

การกำกับรวมกลบนจุดยอดอย่างขวดยิ่งของกราฟบางชนิด

นายพงศ์ภัทร ภัทรกิจวานิช

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2550

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

SUPER VERTEX-MAGIC TOTAL LABELINGS OF SOME GRAPHS

Mr. Pongpat Patarakitvanit

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of Master of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2007


Copyright of Chulalongkorn University

500463

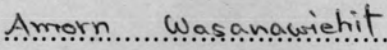
Thesis Title	SUPER VERTEX-MAGIC TOTAL LABELINGS OF SOME GRAPHS
By	Mr.Pongpat Patarakitvanit
Field of Study	Mathematics
Thesis Advisor	Associate Professor Wanida Hemakul ,Ph.D.

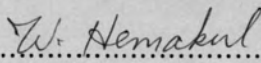
---

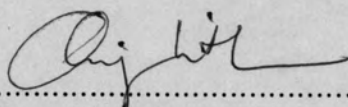
Accepted by the Faculty of Science, Chulalongkorn University in Partial Fulfillment of the Requirements for the Master's Degree


..... Dean of the Faculty of Science  
 (Professor Supot Hannongbua, Ph.D.)

THESIS COMMITTEE


..... Chairman  
 (Associate Professor Amorn Wasanawichit, Ph.D.)


..... Thesis Advisor  
 (Associate Professor Wanida Hemakul, Ph.D.)


..... Member  
 (Chariya Uiyyasathian, Ph.D.)

พงศ์ภัทร ภัทรกิจวานิช : การกำกับรวมกลบนจุดยอดอย่างขวดยิ่งของกราฟบางชนิด  
(SUPER VERTEX-MAGIC TOTAL LABELINGS OF SOME GRAPHS)

อ. ที่ปรึกษา : ร.ศ. ดร. วนิตา เหมะกุล, 76 หน้า

ให้  $G$  เป็นกราฟที่มี  $v$  จุดยอดและ  $e$  เส้น การกำกับรวมกลบนจุดยอดอย่างขวดยิ่งของกราฟ  $G$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง  $\lambda$  จากเซตของจุดยอดยูเนียนกับเซตของเส้นของกราฟ  $G$  ไปยังเซต  $\{1, 2, \dots, v + e\}$  ที่มีสมบัติว่าสำหรับทุกจุดยอด  $x$  ใน  $G$  ผลบวกของ  $\lambda(x)$  กับผลรวมของ  $\lambda(xy)$  เมื่อ  $xy$  เป็นเส้นทั้งหมดที่ตกกระทบกับจุดยอด  $x$  มีค่าคงตัวและการกำกับบนเซตของจุดยอดคือเซต  $\{1, 2, \dots, v\}$

เรารวบรวมและเสนองرافที่มีการกำกับรวมกลบนจุดยอดอย่างขวดยิ่ง เช่น กลุ่มกราฟของกราฟ  $C_n(1, 2, m)$  เมื่อ  $m \in \{3, 4, \dots, \frac{n-1}{2}\}$  และ  $n \geq 7$ , กราฟ  $C_n(1, 3, m)$  เมื่อ  $m \in \{4, 5, \dots, \frac{n-1}{2}\}$  และ  $n \geq 9$ ,  $C_n(1, 2, 3, 4)$ , เมื่อ  $n \geq 9$ ,  $C_n(1, 2, 3, 4, 5)$  เมื่อ  $n \geq 11$  และ  $n$  เป็นจำนวนคี่ เราแสดงกราฟที่ไม่มีการกำกับรวมกลบนจุดยอดอย่างขวดยิ่ง เช่น กราฟปริซึม กราฟหนังสือ กราฟมงกุฎ ยิ่งกว่านั้นเราได้เสนอวิธีสร้างกราฟ  $kG$  ที่มีการกำกับรวมกลบนจุดยอดอย่างขวดยิ่งจากกราฟ  $G$  ที่มีลักษณะเฉพาะและมีการกำกับรวมกลบนจุดยอดอย่างขวดยิ่ง

ภาควิชา...คณิตศาสตร์...  
สาขาวิชา...คณิตศาสตร์...  
ปีการศึกษา..... 2550.....

ลายมือชื่อนิสิต...พงศ์ภัทร ภัทรกิจวานิช.....  
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา...ว.ศ.ดร. วนิตา เหมะกุล.....

## 4872377323 : MAJOR MATHEMATICS

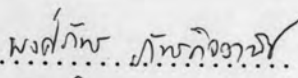
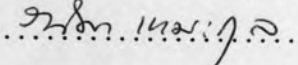
KEY WORD : SUPER VERTEX-MAGIC TOTAL LABELING / SUPER VERTEX-MAGIC GRAPH

PONGPAT PATARAKITVANIT : SUPER VERTEX-MAGIC TOTAL LABELINGS OF SOME GRAPHS. THESIS ADVISOR : WANIDA HEMAKUL, Ph.D., 76 pp.

Let  $G$  be a graph with  $v$  vertices and  $e$  edges. A super vertex-magic total labeling of  $G$  is a bijection  $\lambda$  from  $V(G) \cup E(G)$  to  $\{1, 2, \dots, v + e\}$  with the property that for every vertex  $x$  in  $G$ , the sum  $\lambda(x) + \sum_{y \in N(x)} \lambda(xy) = h$  is a constant and  $\lambda(V(G)) = \{1, 2, \dots, v\}$ .

We collect and present graphs that admit super vertex-magic total labeling such as certain families of circulant graphs  $C_n(1, 2, m)$  where  $m \in \{3, 4, \dots, \frac{n-1}{2}\}$  and  $n \geq 7$ ,  $C_n(1, 3, m)$  where  $m \in \{4, 5, \dots, \frac{n-1}{2}\}$  and  $n \geq 9$ ,  $C_n(1, 2, 3, 4)$ , where  $n \geq 9$ ,  $C_n(1, 2, 3, 4, 5)$  where  $n \geq 11$ ,  $n$  is odd. also some graphs that do not admit any super vertex-magic total labeling such as prism graph, book graph and crown graph are shown. Moreover, we show a method to obtain super vertex-magic total labeling of the disjoint union of  $k$  copies of a graph  $G$ , for a large number of values of  $k$ , from the graph  $G$  with some characteristics which admits a super vertex-magic total labeling.

Department : . . . **Mathematics** . . .  
 Field of Study : . . . **Mathematics** . . .  
 Academic Year : . . . . . **2007** . . . . .

Student's Signature :   
 Advisor's Signature : 

## ACKNOWLEDGEMENTS

I would like to express my sincere gratitude and special thanks to my advisor, Associate Professor Wanida Hemakul Ph.D., for her excellent instruction, discussion and critical reading of this thesis. I am also deeply grateful to Chariya Uiyayasathian Ph.D. and Amorn ++ Ph.D. for many valuable comments and helpful suggestions.

In particular, I wish to thank my beloved parents for their love and encouragement throughout my graduate study.

Finally, I am very thankful to my dear friends for their suggestions and encouragement.

# CONTENTS

	page
ABSTRACT (THAI) .....	iv
ABSTRACT (ENGLISH) .....	v
ACKNOWLEDGEMENTS .....	vi
CONTENTS .....	vii
LIST OF FIGURES .....	viii
CHAPTER	
1 INTRODUCTION .....	1
1.1 Definitions .....	1
1.2 Some properties of a super vertex-magic graph .....	2
1.3 History and overview .....	5
2 A NEW METHOD TO OBTAIN SUPER VERTEX-MAGIC TOTAL	
LABELING OF GRAPHS .....	7
3 SUPER VERTEX-MAGIC GRAPHS .....	25
4 SOME GRAPHS THAT ARE NOT SUPER VERTEX-MAGIC .....	59
5 CONCLUSIONS AND OPEN PROBLEMS .....	71
5.1 Conclusions .....	71
5.2 Open problems .....	72
REFERENCES .....	73
APPENDIX .....	74
VITA .....	76

## LIST OF FIGURES

Figures	page
1.1 $C_3 + C_8$ is a super vertex-magic graph with the magic constant 40 . . . . .	1
1.2 $C_5 + C_6$ is a super vertex-magic graph. . . . .	2
1.3 The graph $G$ that is not super vertex-magic but the magic constant is an integer . . . . .	3
1.4 A graph $G$ that is not super vertex-magic. . . . .	4
1.5 A graph $G$ with $v = 8$ and $e = 12$ . . . . .	4
2.1 A neutral labeling of the graph $C_3 + C_6$ with the elements of $M(3) = \{-1, 0, 1\}$ . .	8
2.2 A neutral labeling of the graph $C_3 + C_6$ with the elements of $M(5) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ . . . . .	9
2.3 Three compatible neutral labelings of the graph $C_3 + C_6$ with the elements of $M(3) = \{-1, 0, 1\}$ . . . . .	10
2.4 Color classes $S_1, S_2, S_3$ of $E(C_3 + C_6)$ . . . . .	11
2.5 Color classes $S_1, S_2, S_3$ of $V(C_3 + C_6) \cup E(C_3 + C_6)$ . . . . .	11
2.6 The super vertex-magic total labeling $\lambda$ of $2K_4$ . . . . .	21
2.7 Color classes $S_1, S_2, S_3, S_4$ of $V(C_3 + C_6) \cup E(C_3 + C_6)$ . . . . .	21
2.8 Two compatible neutral labelings $\beta_1, \beta_2$ of $2K_4$ with . . . . .	22
2.9 The labeling $\alpha$ of $2K_4$ . . . . .	22
2.10 The super vertex-magic total labeling $\lambda'$ of $4K_4$ . . . . .	23
2.11 Super vertex-magic graph $C_3 + C_6$ . . . . .	23
2.12 Super vertex-magic graph $3(C_3 + C_6)$ . . . . .	24
3.1 Super vertex-magic graph $C_5$ . . . . .	25
3.2 Super vertex-magic graph $K_5$ . . . . .	26



3.3 Super vertex-magic graph $K_8$ . . . . .	26
3.4 Circulant graph $C_{13}(1,2,4)$ . . . . .	27
3.5 Super vertex-magic graphs $C_9(1,2)$ and $C_9(1,4)$ . . . . .	28
3.6 Super vertex-magic graphs $C_7(1,2,3)$ and $C_9(1,2,3)$ . . . . .	28
3.7 Super vertex-magic graphs $C_{13}(1,2,4)$ and $C_{13}(1,2,5)$ . . . . .	32
3.8 Super vertex-magic graphs $C_{13}(1,3,4)$ and $C_{13}(1,3,5)$ . . . . .	38
3.9 Super vertex-magic graph $C_{13}(1,2,3,4)$ . . . . .	44
3.10 Super vertex-magic graph $C_{13}(1,2,3,4,5)$ . . . . .	50
3.11 Super vertex-magic graph $C_3 + C_6$ with the magic constant 33 . . . . .	51
3.12 Super vertex-magic graph $C_3 + C_8$ with the magic constant 40 . . . . .	52
3.13 Super vertex-magic graph $C_5 + C_6$ with the magic constant 40 . . . . .	52
3.14 Super vertex-magic graph $C_3 + C_{10}$ with the magic constant 47 . . . . .	53
3.15 Super vertex-magic graph $C_3 + C_3 + C_7$ with the magic constant 47 . . . . .	53
3.16 Super vertex-magic graph $C_4 + C_4 + C_7$ with the magic constant 54 . . . . .	55
3.17 Super vertex-magic regular graphs with the magic constant 48 . . . . .	56
3.18 Super vertex-magic non-regular graphs with the magic constant 66 and 112 . . . . .	58
4.1 The Petersen graph . . . . .	59
4.2 The wheel graph $W_6$ . . . . .	60
4.3 The ladder graph $L_4$ . . . . .	61
4.4 The fan graph $F_4$ . . . . .	62
4.5 The fan graph $F_3$ . . . . .	63
4.6 The fan graph $F_{11}$ . . . . .	64
4.7 The friendship graph $f_4$ . . . . .	65
4.8 The prism graph $Pr_3$ . . . . .	67

4.9 The book graph $B_4$ .....	68
4.10 The crown graph $Cr_8$ .....	69