกน Z เป็นแกนแสดงความลึกของภาพ เมื่อภาพวัตถุนั้นแสดงความหนาของวัตถุ

ดังนั้น ทิศทางการมองภาพจึงเสมือนกับการแสดงภาพในระบบพิกัดแบบใหม่ โดยให้ที่ตำแหน่งจุดมองภาพ เป็นจุดกำเนิดระบบพิกัดใหม่ (X_e,Y_e,Z_e) เรียกระบบพิกัดนี้ว่า ระบบพิกัดการมอง(Eye Co-ordinate System) มีคุณสมบัติ คือ ทิศทางของ Z_e ชี้ในทิศทางของเส้นสายตาของผู้มอง ตรงไปยังจุดกำเนิด (0,0,0) ทิศทางของแกน X_e ชี้ไปทางขวา และแกน Y_e ชี้ขึ้นบน

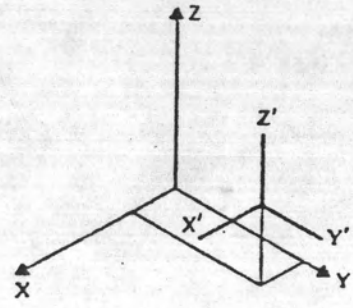


รูปที่ 2.52 แสดงภาพเปรียบเทียบระหว่างระบบพิกัด 3 แกน และระบบพิกัดการมอง

การเขียนภาพวัตถุในระบบพิกัด 3 แกน ให้เป็นภาพวัตถุในระบบพิกัด 2 แกนบนจอภาพ มีขั้นตอนที่สำคัญ ดังนี้

ก. เปลี่ยนจุดพิกัด (X,Y,Z) ในระบบพิกัด 3 แกน ให้เป็นจุดพิกัด (X_e,Y_e,Z_e) ในระบบพิกัดการมอง แบบจุดต่อจุด มีลำดับการทำงาน 4 ขั้นตอน คือ

ก.1 เลื่อนภาพจากจุดกำเนิด (0,0,0) ไปยังจุดมองภาพ P (X,Y,Z)



รูปที่ 2.53 แสดงภาพการเลื่อนภาพจากจุดกำเนิดไปยังจุดมองภาพ

มีรูปเมทริกซ์ คือ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -X & -Y & -Z & 1 \end{bmatrix}$$

(สังเกตพบว่า เมื่อเลื่อนภาพจากจุดกำเนิด (0,0,0) ไปยังจุดพิกัด (X,Y,Z) แต่ได้เป็นจุดพิกัด (-X,-Y,-Z) แทน เนื่องจาก การมองภาพในระบบสายตามีทิศทางกลับตรงข้ามกับระบบพิกัดแกน ของวัตถุจริง)

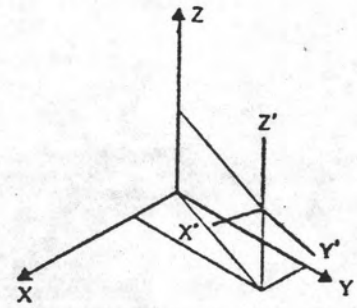
เนื่องจาก ระบบพิกัดแกน มีความสัมพันธ์กับระบบพิกัดชั้ว คือ

$$X = \rho SIN\phi COS\theta$$
$$Y = \rho SIN\phi SIN\theta$$
$$Z = \rho COS\phi$$

ดังนั้น การเลื่อนภาพจากจุดกำเนิด (0,0,0) ไปยังจุดมองภาพได้เซทของจุดพิกัดใหม่ คือ (X',Y',Z')เขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์ ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\rho SIN\phi COS\theta & -\rho SIN\phi SIN\theta & -\rho COS\phi & 1 \end{bmatrix}$$

ก.2 หมุนภาพรอบแกน Z' เป็นมุม (90 - θ) องศา ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา



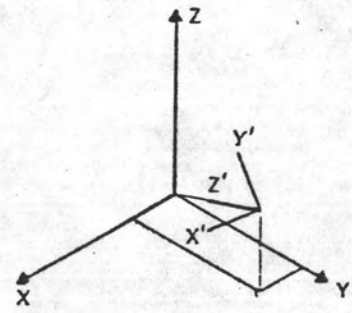
รูปที่ 2.54 แสดงการหมุนภาพรอบแกน Z เป็นมุม (90 - θ)

มีรูปเมตริกซ์ ดังนี้

$$B = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ผลการทำงาน แกน Y' ด้านลบ ตัดกับแกน Z

ก.3 หมุนภาพรอบแกน X' เป็นมุม (180 - Θ) องศา ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา



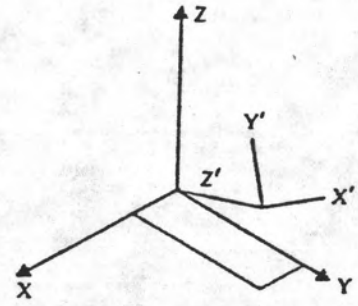
รูปที่ 2.55 แสดงการหมุนภาพรอบแกน X' เป็นมุม (180 - Θ)

มีรูปเมตริกซ์ ดังนี้

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -COS\emptyset & -SIN\emptyset & 0 \\ 0 & SIN\emptyset & -COS\emptyset & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ผลการทำงาน แกน Z' ชี้ทิศทางตรงไปยังจุดกำเนิด (0,0,0) ของระบบพิกัด 3 แกน (แกน X แกน Y และแกน Z)

ก.4 กลับทิศทางของแกน X' ไปยังทิศทางตรงข้าม



รูปที่ 2.56 แสดงภาพการหมุนกลับแกน X' ไปยังทิศตรงข้าม

มีรูปเมตริกซ์ ดังนี้

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ผลการทำงาน จุดพิกัดภาพที่ได้ เป็นไปตามระบบพิกัดการมอง หรือเป็นไปตามระบบพิกัดมือ-ซ้าย

ผลการทำงานในขั้นตอน ก. สามารถเขียนรูปลำดับการทำงานของเมตริกซ์ ดังนี้

$$(X_e, Y_e, Z_e) = (X, Y, Z)T$$

โดยที่ $T = ABCD$

$$
T = A\,B\,C\,D
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\rho\cos\theta\sin\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi & -\rho\cos\phi & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & -\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\rho\sin\phi & -\rho\cos\phi & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & -\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\rho\sin\phi & -\rho\cos\phi & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & -\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta\cos\phi & -\cos\theta\sin\phi & 0 \\ -\cos\theta & -\sin\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & -\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & -\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta\cos\phi & -\cos\theta\sin\phi & 0 \\ \cos\theta & -\sin\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & -\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & -\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta\cos\phi & -\cos\theta\sin\phi & 0 \\ \cos\theta & -\sin\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & -\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 1 \end{pmatrix}
$$

รูปที่ 2.57 แสดงภาพการรวมเมตริกซ์ของการเปลี่ยนจุดพิกัดในระบบพิกัด 3 แกน ให้เป็นจุดพิกัดในระบบพิกัดการมอง

ข. เปลี่ยนจุดพิกัด (X_e, Y_e, Z_e) ในระบบพิกัดการมอง ให้เป็นจุดพิกัด (SX, SY) ในระบบพิกัด 2 แกน บนจอภาพให้มีความสัมพันธ์กัน มีสูตรการคำนวนดังนี้

$$SX = D(X_e/Z_e)$$

$$SY = D(Y_e/Z_e)$$

เมื่อ D คือ ระยะชดัระหว่างระนาบรับภาพกับจุดมองภาพ (รายละเอียดแสดงในภาคผนวก ง.)