บทที่ 5

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของกระบวนการที่ใช้ในการทดลอง

ในบทนี้กล่าวถึงแบบจำลองคณิตศาสตร์ของกระบวนการที่ใช้ในการทดลองซึ่งได้แก่ ถังที่มีของเหลวไหลตามแรงโน้มถ่วง (gravity flow tank) และ เครื่องปฏิกรณ์ถังกวนแบบต่อเนื่อง (CSTR) ซึ่งกระบวนการทั้งสองเป็นกระบวนการแบบไม่เชิงเส้น

5.1 ถังที่มีของเหลวไหลตามแรงโน้มถ่วง (Gravity flow tank)

กระบวนการที่ใช้ศึกษาในงานวิจัยนี้เป็นระบบควบคุมระดับน้ำในถังซึ่งเป็นการไหลตามแรงโน้มถ่วง (Luyben, 1989) กระบวนการนี้ประกอบด้วยถังที่บรรจุของเหลวที่มีความหนาแน่นคงที่ โดยมีของเหลวไหลเข้าสู่ถังด้วยอัตราการไหล F_O (ft^3/s) ซึ่งมีค่าอัตราการไหลที่ไม่เปลี่ยนไปตามเวลา ระดับของเหลวในถังทรงกระบอกเป็น h (ft) และของเหลวไหลออกจากถังด้วยอัตราการไหล F (ft^3/s) (ดูรูปที่ 5.1) เหตุผลในการเลือกกระบวนการนี้เนื่องจากเป็นกระบวนการแบบไม่เชิงเส้น เพื่อนำมาทดสอบกับตัวควบคุมจากข่ายงานนิวรัล การแก้สมการของระบบดังกล่าว เป็นการประยุกต์สมการการเคลื่อนที่ (equation of motion) มาใช้กับระบบ

มาโครสโคปิค (macroscopic) โดยกำหนดให้ความยาวท่อขาออกเป็น L (ft) พื้นที่หน้าตัดของท่อเป็น A_p (ft) และพื้นที่หน้าตัดของถังเป็น A_T (ft)

สมมติให้การไหลของของเหลวเป็นแบบลูกสูบ (plug flow) นั่นคือของเหลวเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเท่ากัน สมการของแรงที่เกี่ยวข้องแสดงดังนี้

$$\text{Hydraulic force} = A_p \rho h \frac{g}{g_c} \tag{5.1}$$

$$\text{Friction force} = K_F L v^2 \tag{5.2}$$

ทำการสมดุลของแรงของของเหลวทางขาออกสามารถจัดให้อยู่ในรูปสมการอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นได้ดังนี้

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{L} h - \frac{K_F g_c v^2}{\rho A_p} \tag{5.3}$$

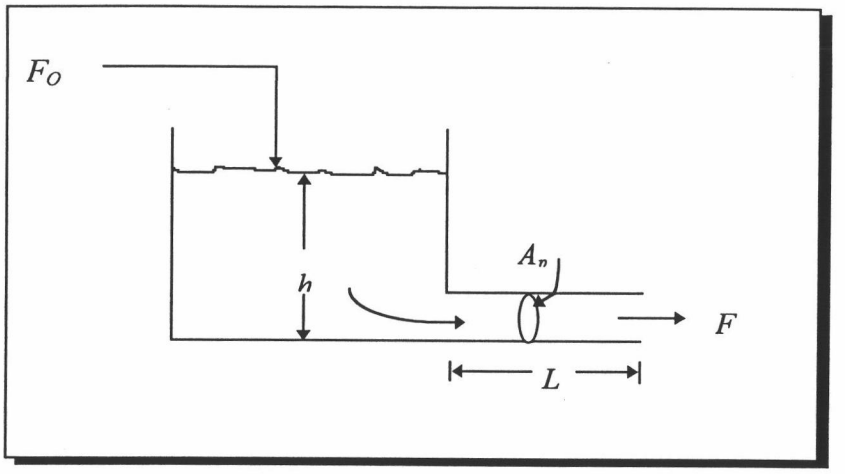
สมการต่อเนื่องรวม (total continuity equation) ของของเหลวในถังแทนด้วยสมการ

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A_T}(F_o - F) \tag{5.4}$$

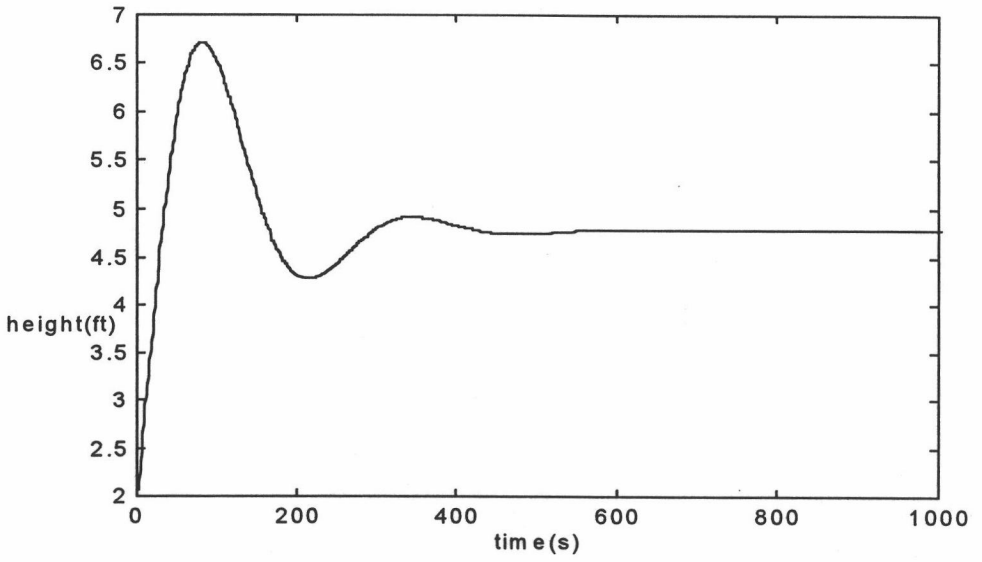
จากข้อมูลการไหลแสดงดังตารางที่ 5.1 ซึ่งกำหนดค่าคงที่และพารามิเตอร์ของระบบ สามารถแปลงสมการอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปเชิงตัวเลขดังนี้

$$\frac{dv}{dt} = 0.0107h - 0.00205v^2 \tag{5.5}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{F_o}{113} - 0.0624v \tag{5.6}$$



รูปที่ 5.1 ถังที่มีของเหลวไหลตามแรงโน้มถ่วง (Luyben, 1989, p2)



รูปที่ 5.2 การตอบสนองของกระบวนการการไหลของของเหลวจากถังตามแรงโน้มถ่วง (Luyben, 1989, p.117)

ตารางที่ 5.1 ข้อมูลสำหรับถังที่มีของเหลวไหลตามแรงโน้มถ่วง (Luyben, 1989, p.117)

NO.	ตัวแปร	คำอธิบาย	สภาวะ	หน่วย
1	ID_p	เส้นผ่าศูนย์กลางของท่อ	3	ft
2	A_p	พื้นที่หน้าตัดของท่อ	7.06	ft^2
3	L	ความยาวของท่อ	3000	ft
4	ID_T	เส้นผ่าศูนย์กลางของถัง	100	l/min.
5	A_T	พื้นที่หน้าตัดของถัง	113	ft^2.
6	h	ความสูงของระดับของเหลวในถัง	แปรผัน	ft
7	F	อัตราการไหลของเหลวขาออก	35.1	ft^3/s
8	F_o	อัตราการไหลของเหลวขาเข้า	35.1	ft^3/s
9	v	ความเร็วของเหลวขาออก	4.97	ft/s

ในกระบวนการนี้สมมติให้ของเหลวที่ใช้เป็นน้ำ โดยมีค่าที่สภาวะคงตัวคือ อัตราการไหลขาออก, $\overline{F}$ =35.1 ft3/s ความสูงของถัง, $\overline{h}$ = 4.72 ft และความเร็วของน้ำขาออก, $\overline{v}$= 4.97 โดยมีค่า Renold number = 1,380,000 แก้สมการอนุพันธ์ของกระบวนการนี้โดยใช้วิธีรังกัตตา (runge kutta method) สภาวะในการปฏิบัติการแสดงดังตารางที่ 5.1 ค่าการตอบสนองของระบบแสดงได้ดังรูปที่ 5.2 โดยการใส่ค่าอินพุทแบบสเต็พแล้วสังเกตการเปลี่ยนแปลงระดับความสูงในถัง ในการหาข้อมูลเพื่อนำมาใช้ในข่ายงานนิวรัลทำได้โดยการเปลี่ยนค่าอัตราการไหลของของเหลวขาเข้า, F_O แล้วแก้สมการ (5.5) และ (5.6) เพื่อหาค่า h ที่สอดคล้องกับค่า F_O

5.2 เครื่องปฏิกรณ์ถังกวนแบบต่อเนื่อง (CSTR)

กระบวนการที่สองนี้เป็นระบบการควบคุมความเข้มข้นของสาร A, C_A ที่แสดงการเกิดปฏิกริยาคายความร้อนแบบไม่ย้อนกลับ (irreversible exothermic reaction) ซึ่งทำให้อุณหภูมิของระบบมีการเปลี่ยนแปลงไปตามเวลาซึ่งแสดงในรูปที่ 5.3 (Nahas, 1992) เหตุผลในการเลือกกระบวนการนี้เนื่องจากเป็นกระบวนการแบบไม่เชิงเส้นอย่างมาก (highly nonlinear) ซึ่งเหมาะสมที่จะนำไปทดสอบตัวควบคุมที่สร้างขึ้น ปฏิกริยาเคมีในระบบเกิดจากสารตั้งต้น A เปลี่ยนไปเป็นผลิตภัณฑ์ B ซึ่งให้ค่าความร้อนของการเกิดปฏิกริยา (heat of reaction, ΔH) ออกมา โดยสมมติว่า ความหนาแน่นของสารในระบบคงที่ และถือว่าการสูญเสียความร้อนออกจากระบบมีค่าน้อยมาก ในการระบายความร้อนที่เกิดจากปฏิกริยาเคมีนั้นใช้น้ำหล่อเย็นไหลผ่านขดลวด (cooling coil) ที่ขดรอบถังกวนโดยมี อัตราการไหลเชิงปริมาตรเป็น q_c และมีอุณหภูมิขาเข้าเป็น T_{cf} ซึ่งปริมาตรของน้ำที่ไหลเวียนในขดลวด, V_c ถือว่ามีปริมาตรคงที่ ข้อสมมติที่สำคัญคือมีการเกิดการผสมกันอย่างสมบูรณ์แบบ (perfectly mixed) ภายในถังกวนและภายในขดลวด นั่นคืออุณหภูมิภายในถังกวน, T และอุณหภูมิภายในขดลวด, T_c ในทุก ๆ จุดมีค่าเท่ากัน และถือว่าค่าความเฉื่อยเชิงความร้อน (thermal inertia) สำหรับมวลของผนังโลหะมีค่าน้อยมาก สมการที่ใช้อธิบายแบบจำลองของระบบประกอบด้วย

ก. สมการความต่อเนื่องรวมภายในถังกวน (reactor total continuity)

$$\frac{dv}{dt} = q_o - q \tag{5.7}$$

ถ้าอัตราการไหลในสายป้อนกลับผลิตภัณฑ์มีค่าเท่ากันแล้ว ($q_o = q$) มวลในถังกวนจะอยู่ในระดับคงที่

ข. สมการความต่อเนื่องขององค์ประกอบ A ในถังกวน (reactor component A continuity)

$$\frac{d(VC_A)}{dt} = q_o C_{Af} - qC_A - VkC_A \tag{5.8}$$

โดยที่อัตราการเกิดปฏิกริยาเคมีต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร คือ

$$r = kC_A \tag{5.9}$$

และสัมประสิทธิ์อัตราการเกิดปฏิกริยาเป็นไปตามความสัมพันธ์ของอารีเนียส (arrhenius reaction)

$$k = k_o \exp(-E/RT) \tag{5.10}$$

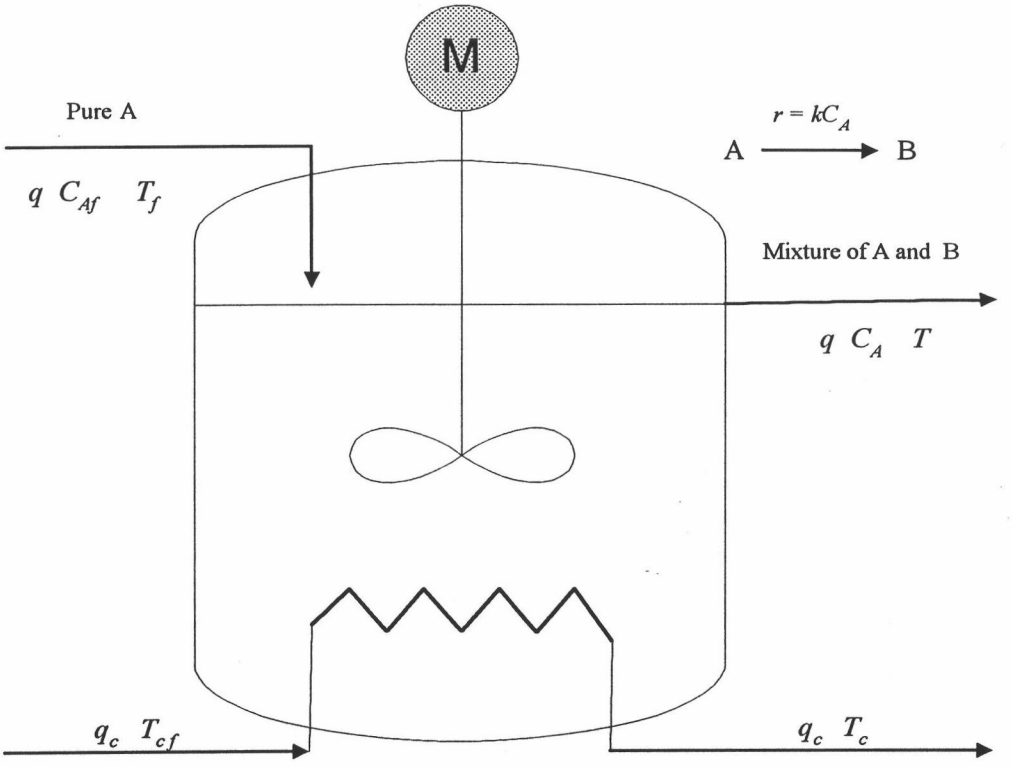
โดยมี k_o เป็นแฟคเตอร์การชน (frequency factor), E คือพลังงานกระตุ้น (activation energy), และ R เป็นค่าคงที่ของก๊าซ (gas constance)

ค. สมการสมดุลพลังงานในถังกวน (reactor energy equation)

ในที่นี้พลังงานความร้อนที่เกิดจากการกวนจะไม่นำมาพิจารณา

$$\frac{d(VT)}{dt} = q_o T_f - qT - \frac{\Delta HVkC_A}{\rho C_p} - \frac{UA_H}{\rho C_p}(T - T_c) \tag{5.11}$$

โดยที่ ΔH คือความร้อนของปฏิกริยา (heat of reaction), และ U คือสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนทั้งหมด (overall heat transfer coefficient)



รูปที่ 5.3 เครื่องปฏิกรณ์ถังกวนแบบต่อเนื่อง (CSTR)

ง. สมการสมดุลพลังงานในขดลวด (coil energy equation)

$$\frac{dT_c}{dt} = \frac{q_c T_{cf} - T_c}{V_c} + \frac{UA_H(T - T_c)}{\rho_c V_c C_c} \tag{5.12}$$

อัตราการถ่ายเทความร้อนของกระบวนการในถังกวน ที่อุณหภูมิ T และน้ำหล่อเย็นที่อุณหภูมิ T_c แสดงด้วยสมการ

$$Q = UA_H\,(T - T_c) \tag{5.13}$$

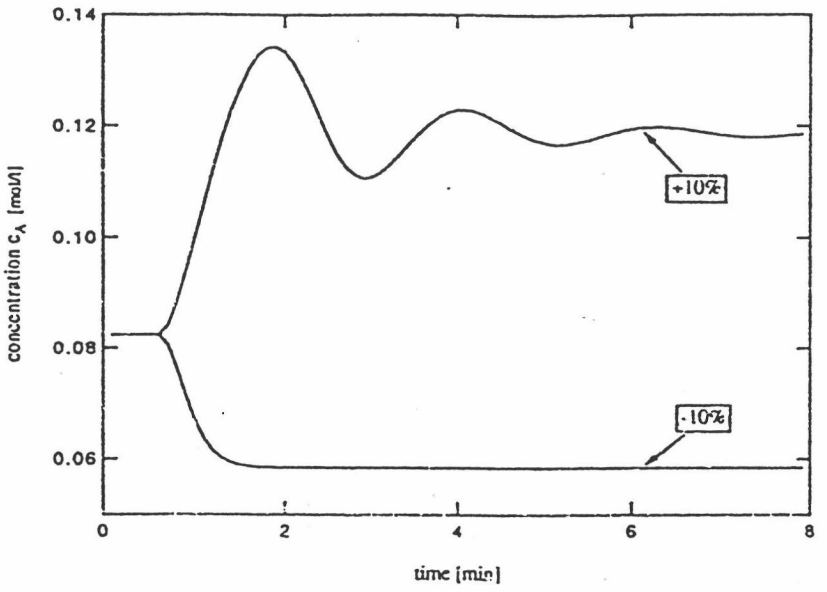
เมื่อ Q คือ อัตราการถ่ายเทความร้อน และ A_H คือพื้นที่การถ่ายเทความร้อน

แก้สมการอนุพันธ์ของระบบถังกวนต่อเนื่องที่มีอุณหภูมิไม่คงที่โดยใช้วิธีรังกัตตา (runge-kutta method) สภาวะในการปฏิบัติการแสดงดังตารางที่ 5.2 การตอบสนองแบบไม่มีตัวควบ

ตารางที่ 5.2 สภาวะในการปฏิบัติการของระบบ nonisothermal CSTR ที่สภาวะคงตัว

NO.	ตัวแปร	คำอธิบาย	สภาวะ	หน่วย
1	q_c	อัตราการไหลของสายป้อน	100	l/min.
2	C_{Af}	ความเข้มข้นเริ่มต้นของสาร A	1	mol/l.
3	T_f	อุณหภูมิของสายป้อน	350	K
4	q	อัตราการไหลของผลิตภัณฑ์	100	l/min.
5	C_A	ความเข้มข้นของผลิตภัณฑ์	0.0836	mol/l.
6	T	อุณหภูมิของระบบ	440.2	K
7	q_c	อัตราการไหลของน้ำหล่อเย็น	103.41	l/min.
8	T_{cf}	อุณหภูมิของน้ำหล่อเย็นขาเข้า	350	K
9	T_c	อุณหภูมิของน้ำหล่อเย็นขาออก	แปรผัน	K
10	V	ปริมาตรถังกวน	100	l
11	ρ	ความหนาแน่นของสารในถังกวน	1000	g/l
12	ρ_c	ความหนาแน่นของน้ำหล่อเย็น	1000	g/l
13	U	สัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนรวม	700000	cal/min.K
14	k_o	สัมประสิทธิ์อัตราการเกิดปฏิกริยา	7.2	min^{-1}
15	E/R	พลังงานกระตุ้น/ค่าคงที่ของก๊าซ	9950	K
16	$-\Delta H$	ความร้อนจากการเกิดปฏิกริยา	200000	cal/min.

คุม (open-loop) ของความเข้มข้นของสารตั้งต้น A ในระบบเมื่อเพิ่มอัตราการไหลแบบสเต็พของน้ำหล่อเย็นในขดลวดความเย็น 10% จากสภาวะคงตัว ดังแสดงรูปที่ 5.4



รูปที่ 5.4 การตอบสนองของระบบถังกวนต่อเนื่องที่มีอุณหภูมิไม่คงที่ (open loop)

5.3 บทสรุป

ในบทนี้ได้อธิบายแบบจำลองคณิตศาสตร์ของกระบวนการที่ใช้ในการทดลองซึ่งได้แก่ถังที่มีของเหลวไหลตามแรงโน้มถ่วง และเครื่องปฏิกรณ์ถังกวนแบบต่อเนื่อง ซึ่งแบบจำลองคณิตศาสตร์ทั้งสองจะนำไปซิมมูเลทเพื่อหาค่าอินพุท และเอาท์พุทของกระบวนการแล้วนำค่าอินพุท และเอาท์พุทนี้ไปให้ข่ายงานนิวรัลได้เรียนรู้เพื่อข่ายงานสร้างแบบจำลองขึ้นมา