

## บทที่ 2

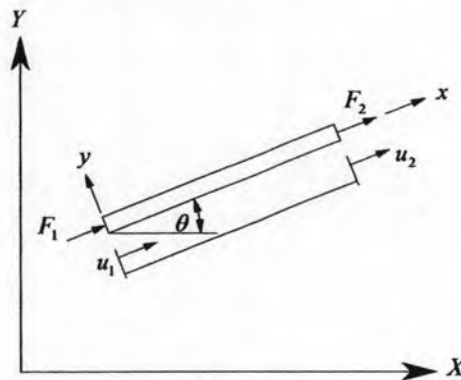
### หลักการและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

#### 2.1 การวิเคราะห์โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

หลักการของระเบียบไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นที่นิยมใช้ในคอมพิวเตอร์โปรแกรม ในการแก้ปัญหา โดยจะเริ่มจากการแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาออกเป็นชิ้นส่วนย่อยๆ ซึ่งแต่ละชิ้นส่วนย่อยนี้จะต้องสร้างสมการสำหรับชิ้นส่วน ซึ่งสมการของแต่ละชิ้นส่วนจะขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหาที่ต้องการแก้ไข และเมื่อได้สมการของแต่ละชิ้นส่วนแล้ว จึงนำทุกสมการของชิ้นส่วนมารวมกันให้เป็นสมการใหญ่ จากนั้นทำการกำหนดขอบเขตของปัญหาแล้วจึงแก้สมการ

##### 2.1.1 ชิ้นส่วนโครงถัก

โครงสร้างส่วนมากมักจะมีชิ้นส่วนโครงถักเป็นส่วนประกอบ ซึ่งชิ้นส่วนโครงถักนี้จะรับแรงในแนวแกนเท่านั้น และจากรูปที่แสดงที่ 2.1



รูปที่ 2.1 ชิ้นส่วนโครงถัก

สามารถหาค่าสตีเฟนสมเมตริกซ์ในทิศทางเฉพาะได้เท่ากับ

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

เมื่อ ค่า  $E$  เท่ากับโมดูลัสยืดหยุ่น และ  $A$  เท่ากับพื้นที่หน้าตัดของวัสดุ

ในการวิเคราะห์ปัญหาโดยวิธีระเบียบไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น จะเริ่มจากสมการสมดุลของแรงในชิ้นส่วนจะได้รับความสัมพันธ์ดังสมการ

$$\{f\} = [k]\{u\} \quad (2.2)$$

โดยที่  $\{f\}$  เป็นเวกเตอร์แรงกระทำภายนอกในแกนพิกัดเฉพาะและ  $\{u\}$  คือเวกเตอร์การเคลื่อนที่ในแกนพิกัดเฉพาะเช่นเดียวกันและเมตริกซ์แปลงพิกัดจะมีค่าเท่ากับ

$$[T] = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

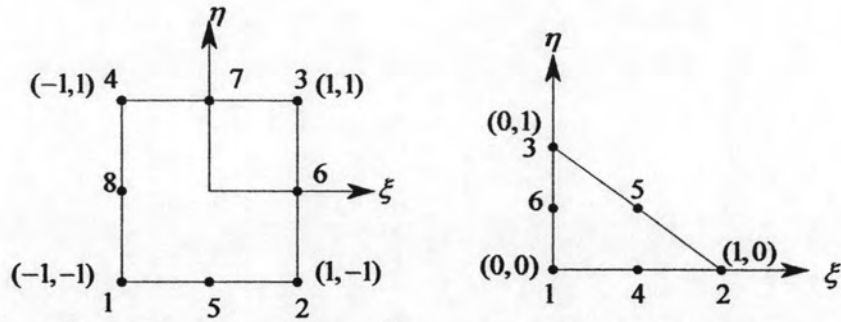
โดยที่  $C$  เท่ากับ  $\cos\theta$  และ  $S$  เท่ากับ  $\sin\theta$

จากสมการที่ 2.3 ทำให้สามารถแปลงค่าสติเฟเนสมเมตริกซ์ในระบบพิกัดเฉพาะไปอยู่ในพิกัดรวมได้คือ  $\{k\} = [T]^T [k][T]$  และเขียนแรงภายนอกที่กระทำอยู่ในพิกัดรวมเป็น  $[F]$  และเวกเตอร์การเคลื่อนที่อยู่ในพิกัดรวมได้  $\{U\}$  จากนั้นนำไปประกอบเข้าเป็นระบบสมการของโครงสร้างรวมได้ ดังนี้

$$\{F\} = [K][U] \quad (2.4)$$

### 2.1.2 ชิ้นส่วนไอโซพารามเมตริกซ์สำหรับชิ้นส่วนสองมิติ

โดยทั่วไปชิ้นส่วนสองมิตินิยมใช้ชิ้นส่วนไอโซพารามเมตริกซ์ สำหรับปัญหาในวิทยานิพนธ์นี้ได้เลือกใช้ชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมแปดจุดและชิ้นส่วนสามเหลี่ยมหกจุดในพิกัดธรรมชาติ ดังรูปที่แสดง 2.2 เนื่องจากเมื่อใช้วิธีการนี้ในการวิเคราะห์ความเค้นและความเครียดในระนาบแล้ว จะให้ผลที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรง



รูปที่ 2.2 ชั้นส่วนสี่เหลี่ยมแปดจุดและชั้นส่วนสามเหลี่ยมหกจุดในพิกัดธรรมชาติ

สำหรับชั้นส่วน 8 จุดมีฟังก์ชันรูปร่างคือ

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1) \\
 N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \\
 N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \\
 N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) \\
 N_5 &= \frac{1}{2}(1-\eta)(1+\xi)(1-\xi) \\
 N_6 &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1+\eta)(1-\eta) \\
 N_7 &= \frac{1}{2}(1+\eta)(1+\xi)(1-\xi) \\
 N_8 &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1+\eta)(1-\eta)
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

สำหรับชั้นส่วน 6 จุดมีฟังก์ชันรูปร่างคือ

$$\begin{aligned}
 N_1 &= (1-\xi-\eta)(1-2\xi-2\eta) \\
 N_2 &= \eta(2\eta-1) \\
 N_3 &= \xi(2\xi-1) \\
 N_4 &= 4\eta(1-\xi-\eta) \\
 N_5 &= 4\xi\eta \\
 N_6 &= 4\xi(1-\xi-\eta)
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

และสามารถเขียนการเปลี่ยนค่าตำแหน่งที่จุดใดๆอยู่ในรูปฟังก์ชันการกระจายภายในส่วนคือ

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & \dots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

เมื่อ  $u$  เท่ากับเวกเตอร์การเคลื่อนที่ในแนวแกน  $x$  และ  $v$  เท่ากับเวกเตอร์การเคลื่อนที่ในแนวแกน  $y$

จากความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด  $\{\varepsilon\}$  และการกระจัด การหาเมทริกซ์  $[B]$  ในเทอมของฟังก์ชันไอโซพารามิเตอร์  $\xi, \eta$  เนื่องจากความเครียด  $\{\varepsilon\}$  หาได้จากอนุพันธ์ของการกระจัดเทียบกับพิกัด  $x$  และ  $y$  นั่นคือ

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\ )}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\ )}{\partial y} \\ \frac{\partial(\ )}{\partial y} & \frac{\partial(\ )}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

ดังนั้น จึงจำเป็นต้องเปลี่ยนสมการของความเครียดให้อยู่ในเทอมของพิกัดธรรมชาติ โดยใช้กฎลูกโซ่ของการหาอนุพันธ์และจากสมการ (2.8) ฟังก์ชัน  $f = f[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$  ดังนั้น

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial(\ )}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial(\ )}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial(\ )}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial(\ )}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial(\ )}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial(\ )}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial(\ )}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial(\ )}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

โดยที่

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

ฉะนั้นจากความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด สามารถหาความเค้นระนาบได้เท่ากับ

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu^2)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

แทนค่าสมการ 2.9 ในสมการ 2.11 และสามารถเขียนในรูปแบบย่อได้คือ

$$\{\sigma\} = [D][\varepsilon] = [D][B]\{d\} \quad (2.12)$$

โดยที่  $[B] = [D'] [N]$  และ

$$[D'] = \frac{1}{|J|} \begin{Bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial(\ )}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial(\ )}{\partial \eta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial(\ )}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial(\ )}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial(\ )}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial(\ )}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial(\ )}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial(\ )}{\partial \eta} & 0 \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

ส่วนสถิติเทนเซอร์ของชิ้นส่วน ในเทอมของพิกัดธรรมชาติ  $\xi - \eta$  สามารถหาได้จากสมการ

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 t [B]^T [D][B] \det J d\xi d\eta \quad (2.14)$$

จะเห็นว่า  $[B]$  เป็นฟังก์ชันของ  $\xi$  และ  $\eta$  เช่นเดียวกับ  $\det J$  เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่าเมทริกซ์  $[B]$  เป็นฟังก์ชันที่ซับซ้อน การอินทิเกรตเมทริกซ์  $[B]$  จึงทำได้ยาก อย่างไรก็ตามเราสามารถจะใช้วิธีอินทิเกรตเชิงตัวเลขหาสตีเฟนสเมทริกซ์  $[k]$  ตามสมการ (2.14) จะหาค่าสตีเฟนสเมทริกซ์และความเค้นระนาบโดยวิธีอินทิเกรตเชิงตัวเลข โดยวิธีของเกาส์ (Gauss's quadrature) ซึ่งเป็นวิธีที่นิยมใช้กันมาก ในการวิเคราะห์ปัญหาโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และสามารถแก้สมการของปัญหาจากสมการที่ 2.4 ดังที่กล่าวมาแล้ว

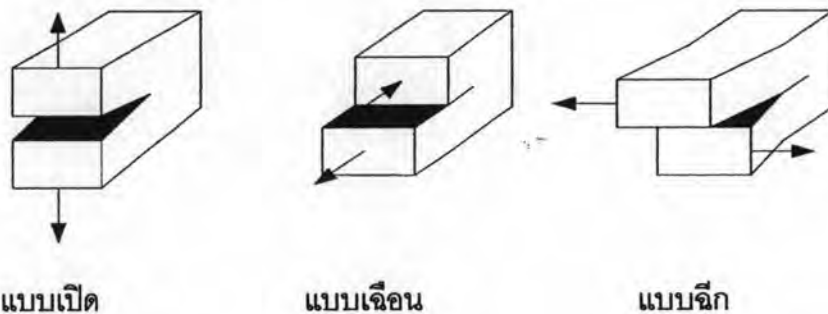
## 2.2 กลศาสตร์การแตกร้าว(Fracture mechanics)

ในงานวิจัยนี้ จะวิเคราะห์พฤติกรรมของรอยร้าวโดยอาศัยทฤษฎีการแตกร้าวแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น รอยแตกร้าวสามารถจำแนกได้ โดยพิจารณาจากสถานะความเค้นใกล้บริเวณปลายรอยร้าวและสมดุลพลังงานกับรอยแตกร้าว โดยทฤษฎีการแตกร้าวจะเป็นแบบสถิตศาสตร์ทั้งหมดโดยมีสมมุติฐานว่า

1. วัสดุของแข็งมีเนื้อสม่ำเสมอเดียวกัน
2. วัสดุมีลักษณะทางกายภาพเหมือนกัน
3. การเพิ่มขึ้นของความเค้นเป็นแบบอิสระ

และจากการพิจารณาของรอยร้าวที่เกิดขึ้น จะพบว่ามีความสัมพันธ์ระหว่างรอยร้าวเนื่องจากรูปแบบการเคลื่อนที่ โดยสามารถจำแนกรูปแบบการเสียรูปออกเป็นทั้งหมดสามรูปแบบดังรูปที่ 2.3 เป็นการแสดงการเคลื่อนที่ของผิวรอยร้าว

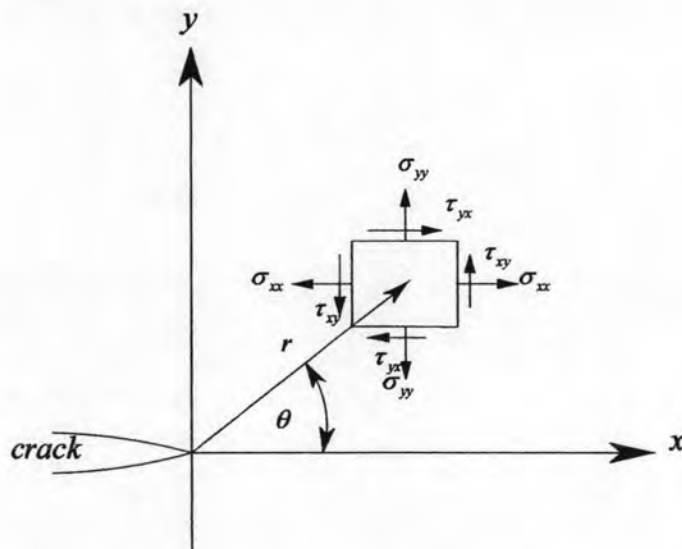
1. แบบเปิด (Opening mode I, KI)
2. แบบเฉือน (Sliding mode II, KII)
3. แบบฉีก (Tearing mode III, KIII)



รูปที่ 2.3 รูปแบบการเสียรูปทั้งสามแบบเนื่องจากแรงที่กระทำสำหรับการร้าว

### 2.2.1 ตัวประกอบความเข้มของความเค้น (The Stress intensity Factor)

จากรูปที่ 2.4 จะแสดงให้เห็นว่าชิ้นส่วนใกล้ปลายรอยร้าวในวัสดุยืดหยุ่นร่วมกับระนาบความเค้นบนชิ้นส่วนนั้น ในรูปแบบการเปิดจะสามารถเขียนได้ว่า ค่าความเค้นเป็นสัดส่วนกับค่าคงที่  $K_I$  ถ้าเรารู้ค่าคงที่จะสามารถคำนวณค่าความเค้นที่กระจายที่ปลายของรอยร้าวได้ตามสมการ 2.16 ค่าคงที่นี้เรียกว่าตัวประกอบความเข้มของความเค้น (Anderson, 1995) และดังที่กล่าวมาแล้วนั้นจะสามารถเขียนค่าความเค้นในรูปแบบการเฉือนได้ตามสมการ 2.17 ซึ่งค่าความเค้นเป็นสัดส่วนกับค่าคงที่  $K_{II}$  ค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นนี้แสดงให้เห็นถึงลักษณะของเงื่อนไขที่ปลายรอยร้าวของวัสดุยืดหยุ่นแบบเชิงเส้น ถ้าสมมุติว่าวัสดุวิบัติที่บริเวณเฉพาะที่เป็นการประกอบด้วยค่าวิกฤติของความเค้นกับความเครียด ถ้าพิจารณาตามที่กล่าวมานั้นถ้ารอยร้าวต้องเกิดขึ้นที่ค่าวิกฤติความเข้มของความเค้นจากรูปแบบเปิด  $K_{IC}$  ดังนั้นค่า  $K_{IC}$  เป็นทางเลือกการวัดความเหนียวของรอยร้าวรูปแบบเปิด และ  $K_{IIC}$  ทางเลือกการวัดความเหนียวของรอยร้าวรูปแบบเฉือน



รูปที่ 2.4 นิยามของแกนพิกัดเหนือรอยร้าว

ค่าความเค้นจากแบบเปิด

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (2.16)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)$$

ค่าความเค้นจากแบบเฉือน

$$\sigma_{xx} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (2.17)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$$

โดยที่  $\sigma$  เป็นค่าความเค้นและ  $f_{ij}$  เป็นฟังก์ชันของ  $\theta$  สำหรับการแก้ปัญหาสำหรับทุกรูปทรง จะให้ความสำคัญของเทอมที่เป็นสัดส่วนกับ  $1/\sqrt{r}$  เนื่องจากเมื่อค่า  $r \rightarrow 0$  จะทำให้เทอมนั้นมีค่าเข้าสู่อนันต์ แต่เทอมอื่น ๆ นั้นจะมีค่าอยู่หรือมีค่าเข้าสู่ศูนย์ ดังนั้นจะเห็นได้ว่าค่าความเค้นใกล้บริเวณปลายรอยร้าวจะแปรผันตามค่า  $\sqrt{r}$  โดยไม่คำนึงถึงรูปร่างของรอยร้าว มันสามารถแสดงว่าการเคลื่อนที่ใกล้บริเวณปลายรอยร้าวแปรผันตาม  $\sqrt{r}$  ดังนั้นตัวประกอบความเข้มของความเค้นจะถูกนิยามตามรูปแบบของแรงกระทำคือ  $K_I$  และ  $K_{II}$  ความเค้นบริเวณเหนือรอยร้าวของปลายรอยร้าวในวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้นของทั้งสามรูปแบบสามารถเขียนได้ดังนี้คือ

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{II} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) \quad (2.18)$$

## 2.2.2 กลศาสตร์การแตกร้าวแบบผสม (Mixed-Mode Fracture Mechanics)



โครงสร้างโดยทั่วไปไม่ได้มีเพียงแรงดึงเท่านั้น แต่ยังรับแรงเฉือนหรือแรงบิดด้วย เนื่องจากรูปแบบผสมกระทำรวมกัน และบ่อยครั้งที่สถานะความเค้นเหนือบริเวณปลายรอยร้าว มักจะเป็นรูปแบบผสมระหว่างรอยร้าวแบบเปิดกับแบบเลื่อนกระทำระหว่างกัน

สมมุติว่ามีรูปแบบวิบัติสองรูปแบบกระทำพร้อมกันบนส่วนประกอบยึดหยุนและการยึดหยุน ดังนั้นอัตราส่วนการปลดปล่อยพลังงานยึดหยุนมีค่าเท่ากันดังนั้นจะได้

$$G = G_I + G_{II} \quad (2.19)$$

$$G = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} \quad (2.20)$$

โดยที่

$$E' = E \text{ สำหรับความเค้นระนาบ}$$

$$E' = E/(1-\nu^2) \text{ สำหรับความเค้นระนาบ}$$

สำหรับการแตกร้าวในรูปแบบที่ 1 เพียงอย่างเดียวความเหนียวของการแตกร้าวสามารถอธิบายได้ดังนี้

$$G_{IC} = G_I = \frac{K_{IC}^2}{E'} \quad (2.21)$$

แล้วแทนค่าสมการ 2.21 ลงในสมการ 2.20 จะได้สมการการแตกร้าววิกฤตซึ่งเราเรียกว่า ค่าอัตราการปลดปล่อยพลังงานวิกฤต (G-criteria)

$$K_C^2 = K_I^2 + K_{II}^2 \quad (2.22)$$

ฉะนั้นเงื่อนไขสำหรับรอยร้าวจะมีขยายตัวเพิ่มจะมีดังนี้คือ ถ้า

$$G_{\max} < G_C \quad (2.23)$$

แสดงว่าจะไม่มีการขยายตัวของรอยร้าวเพิ่มขึ้น แต่ถ้า

$$G_{\max} > G_C \quad (2.24)$$

แสดงว่าจะมีการขยายตัวของรอยร้าวเพิ่มขึ้น

และจากหลักการค่าวิกฤติของรอยร้าวจากรูปแบบผสมซึ่งจะมีค่าเสมือนค่าวิกฤติ เนื่องจากค่าวิกฤติเนื่องจากอัตราการปลดปล่อยพลังงานความเครียด (Strain energy release rate criterion) ทำให้สามารถหาทิศทางของการเติบโตของรอยร้าว ( $\theta$ ) ได้จากค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นของรูปแบบที่ 1 และรูปแบบที่ 2 ดังสมการ

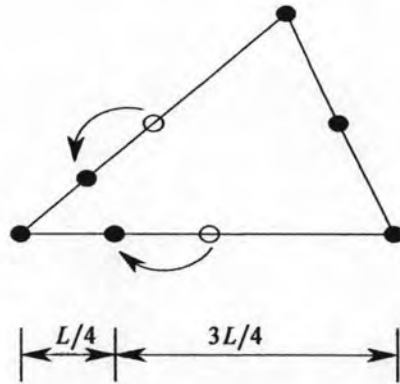
$$\theta = -\arccos \frac{1}{3} \left[ 1 - \frac{x(x - 3\sqrt{(x^2 + 8)})}{x^2 + 9} \right] \quad \text{เมื่อ } \theta < \frac{\pi}{2} \quad (2.25)$$

สมการที่ 2.24 สนใจเฉพาะมุมของรอยแตกที่สามารรถประเมินได้เมื่อรู้ค่า  $K_I$  และ  $K_{II}$  โดยที่ค่า  $x = \frac{K_I}{K_{II}}$

### 2.2.3 ชิ้นส่วนเอกฐาน (Singular Element)

จากทฤษฎีที่กล่าวมาข้างต้น ค่าความเค้นใกล้ปลายรอยร้าวจะเป็นสัดส่วนกลับของค่า  $1/\sqrt{r}$  โดยที่  $r$  เป็นระยะทางจากปลายรอยร้าว ถึงแม้ว่าชิ้นส่วนโดยทั่วไปจะไม่สามารถแสดงค่า  $\sqrt{r}$  ที่บริเวณความเค้นได้ ฉะนั้นในการใช้ขั้นตอนของชิ้นส่วนย่อยสำหรับปัญหาการศาสตร์การแตกร้าวแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น ซึ่งในการจำลองทางพีชคณิตได้พัฒนาชิ้นส่วนที่มีจุดที่ระยะหนึ่งส่วนสี่ (quarter-point element) ดังแสดงในรูปที่ 2.3 โดย Henshell และ Shaw ในปี ค.ศ. 1975 และ Barsoum 1976 ในงานวิจัยแสดงให้เห็นความเกี่ยวข้องของการเคลื่อนที่บริเวณของปลายรอยร้าว ความเค้นและความเครียด ซึ่งถูกจำลองขึ้นโดยใช้ชิ้นส่วนไอโซพารามेटริกแบบมาตรฐาน ถ้าทำการเลื่อนจุดจากจุดกึ่งกลางของด้านมายังตำแหน่งหนึ่งส่วนสี่ของระยะทางวัดจากปลายของรอยร้าวถึงตำแหน่งสิ้นสุดของชิ้นส่วน ชิ้นส่วนที่มีจุดที่ระยะหนึ่งส่วนสี่ (The quarter-point element) มีความสำคัญในการพัฒนาชิ้นส่วนย่อยกับวิธีการของศาสตร์การ

แตกร้าวแบบยึดหยุ่นเชิงเส้น และรูปแบบชิ้นส่วนมาตรฐานแบบนี้ โปรแกรมชิ้นส่วนย่อยสามารถใช้และจำลองขอบเขตที่ปลายรอยร้าวได้อย่างถูกต้องแม่นยำ



รูปที่ 2.5 ชิ้นส่วนที่มีจุดที่ระยะหนึ่งส่วนสี่

#### 2.2.4 วิธีขยายรอยร้าวสมมุติ (Virtual Crack Extension, VCE)

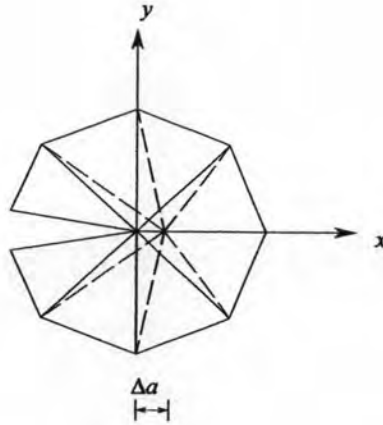
วิธีขยายรอยร้าวสมมุติ (Virtual Crack Extension: VCE) นั้นเป็นวิธีที่ง่ายต่อการคำนวณหาค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้น ซึ่งวิธีขยายรอยร้าวสมมุติได้ใช้หลักการของพลังงานซึ่งคำนวณจากอัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์ รวมทั้งระบบสำหรับการขยายสมมุติขนาดเล็กของรอยร้าว ภายใต้สมมุติฐานของกลศาสตร์การแตกร้าวแบบยึดหยุ่นเชิงเส้น (LEFM) วิธีการนี้จะมีค่าเท่ากับอัตราการปลดปล่อยพลังงานซึ่งถูกเสนอโดย Park และ Hellen (1975)

พลังงานศักย์รวมของระบบชิ้นส่วนย่อยสามารถเขียนอยู่ในรูปดังนี้

$$P = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} - \{u\}^T \{f\} \quad (2.26)$$

โดยที่

- $\{u\}$  = การเคลื่อนที่
- $[K]$  = สติฟเนสเมตริกซ์
- $\{f\}$  = แรงภายนอก



รูปที่ 2.6 ชิ้นส่วนปลายรอยร้าว

$$\frac{-\partial P}{\partial a} = \frac{-\partial}{\partial a} \left[ \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} + \{u\}^T \{f\} \right] = 0 \quad (2.27)$$

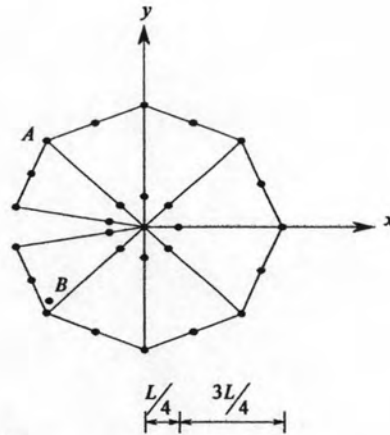
$$\frac{-\partial P}{\partial a} = \frac{-\partial \{u\}^T}{\partial a} [[K] \{u\} - \{f\}] - \frac{1}{2} \{u\}^T \frac{\partial [K]}{\partial a} \{u\} + \{u\}^T \frac{\partial \{f\}}{\partial a} \quad (2.28)$$

จากขั้นตอนชิ้นส่วนย่อยนั้นจะทำให้  $[[K] \{u\} - \{f\}]$  มีค่าเท่ากับศูนย์ และถ้าสมมติว่าแรงภายนอกไม่มีการเปลี่ยนแปลงระหว่างรอยร้าวเกิดขึ้น ฉะนั้นเทอมของ  $\{u\}^T \frac{\partial \{f\}}{\partial a}$  จะมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นสมการที่ 2.26 จะได้

$$G = \frac{-\partial P}{\partial a} = \frac{1}{2} \{u\}^T \frac{\partial [K]}{\partial a} \{u\} \quad (2.29)$$

### 2.2.5 สมการสำหรับปัญหาการร้าวแบบผสมโดยใช้วิธีการแยกตัวประกอบ

โดยทั่วไปเนื่องจากรูปแบบผสมของรอยร้าว ที่เกิดภายใต้แรงดึงและแรงเฉือน ฉะนั้นการเคลื่อนที่  $u$  ใกล้บริเวณปลายรอยร้าวสามารถวิเคราะห์แยกออกเป็นสองประกอบคือ  $u_I$  และ  $u_{II}$  ตัวอย่างเช่น สมมุติพิจารณาจุด A ดังรูปที่แสดงที่ 2.7 การเคลื่อนที่เนื่องจากการเสียรูป  $u$  เป็นผลรวมการเคลื่อนที่  $u_I$  เป็นผลของการเสียรูปจากแบบที่ 1 และ  $u_{II}$  เป็นผลของการเสียรูปจากแบบที่ 2 ซึ่งถูกขยายอยู่รูปของการเคลื่อนที่  $u$  ที่จุด A และการเคลื่อนที่  $u$  ที่จุด B



รูปที่ 2.7 ชิ้นส่วนปลายรอยร้าว (Crack tip Element)

เมื่อวิเคราะห์แยกออกเป็นส่วนประกอบของการเคลื่อนที่สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$u = u_I + u_{II} \quad (2.30)$$

แทนค่าสมการ 2.30 ลงในสมการ 2.29 จะได้

$$G = -\frac{1}{2} u^T \frac{\partial k}{\partial a} u = -\frac{1}{2} (u_I + u_{II})^T \frac{\partial k}{\partial a} (u_I + u_{II}) \quad (2.31)$$

$$G = -\frac{1}{2} u_I^T \frac{\partial k}{\partial a} u_I - \frac{1}{2} u_{II}^T \frac{\partial k}{\partial a} u_{II} - \frac{1}{2} u_I^T \frac{\partial k}{\partial a} u_{II} - \frac{1}{2} u_{II}^T \frac{\partial k}{\partial a} u_I \quad (2.32)$$

และจากสมการ 2.32 เทอมที่มีทั้งสองโหมดจะมีค่าเท่ากับศูนย์ดังนั้น

$$G_I = -\frac{1}{2} u_I^T \frac{\partial k}{\partial a} u_I \quad (2.33)$$

$$G_{II} = -\frac{1}{2} u_{II}^T \frac{\partial k}{\partial a} u_{II} \quad (2.34)$$

และจากสมการ 2.33 และ 2.34 สามารถประมาณโดยใช้วิธีการอนุพันธ์ของไฟไนต์ (finite difference) จะได้

$$G_I = -\frac{1}{2\Delta A} \sum_{i=1}^{N_{ce}} u_{I_i}^{e^T} \Delta K_i^e u_{I_i}^e \quad (2.35)$$

$$G_{II} = -\frac{1}{2\Delta A} \sum_{i=1}^{N_{ce}} u_{II_i}^{e^T} \Delta K_i^e u_{II_i}^e \quad (2.36)$$

โดยที่

$N_{ce}$  = จำนวนชิ้นส่วนทั้งหมด

$u_{I_i}^e$  = การเคลื่อนแบบเวกเตอร์ของรอยร้าวที่  $i^{\text{th}}$  ที่เนื่องจากรูปแบบที่ 1

$u_{II_i}^e$  = การเคลื่อนแบบเวกเตอร์ของรอยร้าวที่  $i^{\text{th}}$  ที่เนื่องจากรูปแบบที่ 2

$\Delta K_i^e$  = การเปลี่ยนแปลงค่าสติฟเนสของชิ้นส่วนปลายรอยร้าวของ  $i^{\text{th}}$  เนื่องจากวิธี ขยายรอยร้าวสมมุติ (VCE)

$\Delta A$  = พื้นที่รอยร้าวที่เพิ่มขึ้นเนื่องจากวิธีขยายรอยร้าวสมมุติ (VCE) =

$$\Delta a \times t$$

$t$  = ความหนาของชิ้นส่วน

จากวิธีการนี้ค่าการเคลื่อนที่ของจุดรอบๆชิ้นส่วนปลายรอยร้าว จะถูกแยกส่วนประกอบการเคลื่อนที่ในระบบสมมาตรและสมมาตรแบบตรงกันข้าม สมมุติว่าพิจารณาที่จุด A เป็นการแยกส่วนประกอบการเสียรูปในเนื่องจากแบบเปิดและแบบเฉือน ในระบบพิกัดรวมซึ่งสามารถแสดงได้ดังสมการ 2.37

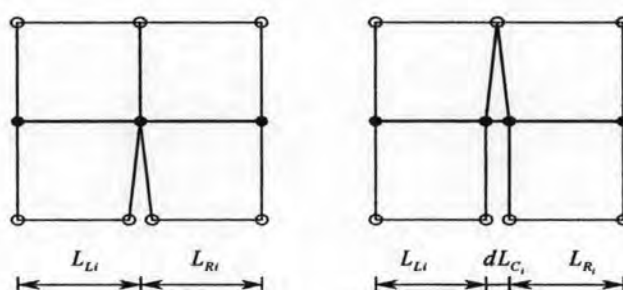
$$U_A = U_{IA} + U_{IIA} = \begin{Bmatrix} U_{IA} \\ V_{IA} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} U_{IIA} \\ V_{IIA} \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} U_{IA} &= \frac{1}{2} [U_A + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) U_B + 2 \cos \theta \sin \theta V_B] \\ V_{IA} &= \frac{1}{2} [V_A + (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) V_B + 2 \cos \theta \sin \theta U_B] \\ U_{IIA} &= \frac{1}{2} [U_A + (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) U_B - 2 \cos \theta \sin \theta V_B] \\ V_{IIA} &= \frac{1}{2} [V_A + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) V_B - 2 \cos \theta \sin \theta U_B] \end{aligned} \quad (2.38)$$

### 2.3 แบบจำลองพฤติกรรมของเหล็กเสริม

พฤติกรรมของแรงยึดเหนี่ยวระหว่างคอนกรีตและเหล็กเสริมเป็นการใช้แบบจำลองอย่างวิธีง่าย ๆ โดยการใช้สมมุติฐานเริ่มแรกว่าเกิดแรงยึดเหนี่ยวที่สมบูรณ์ขึ้นทุกจุด และเมื่อเกิดรอยร้าวตัดกันที่เหล็กเสริมภายใน ก็จะใช้สมมุติฐานที่ว่าไม่มีการสูญเสียของแรงยึดเหนี่ยวบนความยาวของชิ้นส่วนโครงถัก ในทุก ๆ ทิศทางของจุดตัดนั้น ถ้ารอยร้าวตัดผ่านที่จุดร่วมกัน (node joint) ชิ้นส่วนโครงถักจะถูกแยกออกจากกันและเพิ่มชิ้นส่วนโครงถักที่ถูกเปลี่ยนค่าความแกร่งที่รอยร้าว (Modified steel stiffness at crack opening) ดังที่แสดงในรูป 2.8



รูปที่ 2.8 ชิ้นส่วนที่มีการแยก

ซึ่งสามารถหาค่าสติฟเนสของชิ้นส่วนโครงถักที่ถูกเปลี่ยนค่าความแกร่งที่รอยร้าว (Modified steel stiffness at crack opening ;  $L_{MSS}$ ) ได้จากสมการ

$$K_i = \frac{EA}{L_{MSS_{i-1}}} \quad (2.39)$$

โดยที่

$K_i$  = ค่าสติฟเนสของชิ้นส่วนโครงถักที่ถูกเปลี่ยนค่าความแกร่งที่รอยร้าว  
ลำดับ  $i^{th}$

$E$  = โมดูลัสยืดหยุ่น

$A$  = พื้นที่ของวัสดุที่รับแรง

$L_{MSS_{i-1}}$  = Modified steel stiffness at crack opening ลำดับ  $(i-1)^{th}$

$i$  = ลำดับของการแก้ปัญหา

จากสมการ 2.39 จะเห็นได้ว่าค่าสถิติเฟนสของชิ้นส่วนโครงถักที่เพิ่มเข้าไบนั้นจะมีการเปลี่ยนแปลงในแต่ละช่วงของการคำนวณโดยจะแปรผันกับค่า  $L_{MSS_{i-1}}$  วิธีการหาค่า  $L_{MSS_{i-1}}$  จากขั้นตอนนี้ต่อไป

$$L_{MSS_{i-1}} = L_{R_{i-1}} + L_{L_{i-1}} + dL_{C_{i-1}} \quad (2.40)$$

โดยที่

$$L_{R_{i-1}} = L_R + du_{i-1}$$

$$L_{L_{i-1}} = L_L + du_{i-1}$$

$$dL_{C_{i-1}} = dL_{C_{i-1}}$$

และ

$$L_R = \text{ความยาวเดิมของโครงถักทางด้านขวาของจุดที่เกิดรอยร้าว}$$

$$L_L = \text{ความยาวเดิมของโครงถักทางด้านซ้ายของจุดที่เกิดรอยร้าว}$$

$$du = \text{ระยะการเคลื่อนที่ของชิ้นส่วน}$$

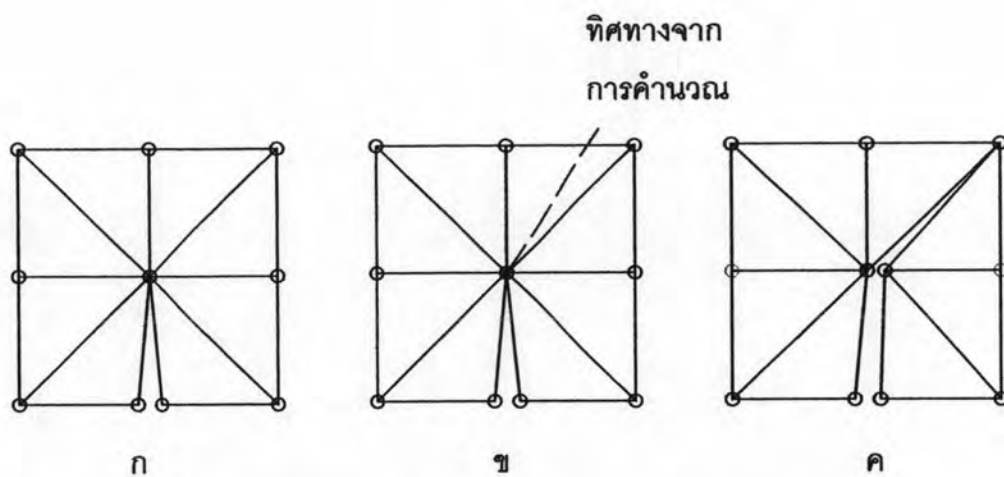
$$dL_C = \text{ระยะของการเสียรูประหว่างชิ้นส่วน}$$

$$i = \text{ลำดับของการแก้ปัญหา}$$

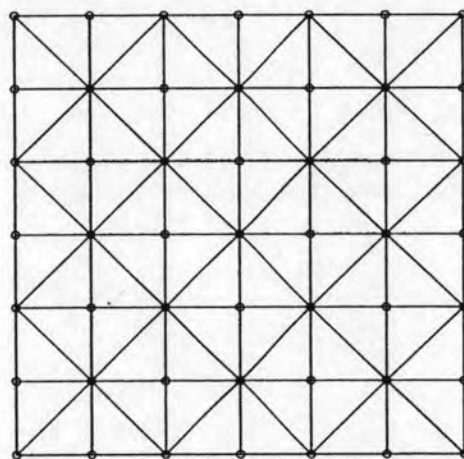
#### 2.4 การทำนายทิศทางการเติบโตของรอยร้าว

ในการทำนายทิศทางของการเติบโตของรอยร้าว นั้น จากทฤษฎีที่กล่าวแล้วนั้นทำให้สามารถหาทิศทางในการเติบโตของรอยร้าวได้ซึ่งจะเป็นมุมใดๆ แต่งานวิจัยนี้จะทำการบังคับทิศทางในการเติบโตของรอยร้าวให้เหลือเพียงมุม 0, 45, 90, 135 และ 180 องศา เท่านั้น โดยจะทำการเปรียบเทียบ ค่ามุมของทิศทางการเติบโตของรอยร้าวที่คำนวณจากทางทฤษฎีกับทิศทางที่บังคับไว้ดังกล่าวข้างต้น ถ้าทิศทางการเติบโตของรอยร้าวใกล้เคียงกับค่าใดมากที่สุด ก็จะถือว่าทิศทางนั้นเป็นทิศทางของการเติบโตของรอยร้าว ดังแสดงในรูปที่ 2.9 และจากรูปที่แสดง 2.10 2.11 และ 2.12 เป็นรูปแบบจำลองลักษณะการเติบโตของรอยร้าวที่เกิดขึ้น โดยเริ่มจากชิ้นส่วนที่ยังไม่มีรอยร้าว จนกระทั่งมีรอยร้าวเกิดขึ้นและมีการเติบโตของรอยร้าว ดังแสดง

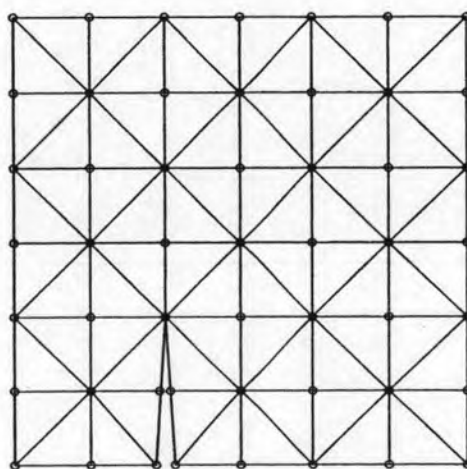




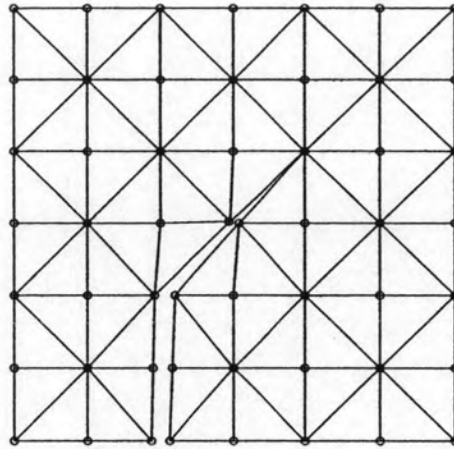
รูปที่ 2.9 ลักษณะการประมาณทิศทางการเติบโตของรอยร้าว



รูปที่ 2.10 แบบจำลองชิ้นส่วนสำหรับการทำนายรอยร้าว



รูปที่ 2.11 แบบจำลองชิ้นส่วนเมื่อเกิดรอยร้าวเกิดขึ้น



รูปที่ 2.12 แบบจำลองชิ้นส่วนเมื่อรอยร้าวมีการเติบโต