ชุดตัวเลขตรรกยะสำหรับการเข้ารหัสอาร์เอนแบบเชื่อมตรง

นายพิภพ เทียนประภาสิทธิ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2559

Rational Digit-Set for On-Line RN-Coding

Mr. Pipop Thienprapasith

A Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy Program in Computer Engineering
Department of Computer Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2016

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ชุดตัวเลขตรรกยะสำหรับการเข้ารหัสอาร์เอนแบบเชื่อมตรง
โดย	นายพิภพ เทียนประภาสิทธิ์
สาขาวิชา	วิศวกรรมคอมพิวเตอร์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาดุษฎีบัณฑิต

....คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(รองศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ เตชวรสินสกุล)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

....ประธานกรรมการ

(ศาสตราจารย์ ดร.ประภาส จงสถิตย์วัฒนา)

....อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์)

....กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.เศรษฐา ปานงาม)

....กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อาทิตย์ ทองทักษ์)

....กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร.อานนท์ รุ่งสว่าง)

....กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อนุชิต จิตพัฒนกุล)

พิภพ เทียนประภาสิทธิ์ : ชุดตัวเลขตรรกยะสำหรับการเข้ารหัสอาร์เอนแบบเชื่อมตรง (Rational Digit-Set for On-Line RN-Coding) อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: ผศ. ดร. อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์, 67 หน้า.

การออกแบบระบบจำนวนมีผลต่อประสิทธิภาพการคำนวณในระบบคอมพิวเตอร์ หนึ่งในงานวิจัยทางด้านระบบจำนวนที่โดดเด่นและมีผู้อ้างถึงบ่อยครั้งคือระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมาย ระบบจำนวนนี้อนุญาตให้ใช้ทั้งตัวเลขบวกและตัวเลขลบในการแสดงจำนวน อีกทั้งยังกำหนดให้สมาชิกของชุดตัวเลขมีจำนวนมากกว่าค่าฐาน ทำให้ระบบจำนวนนี้มีสมบัติซ้ำซ้อนและสามารถเขียนรูปแบบแทนจำนวนได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ ซึ่งมีข้อดีคือความสามารถในการจำกัดการแพร่ของตัวทดในระหว่างการคำนวณ ทำให้ระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายนี้ถูกนำไปประยุกต์ใช้เพื่อลดเวลาในการคำนวณให้น้อยลงได้

ระบบจำนวนใหม่ที่น่าสนใจที่นำแนวคิดของระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายไปประยุกต์ใช้ เรียกว่า การเข้ารหัสอาร์เอน ระบบจำนวนนี้ถูกเสนอขึ้นเพื่อลดเวลาที่สูญเสียไปในระหว่างขั้นตอนการปัดเศษ สำหรับขั้นตอนการปัดเศษของระบบจำนวนนี้สามารถทำได้เพียงแค่ตัดรูปแบบแทนจำนวน ณ ตำแหน่งใด ๆ ก็ตาม ซึ่งรูปแบบแทนจำนวนใหม่ที่ได้จะมีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับวิธีการปัดเศษแบบราวด์ทูเนียเรสท์เสมอ แนวคิดเรื่องการปัดเศษของการเข้ารหัสอาร์เอนนี้เหมาะสมที่จะนำไปประยุกต์ใช้เพื่อลดเวลาการคำนวณกับงานที่ต้องการการปัดเศษที่บ่อยครั้ง โดยเฉพาะการคำนวณแบบสายท่อหรือแบบเชื่อมตรงที่คำตอบที่ผลิตออกไปจากขั้นตอนก่อนหน้าสามารถนำไปใช้ในการคำนวณในขั้นตอนต่อไปได้ทันที โดยไม่จำเป็นต้องรอการปัดเศษให้เสร็จเรียบร้อยเสียก่อน แต่อย่างไรก็ตามการเข้ารหัสอาร์เอนนี้ยังไม่รองรับการคำนวณแบบเชื่อมตรง

ในงานวิจัยนี้เราได้เสนอระบบจำนวนใหม่เรียกว่าระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะซึ่งสามารถทำงานได้ภายใต้ฐานจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบ โดยระบบจำนวนใหม่นี้เปลี่ยนมาใช้ตัวเลขตรรกยะแทนการใช้เฉพาะจำนวนเต็มในการแสดงจำนวน ซึ่งการเลือกใช้ตัวเลขตรรกยะทำให้เราสามารถออกแบบรูปแบบแทนจำนวนที่เหมาะสมกับการคำนวณแบบเชื่อมตรงและยังคงสมบัติการปัดเศษแบบการเข้ารหัสอาร์เอน สำหรับการคำนวณแบบเชื่อมตรงในระบบจำนวนใหม่นี้สามารถแสดงด้วยการแปลงชุดตัวเลขโดยใช้ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงที่มีค่าความหน่วง รวมถึงเรายังพิสูจน์ให้เห็นว่าจำนวนใด ๆ สามารถถูกแปลงให้มาอยู่ในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะได้

ภาควิชา	วิศวกรรมคอมพิวเตอร์	ลายมือชื่อนิสิต	....
สาขาวิชา	วิศวกรรมคอมพิวเตอร์	ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาหลัก	....
ปีการศึกษา	2559		

5571430721 : MAJOR COMPUTER ENGINEERING
KEYWORDS: RN-CODING / ON-LINE COMPUTATION / RATIONAL DIGIT SET

PIPOP THIENPRAPASITH: Rational Digit-Set for On-Line RN-Coding. ADVISOR: ASST. PROF.ATHASIT SURARERKS, Ph.D., 67 pp.

Designing number system can affect the performance of computation in a computer system. Among many researches purposed, signed-digit number system is one of the most well-known systems. A digit in this number system can have a positive and negative sign to represent a number. The advantage of this number system is an ability to limit a carry propagation during a computation which can be applied to reduce a computational time.

There is an interesting number system that applies the concept of signed-digit number system. It is called Round-to-Nearest-Coding (RN-Coding). An idea of this number system is to reduce unnecessary time consumption during a rounding process. A rounding process in RN-Coding can be done by truncating at any position of a number representation (a sequence of digits). The obtained number representation always has the same numerical value as a rounding to the nearest. The concept of rounding process in RN-coding is suitable to be applied to a problem that frequently needs a rounding process especially in a pipeline or on-line computation manner. If there is no need to wait for a rounding process during an on-line computation, then each output digit can be passed to the next computation immediately. However, a RN-Coding does not support an on-line computation.

In this dissertation, we propose a novel number system called rational digit set number system which can work in positive integer and negative integer base. Our system uses rational digits to represent a number instead of only integer digits. The idea is that using rational digits allow us to do a rounding by truncation like RN-Coding and it also supports an on-line computation manner. On-line elementary arithmetic computation in our system can be performed by an on-line digit set conversion using an on-line finite automaton with an on-line delay. Moreover, we can prove that any number can have a representation in our system.

Department:	Computer Engineering	Student's Signature	....
Field of Study:	Computer Engineering	Advisor's Signature	....
Academic Year:	2016		

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยความอนุเคราะห์ และความช่วยเหลืออย่างดียิ่งจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ อาจารย์ที่ปรึกษา ซึ่งเป็นผู้ให้คำปรึกษา ให้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างยิ่งต่อการวิจัย และช่วยตรวจแก้ไขในส่วนที่บกพร่อง ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วง

ขอขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.ประภาส จงสถิตย์วัฒนา รองศาสตราจารย์ ดร.เศรษฐา ปานงาม ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อาทิตย์ ทองทักษ์ รองศาสตราจารย์ ดร.อานนท์ รุ่งสว่าง ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อนุชิต จิตพัฒนกุล ประธานกรรมการและกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่ได้กรุณาให้คำแนะนำในการแก้ไขวิทยานิพนธ์ให้มีคุณภาพยิ่งขึ้น และขอขอบพระคุณคณาจารย์ในภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยทุกท่านที่ประสิทธิประสาทความรู้อันมีค่ายิ่งแก่ผู้วิจัย

ขอขอบคุณ ครอบครัว และทุกคนที่เกี่ยวข้อง โดยเฉพาะสมาชิกห้องปฏิบัติการวิจัย ELITE ที่ได้ให้ความช่วยเหลือ เสนอแนะ และแก้ไขเอกสาร จนกระทั่งวิทยานิพนธ์สำเร็จด้วยดี

สุดท้ายนี้ ผู้วิจัยหวังเป็นอย่างยิ่งว่างานวิจัยนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้ที่สนใจหรือผู้ที่เกี่ยวข้องทั่วไป

สารบัญ

หน้า

หน้า

สารบัญตาราง

สารบัญภาพ

1. บทนำ

การคำนวณเชิงเลขคณิต (arithmetic computation) แบบพื้นฐานที่เรานิยมใช้กัน คือการคำนวณแบบลำดับ (sequential computation) สำหรับการบวก ลบ และคูณ สามารถผลิตคำตอบทีละหนึ่งตำแหน่งโดยการพิจารณาตัวเลข (digit) ทีละหนึ่งตัว เริ่มจากตำแหน่งทางขวาสุดที่มีค่านัยสำคัญต่ำสุด (least significant digit first) แต่ในการหารจะพิจารณาตัวเลขเริ่มจากตำแหน่งทางซ้ายสุดที่มีค่านัยสำคัญสูงสุด (most significant digit first) การคำนวณแบบลำดับนั้นมีข้อดีในเรื่องของการใช้ทรัพยากรน้อย แต่ประสิทธิภาพในการคำนวณจะขึ้นอยู่กับขนาดของจำนวน ยิ่งจำนวนมีขนาดใหญ่ก็ยิ่งใช้เวลาในการคำนวณมากขึ้นตามไปด้วย

การคำนวณเชิงเลขคณิตอีกแบบหนึ่ง คือการคำนวณแบบขนาน (parallel computation) ที่ตัวเลขในทุกตำแหน่งสามารถทำการคำนวณไปพร้อมกันได้ ทำให้ใช้เวลาในการคำนวณคงที่ (constant time) ระบบจำนวนที่สามารถรองรับการคำนวณแบบขนานนั้นต้องเป็นระบบจำนวนที่มีสมบัติซ้ำซ้อน (redundant properties) หมายถึง จำนวนบางจำนวนสามารถมีรูปแบบแทนจำนวนได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ เพื่อช่วยจำกัดการแพร่ของตัวทด (carry propagation) ในระหว่างการคำนวณได้ สำหรับระบบจำนวนที่นิยมนำมาประยุกต์ใช้กับการคำนวณแบบขนาน คือระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมาย (signed-digit number system) ซึ่งใช้ชุดตัวเลข (digit set) ประกอบด้วยตัวเลขแบบมีเครื่องหมาย (signed-digit) [1, 2] เช่น ระบบจำนวนฐานสอง จะใช้ชุดตัวเลขที่เป็นจำนวนเต็มระหว่าง -1 ถึง 1 เป็นต้น แต่อย่างไรก็ตาม การคำนวณแบบลำดับและการคำนวณแบบขนานจำเป็นต้องทราบขนาดของจำนวนที่จะนำมาประมาณผลที่แน่นอนจึงจะเริ่มการคำนวณได้ ซึ่งไม่เหมาะสมกับบางปัญหาในปัจจุบันที่จำนวนมีขนาดใหญ่เกินกว่าที่ทรัพยากรของคอมพิวเตอร์ที่มีอยู่อย่างจำกัดสามารถจัดเก็บได้

การคำนวณแบบเชื่อมตรง (on-line computation) ถูกเสนอขึ้นปี ค.ศ. 1975 โดย เออเสกโกแวค (Ercegovac) และ ทริวิดี (Trivedi) [3, 4] ซึ่งประกอบด้วยฐานจำนวนเต็มและใช้ชุดตัวเลขแบบสมมาตร การคำนวณแบบเชื่อมตรงมีลักษณะการคำนวณแบบลำดับโดยเริ่มจากตัวเลขในตำแหน่งที่มีค่านัยสำคัญสูงสุดในทิศทางเดียวกันทั้งการบวก ลบ คูณ และหาร การคำนวณสามารถผลิตผลลัพธ์ในตำแหน่งนั้นได้ทันทีโดยไม่ต้องรออ่านตัวเลขในตำแหน่งถัดไป ทำให้ไม่จำเป็นต้องจัดเก็บตัวเลขที่จะนำมาคำนวณทั้งหมดก่อนเริ่มการคำนวณ ผลลัพธ์ในตำแหน่งที่ผลิตออกมาได้นั้นสามารถนำไปใช้ในการคำนวณขั้นตอนต่อไปได้ทันที ซึ่งสอดคล้องกับวิธีการคำนวณแบบท่อตรง (pipeline computation) ทั้งนี้ระบบจำนวนที่สามารถนำมาประยุกต์ใช้กับการคำนวณแบบเชื่อมตรงจะต้องมีสมบัติซ้ำซ้อนด้วย งานวิจัยทางด้านการคำนวณแบบเชื่อมตรงได้มีผู้เสนอแนวทางใหม่ ๆ ใน

การพัฒนาให้รองรับการทำงานกับฐาน (base) อื่น ๆ ที่ไม่ใช่จำนวนเต็มบวก ได้แก่ จำนวนเต็มลบ จำนวนจริง และจำนวนเชิงซ้อน รวมถึงออกแบบการลดค่าความหน่วงเชื่อมตรง (on-line delay) ที่จำเป็นต้องใช้กับการคำนวณแบบเชื่อมตรง [5, 6] และในปี ค.ศ. 2016 ได้มีการนำงานของเออเสกโกแวคและทริวิดีมาปรับปรุงให้อยู่ในรูปทั่วไป โดยรองรับฐานจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน อีกทั้งใช้ชุดตัวเลขที่ประกอบด้วยจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อนด้วย [7, 8]

การคำนวณทั้งสามวิธีที่กล่าวไปแล้วนั้นได้มีการนำมาประยุกต์ใช้ร่วมกับการออกแบบระบบจำนวนที่นอกเหนือจากฐานสองหรือฐานสิบและใช้ชุดตัวเลขที่แตกต่างกัน (non-standard number systems) โดยมีงานวิจัยที่ศึกษาถึงข้อดีและข้อด้อยของระบบจำนวนแบบต่าง ๆ เช่น เนื้อที่ที่ใช้ในการเก็บตัวเลข เวลาที่ใช้ในการคำนวณ ความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ การนำแนวคิดไปออกแบบวงจรการคำนวณ เป็นต้น ตัวอย่างของระบบจำนวน ได้แก่ ระบบจำนวนฐานสามที่ใช้ชุดตัวเลขเป็นจำนวนเต็มระหว่าง -1 ถึง 1 มีข้อดีในเรื่องของความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษที่น้อยเมื่อเปรียบเทียบกันระบบจำนวนอื่น [9, 10] ระบบจำนวนฐานเป็นจำนวนเต็มลบ มีข้อดีในเรื่องของความสามารถในการแสดงค่าลบโดยไม่จำเป็นต้องใช้ชุดตัวเลขที่เป็นจำนวนเต็มลบ ทำให้สามารถลดจำนวนตัวเลขในชุดตัวเลขลงได้ [11, 12] ระบบจำนวนฐานเป็นจำนวนจริง [13-16] และระบบจำนวนฐานเป็นจำนวนเชิงซ้อน เช่น ระบบจำนวนเชิงซ้อนของคนุท (Knuth) [17] ซึ่งใช้ฐาน $2i$ ระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ (Penney) [18] ซึ่งใช้ฐาน $-1+i$ เป็นต้น การออกแบบระบบจำนวนและเลือกใช้วิธีการคำนวณที่เหมาะสมนั้นส่งผลอย่างมากต่อความถูกต้องและประสิทธิภาพในการคำนวณ

สำหรับปัญหาในปัจจุบันที่มีความซับซ้อนและต้องการการคำนวณที่มีประสิทธิภาพสูง เช่น ปัญหาที่ข้อมูลเป็นจำนวนที่มีขนาดใหญ่มาก (very large number) หรือปัญหาที่ต้องการความคลาดเคลื่อนของคำตอบน้อยที่สุด (inexact arithmetic) ซึ่งทั้งสองปัญหาเกิดจากความต้องการในการจัดเก็บและประมวลผลข้อมูลในปัจจุบันที่เพิ่มสูงขึ้น แต่ทรัพยากรและความสามารถของคอมพิวเตอร์มีจำกัด จึงเป็นที่มาของงานวิจัยหลากหลายแขนง เช่น งานวิจัยทางด้านเลขคณิตแบบช่วง (interval arithmetic) [19] ที่เปลี่ยนวิธีการเก็บจำนวนที่มีความละเอียดของเลขทศนิยมที่ใหญ่เกินกว่าคอมพิวเตอร์สามารถจัดเก็บได้ให้อยู่ในรูปแบบของช่วง ซึ่งช่วงประกอบด้วยค่าต่ำสุดและค่าสูงสุด การคำนวณแบบช่วงนั้นสามารถรับประกันได้ว่าผลลัพธ์ที่ถูกต้องจะปรากฏอยู่ภายในช่วงของคำตอบอย่างแน่นอน ทำให้สามารถหลีกเลี่ยงปัญหาเกี่ยวกับความผิดพลาดในการปัดเศษได้ (round-off error) [20, 21] นอกจากนี้งานวิจัยทางด้านการออกแบบรูปแบบแทนจำนวน (number representation) ที่เหมาะสมกับจำนวนแบบช่วงยังสามารถช่วงลดเนื้อที่ที่ใช้ในการเก็บช่วงได้อีกด้วย [22-25] และงานวิจัยทางด้านการออกแบบวิธีแสดงช่วงที่สามารถลดความกว้างของช่วงในระหว่าง

ขั้นตอนการคำนวณลงได้ [26-28] เพราะการคำนวณของช่วงโดยทั่วไปนั้น เมื่อนำช่วงมาคำนวณต่อเนื่อง ผลลัพธ์ที่ได้อาจจะได้ช่วงที่มีความกว้างมากเกินไป จึงไม่เป็นประโยชน์ต่อการนำไปใช้งาน

งานวิจัยอีกแขนงหนึ่งที่เราสนใจในงานวิจัยนี้ คือการออกแบบระบบจำนวนที่สามารถรับประกันได้ว่า รูปแบบแทนจำนวนที่ทำการปัดเศษ (rounding) แล้วยังคงให้ผลลัพธ์ที่มีความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุดเท่าที่ระบบจำนวนจะแสดงค่าได้ ระบบจำนวนนี้มีชื่อว่า ระบบรูปแบบแทนจำนวนราวด์ทูเนียเรสท์ (round-to-nearest number representation system) หรือการเข้ารหัสอาร์เอน (RN-Coding) ถูกเสนอขึ้นครั้งแรกในปี ค.ศ. 2005 โดย คอร์เนอรับ (Kornerup) และ มูลเลอร์ (Muller) [29] มีกฎที่สำคัญคือ การกำหนดให้ชุดตัวเลขประกอบด้วยตัวเลขที่เป็นจำนวนเต็มระหว่าง $\frac{-\beta}{2}$ ถึง $\frac{\beta}{2}$ โดยที่ β คือค่าฐาน และไม่ว่าจะทำการตัด (truncation) รูปแบบแทนจำนวน $X = x_n x_{n-1} \dots x_j x_{j-1} \dots$ ณ ตำแหน่ง j ใด ๆ ก็ตาม รูปแบบแทนจำนวนในส่วนที่ถูกตัดออกไปคือ $x_{j-1} x_{j-2} \dots$ จะต้องมีค่าเชิงตัวเลข (numerical value) ไม่เกิน $\frac{\beta^j}{2}$ เสมอ นั่นคือ เมื่อเราทำการตัดรูปแบบแทนจำนวน ณ ตำแหน่งใดก็ตาม มีผลเทียบเท่ากับการปัดเศษแบบราวด์ทูเนียเรสท์นั่นเอง ข้อดีอีกประการหนึ่งของระบบจำนวนนี้คือ ป้องกันปัญหาของปัดเศษสองครั้งที่ให้ผลลัพธ์แตกต่างกัน (double rounding) [30] ตัวอย่าง ถ้าเราต้องการปัดเศษ 5.46 ให้เป็นจำนวนเต็ม โดยใช้การปัดเศษครั้งเดียวจะให้ผลลัพธ์เท่ากับ 5 แต่ถ้าเราปัดเศษทศนิยมทีละหนึ่งตำแหน่งจะได้ผลลัพธ์เท่ากับ 6 งานวิจัยของการเข้ารหัสอาร์เอนถูกพัฒนาต่อมาให้รองรับการดำเนินการพื้นฐานทางเลขคณิต (fundamental arithmetic operations) [31] และรองรับรูปแบบแทนจำนวนของเลขทศนิยม (floating point representation) [32] อิงตามมาตรฐาน IEEE754-2008 [33] ตัวอย่างของลักษณะงานที่สามารถนำข้อดีของระบบจำนวนนี้มาใช้งานได้อย่างเต็มที่ คือการประมวลผลสัญญาณ (signal processing) ซึ่งเป็นงานที่ต้องมีการคำนวณที่ต่อเนื่องและมีการปัดเศษที่บ่อยครั้งในระหว่างการคำนวณ แต่อย่างไรก็ตามการเข้ารหัสอาร์เอนไม่สามารถทำการคำนวณแบบเชื่อมตรงได้ เนื่องจากระบบจำนวนกำหนดให้ใช้ตัวเลขที่เป็นจำนวนเต็มระหว่าง $\frac{-\beta}{2}$ ถึง $\frac{\beta}{2}$ ทำให้ผลลัพธ์ของการคำนวณอาจมีรูปแบบแทนจำนวนย่อย $x_{j-1} x_{j-2} \dots$ ที่มีค่าเกิน $\frac{\beta^j}{2}$ ได้ การแก้ไขนั้นจะต้องกระจายตัวทดไปยังตำแหน่งทางซ้ายซึ่งเป็นตำแหน่งที่มีค่านัยสำคัญสูงกว่า และไม่สอดคล้องกับวิธีการคำนวณแบบเชื่อมตรง

ดังนั้นในงานวิจัยนี้ เราได้เสนอระบบจำนวนใหม่ที่มีสมบัติการปัดเศษแบบการเข้ารหัสอาร์เอน และหลีกเลี่ยงปัญหาของการเกิดการแพร่ของตัวทดไปยังตำแหน่งทางซ้ายโดยใช้ชุดตัวเลขที่เป็นจำนวนตรรกยะ (rational number) โดยระบบจำนวนใหม่นี้สามารถทำงานได้ภายใต้ฐานที่เป็นจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบ รวมถึงออกแบบอัลกอริทึมการคำนวณแบบเชื่อมตรงโดย

แปลงเป็นปัญหาการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรง (on-line digit set conversion) และนำออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรง (on-line finite automaton) มาประยุกต์ใช้ในอัลกอริทึมการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงด้วย

1.1 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

เสนอรูปแบบทั่วไปของชุดตัวเลขตรรกยะสำหรับการเข้ารหัสอาร์เอนและรองรับการคำนวณแบบเชื่อมตรงได้

1.2 ขั้นตอนของการทำวิจัย

1) ออกแบบระบบจำนวนใหม่ที่มีสมบัติในการปัดเศษแบบการเข้ารหัสอาร์เอนและรองรับการคำนวณแบบเชื่อมตรง โดยหลีกเลี่ยงการใช้ชุดตัวเลขที่ประกอบด้วยตัวเลขที่มีค่าเท่ากับ $\pm\frac{\beta}{2}$ และเลือกใช้ตัวเลขที่สามารถลดทอนค่าน้ำหนัก (weight) ในแต่ละตำแหน่งได้ อีกทั้งยังแสดงค่าเชิงตัวเลขได้เทียบเท่า $\pm\frac{\beta}{2}$ ซึ่งวิธีการที่นำมาใช้ในงานวิจัยนี้คือการใช้ตัวเลขที่เป็นจำนวนตรรกยะ เช่น ตัวเลข $\frac{1}{2}$ ที่สามารถแสดงค่า 3 ในฐาน $\beta = 6$ ได้เป็น $(\frac{1}{2}0)_6$
2) ออกแบบระบบจำนวนใหม่ให้สามารถทำงานภายใต้ฐานที่เป็นทั้งจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบ โดยกำหนดให้ชุดตัวเลขสำหรับฐานใด ๆ มีจำนวนตัวเลขมากกว่า $|\beta|$ เพื่อให้ระบบจำนวนใหม่มีสมบัติซ้ำซ้อน ซึ่งเป็นสิ่งจำเป็นสำหรับการคำนวณแบบเชื่อมตรง
3) ออกแบบอัลกอริทึมการเข้ารหัสอาร์เอนแบบเชื่อมตรง โดยใช้แนวคิดของออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงมาประยุกต์ใช้
4) พิสูจน์ความถูกต้องของระบบจำนวนใหม่ที่ประกอบด้วยชุดตัวเลขตรรกยะ รวมถึงอัลกอริทึมการเข้ารหัสอาร์เอนแบบเชื่อมตรง

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

1) ออกแบบรูปแบบทั่วไปของระบบจำนวนที่มีสมบัติการปัดเศษแบบการเข้ารหัสอาร์เอนและรองรับการคำนวณแบบเชื่อมตรง
2) ออกแบบอัลกอริทึมการเข้ารหัสอาร์เอนแบบเชื่อมตรงโดยใช้วิธีการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงที่รองรับการบวกและการคูณด้วยจำนวนเต็มบวก

1.4 ประโยชน์ที่ได้รับจากงานวิจัย

ได้รูปแบบทั่วไปของระบบจำนวนใหม่ที่มีสมบัติในการปัดเศษแบบการเข้ารหัสอาร์เอนและรองรับการคำนวณแบบเชื่อมตรง โดยสามารถทำงานภายใต้ฐานที่เป็นจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็ม

ลบ ซึ่งมีประโยชน์ต่อการนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาในปัจจุบันที่จำนวนที่ต้องการนำมาคำนวณมีขนาดใหญ่และต้องการการปัดเศษที่บ่อยครั้ง ทำให้สามารถลดเวลาที่ต้องใช้ในการคำนวณให้น้อยลงได้

1.5 ผลงานวิจัยที่ได้รับการเผยแพร่

รายชื่อผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์ในวารสารวิชาการระดับนานาชาติดังนี้

1) P. Thienprapasith and A. Surarerks, "On-line Digit Set Conversion for Rational Digit Number," *Engineering Journal (EJ)*, 2017.

รายชื่อผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์ในการประชุมวิชาการระดับนานาชาติดังนี้

1) P. Thienprapasith and A. Surarerks, "Flexible interval representation system in negative binary base," in *2016 8th International Conference on Knowledge and Smart Technology (KST)*, 2016, pp. 190-195.
2) P. Thienprapasith and A. Surarerks, "Rational Digit Set for On-line Addition," in *The 13th International Joint Conference on Computer Science and Software Engineering (JCSSE2016)*, Khon Kaen, Thailand, 2016.

2. ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ระบบจำนวนซ้ำซ้อน

ระบบจำนวนซ้ำซ้อน (redundant number system) เป็นระบบจำนวนประเภทหนึ่งที่มีจำนวนตัวเลขในชุดตัวเลขมากกว่าค่าฐาน ทำให้มีสมบัติพิเศษเรียกว่า สมบัติซ้ำซ้อน นั่นคือจำนวนบางจำนวนสามารถมีรูปแบบแทนจำนวนได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ ข้อดีของระบบจำนวนนี้คือความสามารถในการจำกัดการแพร่ของตัวทดในระหว่างการคำนวณได้ ทำให้สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการคำนวณแบบขนานหรือการคำนวณแบบเชื่อมตรงได้ ทั้งนี้จะขอกล่าวถึงระบบจำนวนดั้งเดิม (conventional number system) ที่ไม่มีสมบัติซ้ำซ้อนก่อน ดังนิยามต่อไปนี้

นิยามที่ 1 (ระบบจำนวนดั้งเดิม)

ระบบจำนวนดั้งเดิมประกอบด้วยฐาน β ที่มีค่าเป็นจำนวนเต็ม $\beta \geq 2$ และมีชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{0,1,\dots,\beta-1\}$ ซึ่งสามารถเขียนรูปแบบแทนจำนวน $X = (x_n x_{n-1} \dots x_0 . x_{n-1} x_{n-2} \dots)_\beta$ โดยที่ $x_i \in \mathcal{D}$ และ $i \leq n$

นิยามที่ 2 (ค่าเชิงตัวเลข)

รูปแบบแทนจำนวน $X = (x_n x_{n-1} \dots x_0 . x_{-1} x_{-2} \dots)_\beta$ ของระบบจำนวน โดยที่ $x_i \in \mathcal{D}$ เมื่อ $\mathcal{D} = \{0,1,\dots,\beta-1\}$ และ $i \leq n$ สามารถหาค่าเชิงตัวเลข *(numerical value)* $\|X\|$ ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\|X\| = \sum_{i=-\infty}^{n} x_i \beta^i$$

ตัวอย่างของชุดตัวเลขในระบบจำนวนดั้งเดิมภายใต้ฐานสองถึงฐานห้าสามารถ แสดงได้ในตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1 ตัวอย่างชุดตัวเลขในระบบจำนวนแบบดั้งเดิม

ฐาน $\boldsymbol{\beta}$	ชุดตัวเลข $\boldsymbol{\mathcal{D}}$
2	$\{0, 1\}$
3	$\{0, 1, 2\}$
4	$\{0, 1, 2, 3\}$
5	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ระบบจำนวนประกอบด้วยฐาน $\beta = 3$ และชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{0,1,2\}$ จงหาค่าเชิงตัวเลขของรูปแบบแทนจำนวน $X = (21200)_3$

จำนวน $X = (21200)_3$ สามารถคำนวณค่าเชิงตัวเลขได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned}(21201)_3 &= (2\times3^4) + (1\times3^3) + (2\times3^2) + (0\times3^1) + (0\times3^0)\\ &= 207\end{aligned}$$

ดังนั้นค่าเชิงตัวเลขของรูปแบบแทนจำนวน $X = (21200)_3$ ภายใต้ฐาน $\beta = 3$ มีค่าเท่ากับ 207 □

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนรูปแบบแทนจำนวน X ภายใต้ฐาน $\beta = 6$ และชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{0,1,2,3,4,5\}$ ที่มีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับ 2252

ค่าเชิงตัวเลข 2252 สามารถเขียนรูปแบบแทนจำนวนในระบบจำนวนดั้งเดิมภายใต้ฐาน $\beta = 6$ ได้คือ

$$(2252)_{10} = (14232)_6$$

□

จากที่กล่าวไปแล้วในข้างต้นว่า ระบบจำนวนซ้ำซ้อนจะมีจำนวนตัวเลขในชุดตัวเลขมากกว่าค่าฐาน จึงมีแนวคิดในการปรับปรุงระบบจำนวนดั้งเดิมให้กลายเป็นระบบจำนวนซ้ำซ้อนอยู่สองวิธี วิธีแรกคือการเพิ่มตัวเลขที่มีค่ามากกว่า $\beta - 1$ เข้าไปในชุดตัวเลข เช่น ระบบจำนวนสะสมตัวทด (stored-carry number system) ที่มีชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{0,1,\dots,\beta\}$ วิธีที่สองคือการใช้ตัวเลขแบบมีเครื่องหมายในชุดตัวเลข เช่น ระบบจำนวนสะสมตัวยืม (stored-borrow number system) ที่มีชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{-1,0,1,\dots,\beta-1\}$ และเราจะเรียกระบบจำนวนที่ใช้ตัวเลขแบบมีเครื่องหมายว่า "ระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมาย" ระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายที่มีผู้อ้างอิงถึงบ่อยครั้งถูกเสนอโดย อวีเซียนีส (Avizienis) [1] ดังนิยามต่อไปนี้

นิยามที่ 3 (ระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมาย)

ระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายประกอบด้วยฐานที่เป็นจำนวนเต็ม $\beta \geq 2$ และมีชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{-a,\dots,-1,0,1,\dots a\}$ โดยที่ a เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง $\frac{\beta}{2} \leq a < \beta$

หมายเหตุ การเขียนตัวเลขแบบมีเครื่องหมาย นิยมเขียนโดยใช้สัญลักษณ์ $\bar{a}$ แทนตัวเลข $-a$

ตัวอย่างของชุดตัวเลขในระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายภายใต้ฐานสองถึงฐานสี่ จะสังเกตได้ว่าบางฐานสามารถมีชุดตัวเลขได้มากกว่าหนึ่งแบบดังแสดงในตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 2 ตัวอย่างชุดตัวเลขในระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมาย

ฐาน $\boldsymbol{\beta}$	**ชุดตัวเลข $\boldsymbol{\mathcal{D}}$**
2	$\{\bar{1}, 0, 1\}$
3	$\{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$
4	$\{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$
4	$\{\bar{3}, \bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2, 3\}$

สำหรับตัวอย่างการหารูปแบบแทนจำนวนของระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายภายใต้ฐานที่แตกต่างกันคือ $\beta = 3$ และ $\beta = 4$ แต่ใช้ชุดตัวเลขเดียวกันคือ $\mathcal{D} = \{\bar{2}, \bar{1}, 0,1,2\}$ แสดงในตัวอย่างที่ 3 และตัวอย่างที่ 4

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายประกอบด้วยฐาน $\beta = 3$ และชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{\bar{2}, \bar{1}, 0,1,2\}$ จงเขียนรูปแบบแทนจำนวนที่มีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับ $X = (218)_{10}$

จำนวน $X = (218)_{10}$ สามารถเขียนรูปแบบแทนจำนวนที่อยู่ในระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายภายใต้ฐาน $\beta = 3$ ได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ คือ

$$(218)_{10} = (10\bar{1}01\bar{1})_3 = (10\bar{1}002)_3$$

$\square$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายประกอบด้วยฐาน $\beta = 4$ และชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{\bar{2}, \bar{1}, 0,1,2\}$ จงเขียนรูปแบบแทนจำนวนที่มีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับ $X = (1890)_{10}$

จำนวน $X = (1890)_{10}$ สามารถเขียนรูปแบบแทนจำนวนที่อยู่ในระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายภายใต้ฐาน $\beta = 4$ ได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ คือ

$$(1890)_{10} = (2\bar{1}1202)_4 = (2\bar{1}121\bar{2})_4$$

$\square$

จุดเด่นที่สำคัญของระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายที่อวีเซียนีสได้เสนอไว้ คือความสามารถในการบวกแบบขนานที่ไม่มีการแพร่ของตัวทด (carry-free addition) เนื่องจากกำหนดให้ตัวทดเป็นจำนวนเต็มระหว่าง -1 ถึง 1 และผลบวกชั่วคราว (interim sum) ของแต่ละตำแหน่งมีค่าระหว่าง

$-a+1$ ถึง $a-1$ ทำให้ผลลัพธ์สุดท้ายที่เกิดจากการรวมตัวทดและผลบวกชั่วคราวจะเป็นตัวเลขที่อยู่ในชุดตัวเลข $\mathcal{D}$ เสมอ ซึ่งแน่นอนว่าจะไม่มีการผลิตตัวทดใหม่อีกด้วย

ต่อมา พาร์ฮามี (Parhami) [2] ได้ศึกษาภาพรวมของระบบจำนวนซ้ำซ้อนและเสนอนิยามของระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายทั่วไป (generalized signed-digit number system) ซึ่งชุดตัวเลขไม่จำเป็นต้องสมมาตร ไว้ดังนิยามต่อไปนี้

นิยามที่ 4 (ระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายทั่วไป)

ระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายทั่วไปประกอบด้วยฐาน $\beta \geq 2$ โดยที่ β เป็นจำนวนเต็มบวก และชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{-a, -a+1, \dots, 0, \dots., b-1, b\}$ โดย a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ $a, b \geq 0$ และ $a+b+1 > \beta$

สำหรับตัวอย่างของระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายทั่วไปที่มีความแตกต่างของชุดตัวเลขที่ไม่จำเป็นต้องสมมาตรแสดงในตัวอย่างที่ 5 และตัวอย่างที่ 6

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายทั่วไปประกอบด้วยฐาน $\beta = 3$ และชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1\}$ จงเขียนรูปแบบแทนจำนวนที่มีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับ $X = (218)_{10}$

จำนวน $X = (218)_{10}$ สามารถเขียนรูปแบบแทนจำนวนที่อยู่ในระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายทั่วไปภายใต้ฐาน $\beta = 3$ ได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ คือ

$$(218)_{10} = (10\bar{1}01\bar{1})_3 = (100\bar{2}\bar{2}\bar{1})_3$$

□

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้ระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายทั่วไปประกอบด้วยฐาน $\beta = 5$ และชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2, 3\}$ จงเขียนรูปแบบแทนจำนวนที่มีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับ $X = (1589)_{10}$

จำนวน $X = (1589)_{10}$ สามารถเขียนรูปแบบแทนจำนวนที่อยู่ในระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายทั่วไปภายใต้ฐาน $\beta = 5$ ได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ คือ

$$(1589)_{10} = (23\bar{1}\bar{2}\bar{1})_5 = (23\bar{2}3\bar{1})_5$$

□

2.2 การแปลงชุดตัวเลข

การแปลงชุดตัวเลข คือการแปลงรูปแบบของจำนวนที่แสดงด้วยชุดตัวเลขหนึ่งไปยังอีกชุดตัวเลขหนึ่งที่แตกต่างกัน โดยที่ค่าของจำนวนไม่เปลี่ยนแปลง งานวิจัยนี้จะสนใจเฉพาะการแปลงชุดตัวเลขภายใต้ฐาน β เดียวกัน [34, 35] โดยกำหนดให้ E และ $\mathcal{D}$ เป็นชุดตัวเลขจำกัดที่แตกต่างกัน

และ β เป็นฐานที่เป็นได้ทั้งจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน การแปลงชุดตัวเลขจากชุดตัวเลข E ไปยังชุดตัวเลข $\mathcal{D}$ ภายใต้ฐาน β สามารถเขียนเป็นฟังก์ชันการแปลงได้ดังนี้

$$\lambda: E^{\mathbb{N}} \to \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$$

โดยที่ $E^{\mathbb{N}}$ และ $\mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ คือเซตของคำอนันต์ (infinite word) จะได้ว่าสำหรับทุก ๆ $X \in E^{\mathbb{N}}$, $\|\lambda(X)\| = \|X\|$

การแปลงชุดตัวเลขนั้นสามารถนำไปใช้อธิบายการบวกและการคูณด้วยจำนวนเต็มได้ โดยในการบวกนั้นสามารถเทียบได้กับการแปลงจากชุดตัวเลข $E = \{e \in \mathbb{Z} | 2a \le e \le 2b\}$ ไปยังชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{d \in \mathbb{Z} | a \le d \le b\}$ และการคูณด้วยจำนวนเต็ม m นั้นเทียบได้กับการแปลงชุดตัวเลข $E = \{e \in \mathbb{Z} | ma \le e \le mb\}$ ไปยังชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{d \in \mathbb{Z} | a \le d \le b\}$ ภายใต้ฐานเดียวกัน โดยตัวอย่างของการแปลงชุดตัวเลขภายใต้ฐาน $\beta = 2$ แสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 7 การบวกกันของจำนวน $X = 100110$ และ $Y = 010111$ ภายใต้ฐาน $\beta = 2$ โดยใช้วิธีการแปลงชุดตัวเลข

การบวกกันของเลขสองจำนวนสามารถพิจารณาเป็นการแปลงชุดตัวเลขภายใต้ฐาน $\beta = 2$ จากชุดตัวเลข $E = \{0,1,2\}$ ไปยังชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{0,1\}$ ได้ โดยการแปลงผลลัพธ์จาก 110221 ไปยัง 111101 ได้ดังนี้

$$\begin{array}{lll} 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0 & & X \\ \underline{0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1} & + & Y \\ 1\ 1\ 0\ 2\ 2\ 1 & & X+Y \\ \underline{\underline{1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1}} & & \end{array}$$

□

2.3 ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรง

การคำนวณแบบเชื่อมตรงในระบบชุดตัวเลขตรรกยะนี้จะถูกแปลงเป็นปัญหาการแปลงชุดตัวเลขและแสดงอยู่ในรูปแบบของออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรง ซึ่งออโตมาตันที่นำมาประยุกต์ใช้ในงานวิจัยนี้คือ ออโตมาตาชนิดเปลี่ยนตัวแปร (transducer) หรือเรียกว่าออโตมาตาเชิงลำดับ (sequential automata) โดยออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรง [36, 37] นี้มีความสามารถในการแปลงชุดตัวเลข จากชุดตัวเลขนำเข้า (input digit set) E ไปยังชุดตัวเลขนำออก (output digit set) $\mathcal{D}$ และมีจำนวนสถานะ (state) Q ที่จำกัด รวมถึงมีลักษณะพิเศษที่แตกต่างออโตมาตันชนิดอื่นคือค่าความหน่วงในการทำงาน ซึ่งสามารถอธิบายด้วยกราฟระบุชื่อและทิศทาง (directed labeled graph) ดังนิยามต่อไปนี้

นิยามที่ 5 (ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรง)

ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรง $\mathcal{A} = (Q, E\times(\mathcal{D} \cup \varepsilon), q_0, F)$ และมีค่าความหน่วง k ประกอบด้วย 4 ส่วน ดังนี้

Q คือชุดจำกัดของสถานะ (a finite set of states)

E คือชุดจำกัดของตัวเลขนำเข้า (a finite set of input digits) $\mathcal{D}$ คือชุดจำกัดของตัวเลขนำออก (a finite set of output digits) และ ε คือคำว่าง (an empty word)

q_0 คือสถานะเริ่มต้น (an initial state)

F คือชุดจำกัดของเส้นเชื่อม (a finite set of edges) ที่อยู่ในรูปของ $p \xrightarrow{x/y} q$ โดยที่ $x \in E$ และ $y \in \mathcal{D}$

ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงมีลักษณะพิเศษ คือมีค่าความหน่วงเป็นจำนวนเต็ม k โดยที่ทุกวิถี (path) ความยาว k ที่เริ่มจากสถานะเริ่มต้น q_0 จะเป็นดังนี้

$$q_0 \xrightarrow{x_1/\varepsilon} q_1 \xrightarrow{x_2/\varepsilon} q_2 \ldots \xrightarrow{x_k/\varepsilon} q_k$$

สำหรับ $x_i \in E$ และ $i \leq k$ ทั้งนี้ออโตมาตาจะอ่านตัวเลขเข้ามา k ตัวแรกโดยยังไม่ผลิตตัวเลขผลลัพธ์ออกไป หลังจากนั้นเมื่ออ่านตัวเลขเข้ามาหนึ่งตัว จะผลิตตัวเลขผลลัพธ์ออกมาหนึ่งตัว เป็นเช่นนี้ต่อเนื่องกันไป โดยในทางปฏิบัติเราจะสมมติให้ตัวเลขนำเข้า k ตัวแรกมีค่าเท่ากับ 0 เพื่อที่เมื่อเราอ่านตัวเลขที่เป็นข้อมูลนำเข้าตัวแรกแล้ว สามารถผลิตผลลัพธ์ตัวแรกออกมาได้ทันที ดังนั้นเส้นเชื่อมของออโตมาตันจะอยู่ในรูปของ

$$p \xrightarrow{x/y} q$$

โดยที่ $x \in E$ และ $y \in \mathcal{D}$

เมื่อออโตมาตันอ่านตัวเลขนำเข้าจนครบและหยุดที่สถานะ q_j จะมีการเพิ่มนิยามของฟังก์ชันสิ้นสุด (terminal function) $\omega : Q \to \mathcal{D}^*$ ซึ่งฟังก์ชันนี้มีหน้าที่ในการเพิ่มผลลัพธ์ที่เป็นตัวเลข k ตัวเข้าไปในส่วนท้ายของผลลัพธ์ที่ผลิตออกมาก่อนหน้า สำหรับตัวอย่างในการแปลงชุดตัวเลขโดยใช้ออมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 8 จงหาผลลัพธ์ของการแปลงชุดตัวเลขจากชุดตัวเลข $E = \{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$ ไปยังชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{\bar{1}, 0, 1\}$ ภายใต้ฐาน $\beta = 2$ โดยใช้ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรง เมื่อกำหนดให้จำนวน $X = 2\bar{1}012\bar{2}$ ซึ่ง $x_i \in E$ และกำหนดค่าความหน่วง $k = 2$

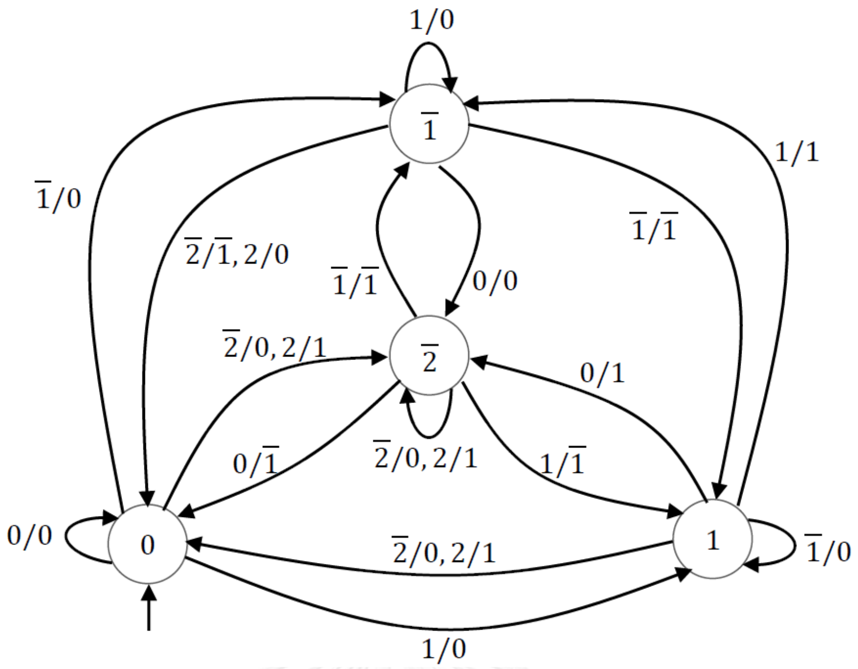
การแปลงชุดตัวเลขของจำนวน $X = 2\bar{1}012\bar{2}$ ภายใต้ฐาน $\beta = 2$ ที่ใช้ชุดตัวเลข $E = \{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$ ไปยังชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{\bar{1}, 0, 1\}$ โดยใช้ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงที่มีค่าความหน่วง $k = 2$ ดังรูปที่ 1 สามารถแสดงการแปลงได้ดังนี้

$$0 \xrightarrow{2\ /\ 1} \bar{2} \xrightarrow{\bar{1}\ /\ \bar{1}} \bar{1} \xrightarrow{0\ /\ 0} \bar{2} \xrightarrow{1\ /\ \bar{1}} 1 \xrightarrow{2\ /\ 1} 0 \xrightarrow{\bar{2}\ /\ 0} \bar{2}$$

ผลลัพธ์ชั่วคราวที่ได้คือ $Y = 1\bar{1}0\bar{1}10$ ซึ่งยังไม่ใช่ผลลัพธ์สุดท้าย เนื่องจากออโตมาตันหยุดการทำงานที่สถานะ $q = \bar{2}$ และมีการกำหนดค่าความหน่วง $k = 2$ จึงต้องทำการนิยามฟังก์ชันสิ้นสุด $\omega : Q \to \mathcal{D}^*$ ได้เป็น $\omega(\bar{2}) = \bar{1}0$ โดยเราจะนำตัวเลข $\bar{1}0$ ไปต่อท้ายที่ผลลัพธ์ชั่วคราวได้เป็นผลลัพธ์สุดท้ายคือ $Y = 1\bar{1}0\bar{1}10\bar{1}0$ ซึ่งมีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับจำนวน $X = 2\bar{1}012\bar{2}$ คือ 54 โดยสามารถคำนวณได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
\|X\| &= \sum_{i=0}^{5} x_i \times \beta^i \\
&= (2\times2^5) + (\bar{1}\times2^4) + (0\times2^3) + (1\times2^2) + (2\times2^1) + (\bar{2}\times2^0) \\
&= 64 - 16 + 0 + 4 + 4 - 2 \\
&= 54 \\
\|Y\| &= \sum_{i=0}^{7} y_i \times \beta^i \\
&= (1\times2^7) + (\bar{1}\times2^6) + (0\times2^5) + (\bar{1}\times2^4) + (1\times2^3) + (0\times2^2) \\
&\quad + (\bar{1}\times2^1) + (0\times2^0) \\
&= 128 - 64 + 0 - 16 + 8 + 0 - 2 + 0 \\
&= 54
\end{aligned}$$

□



รูปที่ 1 การแปลงชุดตัวเลข $E = \{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$ ไปยังชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{\bar{1}, 0, 1\}$ ภายใต้ฐาน $\beta = 2$ ของออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงซึ่งใช้ค่าความหน่วง $k = 2$ [37]

2.4 การเข้ารหัสอาร์เอน

การเข้ารหัสอาร์เอนหรือระบบรูปแบบแทนจำนวนราวด์ทูเนียเรสท์เป็นระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายประเภทหนึ่ง จุดเด่นของระบบจำนวนนี้ คือการปัดเศษในระบบจำนวนนี้สามารถทำได้โดยการตัดลำดับของตัวเลข (sequence of digit) ส่วนที่เหลือของรูปแบบแทนจำนวน ณ ตำแหน่งที่ต้องการทิ้งไป ซึ่งเปรียบเทียบได้กับขั้นตอนการปัดเศษแบบราวด์ทูเนียเรสท์นั่นเอง สำหรับระบบจำนวนที่สอดคล้องกับแนวคิดนี้ถูกกล่าวไว้โดยคนุท [38] คือระบบจำนวนฐานสามแบบสมมาตร (balance ternary system) ที่มีค่าฐาน $\beta = 3$ และชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{\bar{1}, 0, 1\}$ ต่อมาในปี ค.ศ. 2004 คอร์เนอรับและมูลเลอร์ [39] ได้เสนอการเข้ารหัสอาร์เอนในรูปทั่วไปภายใต้ฐาน $\beta \geq 2$ ดังนิยามต่อไปนี้

นิยามที่ 6 (การเข้ารหัสอาร์เอน)

ระบบจำนวนที่ประกอบด้วยฐาน β มีค่าจำนวนเต็มที่ $\beta \geq 2$ และชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{-\beta + 1, -\beta + 2, \dots, 0, \dots, \beta - 2, \beta - 1\}$ จะได้ว่ารูปแบบแทนจำนวน $X = (x_n x_{n-1} \dots x_0 . x_{-1} x_{-2} \dots)_\beta$ จะเป็นการเข้ารหัสอาร์เอน ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ $j \leq n$

$$\left| \sum_{i=-\infty}^{j-1} x_i \beta^i \right| \leq \frac{1}{2} \beta^j$$

นั่นคือ ถ้าเราตัดรูปแบบแทนจำนวน X ณ ตำแหน่ง j จะได้รูปแบบแทนจำนวนหลังจากการตัด คือ $x_n x_{n-1} \dots x_j$ ซึ่งมีค่าเชิงตัวเลขใกล้เคียงกับ X ที่สุดเท่าที่สามารถแสดงได้ในระบบ

ตัวอย่างของการเข้ารหัสอาร์เอนของค่า π ภายใต้ฐาน $\beta = 10$ และใช้ชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{\bar{5}, \bar{4}, \dots, 0, \dots, 4, 5\}$ คือ $3.142\bar{4}\bar{1}3\bar{3}\bar{5}4\bar{4}\bar{1}0\bar{2}\bar{1}3 \dots$

ลักษณะ (characterization) ของรูปแบบแทนจำนวนที่น่าสนใจของระบบจำนวนนี้ มีดังนี้

- ฐาน β ที่เป็นจำนวนเต็มคี่ รูปแบบแทนจำนวน $X = (x_n x_{n-1} \dots x_0 . x_{-1} x_{-2} \dots)_\beta$ จะเป็นการเข้ารหัสอาร์เอน ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ $i \le n, \frac{-\beta+1}{2} \le x_i \le \frac{\beta-1}{2}$
- ฐาน β ที่เป็นจำนวนเต็มคู่ รูปแบบแทนจำนวน $X = (x_n x_{n-1} \dots x_0 . x_{-1} x_{-2} \dots)_\beta$ จะเป็นการเข้ารหัสอาร์เอน ก็ต่อเมื่อ
    1. ทุก ๆ $i \le n, \frac{-\beta}{2} \le x_i \le \frac{\beta}{2}$
    2. ถ้า $|x_i| = \frac{\beta}{2}$ แล้วตัวเลขทางขวาตัวแรกที่ไม่ใช่ศูนย์จะต้องมีเครื่องหมายตรงข้ามกับ x_i

ตัวอย่างที่ 9 จงหารูปแบบแทนจำนวน $X = (103)_{10}$ ที่เป็นการเข้ารหัสอาร์เอนภายใต้ฐาน $\beta = 3$ และฐาน $\beta = 2$

ชุดตัวเลข $\mathcal{D}$ ของฐาน $\beta = 3$ และฐาน $\beta = 2$ เป็นชุดตัวเลขเดียวกัน คือ $\mathcal{D} = \{\bar{1}, 0, 1\}$ แต่มีวิธีเขียนรูปแบบแทนจำนวนที่แตกต่างกัน ดังนี้

รูปแบบแทนจำนวนของ $X = (103)_{10}$ ภายใต้ฐาน $\beta = 3$ คือ $(11\bar{1}11)_3$

รูปแบบแทนจำนวนของ $X = (103)_{10}$ ภายใต้ฐาน $\beta = 2$ คือ $(10\bar{1}0100\bar{1})_2$ และ $(10\bar{1}010\bar{1}1)_2$

□

จากตัวอย่างที่ 9 รูปแบบแทนจำนวนภายใต้ฐานที่เป็นจำนวนเต็มคี่นั้น สามารถมีรูปแบบแทนจำนวนได้เพียงรูปแบบเดียว ในส่วนของรูปแบบแทนจำนวนภายใต้ฐานที่เป็นจำนวนเต็มคู่นั้น สามารถมีได้สองรูปแบบ โดยคอร์เนอรับและมูลเลอร์ได้ยกตัวอย่างอัลกอริทึมการแปลงระหว่างระบบจำนวนฐานสองดั้งเดิมที่ไม่ใช่จำนวนซ้ำซ้อน (conventional non-redundant binary system) และการเข้ารหัสอาร์เอน ไว้ดังนี้

2.4.1 การแปลงจากระบบจำนวนฐานสองไปยังการเข้ารหัสอาร์เอนฐานสอง

การแปลงจากระบบจำนวนฐานสองดั้งเดิมที่ไม่ใช่จำนวนซ้ำซ้อน ซึ่งมีชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{0,1\}$ ไปยังการเข้ารหัสอาร์เอน ที่มีชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{\bar{1}, 0,1\}$ สามารถทำได้โดยใช้การเข้ารหัสของบูธ (Booth recoding) [40] ซึ่งมีข้อดีคือ รูปแบบจำนวนที่ได้จากการเข้ารหัสจะมีการตัวเลขที่ไม่ใช่ศูนย์สลับเครื่องหมายกันเสมอ และการแปลงสามารถคำนวณแบบขนานหรือแบบเชื่อมตรงได้

กำหนดให้รูปแบบแทนจำนวนของระบบจำนวนฐานสอง X คือ

$$X = d_n d_{n-1} \dots d_j$$

โดยที่ $d_k = 0,1$ และ $j < n$

กำหนดให้รูปแบบแทนจำนวนของการเข้ารหัสอาร์เอนของจำนวน X คือ

$$\delta_{n+1} \delta_n \dots \delta_j$$

โดยที่ $\delta_k = d_{k-1} - d_k$ และ $d_j = 0$ สำหรับกรณีที่เป็นรูปแบบแทนจำนวนที่จำกัด

ทั้งนี้ตัวอย่างการแปลงจาก $X = 100101101$ ไปยังการเข้ารหัสอาร์เอน $1\bar{1}01\bar{1}10\bar{1}1\bar{1}$ สามารถแสดงได้ดังนี้

ตารางที่ 3 ตัวอย่างการแปลงจาก $X = 100101101$ ไปยังการเข้ารหัสอาร์เอน $1\bar{1}01\bar{1}10\bar{1}1\bar{1}$

ตัวเลข d_k ที่ทำการเลื่อนไปทางซ้ายหนึ่งตำแหน่ง	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
ตัวเลข d_k		1	0	0	1	0	1	1	0	1
ตัวเลข δ_k	1	$\bar{1}$	0	1	$\bar{1}$	1	0	$\bar{1}$	1	$\bar{1}$

2.4.2 การแปลงจากการเข้ารหัสอาร์เอนฐานสองไปยังระบบจำนวนฐานสอง

การแปลงจากการเข้ารหัสอาร์เอนฐานสองไปยังระบบจำนวนฐานสองนั้นไม่สามารถทำการคำนวณแบบขนานหรือแบบเชื่อมตรงได้ ดังตัวอย่าง

ถ้าต้องการแปลงการเข้ารหัสอาร์เอน

$$100000000$$

ไปยังระบบจำนวนฐานสอง จะได้ผลลัพธ์ คือ

$$100000000$$

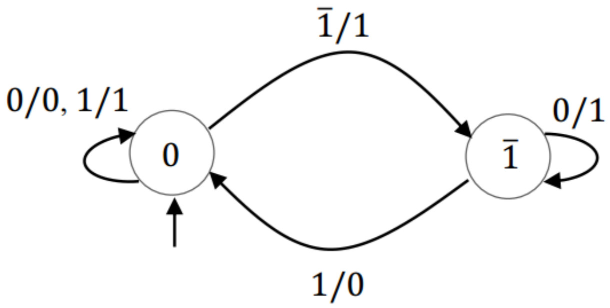
แต่ถ้าต้องการแปลงการเข้ารหัสอาร์เอน

$$10000000\bar{1}$$

ไปยังระบบจำนวนฐานสอง

$$011111111$$

ดังนั้น ถ้าการเข้ารหัสอาร์เอนมีตัวเลข 0 ติดกันเป็นจำนวนมาก ในขั้นตอนการแปลงจำเป็นต้องตรวจสอบตัวเลข 0 ไปเรื่อย ๆ เพื่อหาว่ามีตัวเลขตัวถัดไปที่ไม่ใช่ 0 ที่จะส่งผลต่อผลลัพธ์ของการแปลงหรือไม่ ทั้งนี้การแปลงสามารถทำได้โดยการแปลงจากขวามาซ้าย (right-to-left process) โดยใช้ออโตมาตาชนิดเปลี่ยนตัวแปรดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 2 ออโตมาตาชนิดเปลี่ยนตัวแปรสำหรับฐานสอง อ้างอิงจาก [39]

สำหรับการแปลงจากระบบจำนวนฐานที่เป็นจำนวนเต็มคู่บวกไปยังการเข้ารหัสอาร์เอนในฐานเดียวกัน ซึ่งสามารถทำการคำนวณแบบขนานหรือแบบเชื่อมตรงได้นั้น สามารถสรุปได้ดังนี้

กำหนดให้รูปแบบแทนจำนวนที่ต้องการแปลง คือ

$$X = d_n d_{n-1} \dots d_j$$

โดยที่ $0 \le d_i \le \beta - 1$ และ $d_{j-1} = 0$

กำหนดให้ c_k มีค่า

$$c_{k+1} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } d_k \ge \dfrac{\beta}{2} \\ 0 & \text{ถ้า } d_k < \dfrac{\beta}{2} \end{cases}$$

โดยที่ $c_j = 0$ จะได้ว่าตัวเลข δ_k ของการเข้ารหัสอาร์เอน สามารถคำนวณได้จากสมการ

$$\delta_k = d_k + c_k - \beta c_{k+1}$$

แต่อย่างไรก็ตาม การแปลงจากระบบจำนวนฐานที่เป็นจำนวนเต็มคี่บวกไปยังการเข้ารหัสอาร์เอนนั้นไม่สามารถทำได้การแปลงแบบขนานหรือแบบเชื่อมตรงได้ เนื่องจากเราไม่สามารถควบคุมขอบเขตการแพร่ของตัวทดในระหว่างการแปลงได้ ดังตัวอย่าง

ถ้าต้องการแปลงระบบจำนวนฐานสามที่มีชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{0,1,2\}$ ที่มีรูปแบบแทนจำนวนคือ

$$111111112$$

ไปยังการเข้ารหัสอาร์เอนที่มีชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{\bar{1}, 0,1\}$ จะได้เป็น

$$1\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}$$

สำหรับงานวิจัยเกี่ยวกับการเข้ารหัสอาร์เอนที่ได้รับการพัฒนาต่อเนื่องมาจนถึงปัจจุบันสามารถสรุปได้ดังนี้

ค.ศ. 2004 [41] เสนออัลกอริทึมการบวก คูณ และยกกำลัง พร้อมทั้งออกแบบวงจรการคำนวณของรูปแบบแทนจำนวนที่เป็นการเข้ารหัสอาร์เอนฐานสอง

ค.ศ. 2005 [42] เสนออัลกอริทึมการคูณของรูปแบบแทนจำนวนที่เป็นการเข้ารหัสอาร์เอนฐานสองแบบต่าง ๆ ได้แก่ การคูณโดยใช้การเข้ารหัสของบูธด้วยฐานสองและฐานสี่

ค.ศ. 2006 [43] เสนอวิธีการเข้ารหัสอาร์เอนฐานสองอีกแบบหนึ่งที่จัดเก็บในรูปแบบของคู่ลำดับที่ประกอบด้วย ทูคอมพลีเมนต์ (two’s complement) และบิตสำหรับใช้ในการพิจารณาการปัดเศษ (round-bit) เรียกว่า การเข้ารหัสคาโนนิคัล (canonical encoding)

ค.ศ. 2011-2012 [31, 32, 44] ได้เสนออัลกอริทึมการบวก ลบ และคูณสำหรับรูปแบบแทนจำนวนที่เป็นการเข้ารหัสคาโนนิคัลและศึกษาการนำไปประยุกต์ใช้กับรูปแบบการแทนจำนวนทศนิยม (floating-point representation)

งานวิจัยที่ผ่านมาทั้งหมดที่เกี่ยวกับการเข้ารหัสอาร์เอนนั้น จะเน้นไปทางด้านการทำงานภายใต้ฐานสองเป็นหลัก ได้แก่ การแปลงระหว่างการเข้ารหัสแบบทูคอมพลีเมนต์และการเข้ารหัสอาร์เอน รวมถึงออกแบบอัลกอริทึมการบวก การลบ และการคูณ แต่ยังไม่มีการศึกษาการทำงานภายใต้ฐานอื่นนอกเหนือจากฐานสอง เช่น ฐานที่เป็นจำนวนเต็มคี่ ฐานที่เป็นจำนวนเต็มลบ เป็นต้น รวมถึงยังไม่มีการนำการคำนวณแบบเชื่อมตรงมาประยุกต์ใช้กับการเข้ารหัสอาร์เอน ซึ่งจะมีประโยชน์อย่างมากต่อปัญหาที่เป็นจำนวนขนาดใหญ่และต้องการการปัดเศษที่บ่อยครั้ง เช่น การประมวลผลสัญญาณ เป็นต้น

แต่อย่างไรก็ตาม การออกแบบการเข้ารหัสอาร์เอนเดิมนั้น ไม่สามารถทำการคำนวณแบบเชื่อมตรงได้ โดยเฉพาะฐานที่เป็นจำนวนเต็มคี่ซึ่งไม่มีสมบัติซ้ำซ้อน หรือฐานที่เป็นจำนวนเต็มคู่บวกก็อาจเกิดปัญหาในการจำกัดขอบเขตการแพร่ของตัวทดในระหว่างการคำนวณได้ ซึ่งจะอธิบายในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 10 จงหาผลบวกระหว่างจำนวน $X = 10000001$ และ $Y = 20000002$ ภายใต้ฐาน $\beta = 6$ และชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{\bar{3}, \bar{2}, \bar{1}, 0,1,2,3\}$ โดยใช้การแปลงชุดตัวเลข

ผลบวกระหว่างจำนวน $X = 10000001$ และ $Y = 20000002$ โดยใช้การแปลงชุดตัวเลขนั้น จะได้ผลลัพธ์ของการบวกกันหลักต่อหลักเท่ากับ 30000003 ซึ่งยังไม่ตรงกับรูปแบบแทนจำนวนที่ถูกต้อง (เนื่องจากตัวเลขในตำแหน่งแรกซ้ายสุดมีค่าเท่ากับ $\frac{\beta}{2} = 3$ และตัวเลขทางขวาตัวแรกที่ไม่ใช่ 0 คือ 3 ซึ่งมีเครื่องหมายเดียวกัน) วิธีการแก้ไขจำเป็นต้องเปลี่ยนตัวเลขในตำแหน่งแรกซ้ายสุดและเกิดตัวทดไปทางซ้าย นั่นคือ เปลี่ยนตัวเลขจาก 3 เป็น $1\bar{3}$ จะได้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องคือ $1\bar{3}0000003$ และรูปแบบแทนจำนวนมีความยาวเพิ่มขึ้นหนึ่งหลัก □

แต่ในการคำนวณแบบเชื่อมตรง เราไม่สามารถทราบได้ว่าเมื่อเราอ่านเจอตัวเลข 3 และตามด้วยตัวเลข 0 ต่อเนื่องกัน ตัวเลขถัดไปที่ไม่ใช่ 0 จะส่งผลกระทบต่อตัวเลข 3 ตัวแรกที่อยู่ซ้ายสุดหรือไม่ ซึ่งเราไม่สามารถใช้วิธีการเปลี่ยนตัวเลขจาก 3 เป็น $1\bar{3}$ รอไว้ก่อนได้ เพราะอาจจะมีกรณีที่ผลลัพธ์นั้นถูกต้องอยู่แล้ว เช่น $30000000\bar{3}$ เป็นต้น จากปัญหาดังกล่าวทำให้การเข้ารหัสอาร์เอนเดิมนั้นไม่รองรับการคำนวณแบบเชื่อมตรงที่จะผลิตตัวเลขผลลัพธ์ที่มีค่านัยสำคัญสูงสุดออกมาก่อนเสมอ จึงเป็นที่มาของงานวิจัยนี้ที่จะออกแบบระบบจำนวนใหม่ที่ยังคงสมบัติของการปัดเศษแบบการเข้ารหัสอาร์เอนและรองรับการคำนวณแบบเชื่อมตรงด้วย

3. ระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มบวก

ในงานวิจัยนี้เราต้องการออกแบบระบบจำนวนที่มีความสามารถในการปัดเศษแบบการเข้ารหัสอาร์เอนและยังต้องสามารถรองรับการคำนวณแบบเชื่อมตรงได้ เนื่องจากการเข้ารหัสอาร์เอนนั้นกำหนดให้ใช้ชุดตัวเลขที่ประกอบด้วยจำนวนเต็มซึ่งมีค่าไม่เกินครึ่งหนึ่งของค่าฐาน ถึงแม้การเข้ารหัสอาร์เอนจะมีสมบัติซ้ำซ้อนในฐานจำนวนเต็มคู่ซึ่งเป็นหนึ่งในสมบัติที่จำเป็นต่อการคำนวณแบบเชื่อมตรง แต่สำหรับฐานจำนวนเต็มคี่นั้นไม่มีสมบัติซ้ำซ้อนด้วย ทำให้ในฐานจำนวนเต็มคี่ไม่สามารถทำการคำนวณแบบเชื่อมตรงได้ อีกทั้งการเข้ารหัสอาร์เอนยังอนุญาตให้ใช้ตัวเลขที่มีค่าเท่ากับครึ่งหนึ่งของค่าฐานด้วย เช่น ฐาน $\beta = 10$ ใช้ชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{\bar{5}, \bar{4}, \bar{3}, \bar{2}, \bar{1}, 0,1,2,3,4,5\}$ เป็นต้น ซึ่งการอนุญาตให้ใช้ตัวเลข 5 และ $\bar{5}$ ในฐาน $\beta = 10$ มาใช้ในการคำนวณจะเกิดปัญหาในการตัดสินใจสำหรับการส่งตัวทดไปยังหลักถัดไปหรือการรอรับตัวทดใหม่จะกำลังเข้ามา อีกทั้งยังต้องทำให้ผลลัพธ์จากการคำนวณยังคงอยู่ในรูปแบบที่ถูกต้องของการเข้ารหัสอาร์เอนด้วย จึงเกิดเป็นปัญหาของงานวิจัยนี้

เราได้เสนอวิธีการแก้ปัญหาดังกล่าวโดยเสนอระบบจำนวนใหม่ที่ใช้ชุดตัวเลขที่ประกอบด้วยตัวเลขตรรกยะเรียกว่า *ระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะ* ซึ่งการเลือกใช้ตัวเลขตรรกยะนั้นสามารถหลีกเลี่ยงการใช้ตัวเลขที่มีค่าเป็นครึ่งหนึ่งของค่าฐานในฐานจำนวนเต็มคู่ได้และยังสามารถเพิ่มจำนวนตัวเลขเข้าไปในชุดตัวเลขเพื่อทำให้เกิดสมบัติซ้ำซ้อนในฐานจำนวนเต็มคี่ได้อีกด้วย ระบบจำนวนใหม่นี้สามารถทำงานได้ภายใต้ฐานที่เป็นจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบ อีกทั้งยังรองรับสมบัติการปัดเศษแบบการเข้ารหัสอาร์เอนและสามารถทำการคำนวณแบบเชื่อมตรงได้ โดยในบทนี้จะกล่าวถึงการทำงานของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มบวกดังนิยามต่อไปนี้

นิยามที่ 7 (ระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มบวก)

ระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะประกอบด้วยฐาน $\beta \geq 2$ และชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{-\alpha, -\alpha + \frac{1}{2}, \dots, 0, \dots, \alpha - \frac{1}{2}, \alpha\}$ โดยที่ $\alpha = \frac{\beta + (\beta \bmod 2)}{4}$ จำนวน X ใด ๆ สามารถแสดงเป็นรูปแบบแทนจำนวน $X = (x_n x_{n-1} \dots x_0 . x_{-1} x_{-2} \dots)_\beta$ โดยที่ $x_i \in \mathcal{D}$ และ $i \leq n$

การปัดเศษแบบราวด์ทูเนียเรสท์ของจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะ $x_n x_{n-1} \dots x_0 . x_{-1} x_{-2} \dots$ สามารถทำได้โดยการตัดรูปแบบแทนจำนวน ณ ตำแหน่ง j $(j \leq n)$ ใด ๆ โดยที่

$$\left| \sum_{i=-\infty}^{j-1} x_i \times \beta^i \right| < \frac{|\beta|^j}{2}$$

รูปแบบแทนจำนวนใหม่ $X' = x_n x_{n-1} \dots x_j$ จะมีค่าเชิงตัวเลขเทียบเท่าการทำการปัดเศษแบบราวด์ทูเนียเรสท์นั่นเอง อีกทั้งยังคงรูปแบบที่ถูกต้องของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะ ตัวอย่างชุดตัวเลขตรรกยะในระบบจำนวนนี้แสดงดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 4 ตัวอย่างชุดตัวเลขตรรกยะของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มบวก

ฐาน $\boldsymbol{\beta}$	**ชุดตัวเลข $\boldsymbol{\mathcal{D}}$**
2	$\{\frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$
3	$\{\bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$
4	$\{\bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$
5	$\{\frac{\bar{3}}{2}, \bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\}$
6	$\{\frac{\bar{3}}{2}, \bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\}$

จากตารางที่ 4 จะสังเกตได้ว่าตัวเลขตรรกยะแต่ละตัวในชุดตัวเลข $\mathcal{D}$ ในฐานใด ๆ จะมีค่าห่างกันเท่ากับ $\frac{1}{2}$ เสมอ และในบางฐาน β ที่ติดกันจะใช้ชุดตัวเลข $\mathcal{D}$ เดียวกันได้ เช่น ฐาน $\beta = 3$ และฐาน $\beta = 4$ จะได้ใช้ชุดเลขเดียวกันคือ $\mathcal{D} = \{\bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ เป็นต้น สำหรับการพิสูจน์ความสมบูรณ์ของระบบจำนวนที่นำเสนอใหม่นี้จะแสดงในหัวข้อถัดไป

3.1 ความสมบูรณ์ของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มบวก

หลังจากที่เราเสนอนิยามของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะแล้ว ต่อไปเราจะพิสูจน์ความสมบูรณ์ (completeness) ของระบบจำนวนใหม่โดยแสดงให้เห็นว่าจำนวนใด ๆ สามารถมีรูปแบบแทนจำนวนในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะได้ สำหรับทฤษฎีบทต่อไปนี้จะกล่าวถึงการแปลงจำนวนใด ๆ มายังระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานเดียวกัน

ทฤษฎีบทที่ 1 (ความสมบูรณ์ของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มบวก)

จำนวนใด ๆ สามารถมีรูปแบบแทนจำนวนในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มบวกเดียวกันได้

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 1 : สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ เราเสนออัลกอริทึมการแปลงแบบขนานจากจำนวนใด ๆ ไปยังรูปแบบแทนจำนวนของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มบวกเดียวกัน โดยอัลกอริทึมที่ 1 รองรับการแปลงภายใต้ฐานจำนวนเต็มคู่บวก และอัลกอริทึมที่ 2 รองรับการแปลงภายใต้ฐานจำนวนเต็มคี่บวก

3.1.1 การแปลงสำหรับฐานจำนวนเต็มคู่บวก

การแปลงแบบขนานของจำนวนใด ๆ มายังรูปแบบแทนจำนวนของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มคู่บวกนั้น เริ่มจากทำการอ่านตัวเลขนำเข้า $x_n x_{n-1} \dots x_0 . x_{-1} x_{-2} \dots$ (x_i เป็นจำนวนเต็มที่มีค่า $0 \le x_i \le \beta - 1$ และ $i \le n$) เข้ามาพร้อมกันในทุกตำแหน่ง หลังจากนั้นในทุกตำแหน่งจะผลิตตัวทด c_{i+1} ออกไปยังตำแหน่งทางซ้ายเพื่อเป็นการลดค่าของตัวเลขนำเข้า x_i ให้อยู่ในขอบเขตที่สามารถรับตัวทด c_i ที่เข้ามาได้ซึ่ง $c_i \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ ดังนั้นจะได้ตัวเลขนำออกชั่วคราว $y_{n+1} y_n \dots y_0 . y_{-1} y_{-2}$ โดยที่ y_i มีค่าเท่ากับ $-\alpha + \frac{1}{2} \le y_i \le \alpha + 1$ จะสังเกตได้ว่า y_i ยังมีค่าเกินขอบเขตที่กำหนดในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะจึงต้องทำการแปลงแบบขนานอีกรอบหนึ่งโดยกำหนดตัวทดคือ $c_i \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ จะได้ผลลัพธ์สุดท้ายที่ถูกต้องคือ $z_{n+2} z_{n+1} \dots z_0 . z_{-1} z_{-2}$ โดยที่ $-\alpha \le z_i \le \alpha$ ซึ่งอยู่ในขอบเขตที่กำหนดของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะในนิยามที่ 7 สำหรับขั้นตอนการแปลงจำนวนแบบขนานสำหรับระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มคู่บวกจะเป็นดังอัลกอริทึมที่ 1

อัลกอริทึมที่ 1 (การแปลงจำนวนแบบขนานสำหรับระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มคู่บวก)

input $X = x_n x_{n-1} \dots x_0 . x_{-1} x_{-2} \dots$ where $0 \le x_i \le \beta - 1$ (Integer)

output $Z = z_{n+2} z_{n+1} \dots z_0 . z_{-1} z_{-2} \dots$ where $-\alpha \le z_i \le \alpha$ (Rational)

begin

$c_{initial} = 0$

for all $(i \le n)$

if $0 \le x_i \le \alpha$ **then** $c_{i+1} = 0$ **endif**

if $\alpha + \frac{1}{2} \le x_i \le \frac{\beta}{2} + \alpha$ **then** $c_{i+1} = \frac{1}{2}$ **endif**

if $\frac{\beta}{2} + \alpha + \frac{1}{2} \le x_i \le \beta - 1$ **then** $c_{i+1} = 1$ **endif**

$y_i = x_i - (c_{i+1} \times \beta) + c_i$

$y_{n+1} = c_{n+1}$

for all $(i \leq n+1)$

if $-\alpha + \frac{1}{2} \leq y_i \leq \alpha - \frac{1}{2}$ then $c_{i+1} = 0$ endif

if $\alpha \leq y_i \leq \alpha + 1$ then $c_{i+1} = \frac{1}{2}$ endif

$z_i = y_i - (c_{i+1} \times \beta) + c_i$

$z_{n+2} = c_{n+2}$

end

พิสูจน์อัลกอริทึมที่ 1: ในการพิสูจน์นี้เราจะแสดงให้เห็นถึงความถูกต้อง (correctness) และสมเหตุสมผล (validation) ของอัลกอริทึมที่ 1

1) การพิสูจน์ความถูกต้อง (proof of correctness)

สำหรับการพิสูจน์นี้เราจะแสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์จากการแปลงจำนวน X ไปยังจำนวน Z จะยังคงให้ค่าเชิงตัวเลขที่เท่ากัน $\|X\| = \|Z\|$

$$\begin{aligned}
\|X\| &= x_n\beta^n + x_{n-1}\beta^{n-1} + \cdots \\
&= (x_n\beta^n - c_{n+1}\beta^{n+1}) + (x_{n-1}\beta^{n-1} - c_n\beta^n) + \cdots + (c_{n+1}\beta^{n+1} + c_n\beta^n + c_{n-1}\beta^{n-1} + ..) \\
&= c_{n+1}\beta^{n+1} + (x_n\beta^n - c_{n+1}\beta^{n+1} + c_n\beta^n) + (x_{n-1}\beta^{n-1} - c_n\beta^n + c_{n-1}\beta^{n-1}) + \cdots \\
&= c_{n+1}\beta^{n+1} + (x_n - c_{n+1}\beta + c_n)\beta^n + (x_{n-1} - c_n\beta + c_{n-1})\beta^{n-1} + \cdots \\
&= y_{n+1}\beta^{n+1} + y_n\beta^n + y_{n-1}\beta^{n-1} + \cdots \\
&= (y_{n+1}\beta^{n+1} - c_{n+2}\beta^{n+2}) + (x_n\beta^n - c_{n+1}\beta^{n+1}) + \cdots + (c_{n+2}\beta^{n+2} + c_{n+1}\beta^{n+1} + c_n\beta^n + ..) \\
&= c_{n+2}\beta^{n+2} + (y_{n+1}\beta^{n+1} - c_{n+2}\beta^{n+2} + c_{n+1}\beta^{n+1}) + (y_n\beta^n - c_{n+1}\beta^{n+1} + c_n\beta^n) + \cdots \\
&= c_{n+2}\beta^{n+2} + (y_{n+1} - c_{n+2}\beta + c_{n+1})\beta^{n+1} + (y_n - c_{n+1}\beta + c_n)\beta^n + \cdots \\
&= z_{n+2}\beta^{n+2} + z_{n+1}\beta^{n+1} + z_n\beta^n + \cdots \\
&= \|Z\|
\end{aligned}$$

2) การพิสูจน์ความสมเหตุสมผล (proof of validation)

ในการพิสูจน์จะแสดงให้เห็นว่า $-\alpha \leq z_i \leq \alpha$ เราแบ่งการพิสูจน์นี้ออกเป็นสองส่วนดังนี้

ส่วนที่ 1: ตัวเลขนำเข้า x_i จะถูกแปลงไปยังตัวเลขนำออกชั่วคราว y_i โดยที่ $0 \leq x_i \leq \beta - 1$ และ $-\alpha + \frac{1}{2} \leq y_i \leq \alpha + 1$ ซึ่งกำหนดให้ $\alpha = \frac{\beta}{4}$ เนื่องจาก $y_i = x_i - (c_{i+1} \times \beta) + c_i$ และ $c_i \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ จะได้ว่า $x_i = y_i + c_{i+1}\beta - c_i$

กรณีที่ 1: $0 \leq x_i \leq \alpha$

จากอัลกอริทึมจะได้ว่า $c_{i+1} = 0$ และ $x_i = y_i - c_i$ ดังนั้น $c_i \leq y_i \leq \alpha + c_i$ เนื่องจาก $c_i \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ จะได้ว่า y_i ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีค่าเท่ากับ $0 \leq y_i \leq \alpha + 1$

กรณีที่ 2: $\alpha + \frac{1}{2} \leq x_i \leq \frac{\beta}{2} + \alpha$

จากอัลกอริทึมจะได้ว่า $c_{i+1} = \frac{1}{2}$ และ $x_i = y_i + \frac{\beta}{2} - c_i$ ดังนั้น $-\alpha + \frac{1}{2} + c_i \leq y_i \leq \alpha + c_i$ เนื่องจาก $c_i \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ จะได้ว่า y_i ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีค่าเท่ากับ $-\alpha + \frac{1}{2} \leq y_i \leq \alpha + 1$

กรณีที่ 3: $\frac{\beta}{2} + \alpha + \frac{1}{2} \leq x_i \leq \beta - 1$

จากอัลกอริทึมจะได้ว่า $c_{i+1} = 1$ และ $x_i = y_i + \beta - c_i$ ดังนั้น $-\alpha + \frac{1}{2} + c_i \leq y_i \leq -1 + c_i$ เนื่องจาก $c_i \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ จะได้ว่า y_i ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีค่าเท่ากับ $-\alpha + \frac{1}{2} \leq y_i \leq 0$

จากทั้งสามกรณีของส่วนที่หนึ่ง เราสามารถสรุปได้ว่า $-\alpha + \frac{1}{2} \leq y_i \leq \alpha + 1$

ส่วนที่ 2: ตัวเลขนำออกชั่วคราว y_i บางตัวอาจจะมีค่าเกินกว่าที่กำหนดในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะ ดังนั้นจึงต้องทำการจัดการตัวเลขส่วนเกินออกโดยแปลงตัวเลขนำออกชั่วคราว y_i ไปยังตัวเลขนำออก z_i ซึ่งรับประกันได้ว่า $-\alpha \leq z_i \leq \alpha$ ทั้งนี้ $z_i = y_i - (c_{i+1} \times \beta) + c_i$ และ $c_i \in \{0, \frac{1}{2}\}$ จะได้ว่า $y_i = z_i + c_{i+1}\beta - c_i$

กรณีที่ 1: $-\alpha + \frac{1}{2} \leq y_i \leq \alpha - \frac{1}{2}$

จากอัลกอริทึมจะได้ว่า $c_{i+1} = 0$ และ $y_i = z_i - c_i$ ดังนั้น $-\alpha + \frac{1}{2} + c_i \leq z_i \leq \alpha - \frac{1}{2} + c_i$ เนื่องจาก $c_i \in \{0, \frac{1}{2}\}$ จะได้ว่า z_i ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีค่าเท่ากับ $-\alpha + \frac{1}{2} \leq z_i \leq \alpha$

กรณีที่ 2: $\alpha \leq y_i \leq \alpha + 1$

จากอัลกอริทึมจะได้ว่า $c_{i+1} = \frac{1}{2}$ และ $y_i = z_i + \frac{\beta}{2} - c_i$ ดังนั้น $-\alpha + c_i \leq z_i \leq -\alpha + 1 + c_i$ เนื่องจาก $c_i \in \{0, \frac{1}{2}\}$ จะได้ว่า z_i ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีค่าเท่ากับ $-\alpha \leq z_i \leq -\alpha + \frac{1}{2}$

จากทั้งสองกรณีของส่วนที่สอง เราสามารถสรุปได้ว่า $-\alpha \leq z_i \leq \alpha$ ซึ่งมีค่าอยู่ในขอบเขตที่กำหนดของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มคู่บวก ■

สำหรับตัวอย่างของการแปลงจำนวนใด ๆ ให้มาอยู่ในระบบแทนจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะนั้นแสดงในตัวอย่างที่ 11 และตัวอย่างที่ 12 โดยตัวอย่างที่ 11 จะเป็นการแปลงจากระบบจำนวนดั้งเดิมภายใต้ฐาน $\beta = 2$ และใช้ชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{0, 1\}$ ให้มาอยู่ในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะที่ใช้ชุดตัวเลข $\mathcal{D}' = \{\frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$ ภายใต้ฐานเดียวกัน ส่วนตัวอย่างที่ 12 จะเป็นการแปลงภายใต้ฐาน $\beta = 4$ จากชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, 3\}$ ไปยังชุดตัวเลข $\mathcal{D}' = \{\bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$

ตัวอย่างที่ 11 กำหนดให้ฐาน $\beta = 2$ จงหารูปแบบแทนจำนวน $X = (1011)_2$ ในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะ

จากอัลกอริทึมที่ 1 รูปแบบแทนจำนวน $X = (1011)_2$ ภายใต้ฐานจำนวนเต็มคู่บวก $\beta = 2$ และชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{0, 1\}$ สามารถแปลงไปยังรูปแบบแทนจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะ $Z = (\frac{1}{2}\frac{\bar{1}}{2}\frac{1}{2}0\frac{\bar{1}}{2}0)_2$ โดยมีชุดตัวเลข $\mathcal{D}' = \{\frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$ ภายใต้ฐานเดียวกัน ซึ่งขั้นตอนการแปลงแสดงดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 5 ตัวอย่างการแปลงจำนวน $X = (1011)_2$ ไปยังระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะ

รูปแบบแทนจำนวน X	0	0	1	0	1	1
ตัวทด C	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
ผลลัพธ์ชั่วคราว Y	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
ตัวทด C	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
ผลลัพธ์ Z	$\frac{1}{2}$	$\frac{\bar{1}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\bar{1}}{2}$	0

ทั้งนี้ค่าเชิงตัวเลขของจำนวน $X = (1011)_2$ และจำนวน $Z = (\frac{1}{2}\frac{\bar{1}}{2}\frac{1}{2}0\frac{\bar{1}}{2}0)_2$ ภายใต้ฐาน $\beta = 2$ สามารถคำนวณได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
\|X\| &= \sum_{i=0}^{3} x_i \times \beta^i \\
&= (1\times 2^3) + (0\times 2^2) + (1\times 2^1) + (1\times 2^0) \\
&= 11 \\
\|Z\| &= \sum_{i=0}^{5} z_i \times \beta^i \\
&= \left(\frac{1}{2}\times 2^5\right) + \left(\frac{\bar{1}}{2}\times 2^4\right) + \left(\frac{1}{2}\times 2^3\right) + (0\times 2^2) + \left(\frac{\bar{1}}{2}\times 2^1\right) + (0\times 2^0)
\end{aligned}$$

$$= \quad 11$$

จะเห็นได้ว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการแปลงจำนวนด้วยอัลกอริทึมที่ 1 ให้ค่าเชิงตัวเลขของจำนวน X และ Z ที่มีค่าเท่ากัน □

ตัวอย่างที่ 12 กำหนดให้ฐาน $\beta = 4$ จงหารูปแบบแทนจำนวน $X = (2301)_4$ ในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะ

จากอัลกอริทึมที่ 1 รูปแบบแทนจำนวน $X = (2301)_4$ ภายใต้ฐานจำนวนเต็มคู่บวก $\beta = 4$ และชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, 3\}$ สามารถแปลงไปยังรูปแบบแทนจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะ $Z = (\frac{1}{2}1\bar{1}\frac{1}{2}\bar{1})_4$ โดยมีชุดตัวเลข $\mathcal{D}' = \{\bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ ภายใต้ฐานเดียวกัน ซึ่งขั้นตอนการแปลงแสดงดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 6 ตัวอย่างการแปลงจำนวน $X = (2301)_4$ ไปยังระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะ

รูปแบบแทนจำนวน X	0	2	3	0	1
ตัวทด C	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
ผลลัพธ์ชั่วคราว Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	1
ตัวทด C	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
ผลลัพธ์ Z	$\frac{1}{2}$	1	$\bar{1}$	$\frac{1}{2}$	$\bar{1}$

ทั้งนี้ค่าเชิงตัวเลขของจำนวน $X = (2301)_4$ และจำนวน $Z = (\frac{1}{2}1\bar{1}\frac{1}{2}\bar{1})_4$ ภายใต้ฐาน $\beta = 4$ สามารถคำนวณได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
\|X\| &= \sum_{i=0}^{3} x_i \times \beta^i \\
&= (2\times4^3) + (3\times4^2) + (0\times4^1) + (1\times4^0) \\
&= 177 \\
\|Z\| &= \sum_{i=0}^{4} z_i \times \beta^i \\
&= \left(\frac{1}{2}\times4^4\right) + (1\times4^3) + (\bar{1}\times4^2) + \left(\frac{1}{2}\times4^1\right) + (\bar{1}\times4^0) \\
&= 177
\end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการแปลงจำนวนด้วยอัลกอริทึมที่ 1 ให้ค่าเชิงตัวเลขของจำนวน X และ Z ที่มีค่าเท่ากัน □

3.1.2 การแปลงสำหรับฐานจำนวนเต็มคี่บวก

อัลกอริทึมการแปลงจำนวนแบบขนานของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มคี่บวกนั้น จะมีขั้นตอนการแปลงคล้ายกับอัลกอริทึมการแปลงจำนวนแบบขนานสำหรับฐานจำนวนเต็มคู่บวก แต่ในฐานจำนวนเต็มคี่บวกนี้สามารถแปลงจำนวนให้ได้รูปแบบแทนจำนวนในระบบชุดตัวเลขตรรกยะในขั้นตอนเดียวเมื่อเปรียบเทียบกับสองขั้นตอนในฐานจำนวนเต็มคู่บวก เนื่องจากภายใต้ฐานจำนวนเต็มคี่บวกนั้นมีการใช้จำนวนตัวเลขตรรกยะในชุดตัวเลขที่มากกว่าในฐานจำนวนเต็มคู่บวกจึงสามารถจัดการเรื่องการกระจายตัวทดออกไปและรับตัวทดเข้าได้ดีกว่า จึงส่งผลให้ผลลัพธ์ที่ได้จากการแปลงไม่มีตัวเลขตรรกยะเกินกว่าขอบเขตที่กำหนดของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะในนิยามที่ 7 สำหรับอัลกอริทึมการแปลงจำนวนแบบขนานสำหรับระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มคี่บวกจะเป็นดังอัลกอริทึมที่ 2

อัลกอริทึมที่ 2 (การแปลงจำนวนแบบขนานสำหรับระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มคี่บวก)

input $X = x_n x_{n-1} \dots x_0 . x_{-1} x_{-2} \dots$ where $0 \le x_i \le \beta - 1$ (Integer)

output $Z = z_{n+1} z_n \dots z_0 . z_{-1} z_{-2} \dots$ where $-\alpha \le z_i \le \alpha$ (Rational)

begin

$c_{initial} = 0$

for all $(i \le n)$

if $0 \le x_i \le \alpha - 1$ **then** $c_{i+1} = 0$ **endif**

if $\alpha - \frac{1}{2} \le x_i \le \frac{\beta}{2} + \alpha - 1$ **then** $c_{i+1} = \frac{1}{2}$ **endif**

if $\frac{\beta}{2} + \alpha - \frac{1}{2} \le x_i \le \beta - 1$ **then** $c_{i+1} = 1$ **endif**

$z_i = x_i - (c_{i+1} \times \beta) + c_i$

$z_{n+1} = c_{n+1}$

end

พิสูจน์อัลกอริทึมที่ 2 : ในการพิสูจน์นี้เราจะแสดงให้เห็นถึงความถูกต้อง (correctness) และสมเหตุสมผล (validation) ของอัลกอริทึมที่ 2

1) การพิสูจน์ความถูกต้อง (proof of correctness)

สำหรับการพิสูจน์นี้เราจะแสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์จากการแปลงจำนวน X ไปยังจำนวน Z จะยังคงให้ค่าเชิงตัวเลขที่เท่ากัน $\|X\| = \|Z\|$

$$
\begin{aligned}
\|X\| &= x_n\beta^n + x_{n-1}\beta^{n-1} + \cdots \\
&= (x_n\beta^n - c_{n+1}\beta^{n+1}) + (x_{n-1}\beta^{n-1} - c_n\beta^n) + \cdots + (c_{n+1}\beta^{n+1} + c_n\beta^n \\
&\qquad + c_{n-1}\beta^{n-1} + ..) \\
&= c_{n+1}\beta^{n+1} + (x_n\beta^n - c_{n+1}\beta^{n+1} + c_n\beta^n) + (x_{n-1}\beta^{n-1} - c_n\beta^n \\
&\qquad + c_{n-1}\beta^{n-1}) + \cdots \\
&= c_{n+1}\beta^{n+1} + (x_n - c_{n+1}\beta + c_n)\beta^n + (x_{n-1} - c_n\beta + c_{n-1})\beta^{n-1} + \cdots \\
&= z_{n+1}\beta^{n+1} + z_n\beta^n + z_{n-1}\beta^{n-1} + \cdots \\
&= \|Z\|
\end{aligned}
$$

2) การพิสูจน์ความสมเหตุสมผล (proof of validation)

ในการพิสูจน์นี้จะแสดงให้เห็นว่า $-\alpha \le z_i \le \alpha$ เริ่มจากตัวเลขนำเข้า x_i จะถูกแปลงไปยังตัวเลขนำออก z_i โดยที่ $0 \le x_i \le \beta - 1$ และ $-\alpha \le z_i \le \alpha$ ซึ่งกำหนดให้ $\alpha = \frac{\beta+1}{4}$ เนื่องจาก $z_i = x_i - (c_{i+1} \times \beta) + c_i$ และ $c_i \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ จะได้ว่า $x_i = z_i + c_{i+1}\beta - c_i$

กรณีที่ 1: $0 \le x_i \le \alpha - 1$

จากอัลกอริทึมจะได้ว่า $c_{i+1} = 0$ และ $x_i = z_i - c_i$ ดังนั้น $c_i \le z_i \le \alpha - 1 + c_i$ เนื่องจาก $c_i \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ จะได้ว่า z_i ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีค่าเท่ากับ $0 \le z_i \le \alpha$

กรณีที่ 2: $\alpha - \frac{1}{2} \le x_i \le \frac{\beta}{2} + \alpha - 1$

จากอัลกอริทึมจะได้ว่า $c_{i+1} = \frac{1}{2}$ และ $x_i = z_i + \frac{\beta}{2} - c_i$ ดังนั้น $-\alpha + \mathrm{c}_i \le \mathrm{z}_i \le \alpha - 1 + c_i$ เนื่องจาก $c_i \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ จะได้ว่า y_i ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีค่าเท่ากับ $-\alpha \le z_i \le \alpha$

กรณีที่ 3: $\frac{\beta}{2} + \alpha - \frac{1}{2} \le x_i \le \beta - 1$

จากอัลกอริทึมจะได้ว่า $c_{i+1} = 1$ และ $x_i = z_i + \beta - c_i$ ดังนั้น $-\alpha + c_i \le z_i \le -1 + c_i$ เนื่องจาก $c_i \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ จะได้ว่า y_i ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีค่าเท่ากับ $-\alpha \le z_i \le 0$.

จากทั้งสามกรณี เราสามารถสรุปได้ว่า $-\alpha \leq z_i \leq \alpha$ ซึ่งมีค่าอยู่ในขอบเขตที่กำหนดของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มคี่บวก ■

ตัวอย่างการแปลงระบบจำนวนดั้งเดิมไปยังระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มคี่บวก $\beta = 3$ จากชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{0, 1, 2\}$ ไปยังชุดตัวเลขตรรกยะ $\mathcal{D}' = \{\bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ แสดงในตัวอย่างที่ 13 ส่วนอีกตัวอย่างหนึ่งคือตัวอย่างที่ 14 จะแสดงการแปลงจำนวนภายใต้ฐาน $\beta = 5$ จากชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ไปยังชุดตัวเลขตรรกยะ $\mathcal{D}' = \{\frac{\bar{3}}{2}, \bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\}$

ตัวอย่างที่ 13 กำหนดให้ฐาน $\beta = 3$ จงหารูปแบบแทนจำนวน $X = (1022)_3$ ในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะ

จากอัลกอริทึมที่ 2 รูปแบบแทนจำนวน $X = (1022)_3$ ภายใต้ฐานจำนวนเต็มคี่บวก $\beta = 3$ และใช้ชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{0, 1, 2\}$ สามารถแปลงไปยังรูปแบบแทนจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะ $Z = (\frac{1}{2}\frac{\bar{1}}{2}10\bar{1})_3$ โดยใช้ชุดตัวเลข $\mathcal{D}' = \{\bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ ภายใต้ฐานเดียวกัน ซึ่งขั้นตอนการแปลงแสดงดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 7 ตัวอย่างการแปลงจำนวน $X = (1022)_3$ ไปยังระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะ

รูปแบบแทนจำนวน X	0	1	0	2	2
ตัวทด C	$\frac{1}{2}$	0	1	1	0
ผลลัพธ์ Z	$\frac{1}{2}$	$\frac{\bar{1}}{2}$	1	0	$\bar{1}$

ทั้งนี้ค่าเชิงตัวเลขของจำนวน $X = (1022)_3$ และจำนวน $Z = (\frac{1}{2}\frac{\bar{1}}{2}10\bar{1})_3$ ภายใต้ฐาน $\beta = 3$ สามารถคำนวณได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \|X\| &= \sum_{i=0}^{3} x_i \times \beta^i \\ &= (1\times3^3) + (0\times3^2) + (2\times3^1) + (2\times3^0) \\ &= 35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|Z\| &= \sum_{i=0}^{4} z_i \times \beta^i \\ &= \left(\frac{1}{2}\times3^4\right) + \left(\frac{\bar{1}}{2}\times3^3\right) + (1\times3^2) + (0\times3^1) + (\bar{1}\times3^0) \end{aligned}$$

$$= \quad 35$$

จะเห็นได้ว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการแปลงจำนวนด้วยอัลกอริทึมที่ 2 ให้ค่าเชิงตัวเลขของจำนวน X และ Z ที่มีค่าเท่ากัน □

ตัวอย่างที่ 14 กำหนดให้ฐาน $\beta = 5$ จงหารูปแบบแทนจำนวน $X = (4210)_5$ ในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะ

จากอัลกอริทึมที่ 2 รูปแบบแทนจำนวน $X = (4210)_5$ ภายใต้ฐานจำนวนเต็มคี่บวก $\beta = 5$ และใช้ชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ สามารถแปลงไปยังรูปแบบแทนจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะ $Z = (1\frac{\bar{1}}{2}0\frac{\bar{3}}{2}0)_5$ โดยใช้ชุดตัวเลข $\mathcal{D}' = \{\frac{\bar{3}}{2}, \bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\}$ ภายใต้ฐานเดียวกัน ซึ่งขั้นตอนการแปลงแสดงดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 8 ตัวอย่างการแปลงจำนวน $X = (4210)_5$ ไปยังระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะ

รูปแบบแทนจำนวน X	0	4	2	1	0
ตัวทด C	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
ผลลัพธ์ Z	1	$\frac{\bar{1}}{2}$	0	$\frac{\bar{3}}{2}$	0

ทั้งนี้ค่าเชิงตัวเลขของจำนวน $X = (4210)_5$ และจำนวน $Z = (1\frac{\bar{1}}{2}0\frac{\bar{3}}{2}0)_5$ ภายใต้ฐาน $\beta = 5$ สามารถคำนวณได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
\|X\| &= \sum_{i=0}^{3} x_i \times \beta^i \\
&= (4\times 5^3) + (2\times 5^2) + (1\times 5^1) + (0\times 5^0) \\
&= 555 \\
\|Z\| &= \sum_{i=0}^{4} z_i \times \beta^i \\
&= (1\times 5^4) + \left(\frac{\bar{1}}{2}\times 5^3\right) + (0\times 5^2) + \left(\frac{\bar{3}}{2}\times 5^1\right) + (0\times 5^0) \\
&= 555
\end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการแปลงจำนวนด้วยอัลกอริทึมที่ 2 ให้ค่าเชิงตัวเลขของจำนวน X และ Z ที่มีค่าเท่ากัน □

3.2 การคำนวณแบบเชื่อมตรงสำหรับระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มบวก

สำหรับการคำนวณแบบเชื่อมตรงของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มบวกนั้นเป็นดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2 (การคำนวณแบบเชื่อมตรงสำหรับระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มบวก)

การคำนวณแบบเชื่อมตรงสำหรับระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มบวกสามารถคำนวณได้โดยใช้ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงที่มีค่าความหน่วงเป็นจำนวนเต็ม k และจำนวนสถานะเท่ากับ β^k

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 2: ในการพิสูจน์นี้เราได้แปลงเรื่องการคำนวณแบบเชื่อมตรงเป็นปัญหาการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรง โดยเราเสนออัลกอริทึมการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงของระบบชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มบวก อัลกอริทึมนี้สามารถแสดงได้โดยออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงซึ่งมีค่าความหน่วงเป็นจำนวนเต็ม k และจำนวนสถานะเท่ากับ β^k ดังแสดงในอัลกอริทึมที่ 3

อัลกอริทึมที่ 3 (การแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงสำหรับระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มบวก)

Input $X = x_n x_{n-1} \dots$ where $-\gamma \le x_i \le \gamma$ (Rational)

output $Z = z_{n+k} z_{n+k-1} \dots$ where $-\alpha \le z_i \le \alpha$ (Rational)

begin

$m = \frac{\gamma}{\alpha}$

$q_{n+k} = 0$ (initial state)

$g \ge \frac{(-\alpha)(\beta^k - m)}{\beta - 1}$

$j = n$

while $j \le n$ **do**

$z_{j+k} \le \frac{-g + (q_{j+k} \times \beta) + x_j}{\beta^k}$

$q_{j+k-1} = (q_{j+k} \times \beta + x_j) - (z_{j+k} \times \beta^k)$

$j = j - 1$

enddo

end

ก่อนที่เราจะทำการพิสูจน์อัลกอริทึมที่ 3 นั้น เราจะเสนอบทตั้ง (lemma) ที่ 1 ถึงบทตั้งที่ 3 สำหรับใช้ในการพิสูจน์อัลกอริทึมที่ 3 ทั้งนี้บทตั้งที่ 1 แสดงให้เห็นว่าค่าของสถานะที่ใช้ในออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงมีขอบเขตที่พิสูจน์ได้และมีจำนวนสถานะจำกัด ส่วนบทตั้งที่ 2 จะพิสูจน์ว่าจำนวนสถานะที่จำเป็นต้องใช้สำหรับการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงโดยใช้ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงมีค่าเท่ากับ β^k และบทตั้งที่ 3 จะบรรยายถึงการได้มาซึ่งสมการค่าความหน่วง k

เราจะเริ่มจากการอธิบายวิธีการสร้างออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงสำหรับการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรง กำหนดให้ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรง $\mathcal{A} = (Q, E \times \mathcal{D}), 0, F)$ โดยที่ Q คือชุดของสถานะจำกัด $E = \{-\gamma, \dots, \gamma\}$ คือชุดตัวเลขนำเข้าจำกัด $\mathcal{D} = \{-\alpha, \dots, \alpha\}$ คือชุดตัวเลขนำออกจำกัด 0 คือสถานะเริ่มต้น และ F คือ ชุดของการส่งผ่าน (transition) ซึ่งการส่งผ่านระหว่างสถานะสามารถแสดงได้ดังนี้

$$q_{j+k} \xrightarrow{x_j/z_{j+k}} q_{j+k-1}$$

โดยที่ q_{j+k} และ q_{j+k-1} เป็นสมาชิกของ Q และ x_j คือตัวเลขนำเข้า z_{j+k} คือตัวเลขนำออก ทั้งนี้เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าจำนวนของสถานะ q มีจำกัด โดยแสดงให้เห็นว่าค่าของสถานะ q อยู่ในขอบเขตที่จำกัด ดังบทตั้งที่ 1

บทตั้งที่ 1

สถานะ q ใด ๆ ของชุดสถานะ Q สำหรับออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงจะมีค่าจำกัดและอยู่ในขอบเขต $\frac{(-\alpha)(\beta^k - m)}{\beta - 1} \le q \le \frac{\alpha(\beta^k - m)}{\beta - 1}$ เสมอ

พิสูจน์:

สมมติให้ l และ u เป็นค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของสถานะ $q \in Q$

$$l \le q \le u \tag{1}$$

เรานิยามให้ $Q = \{l, l + \frac{1}{2}, \dots, 0, \dots, u - \frac{1}{2}, u\}$ ค่าฐาน $\beta \ge 2$ และสถานะ q_{j+k-1} ถูกนิยามโดยสมการต่อไปนี้

$$q_{j+k-1} = \left(q_{j+k}\beta + x_j\right) - (z_{j+k}\beta^k) \tag{2}$$

จากสมการที่ (1) และสมการที่ (2) จะได้ว่า

$$l \le \left(q_{j+k}\beta + x_j\right) - (z_{j+k}\beta^k) \le u$$

ทั้งนี้ตัวเลขนำออก z_{j+k} สามารถคำนวณได้จากอสมการต่อไปนี้

$$\frac{-u + (q_{j+k}\beta + x_j)}{\beta^k} \le z_{j+k} \le \frac{-l + (q_{j+k}\beta + x_j)}{\beta^k} \tag{3}$$

จากอสมการที่ (3) เราสามารถคำนวณค่า l ได้จากอสมการต่อไปนี้

$$z_{j+k} \leq \frac{-l+(q_{j+k}\beta+x_j)}{\beta^k}$$

กำหนดให้ $z_{j+k} = -\alpha,\ q_{j+k} = l,\ x_j = m(-\alpha),\ m = \frac{\gamma}{\alpha}$ และ $\alpha = \frac{\beta+(\beta mod2)}{4}$ จะได้ว่า

$$l \geq \frac{(-\alpha)(\beta^k-m)}{\beta-1} \tag{4}$$

จากอสมการที่ (3) ค่า u สามารถถูกคำนวณได้จากอสมการต่อไปนี้

$$z_{j+k} \geq \frac{-u+(q_{j+k}\beta+x_j)}{\beta^k}$$

กำหนดให้ $z_{j+k} = \alpha,\ q_{j+k} = h,\ x_j = m(\alpha)$ และ $m = \frac{\gamma}{\alpha}$ จะได้ว่า

$$u \leq \frac{\alpha(\beta^k-m)}{\beta-1} \tag{5}$$

จากอสมการที่ (4) และอสมการที่ (5) สามารถสรุปได้ว่าชุดของสถานะ Q มีจำนวนสมาชิกที่จำกัด และมีค่าสถานะ q อยู่ในขอบเขตต่อไปนี้

$$\frac{(-\alpha)(\beta^k-m)}{\beta-1} \leq q \leq \frac{\alpha(\beta^k-m)}{\beta-1} \qquad \blacksquare$$

สำหรับการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงสำหรับระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มบวกในอัลกอริทึมที่ 3 นี้ สถานะ q ไม่จำเป็นต้องใช้ทุกสถานะใน Q ในที่นี้เรากำหนดให้ g=l และสามารถคำนวณ h ได้เป็น $h = \frac{\beta^k(\beta-2\alpha-1)-\beta+2\alpha m+1}{2(\beta-1)}$ ซึ่งจำนวนสถานะ q มีค่าเท่ากับ β^k ก็เพียงพอต่อการทำงาน ดังบทตั้งที่ 2

บทตั้งที่ 2

จำนวนสถานะ q ที่ใช้ในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มบวกมีค่าเท่ากับ β^k

พิสูจน์:

กำหนดให้ $g = \frac{(-\alpha)(\beta^k-m)}{\beta-1}$ และ $h = \frac{\beta^k(\beta-2\alpha-1)-\beta+2\alpha m+1}{2(\beta-1)}$

จะได้ว่าจำนวนสถานะทั้งหมดมีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned}
2|g| + 2|h| + 1 &= 2\left|\frac{(-\alpha)(\beta^k-m)}{\beta-1}\right| + 2\left|\frac{\beta^k(\beta-2\alpha-1)-\beta+2\alpha m+1}{2(\beta-1)}\right| + 1 \\
&= \frac{4\alpha\beta^k-4\alpha m+2\beta^{k+1}-4\alpha\beta^k-2\beta^k-2\beta+4\alpha m+2+2\beta-2}{2(\beta-1)} \\
&= \frac{2\beta^{k+1}-2\beta^k}{2(\beta-1)} \\
&= \frac{\beta^k 2(\beta-1)}{2(\beta-1)} \\
&= \beta^k
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

บทตั้งที่ 3

ค่าความหน่วง k ของออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงสำหรับระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มบวกมีค่าเท่ากับ $k \geq \log_{\beta}(\frac{1+4\alpha m-\beta}{1+4\alpha-\beta})$

พิสูจน์:

จากบทตั้งที่ 2 จะได้ว่า จำนวนสถานะ q มีค่าเท่ากับ β^k ดังนั้นจำนวนสถานะที่เป็นไปได้ระหว่างสถานะ l และ u คือ

$$2|l| + 2|u| + 1 \geq \beta^k$$

จากบทตั้งที่ 1 จะได้ว่า $l \geq \frac{(-\alpha)(\beta^k-m)}{\beta-1}$ และ $u \leq \frac{\alpha(\beta^k-m)}{\beta-1}$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}
2\left|\frac{(-\alpha)(\beta^k-m)}{\beta-1}\right| + 2\left|\frac{\alpha(\beta^k-m)}{\beta-1}\right| + 1 &\geq \beta^k \\
\frac{2\alpha\beta^k-2\alpha m+2\alpha\beta^k-2\alpha m+\beta-1}{\beta-1} &\geq \beta^k \\
\frac{4\alpha\beta^k-4\alpha m+\beta-1}{\beta-1} &\geq \beta^k \\
4\alpha\beta^k - 4\alpha m + \beta - 1 &\geq \beta^{k+1} - \beta^k \\
\beta^k + 4\alpha\beta^k - \beta^{k+1} &\geq 1 + 4\alpha m - \beta \\
\beta^k(1 + 4\alpha - \beta) &\geq 1 + 4\alpha m - \beta \\
\beta^k &\geq \frac{1+4\alpha m-\beta}{1+4\alpha-\beta} \\
k &\geq \log_{\beta}(\frac{1+4\alpha m-\beta}{1+4\alpha-\beta})
\end{aligned}$$

■

พิสูจน์อัลกอริทึมที่ 3: จากบทตั้งที่ 1 จะได้ว่าสถานะ q ที่เป็นไปได้มีค่าอยู่ระหว่าง $l \leq q \leq u$ โดยที่ $l \geq \frac{(-\alpha)(\beta^k-m)}{\beta-1}$ และ $u \leq \frac{\alpha(\beta^k-m)}{\beta-1}$ จากบทตั้งที่ 3 เราจะแสดงให้เห็นว่าค่าความหน่วง k เพียงพอต่อการสร้างตัวเลข k หลักสุดท้ายของผลลัพธ์ ซึ่งเราแบ่งการพิสูจน์ออกเป็นสองส่วนดังนี้

ส่วนที่ 1: เราจะแสดงให้เห็นว่า $(-\alpha)\beta^{k-1} + (-\alpha)\beta^{k-2} + \cdots + (-\alpha) \leq l$

$$\begin{aligned}
\beta^{k+1} &\geq \beta^k \\
\beta^{k+1} - \beta^k &\geq \beta^k \\
\beta^{k+1} - \beta^k - \beta + 1 &\geq \beta^k - m \\
(\beta^k - 1)(\beta - 1) &\geq \beta^k - m \\
\beta^k - 1 &\geq \frac{\beta^k-m}{\beta-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(-\alpha)(\beta^k - 1) &\leq (-\alpha)(\tfrac{\beta^k - m}{\beta - 1}) \\
(-\alpha)\beta^k - (-\alpha) &\leq \tfrac{-\alpha(\beta^k - m)}{\beta - 1} \\
(-\alpha)\beta^{k-1} + (-\alpha)\beta^{k-2} + \cdots + (-\alpha) &\leq \tfrac{-\alpha(\beta^k - m)}{\beta - 1}
\end{aligned}
$$

ส่วนที่ 2: เราจะแสดงให้เห็นว่า $\alpha\beta^{k-1} + \alpha\beta^{k-2} + \cdots + \alpha \geq u$

$$
\begin{aligned}
\beta^{k+1} &\geq \beta^k \\
\beta^{k+1} - \beta^k &\geq \beta^k \\
\beta^{k+1} - \beta^k - \beta + 1 &\geq \beta^k - m \\
(\beta^k - 1)(\beta - 1) &\geq \beta^k - m \\
\beta^k - 1 &\geq \tfrac{\beta^k - m}{\beta - 1} \\
\alpha(\beta^k - 1) &\geq \alpha(\tfrac{\beta^k - m}{\beta - 1}) \\
\alpha\beta^k - \alpha &\geq \tfrac{\alpha(\beta^k - m)}{\beta - 1} \\
\alpha\beta^{k-1} + \alpha\beta^{k-2} + \cdots + \alpha &\geq \tfrac{\alpha(\beta^k - m)}{\beta - 1}
\end{aligned}
$$

จากส่วนที่ 1 และส่วนที่ 2 สามารถสรุปได้ว่าค่าความหน่วง k เพียงพอต่อการผลิตตัวเลข k หลักสุดท้ายของผลลัพธ์ที่ได้จากออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มบวก ■

ตัวอย่างการคำนวณแบบเชื่อมตรงโดยใช้ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มบวกจะแสดงในตัวอย่างที่ 15 และตัวอย่างที่ 16 โดยตัวอย่างที่ 15 จะเป็นตัวอย่างของการบวกกันของจำนวนสองจำนวนภายใต้ฐาน $\beta = 3$ ซึ่งสามารถคำนวณได้ด้วยวิธีการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงโดยใช้ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงที่กำหนดค่า $m = 2$ และคำนวณค่าความหน่วงแบบเชื่อมตรงได้เป็น $k = 1$ พร้อมทั้งแสดงการปัดเศษโดยการตัดรูปแบบแทนจำนวนในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะด้วย

ตัวอย่างที่ 15 กำหนดให้จำนวน $X = (1\bar{2}0\frac{3}{2}.\frac{1}{2}2\frac{\bar{1}}{2})_3$ โดยที่ $X \in E^*$ จงหาผลลัพธ์ของการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงของจำนวน X จากชุดตัวเลข $E = \{\bar{2}, \frac{\bar{3}}{2}, \bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$ ไปยังชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{\bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ ในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐาน $\beta = 3$ โดยใช้ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรง

จากอัลกอริทึมที่ 3 การแปลงชุดตัวเลขของจำนวน $X = (1\bar{2}0\frac{3}{2}.\frac{1}{2}2\frac{\bar{1}}{2})_3$ สามารถแสดงได้ด้วยออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงและคำนวณค่า $m = 2$ ส่วนค่าความหน่วง k สามารถคำนวณได้จากบทตั้งที่ 3 ซึ่งได้ค่า $k = 1$ ดังนั้นการแปลงจำนวน$X = (1\bar{2}0\frac{3}{2}.\frac{1}{2}2\frac{\bar{1}}{2})_3$ จากชุดตัวเลข $E = \{\bar{2}, \frac{\bar{3}}{2}, \bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$ ไปยังชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{\bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ ในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐาน $\beta = 3$ โดยใช้ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงดังรูปที่ 3 สามารถแสดงได้กราฟต่อไปนี้

$$0 \xrightarrow{1\ /\ \frac{1}{2}} \frac{-1}{2} \xrightarrow{\bar{2}\ /\ \bar{1}} \frac{-1}{2} \xrightarrow{0\ /\ \frac{\bar{1}}{2}} 0 \xrightarrow{\frac{3}{2}\ /\ \frac{1}{2}} 0 \xrightarrow{\frac{1}{2}\ /\ 0} \frac{1}{2} \xrightarrow{2\ /\ 1} \frac{1}{2} \xrightarrow{\frac{\bar{1}}{2}\ /\ \frac{1}{2}} \frac{-1}{2}$$

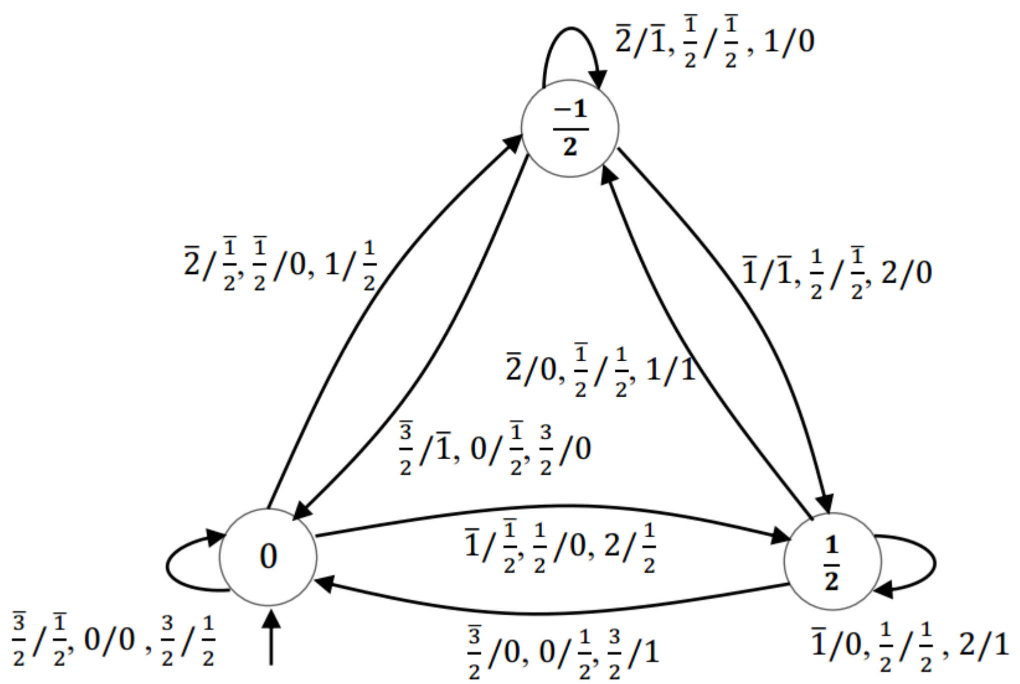
ภายหลังจากที่อ่านตัวเลขนำเข้าของจำนวน X ทั้งหมดแล้ว ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงจะผลิตผลลัพธ์ชั่วคราวออกมาคือ $\frac{1}{2}\bar{1}\frac{\bar{1}}{2}\frac{1}{2}0.1\frac{1}{2}$ ขั้นตอนสุดท้ายสำหรับการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงนี้คือการเพิ่มตัวเลข k หลักสุดท้ายเข้าไปยังผลลัพธ์ชั่วคราว เนื่องจากเราใช้ค่าความหน่วง $k = 1$ และสถานะสุดท้ายที่จบการทำงานของออโตมาตันคือ $q = \frac{-1}{2}$ ดังนั้นเราจะนิยามฟังก์ชันสิ้นสุด $\omega: Q \rightarrow \mathcal{D}^*$ ได้เป็น $\omega\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{\bar{1}}{2}$ โดยเราจะนำตัวเลข $\frac{\bar{1}}{2}$ ไปต่อท้ายที่ผลลัพธ์ชั่วคราว จะได้ว่าผลลัพธ์สุดท้ายคือ $\frac{1}{2}\bar{1}\frac{\bar{1}}{2}\frac{1}{2}0.1\frac{1}{2}\frac{\bar{1}}{2}$ ซึ่งมีค่าเชิงตัวเลขประมาณ 10.87037

การปัดเศษในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะสามารถทำได้โดยการตัดรูปแบบแทนจำนวน ณ ตำแหน่งที่ต้องการทิ้งไป ซึ่งเทียบเท่ากับการปัดเศษแบบราวด์ทูเนียเรสท์นั่นเอง เนื่องจากตัวเลขที่อนุญาตให้ใช้ในรูปแบบแทนจำนวนของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะจะมีค่าน้อยกว่าครึ่งหนึ่งของค่าฐาน ($\frac{\beta}{2}$) เสมอ ในตัวอย่างนี้ $\frac{\beta}{2}$=1.5 แต่ตัวเลขที่มีค่ามากที่สุดที่อนุญาตให้ใช้ในระบบคือ 1 ทั้งนี้ตัวอย่างของการตัดรูปแบบแทนจำนวนพร้อมทั้งแสดงค่าเชิงตัวเลขจะเป็นดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 9 ตัวอย่างการปัดเศษของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มบวก

รูปแบบแทนจำนวน Z	ค่าเชิงตัวเลข
$\frac{1}{2}\bar{1}\frac{\bar{1}}{2}\frac{1}{2}0.1\frac{1}{2}\frac{\bar{1}}{2}$	10.87037
$\frac{1}{2}\bar{1}\frac{\bar{1}}{2}\frac{1}{2}0.1\frac{1}{2}$	10.88889
$\frac{1}{2}\bar{1}\frac{\bar{1}}{2}\frac{1}{2}0.1$	10.83333

$\square$



รูปที่ 3 ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงภายใต้ฐาน $\beta = 3$ ค่า $m = 2$ และค่าความหน่วง $k = 1$

สำหรับตัวอย่างที่ 16 จะเป็นตัวอย่างของการคูณภายใต้ฐาน $\beta = 3$ โดยนำตัวตั้งมาคูณด้วยจำนวนเต็ม $m = 5$ ซึ่งสามารถคำนวณได้ด้วยวิธีการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงโดยใช้ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงที่คำนวณค่าความหน่วง $k = 2$

ตัวอย่างที่ 16 กำหนดให้จำนวน $X = (4\frac{\bar{1}}{2}\frac{7}{2}0\frac{3}{2}5)_3$ โดยที่ $X \in E^*$ จงหาผลลัพธ์ของการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงของจำนวน X จากชุดตัวเลข $E = \{\bar{5}, \frac{\bar{9}}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{9}{2}, 5\}$ ไปยังชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{\bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ ในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐาน $\beta = 3$ โดยใช้ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรง

จำนวน $X = (4\frac{\bar{1}}{2}\frac{7}{2}0\frac{3}{2}5)_3$ มีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับ 1035.5 การแปลงชุดตัวเลขจากชุดตัวเลข $\mathrm{E} = \{\bar{5}, \frac{\bar{9}}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{9}{2}, 5\}$ ไปยังชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{\bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ ในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐาน $\beta = 3$ โดยใช้ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงซึ่งมีค่า $m = 5$ และค่าความหน่วง $k = 2$ ซึ่งสามารถคำนวณได้จากบทตั้งที่ 3 เราจะแสดงการสร้างออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงดังอัลกอริทึมที่ 3 โดยตัวเลขนำออก z_{j+k} สามารถถูกคำนวณได้จากตัวเลขนำเข้า x_j และค่าสถานะปัจจุบัน q_{j+k}ซึ่งแสดงได้ดังอสมการต่อไปนี้

$$z_{j+k} \le \frac{-l + (q_{j+k} \times \beta) + x_j}{\beta^k}$$

โดยที่ $l = -2$ จะได้ว่า

$$z_{j+k} \leq \frac{2 + (q_{j+k} \times 3) + x_j}{3^2}$$

สถานะถัดไปคือ q_{j+k-1} สามารถคำนวณได้ดังสมการ

$$q_{j+k-1} = \left((q_{j+k} \times 3) + x_j\right) - (z_{j+k} \times 9)$$

ดังนั้นการแปลงชุดตัวเลขโดยใช้ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงด้วยค่าความหน่วง $k = 2$ สามารถแสดงได้ดังกราฟต่อไปนี้

$$0 \xrightarrow{4\ /\ \frac{1}{2}} \frac{-1}{2} \xrightarrow{\frac{\bar{1}}{2}\ /\ 0} -2 \xrightarrow{\frac{7}{2}\ /\ \frac{\bar{1}}{2}} 2 \xrightarrow{0\ /\ \frac{1}{2}} \frac{3}{2} \xrightarrow{\frac{3}{2}\ /\ \frac{1}{2}} \frac{3}{2} \xrightarrow{5\ /\ 1} \frac{1}{2}$$

ภายหลังจากที่อ่านตัวเลขนำเข้าของจำนวน X ทั้งหมดแล้ว ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงจะผลิตผลลัพธ์ชั่วคราวออกมาคือ $\frac{1}{2}0\frac{\bar{1}}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}1$ เนื่องจากสถานะสุดท้ายของออโตมาตันหยุดที่สถานะ $q = \frac{1}{2}$ และค่าความหน่วง $k = 2$ เราจะนิยามฟังก์ชันสิ้นสุด $\omega: Q \rightarrow \mathcal{D}^*$ ได้เป็น $\omega\left(\frac{1}{2}\right) = 0\frac{1}{2}$ ซึ่งเมื่อเรานำตัวเลข $0\frac{1}{2}$ ไปต่อท้ายผลลัพธ์ชั่วคราว จะได้ผลลัพธ์สุดท้ายที่ถูกต้องคือ $\frac{1}{2}0\frac{\bar{1}}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}10\frac{1}{2}$ □

4. ระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบ

ในบทที่ 4 นี้ เราจะกล่าวถึงส่วนขยายของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะที่สามารถทำงานได้นอกเหนือจากฐานจำนวนเต็มบวก นั่นคือฐานจำนวนเต็มลบ สำหรับฐานจำนวนเต็มลบนั้นจะมีสิ่งที่ต้องคำนึงถึงคือ ค่าน้ำหนัก (weight) ในแต่ละตำแหน่ง (position) ของรูปแบบแทนจำนวนจะมีเครื่องหมายบวกและเครื่องหมายลบสลับกันไป ซึ่งการออกแบบอัลกอริทึมสำหรับการคำนวณจะต้องสามารถจัดการกับเครื่องหมายที่สลับกันในแต่ละตำแหน่งได้ ทั้งนี้เราได้ดำเนินการปรับปรุงนิยามของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะให้รองรับฐานจำนวนเต็มลบดังนิยามที่ 8

นิยามที่ 8 (ระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบ)

ระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะประกอบด้วยฐาน $|\beta| \geq 2$ และชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{-\alpha, -\alpha + \frac{1}{2}, \dots, 0, \dots, \alpha - \frac{1}{2}, \alpha\}$ โดยที่ $\alpha = \frac{|\beta| + (|\beta| \ mod \ 2)}{4}$ จำนวน X ใด ๆ สามารถแสดงเป็นรูปแบบแทนจำนวน $X = (x_n x_{n-1} \dots x_0 . x_{-1} x_{-2} \dots)_\beta$ โดยที่ $x_i \in \mathcal{D}$ และ $i \leq n$

สำหรับตัวอย่างของชุดตัวเลขที่ใช้ในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบตั้งแต่ฐาน $\beta = -2$ ถึง $\beta = -6$ แสดงดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 10 ตัวอย่างชุดตัวเลขตรรกยะของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบ

ฐาน $\boldsymbol{\beta}$	ชุดตัวเลข $\boldsymbol{\mathcal{D}}$
-2	$\{\frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$
-3	$\{\bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$
-4	$\{\bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$
-5	$\{\frac{\bar{3}}{2}, \bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\}$
-6	$\{\frac{\bar{3}}{2}, \bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\}$

จะสังเกตได้ว่าชุดตัวเลขในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐาน $-\beta$ และฐาน β จะใช้ชุดตัวเลขเดียวกัน ในส่วนของการพิสูจน์ความสมบูรณ์ของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบนั้นจะกล่าวถึงในหัวข้อถัดไป

4.1 ความสมบูรณ์ระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบ

เราได้นำอัลกอริทึมที่ 1 และอัลกอริทึมที่ 2 คืออัลกอริทึมการแปลงจำนวนแบบขนานสำหรับระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มคู่บวกและจำนวนเต็มคี่บวกมาปรับปรุงให้รองรับการทำงานภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบ นอกจากนี้ยังได้ทำการเปลี่ยนเครื่องหมายของตัวทดจากเดิมที่ประกอบด้วย $\{0,\frac{1}{2},1\}$ เป็น $\{0,\frac{\bar{1}}{2},\bar{1}\}$ สำหรับการพิสูจน์ความสมบูรณ์ของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบเป็นดังทฤษฎีบทที่ 3

ทฤษฎีบทที่ 3 (ความสมบูรณ์ของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบ)

จำนวนใด ๆ สามารถมีรูปแบบแทนจำนวนในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบได้

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 3: สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ เราได้นำอัลกอริทึมที่ 1 และอัลกอริทึมที่ 2 ของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มบวกมาปรับปรุงให้รองรับการแปลงจำนวนใด ๆ ให้อยู่ในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบดังอัลกอริทึมที่ 4 ซึ่งรองรับฐานจำนวนเต็มคู่ลบและอัลกอริทึมที่ 5 รองรับฐานจำนวนเต็มคี่ลบ

4.1.1 การแปลงสำหรับฐานจำนวนเต็มคู่ลบ

การแปลงแบบขนานของจำนวนใด ๆ มายังรูปแบบแทนจำนวนของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มคู่ลบนั้นจะมีวิธีการแปลงคล้ายกับการแปลงในฐานจำนวนเต็มคู่บวกในอัลกอริทึมที่ 1 เริ่มจากทำการอ่านตัวเลขนำเข้า $x_n x_{n-1} \dots x_0 . x_{-1} x_{-2} \dots$ (x_i เป็นจำนวนเต็มที่มีค่า $0 \le x_i \le |\beta| - 1$ และ $i \le n$) เข้ามาพร้อมกันในทุกตำแหน่ง หลังจากนั้นในทุกตำแหน่งจะผลิตตัวทด c_{i+1} ออกไปยังตำแหน่งทางซ้ายเพื่อเป็นการลดค่าของตัวเลขนำเข้า x_i ให้อยู่ในขอบเขตที่สามารถรับตัวทด c_i ที่เข้ามาได้ สำหรับตัวทดที่ใช้ในการแปลงภายใต้ฐานจำนวนเต็มคู่ลบนี้จะเปลี่ยนมาใช้ตัวทดที่มีเครื่องหมายลบ นั่นคือ $c_i \in \left\{0,\frac{\bar{1}}{2},\bar{1}\right\}$ ดังนั้นจะได้ตัวเลขนำออกชั่วคราว $y_{n+1} y_n \dots y_0 . y_{-1} y_{-2}$ โดยที่ y_i มีค่าเท่ากับ $-\alpha + \frac{1}{2} \le y_i \le \alpha + 1$ จะสังเกตได้ว่า y_i ยังมีค่าเกินขอบเขตที่กำหนดในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะจึงต้องทำการแปลงแบบขนานอีกรอบหนึ่งโดยกำหนดให้ตัวทดคือ $c_i \in \left\{0,\frac{\bar{1}}{2}\right\}$ จะได้ผลลัพธ์สุดท้ายที่ถูกต้องคือ $z_{n+2} z_{n+1} \dots z_0 . z_{-1} z_{-2}$ โดยที่ $-\alpha \le z_i \le \alpha$ ซึ่งอยู่ในขอบเขตที่กำหนดของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะในนิยามที่ 8 สำหรับขั้นตอนการแปลงจำนวนแบบขนานสำหรับระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มคู่ลบจะเป็นดังอัลกอริทึมที่ 4

อัลกอริทึมที่ 4 (การแปลงจำนวนแบบขนานสำหรับระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มคู่ลบ)

input $X = x_n x_{n-1} \dots x_0 . x_{-1} x_{-2} \dots$ where $0 \le x_i \le |\beta| - 1$ (Integer)

output$Z = z_{n+2} z_{n+1} \dots z_0 . z_{-1} z_{-2} \dots$ where $-\alpha \le z_i \le \alpha$ (Rational)

begin

$c_{initial} = 0$

for all $(i \le n)$

if $0 \le x_i \le \alpha + 1$ then $c_{i+1} = 0$ endif

if $\alpha + \frac{3}{2} \le x_i \le \left|\frac{\beta}{2}\right| + \alpha + 1$ then $c_{i+1} = -\frac{1}{2}$ endif

if $\left|\frac{\beta}{2}\right| + \alpha + \frac{3}{2} \le x_i \le |\beta| - 1$ then $c_{i+1} = -1$ endif

$y_i = x_i - (c_{i+1} \times \beta) + c_i$

$y_{n+1} = c_{n+1}$

for all $(i \le n + 1)$

if $-\alpha + \frac{1}{2} \le y_i \le \alpha$ then $c_{i+1} = 0$ endif

if $\alpha + \frac{1}{2} \le y_i \le \alpha + 1$ then $c_{i+1} = -\frac{1}{2}$ endif

$z_i = y_i - (c_{i+1} \times \beta) + c_i$

$z_{n+2} = c_{n+2}$

end

พิสูจน์อัลกอริทึมที่ 4: ในการพิสูจน์นี้เราจะแสดงให้เห็นถึงความถูกต้อง (correctness) และสมเหตุสมผล (validation) ของอัลกอริทึมที่ 4

1) การพิสูจน์ความถูกต้อง (proof of correctness)

สำหรับการพิสูจน์นี้เราจะแสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์จากการแปลงจำนวน X ไปยังจำนวน Z จะยังคงให้ค่าเชิงตัวเลขที่เท่ากัน $\|X\| = \|Z\|$

$$\begin{aligned} \|X\| &= x_n\beta^n + x_{n-1}\beta^{n-1} + \cdots \\ &= (x_n\beta^n - c_{n+1}\beta^{n+1}) + (x_{n-1}\beta^{n-1} - c_n\beta^n) + \cdots + (c_{n+1}\beta^{n+1} + c_n\beta^n \\ &\qquad + c_{n-1}\beta^{n-1} + ..) \end{aligned}$$

$$= c_{n+1}\beta^{n+1} + (x_n\beta^n - c_{n+1}\beta^{n+1} + c_n\beta^n) + (x_{n-1}\beta^{n-1} - c_n\beta^n + c_{n-1}\beta^{n-1}) + \cdots$$

$$= c_{n+1}\beta^{n+1} + (x_n - c_{n+1}\beta + c_n)\beta^n + (x_{n-1} - c_n\beta + c_{n-1})\beta^{n-1} + \cdots$$

$$= y_{n+1}\beta^{n+1} + y_n\beta^n + y_{n-1}\beta^{n-1} + \cdots$$

$$= (y_{n+1}\beta^{n+1} - c_{n+2}\beta^{n+2}) + (x_n\beta^n - c_{n+1}\beta^{n+1}) + \cdots + (c_{n+2}\beta^{n+2} + c_{n+1}\beta^{n+1} + c_n\beta^n + ..)$$

$$= c_{n+2}\beta^{n+2} + (y_{n+1}\beta^{n+1} - c_{n+2}\beta^{n+2} + c_{n+1}\beta^{n+1}) + (y_n\beta^n - c_{n+1}\beta^{n+1} + c_n\beta^n) + \cdots$$

$$= c_{n+2}\beta^{n+2} + (y_{n+1} - c_{n+2}\beta + c_{n+1})\beta^{n+1} + (y_n - c_{n+1}\beta + c_n)\beta^n + \cdots$$

$$= z_{n+2}\beta^{n+2} + z_{n+1}\beta^{n+1} + z_n\beta^n + \cdots$$

$$= \|Z\|$$

2) การพิสูจน์ความสมเหตุสมผล (proof of validation)

ในการพิสูจน์จะแสดงให้เห็นว่า $-\alpha \le z_i \le \alpha$ เราได้แบ่งการพิสูจน์อัลกอริทึมนี้ออกเป็นสองส่วนดังต่อไปนี้

ส่วนที่ 1: ตัวเลขนำเข้า x_i จะถูกแปลงไปยังตัวเลขนำออกชั่วคราว y_i โดยที่ $0 \le x_i \le |\beta| - 1$ และ $-\alpha + \frac{1}{2} \le y_i \le \alpha + 1$ ซึ่งกำหนดให้ $\alpha = \left|\frac{\beta}{4}\right|$ เนื่องจาก $y_i = x_i - (c_{i+1} \times \beta) + c_i$ และ $c_i \in \{0, -\frac{1}{2}, -1\}$ จะได้ว่า $x_i = y_i + c_{i+1}\beta - c_i$

กรณีที่ 1: $0 \le x_i \le \alpha + 1$

จากอัลกอริทึมจะได้ว่า $c_{i+1} = 0$ และ $x_i = y_i - c_i$ ดังนั้น $c_i \le y_i \le \alpha + 1 + c_i$ เนื่องจาก $c_i \in \{0, -\frac{1}{2}, -1\}$ จะได้ว่า y_i ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีค่าเท่ากับ $-1 \le y_i \le \alpha + 1$

กรณีที่ 2: $\alpha + \frac{3}{2} \le x_i \le \left|\frac{\beta}{2}\right| + \alpha + 1$

จากอัลกอริทึมจะได้ว่า $c_{i+1} = -\frac{1}{2}$ และ $x_i = y_i - \frac{\beta}{2} - c_i$ ดังนั้น $-\alpha + \frac{3}{2} + c_i \le y_i \le \alpha + 1 + c_i$ เนื่องจาก $c_i \in \{0, \frac{-1}{2}, -1\}$ จะได้ว่า y_i ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีค่าเท่ากับ $-\alpha + \frac{1}{2} \le y_i \le \alpha + 1$

กรณีที่ 3: $\left|\frac{\beta}{2}\right| + \alpha + \frac{3}{2} \le x_i \le |\beta| - 1$

จากอัลกอริทึมจะได้ว่า $c_{i+1} = -1$ และ $x_i = y_i - \beta - c_i$ ดังนั้น $-\alpha + \frac{3}{2} + c_i \le y_i \le -1 + c_i$ เนื่องจาก $c_i \in \{0, -\frac{1}{2}, -1\}$ จะได้ว่า y_i ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีค่าเท่ากับ $-\alpha + \frac{1}{2} \le y_i \le -1$

จากทั้งสามกรณีของส่วนที่หนึ่ง เราสามารถสรุปได้ว่า $-\alpha + \frac{1}{2} \le y_i \le \alpha + 1$

ส่วนที่ 2: ตัวเลขนำออกชั่วคราว y_i บางตัวอาจจะมีค่าเกินกว่าที่กำหนดในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะ ดังนั้นจึงต้องทำการจัดการตัวเลขส่วนเกินออกโดยแปลงตัวเลขนำออกชั่วคราว y_i ไปยังตัวเลขนำออก z_i ซึ่งรับประกันได้ว่า $-\alpha \le z_i \le \alpha$ ทั้งนี้ $z_i = y_i - (c_{i+1} \times \beta) + c_i$ และ $c_i \in \{0, -\frac{1}{2}\}$ จะได้ว่า $y_i = z_i + c_{i+1}\beta - c_i$

กรณีที่ 1: $-\alpha + \frac{1}{2} \le y_i \le \alpha$

จากอัลกอริทึมจะได้ว่า $c_{i+1} = 0$ และ $y_i = z_i - c_i$ ดังนั้น $-\alpha + \frac{1}{2} + \mathrm{c}_i \le z_i \le \alpha + c_i$ เนื่องจาก $c_i \in \{0, -\frac{1}{2}\}$ จะได้ว่า z_i ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีค่าเท่ากับ $-\alpha \le z_i \le \alpha$

กรณีที่ 2: $\alpha + \frac{1}{2} \le y_i \le \alpha + 1$

จากอัลกอริทึมจะได้ว่า $c_{i+1} = -\frac{1}{2}$ และ $y_i = z_i - \frac{\beta}{2} - c_i$ ดังนั้น $-\alpha + \frac{1}{2} + \mathrm{c}_i \le z_i \le -\alpha + 1 + c_i$ เนื่องจาก $c_i \in \{0, -\frac{1}{2}\}$ จะได้ว่า z_i ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีค่าเท่ากับ $-\alpha \le z_i \le -\alpha + 1$

จากทั้งสองกรณีของส่วนที่สอง เราสามารถสรุปได้ว่า $-\alpha \le z_i \le \alpha$ ซึ่งมีค่าอยู่ในขอบเขตที่กำหนดของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มคู่ลบ ■

ตัวอย่างการหารูปแบบแทนจำนวนของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มคู่ลบดังอัลกอริทึมที่ 4 แสดงในตัวอย่างที่ 17 และตัวอย่างที่ 18 สำหรับการแปลงจำนวนภายใต้ฐาน $\beta = -2$ จากชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{0, 1\}$ ไปยังชุดตัวเลขตรรกยะ $\mathcal{D}' = \{\frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$ แสดงในตัวอย่างที่ 17 ส่วนในตัวอย่างที่ 18 จะเป็นการแปลงจากชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ไปยังชุดตัวเลขตรรกยะ $\mathcal{D}' = \{\frac{\bar{3}}{2}, \bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\}$ ภายในฐาน $\beta = -6$

ตัวอย่างที่ 17 กำหนดให้ฐาน $\beta = -2$ จงหารูปแบบแทนจำนวน $X = (1101)_{-2}$ ในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มคู่ลบ

จากอัลกอริทึมที่ 4 รูปแบบแทนจำนวน $X = (1101)_{-2}$ ภายใต้ฐานจำนวนเต็มคู่ลบ $\beta = -2$ และชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{0, 1\}$ สามารถแปลงไปยังรูปแบบแทนจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะ $Z = (\frac{\bar{1}}{2}\frac{\bar{1}}{2}0\frac{\bar{1}}{2}0)_{-2}$ โดยมีชุดตัวเลขตรรกยะ $\mathcal{D}' = \{\frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$ ภายใต้ฐานเดียวกัน ซึ่งขั้นตอนการแปลงแสดงดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 11 ตัวอย่างการแปลงจำนวน $X = (1101)_{-2}$ ไปยังระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะ

รูปแบบแทนจำนวน X	0	1	1	0	1
ตัวทด C	0	0	0	0	0
ผลลัพธ์ชั่วคราว Y	0	1	1	0	1
ตัวทด C	$\frac{\bar{1}}{2}$	$\frac{\bar{1}}{2}$	0	$\frac{\bar{1}}{2}$	0
ผลลัพธ์ Z	$\frac{\bar{1}}{2}$	$\frac{\bar{1}}{2}$	0	$\frac{\bar{1}}{2}$	0

ทั้งนี้ค่าเชิงตัวเลขของจำนวน $X = (1101)_{-2}$ และจำนวน $Z = (\frac{\bar{1}}{2}\frac{\bar{1}}{2}0\frac{\bar{1}}{2}0)_{-2}$ ภายใต้ฐาน $\beta = -2$ สามารถคำนวณได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
\|X\| &= \sum_{i=0}^{3} x_i \times \beta^i \\
&= (1\times-2^3) + (1\times-2^2) + (0\times-2^1) + (1\times-2^0) \\
&= -8 + 4 + 0 + 1 \\
&= -3 \\
\|Z\| &= \sum_{i=0}^{4} z_i \times \beta^i \\
&= \left(\frac{\bar{1}}{2}\times-2^4\right) + \left(\frac{\bar{1}}{2}\times-2^3\right) + (0\times-2^2) + \left(\frac{\bar{1}}{2}\times-2^1\right) + (0\times-2^0) \\
&= -8 + 4 + 0 + 1 + 0 \\
&= -3
\end{aligned}
$$

จะเห็นได้ว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการแปลงจำนวนด้วยอัลกอริทึมที่ 4 ให้ค่าเชิงตัวเลขของจำนวน X และ Z ที่มีค่าเท่ากัน □

ตัวอย่างที่ 18 กำหนดให้ฐาน $\beta = -6$ จงหารูปแบบแทนจำนวน $X = (1523)_{-6}$ ในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มคู่ลบ

จากอัลกอริทึมที่ 4 รูปแบบแทนจำนวน $X = (1523)_{-6}$ ภายใต้ฐานจำนวนเต็มคู่ลบและชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ สามารถแปลงไปยังรูปแบบแทนจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะ

$Z = (00\bar{1}\frac{3}{2}0)_{-6}$ โดยมีชุดตัวเลขตรรกยะ $\mathcal{D}' = \{\frac{\bar{3}}{2}, \bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\}$ ภายใต้ฐานเดียวกัน ซึ่งขั้นตอนการแปลงแสดงดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 12 ตัวอย่างการแปลงจำนวน $X = (1523)_{-6}$ ไปยังระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะ

รูปแบบแทนจำนวน X	0	1	5	2	3
ตัวทด C	0	$\frac{\bar{1}}{2}$	0	$\frac{\bar{1}}{2}$	0
ผลลัพธ์ชั่วคราว Y	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	0
ตัวทด C	0	$\frac{\bar{1}}{2}$	0	0	0
ผลลัพธ์ Z	0	0	$\bar{1}$	$\frac{3}{2}$	0

ทั้งนี้ค่าเชิงตัวเลขของจำนวน $X = (1523)_{-6}$ และจำนวน $Z = (00\bar{1}\frac{3}{2}0)_{-6}$ ภายใต้ฐาน $\beta = -6$ สามารถคำนวณได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
\|X\| &= \sum_{i=0}^{3} x_i \times \beta^i \\
&= (1\times-6^3) + (5\times-6^2) + (2\times-6^1) + (3\times-6^0) \\
&= -216 + 180 - 12 + 3 \\
&= -45
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|Z\| &= \sum_{i=0}^{4} z_i \times \beta^i \\
&= (0\times-6^4) + (0\times-6^3) + (\bar{1}\times-6^2) + \left(\frac{3}{2}\times-6^1\right) + (0\times-6^0) \\
&= 0 + 0 - 36 - 9 + 0 \\
&= -45
\end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการแปลงจำนวนด้วยอัลกอริทึมที่ 4 ให้ค่าเชิงตัวเลขของจำนวน X และ Z ที่มีค่าเท่ากัน □

4.1.2 การแปลงสำหรับฐานจำนวนเต็มคี่ลบ

การแปลงจำนวนแบบขนานของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มคี่ลบนั้น จะมีขั้นตอนการแปลงเพียงหนึ่งขั้นตอนคล้ายกับอัลกอริทึมการแปลงจำนวนแบบขนานสำหรับฐานจำนวนเต็มคี่บวก แตกต่างกันที่กำหนดให้ใช้ตัวทด c_i มีเครื่องหมายลบคือ $c_i \in \{\bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0\}$ ผลลัพธ์ที่ได้จากแปลงมีตัวเลขอยู่ในขอบเขตที่กำหนดของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบในนิยามที่ 8 สำหรับอัลกอริทึมการแปลงจำนวนแบบขนานสำหรับระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มคี่ลบจะเป็นดังอัลกอริทึมที่ 5

อัลกอริทึมที่ 5 (การแปลงจำนวนแบบขนานสำหรับระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มคี่ลบ)

input $X = x_n x_{n-1} \dots x_0 . x_{-1} x_{-2} \dots$ where $0 \le x_i \le |\beta| - 1$ (Integer)

output $Z = z_{n+1} z_n \dots z_0 . z_{-1} z_{-2} \dots$ where $-\alpha \le z_i \le \alpha$ (Rational)

begin

$c_{initial} = 0$

for all $(i \le n)$

if $0 \le x_i \le \alpha$ **then** $c_{i+1} = 0$ **endif**

if $\alpha + \frac{1}{2} \le x_i \le \left|\frac{\beta}{2}\right| + \alpha$ **then** $c_{i+1} = -\frac{1}{2}$ **endif**

if $\left|\frac{\beta}{2}\right| + \alpha + \frac{1}{2} \le x_i \le |\beta| - 1$ **then** $c_{i+1} = -1$ **endif**

$z_i = x_i - (c_{i+1} \times \beta) + c_i$

$z_{n+1} = c_{n+1}$

end

พิสูจน์อัลกอริทึมที่ 5: ในการพิสูจน์นี้เราจะแสดงให้เห็นถึงความถูกต้อง (correctness) และสมเหตุสมผล (validation) ของอัลกอริทึมที่ 5

1) การพิสูจน์ความถูกต้อง (proof of correctness)

สำหรับการพิสูจน์นี้เราจะแสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์จากการแปลงจำนวน X ไปยังจำนวน Z จะยังคงให้ค่าเชิงตัวเลขที่เท่ากัน $\|X\| = \|Z\|$

$$\|X\| = x_n\beta^n + x_{n-1}\beta^{n-1} + \cdots$$

$$= (x_n\beta^n - c_{n+1}\beta^{n+1}) + (x_{n-1}\beta^{n-1} - c_n\beta^n) + \cdots + (c_{n+1}\beta^{n+1} + c_n\beta^n + c_{n-1}\beta^{n-1} + ..)$$

$$= c_{n+1}\beta^{n+1} + (x_n\beta^n - c_{n+1}\beta^{n+1} + c_n\beta^n) + (x_{n-1}\beta^{n-1} - c_n\beta^n + c_{n-1}\beta^{n-1}) + \cdots$$

$$= c_{n+1}\beta^{n+1} + (x_n - c_{n+1}\beta + c_n)\beta^n + (x_{n-1} - c_n\beta + c_{n-1})\beta^{n-1} + \cdots$$

$$= z_{n+1}\beta^{n+1} + z_n\beta^n + z_{n-1}\beta^{n-1} + \cdots$$

$$= \|Z\|$$

2) การพิสูจน์ความสมเหตุสมผล (proof of validation)

ในการพิสูจน์นี้จะแสดงให้เห็นว่า $-\alpha \le z_i \le \alpha$ เริ่มจากตัวเลขนำเข้า x_i จะถูกแปลงไปยังตัวเลขนำออก z_i โดยที่ $0 \le x_i \le |\beta| - 1$ และ $-\alpha \le z_i \le \alpha$ ซึ่งกำหนดให้ $\alpha = \frac{|\beta|+1}{4}$ เนื่องจาก $z_i = x_i - (c_{i+1} \times \beta) + c_i$ และ $c_i \in \{0, -\frac{1}{2}, -1\}$ จะได้ว่า $x_i = z_i + c_{i+1}\beta - c_i$

กรณีที่ 1: $0 \le x_i \le \alpha$

จากอัลกอริทึมจะได้ว่า $c_{i+1} = 0$ และ $x_i = z_i - c_i$ ดังนั้น $c_i \le z_i \le \alpha + c_i$ เนื่องจาก $c_i \in \{0, -\frac{1}{2}, -1\}$ จะได้ว่า z_i ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีค่าเท่ากับ $-1 \le z_i \le \alpha$

กรณีที่ 2: $\alpha + \frac{1}{2} \le x_i \le \left|\frac{\beta}{2}\right| + \alpha$

จากอัลกอริทึมจะได้ว่า $c_{i+1} = -\frac{1}{2}$ และ $x_i = z_i - \frac{\beta}{2} - c_i$ ดังนั้น $-\alpha + 1 + \mathrm{c}_i \le \mathrm{z}_i \le \alpha - c_i$ เนื่องจาก $c_i \in \{0, -\frac{1}{2}, -1\}$ จะได้ว่า y_i ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีค่าเท่ากับ $-\alpha \le z_i \le \alpha$

กรณีที่ 3: $\left|\frac{\beta}{2}\right| + \alpha + \frac{1}{2} \le x_i \le |\beta| - 1$

จากอัลกอริทึมจะได้ว่า $c_{i+1} = -1$ และ $x_i = z_i - \beta - c_i$ ดังนั้น $-\alpha + 1 + c_i \le z_i \le -1 + c_i$ เนื่องจาก $c_i \in \{0, -\frac{1}{2}, -1\}$ จะได้ว่า y_i ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีค่าเท่ากับ $-\alpha \le z_i \le -1$

จากทั้งสามกรณี เราสามารถสรุปได้ว่า $-\alpha \le z_i \le \alpha$ ซึ่งมีค่าอยู่ในขอบเขตที่กำหนดของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มคี่ลบ ■

ตัวอย่างการแปลงจำนวนใด ๆ ให้มาอยู่ในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มคี่ลบสามารถแสดงได้ในตัวอย่างที่ 19 และตัวอย่างที่ 20 โดยตัวอย่างที่ 19 จะอธิบายถึงการแปลงจำนวนภายใต้ฐาน $\beta = -3$ จากชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{0, 1, 2\}$ ไปยังชุดตัวเลขตรรกยะ $\mathcal{D}' = \{\bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ สำหรับตัวอย่างที่ 20 จะกล่าวถึงการแปลงจำนวนภายใต้ฐาน $\beta = -7$ จากชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ไปยังชุดตัวเลขตรรกยะ $\mathcal{D}' = \{\bar{2}, \frac{\bar{3}}{2}, \bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$

ตัวอย่างที่ 19 กำหนดให้ฐาน $\beta = -3$ จงหารูปแบบแทนจำนวน $X = (2012)_{-3}$ ในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มคี่ลบ

จากอัลกอริทึมที่ 5 รูปแบบแทนจำนวน $X = (2012)_{-3}$ ภายใต้ฐานจำนวนเต็มคี่ลบ $\beta = -3$ และใช้ชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{0, 1, 2\}$ สามารถแปลงไปยังรูปแบบแทนจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะ $Z = (\frac{\bar{1}}{2}\frac{1}{2}0\frac{1}{2}\frac{1}{2})_{-3}$ โดยใช้ชุดตัวเลข $\mathcal{D}' = \{\bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ ภายใต้ฐานเดียวกัน ซึ่งขั้นตอนการแปลงแสดงดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 13 ตัวอย่างการแปลงจำนวน $X = (2012)_{-3}$ ไปยังระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะ

รูปแบบแทนจำนวน X	0	2	0	1	2
ตัวทด C	$\frac{\bar{1}}{2}$	0	0	$\frac{\bar{1}}{2}$	0
ผลลัพธ์ Z	$\frac{\bar{1}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

ทั้งนี้ค่าเชิงตัวเลขของจำนวน $X = (2012)_{-3}$ และจำนวน $Z = (\frac{\bar{1}}{2}\frac{1}{2}0\frac{1}{2}\frac{1}{2})_{-3}$ ภายใต้ฐาน $\beta = -3$ สามารถคำนวณได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
\|X\| &= \sum_{i=0}^{3} x_i \times \beta^i \\
&= (2\times-3^3) + (0\times-2^2) + (1\times-3^1) + (2\times-3^0) \\
&= -54 + 0 - 3 + 2 \\
&= -55 \\
\|Z\| &= \sum_{i=0}^{4} z_i \times \beta^i \\
&= \left(\frac{\bar{1}}{2}\times-3^4\right) + \left(\frac{1}{2}\times-3^3\right) + (0\times-3^2) + \left(\frac{1}{2}\times-3^1\right) + \left(\frac{1}{2}\times-3^0\right) \\
&= -40.5 - 13.5 + 0 - 1.5 + 0.5 \\
&= -55
\end{aligned}
$$

จะเห็นได้ว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการแปลงจำนวนด้วยอัลกอริทึมที่ 5 ให้ค่าเชิงตัวเลขของจำนวน X และ Z ที่มีค่าเท่ากัน □

ตัวอย่างที่ 20 กำหนดให้ฐาน $\beta = -7$ จงหารูปแบบแทนจำนวน $X = (3062)_{-7}$ ในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มคี่ลบ

จากอัลกอริทึมที่ 5 รูปแบบแทนจำนวน $X = (3062)_{-7}$ ภายใต้ฐานจำนวนเต็มคี่ลบ $\beta = -7$ และใช้ชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ สามารถแปลงไปยังรูปแบบแทนจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะ $Z = (\frac{\bar{1}}{2}\frac{\bar{1}}{2}\bar{1}\bar{1}2)_{-7}$ โดยใช้ชุดตัวเลข $\mathcal{D}' = \{\bar{2}, \frac{\bar{3}}{2}, \bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$ ภายใต้ฐานเดียวกัน ซึ่งขั้นตอนการแปลงแสดงดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 14 ตัวอย่างการแปลงจำนวน $X = (3062)_{-7}$ ไปยังระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะ

รูปแบบแทนจำนวน X	0	3	0	6	2
ตัวทด C	$\frac{\bar{1}}{2}$	0	$\bar{1}$	0	0
ผลลัพธ์ Z	$\frac{\bar{1}}{2}$	$\frac{\bar{1}}{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	2

ทั้งนี้ค่าเชิงตัวเลขของจำนวน $X = (3062)_{-7}$ และจำนวน $Z = (\frac{\bar{1}}{2}\frac{\bar{1}}{2}\bar{1}\bar{1}2)_{-7}$ ภายใต้ฐาน $\beta = -7$ สามารถคำนวณได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
\|X\| &= \sum_{i=0}^{3} x_i \times \beta^i \\
&= (3\times -7^3) + (0\times -7^2) + (6\times -7^1) + (2\times -7^0) \\
&= -1029 + 0 - 42 + 2 \\
&= -1069 \\
\|Z\| &= \sum_{i=0}^{4} z_i \times \beta^i \\
&= \left(\frac{\bar{1}}{2}\times -7^4\right) + \left(\frac{\bar{1}}{2}\times -7^3\right) + (\bar{1}\times -7^2) + (\bar{1}\times -7^1) + (2\times -7^0) \\
&= -1200.5 + 171.5 - 49 + 7 + 2 \\
&= -1069
\end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการแปลงจำนวนด้วยอัลกอริทึมที่ 5 ให้ค่าเชิงตัวเลขของจำนวน X และ Z ที่มีค่าเท่ากัน □

4.2 การคำนวณแบบเชื่อมตรงสำหรับระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบ

เนื่องจากวิธีการคำนวณแบบเชื่อมตรงของของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบนั้น จะมีความซับซ้อนกว่าการคำนวณภายใต้ฐานจำนวนเต็มบวกเพราะค่าน้ำหนัก (weight) ของแต่ละตำแหน่งของรูปแบบแทนจำนวนจะมีการสลับเครื่องหมายบวกและเครื่องหมายลบ ทำให้ขั้นตอนการพิจารณาการผลิตตัวเลขนำออก จะต้องสอดคล้องกับตำแหน่งที่กำลังผลิตตัวเลขนำออกด้วย สำหรับการคำนวณแบบเชื่อมตรงของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบนั้นเป็นดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 4 (การคำนวณแบบเชื่อมตรงสำหรับระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบ)

การคำนวณแบบเชื่อมตรงสำหรับระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบสามารถคำนวณได้โดยใช้ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงที่มีค่าความหน่วงเป็นจำนวนเต็ม k และจำนวนสถานะเท่ากับ $|\beta|^k$

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 4: ในการพิสูจน์นี้เราได้แปลงเรื่องการคำนวณแบบเชื่อมตรงเป็นปัญหาการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงเช่นเดียวกับการคำนวณแบบเชื่อมตรงของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มบวก อัลกอริทึมนี้สามารถแสดงได้โดยออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรง ซึ่งมีค่าความหน่วงเป็นจำนวนเต็ม k และจำนวนสถานะเท่ากับ $|\beta|^k$ ดังแสดงในอัลกอริทึมที่ 6

อัลกอริทึมที่ 6 (การแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงสำหรับระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบ)

Input $X = x_n x_{n-1} \ldots$ where $-\gamma \le x_i \le \gamma$ (Rational)

output $Z = z_{n+\mathrm{k}} z_{n+k-1} \ldots$ where $-\alpha \le z_i \le \alpha$ (Rational)

begin

$m = \frac{\gamma}{\alpha}$

$q_{n+k} = 0$ (initial state)

$g = \frac{-|\beta|^k + (|\beta| \; mod \; 2)}{4}$

$j = n$

while $j \le n$ do

if $k = even$ then

$$z_{j+k} \leq \frac{-g+(q_{j+k}\times\beta)+x_j}{|\beta|^k}$$

$$q_{j+k-1} = \left(q_{j+k}\times\beta + x_j\right) - (z_{j+k}\times|\beta|^k)$$

if $k = odd$ then

$$z_{j+k} \leq \frac{-g+(q_{j+k}\times\beta)+x_j}{|\beta|^k}$$

$$z_{j+k} = -z_{j+k}$$

$$q_{j+k-1} = \left(q_{j+k}\times\beta + x_j\right) - (-z_{j+k}\times|\beta|^k)$$

$j = j - 1$

enddo

end

สำหรับการพิสูจน์อัลกอริทึมที่ 6 นั้น เราได้เสนอชุดสถานะ Q ใหม่ที่ใช้สำหรับระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบดังนิยามที่ 9 รวมถึงเสนอบทตั้งที่ 4 และบทตั้งที่ 5 เพื่อใช้ในการพิสูจน์อัลกอริทึมที่ 6 นี้ ในบทตั้งที่ 4 จะแสดงถึงจำนวนสถานะที่ใช้ในออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงสำหรับระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบมีค่าเท่ากับ $|\beta|^k$ นอกจากนี้ ส่วนบทตั้งที่ 5 จะแสดงถึงค่าความหน่วงที่จำเป็นต้องใช้สำหรับออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงของจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบนี้

นิยามที่ 9

ชุดสถานะ Q สำหรับออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงของระบบชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบสามารถนิยามได้สองชุดสถานะดังนี้

$$Q_1 = \left\{\frac{-|\beta|^k+(|\beta|\ mod\ 2)}{4}, \dots, \frac{|\beta|^k+(|\beta|\ mod\ 2)-2}{4}\right\}$$

$$Q_2 = \left\{\frac{-|\beta|^k-(|\beta|\ mod\ 2)+2}{4}, \dots, \frac{|\beta|^k-(|\beta|\ mod\ 2)}{4}\right\}$$

บทตั้งที่ 4

จำนวนสถานะ q ที่ใช้ในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบมีค่าเท่ากับ $|\beta|^k$

พิสูจน์: จากนิยามที่ 9 กรณีเลือกใช้ชุดสถานะ Q_1 จะได้ว่าค่าของสถานะต่ำสุดคือ $g = \frac{-|\beta|^k+(|\beta|\ mod\ 2)}{4}$ และค่าสถานะสูงสุด $h = \frac{|\beta|^k+(|\beta|\ mod\ 2)-2}{4}$ โดยที่ $g \leq q \leq h$ และ $q \in Q_1$ ทั้งนี้จำนวนสถานะทั้งหมดของออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงนี้มีค่าดังสมการต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
2|g| + 2|h| + 1 &= 2\left|\frac{-|\beta|^k + (|\beta|\ mod\ 2)}{4}\right| + 2\left|\frac{|\beta|^k + (|\beta|\ mod\ 2) - 2}{4}\right| + 1 \\
&= \frac{2|\beta|^k - 2(|\beta|\ mod\ 2) + 2|\beta|^k + 2(|\beta|\ mod\ 2) - 4}{4} + 1 \\
&= \frac{4|\beta|^k - 4 + 4}{4} \\
&= |\beta|^k
\end{aligned}
$$

สำหรับกรณีเลือกใช้ชุดสถานะ Q_2 จะได้ว่าค่าของสถานะต่ำสุดคือ $g = \frac{-|\beta|^k - (|\beta|\ mod\ 2) + 2}{4}$ และค่าสถานะสูงสุด $h = \frac{|\beta|^k - (|\beta|\ mod\ 2)}{4}$ โดยที่ $g \le q \le h$ และ $q \in Q_2$ โดยจำนวนสถานะทั้งหมดของออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงนี้มีดังสมการต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
2|g| + 2|h| + 1 &= 2\left|\frac{-|\beta|^k - (|\beta|\ mod\ 2) + 2}{4}\right| + 2\left|\frac{|\beta|^k - (|\beta|\ mod\ 2)}{4}\right| + 1 \\
&= \frac{2|\beta|^k + 2(|\beta|\ mod\ 2) - 4 + 2|\beta|^k - 2(|\beta|\ mod\ 2)}{4} + 1 \\
&= \frac{4|\beta|^k - 4 + 4}{4} \\
&= |\beta|^k
\end{aligned}
$$

จากทั้งสองกรณีสรุปได้ว่า จำนวนสถานะ q ที่ใช้ในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบมีค่าเท่ากับ $|\beta|^k$ ■

บทตั้งที่ 5

ค่าความหน่วง k ของออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงสำหรับระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบมีค่าเท่ากับ $k \ge \log_{|\beta|}(\frac{(|\beta|\ mod\ 2)(-1+\beta+m)+|\beta|m+2}{1+(|\beta|\ mod\ 2)})$

พิสูจน์: จากอสมการ

$$\frac{-h + (q_{j+k}\beta) + x_j}{|\beta|^k} \le z_{j+k} \le \alpha$$

กำหนดให้ $\alpha = \frac{|\beta| + (|\beta|\ mod\ 2)}{4}, h = \frac{|\beta|^k + (|\beta|\ mod\ 2) - 2}{4}, q_{j+k} = \frac{-|\beta|^k + (|\beta|\ mod\ 2)}{4}$

และ $x_j = m \times \alpha$ จะได้ว่า

$$\frac{-(\frac{|\beta|^k + (|\beta|\ mod\ 2) - 2}{4}) + (\frac{-|\beta|^k + (|\beta|\ mod\ 2)}{4})\beta + (\frac{|\beta| + (|\beta|\ mod\ 2)}{4})m}{|\beta|^k} \le \frac{|\beta| + (|\beta|\ mod\ 2)}{4}$$

$$-(\frac{|\beta|^k + (|\beta|\ mod\ 2) - 2}{4}) + (\frac{-|\beta|^k + (|\beta|\ mod\ 2)}{4})\beta + (\frac{|\beta| + (|\beta|\ mod\ 2)}{4})m \le \frac{|\beta||\beta|^k + (|\beta|\ mod\ 2)|\beta|^k}{4}$$

$$
\begin{aligned}
&-|\beta|^k - (|\beta|\ mod\ 2) + 2 - \beta|\beta|^k + \beta(|\beta|\ mod\ 2) + m|\beta| + m(|\beta|\ mod\ 2) \\
&\qquad \le |\beta||\beta|^k + (|\beta|\ mod\ 2)|\beta|^k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|\beta|^k + (|\beta|\ mod\ 2)|\beta|^k \\
&\qquad \ge -(|\beta|\ mod\ 2) + 2 + (|\beta|\ mod\ 2)\beta + |\beta|m + (|\beta|\ mod\ 2)m
\end{aligned}
$$

$$|\beta|^k \ge \frac{-(|\beta|\ mod\ 2) + 2 + (|\beta|\ mod\ 2)\beta + |\beta|m + (|\beta|\ mod\ 2)m}{1 + (|\beta|\ mod\ 2)}$$

$|\beta|^k \geq \frac{(|\beta|\ mod\ 2)(-1+\beta+m)+|\beta|m+2}{1+(|\beta|\ mod\ 2)}$

$k \geq \log_{|\beta|}(\frac{(|\beta|\ mod\ 2)(-1+\beta+m)+|\beta|m+2}{1+(|\beta|\ mod\ 2)})$

ดังนั้นค่าความหน่วง k ของออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงสำหรับระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบมีค่าเท่ากับ $k \geq \log_{|\beta|}(\frac{(|\beta|\ mod\ 2)(-1+\beta+m)+|\beta|m+2}{1+(|\beta|\ mod\ 2)})$ ■

พิสูจน์อัลกอริทึมที่ 6: จากบทตั้งที่ 4 และบทตั้งที่ 5 เราจะแสดงให้เห็นว่าค่าความหน่วง k เพียงพอต่อการสร้างตัวเลข k หลักสุดท้ายของผลลัพธ์ การพิสูจน์แบ่งออกเป็นสองส่วนดังนี้

ส่วนที่ 1: จากการพิสูจน์อัลกอริทึมที่ 3 จะได้ว่า $(-\alpha)\beta^{k-1} + (-\alpha)\beta^{k-2} + \cdots + (-\alpha) \leq l$ เราจะแสดงให้เห็นว่า $l \leq g$ โดยเลือกใช้ชุดตัวเลข Q_1 ที่มีค่าสถานะต่ำสุด $g = \frac{-|\beta|^k+(|\beta|\ mod\ 2)}{4}$

$$\begin{aligned}
-|\beta|^{k+1} &\leq -|\beta|^{k+1} \\
-|\beta|^{k+1} + |\beta|m - |\beta|^k(|\beta|mod2) + m(|\beta|mod2) &\leq -|\beta|^{k+1} + |\beta|(|\beta|\ mod\ 2) + |\beta|^k - (|\beta|\ mod\ 2) \\
\frac{-|\beta|^{k+1}+|\beta|m-|\beta|^k(|\beta|\ mod\ 2)+m(|\beta|\ mod\ 2)}{4} &\leq \frac{-|\beta|^{k+1}+|\beta|(|\beta|\ mod\ 2)+|\beta|^k-(|\beta|\ mod\ 2)}{4} \\
\frac{(-|\beta|-(|\beta|\ mod\ 2))(|\beta|^k-m)}{4} &\leq \frac{-|\beta|^{k+1}+|\beta|(|\beta|\ mod\ 2)+|\beta|^k-(|\beta|\ mod\ 2)}{4} \\
-\alpha(|\beta|^k-m) &\leq \frac{(-|\beta|^k+(|\beta|\ mod\ 2))(|\beta|-1)}{4} \\
\frac{-\alpha(|\beta|^k-m)}{|\beta|-1} &\leq \frac{-|\beta|^k+(|\beta|\ mod\ 2)}{4} \\
l &\leq g
\end{aligned}$$

ดังนั้นในส่วนที่ 1 สามารถสรุปได้ว่า $(-\alpha)\beta^{k-1} + (-\alpha)\beta^{k-2} + \cdots + (-\alpha) \leq g$

ส่วนที่ 2: จากการพิสูจน์อัลกอริทึมที่ 3 จะได้ว่า $\alpha\beta^{k-1} + \alpha\beta^{k-2} + \cdots + \alpha \geq u$ เราจะแสดงให้เห็นว่า $u \geq h$ โดยเลือกใช้ชุดตัวเลข Q_2 ที่มีค่าสถานะสูงสุด $h = \frac{|\beta|^k-(|\beta|\ mod\ 2)}{4}$

$$\begin{aligned}
|\beta|^{k+1} &\geq |\beta|^{k+1} \\
|\beta|^{k+1} - |\beta|m + |\beta|^k(|\beta|mod2) - m(|\beta|mod2) &\geq |\beta|^{k+1} - |\beta|(|\beta|\ mod\ 2) - |\beta|^k + (|\beta|\ mod\ 2) \\
\frac{|\beta|^{k+1}-|\beta|m+|\beta|^k(|\beta|\ mod\ 2)-m(|\beta|\ mod\ 2)}{4} &\geq \frac{|\beta|^{k+1}-|\beta|(|\beta|\ mod\ 2)-|\beta|^k+(|\beta|\ mod\ 2)}{4} \\
\frac{(|\beta|+(|\beta|\ mod\ 2))(|\beta|^k-m)}{4} &\geq \frac{|\beta|^{k+1}-|\beta|(|\beta|\ mod\ 2)-|\beta|^k+(|\beta|\ mod\ 2)}{4} \\
\alpha(|\beta|^k-m) &\geq \frac{(|\beta|^k-(|\beta|\ mod\ 2))(|\beta|-1)}{4} \\
\frac{\alpha(|\beta|^k-m)}{|\beta|-1} &\geq \frac{|\beta|^k-(|\beta|\ mod\ 2)}{4} \\
u &\geq h
\end{aligned}$$

ดังนั้นในส่วนที่ 2 สามารถสรุปได้ว่า $\alpha\beta^{k-1} + \alpha\beta^{k-2} + \cdots + \alpha \geq h$

จากส่วนที่ 1 และส่วนที่ 2 สามารถสรุปได้ว่าค่าความหน่วง k เพียงพอต่อการผลิตตัวเลข k หลักสุดท้ายของผลลัพธ์ที่ได้จากออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบ ■

สำหรับตัวอย่างการคำนวณแบบเชื่อมตรงของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบแสดงในตัวอย่างที่ 21 และตัวอย่างที่ 22 ในตัวอย่างที่ 21 จะเป็นตัวอย่างของการบวกกันของจำนวนสองจำนวนภายใต้ฐาน $\beta = -3$ ด้วยวิธีการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงซึ่งเป็นการแปลงชุดตัวเลขจากชุดตัวเลข $E = \{\bar{2}, \frac{\bar{3}}{2}, \bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$ ไปยังชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{\bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ โดยใช้ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรง เมื่อกำหนดค่า $m = 2$ และคำนวณค่าความหน่วงแบบเชื่อมตรงได้เป็น $k = 1$ พร้อมทั้งแสดงการปัดเศษโดยการตัดรูปแบบแทนจำนวนในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะในตัวอย่างนี้ด้วย

ตัวอย่างที่ 21 กำหนดให้จำนวน $X = (\bar{2}\frac{3}{2}21.\bar{1}\bar{1}\frac{1}{2})_{-3}$ โดยที่ $X \in E^*$ จงหาผลลัพธ์ของการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงของจำนวน X จากชุดตัวเลข $E = \{\bar{2}, \frac{\bar{3}}{2}, \bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$ ไปยังชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{\bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ ในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐาน $\beta = -3$ โดยใช้ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบ

จากอัลกอริทึมที่ 6 การแปลงชุดตัวเลขของจำนวน $X = (\bar{2}\frac{3}{2}21.\bar{1}\bar{1}\frac{1}{2})_{-3}$ สามารถแสดงได้ด้วยออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงและคำนวณค่า $m = 2$ ส่วนค่าความหน่วง k สามารถคำนวณได้จากบทตั้งที่ 5 ซึ่งได้ค่า $k = 1$ ดังนั้นการแปลงจำนวน $X = (\bar{2}\frac{3}{2}21.\bar{1}\bar{1}\frac{1}{2})_{-3}$ จากชุดตัวเลข $E = \{\bar{2}, \frac{\bar{3}}{2}, \bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$ ไปยังชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{\bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ ในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐาน $\beta = -3$ โดยใช้ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบดังรูปที่ 4 สามารถแสดงได้กราฟต่อไปนี้

$$0 \xrightarrow{\bar{2}\,/\,\frac{1}{2}} \frac{-1}{2} \xrightarrow{\frac{3}{2}\,/\,\bar{1}} 0 \xrightarrow{2\,/\,\frac{\bar{1}}{2}} \frac{1}{2} \xrightarrow{1\,/\,0} \frac{-1}{2} \xrightarrow{\bar{1}\,/\,0} \frac{1}{2} \xrightarrow{\bar{1}\,/\,1} \frac{1}{2} \xrightarrow{\frac{1}{2}\,/\,\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$

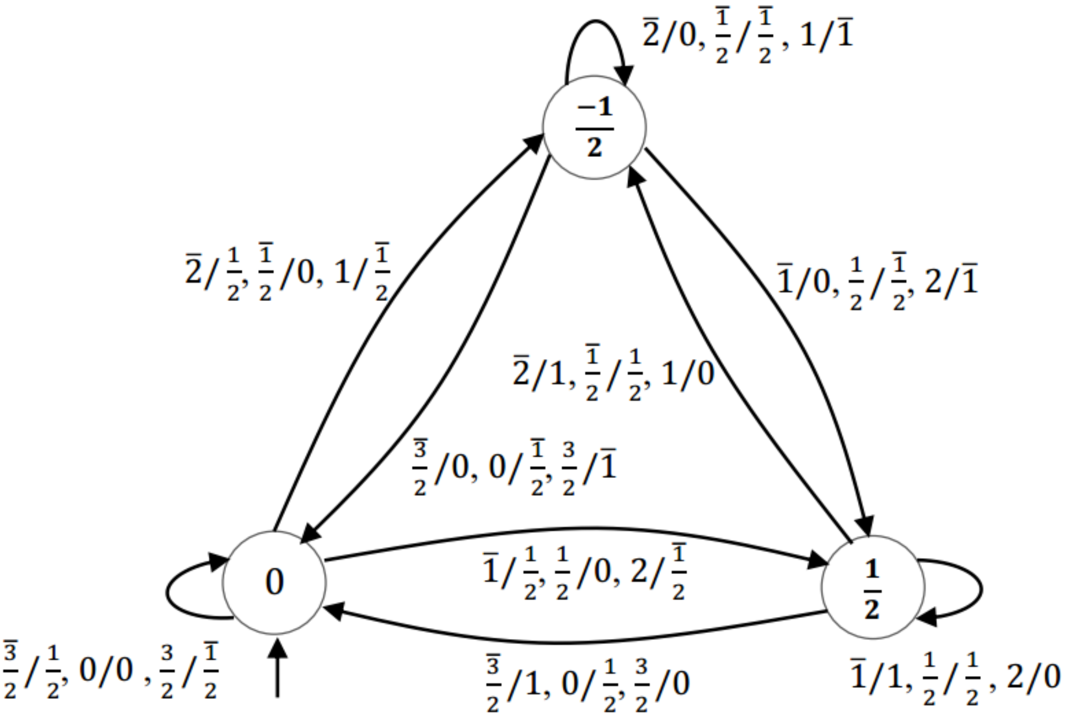
ภายหลังจากที่อ่านตัวเลขนำเข้าของจำนวน X ทั้งหมดแล้ว ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงจะผลิตผลลัพธ์ชั่วคราวออกมาคือ $\frac{1}{2}\bar{1}\frac{\bar{1}}{2}00.1\frac{1}{2}$ ขั้นตอนสุดท้ายสำหรับการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงนี้คือการเพิ่มตัวเลข k หลักสุดท้ายเข้าไปยังผลลัพธ์ชั่วคราว เนื่องจากเราใช้ค่าความหน่วง $k = 1$ และสถานะสุดท้ายที่จบการทำงานของออโตมาตันคือ $q = \frac{1}{2}$ ดังนั้นเราจะนิยามฟังก์ชันสิ้นสุด $\omega: Q \rightarrow \mathcal{D}^*$ ได้เป็น $\omega\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ โดยเราจะนำตัวเลข $\frac{1}{2}$ ไปต่อท้ายที่ผลลัพธ์ชั่วคราว จะได้ว่าผลลัพธ์สุดท้ายคือ $\frac{1}{2}\bar{1}\frac{\bar{1}}{2}00.1\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ ซึ่งมีค่าเชิงตัวเลขประมาณ 62.703702

การปัดเศษในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบสามารถทำได้โดยการตัดรูปแบบแทนจำนวน ณ ตำแหน่งที่ต้องการทิ้งไป ซึ่งเทียบเท่ากับการปัดเศษแบบราวด์ทูเนียเรสท์นั่นเอง เนื่องจากตัวเลขที่อนุญาตให้ใช้ในรูปแบบแทนจำนวนของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะจะมีค่าน้อยกว่าครึ่งหนึ่งของค่าฐาน ($\frac{|\beta|}{2}$) เสมอ ในตัวอย่างนี้ $\frac{|\beta|}{2}$ =1.5 แต่ตัวเลขที่มีค่ามากที่สุดที่อนุญาตให้ใช้ในระบบคือ 1 ทั้งนี้ตัวอย่างของการตัดรูปแบบแทนจำนวนพร้อมทั้งแสดงค่าเชิงตัวเลขจะเป็นดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 15 ตัวอย่างการปัดเศษของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบ

รูปแบบแทนจำนวน Z	ค่าเชิงตัวเลข
$\frac{1}{2}\bar{1}\frac{\bar{1}}{2}00.1\frac{1}{2}\frac{1}{2}$	62.703702
$\frac{1}{2}\bar{1}\frac{\bar{1}}{2}00.1\frac{1}{2}$	62.722222
$\frac{1}{2}\bar{1}\frac{\bar{1}}{2}00.1$	62.666667

□



รูปที่ 4 ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงภายใต้ฐาน $\beta = -3$ ค่า $m = 2$ และค่าความหน่วง $k = 1$

ตัวอย่างต่อไปจะเป็นตัวอย่างของการนำจำนวนในระบบชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐาน $\beta = -4$ มาคูณด้วยจำนวนเต็ม $m = 7$ ซึ่งแสดงด้วยการแปลงชุดตัวเลข $E = \{\bar{7}, \frac{\overline{13}}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{13}{2}, 7\}$ ไปยังชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{\bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ โดยใช้ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรง และคำนวณค่าความหน่วงแบบเชื่อมตรงได้เป็น $k = 3$

ตัวอย่างที่ 22 กำหนดให้จำนวน $X = (5\frac{\bar{7}}{2}\frac{\bar{1}}{2}10\bar{7})_{-4}$ โดยที่ $X \in E^*$ จงหาผลลัพธ์ของการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงของจำนวน X จากชุดตัวเลข $E = \{\bar{7}, \frac{\overline{13}}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{13}{2}, 7\}$ ไปยังชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{\bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ ในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐาน $\beta = -4$ โดยใช้ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบ

จำนวน $X = (5\frac{\bar{7}}{2}\frac{\bar{1}}{2}10\bar{7})_{-4}$ มีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับ -5975 การแปลงชุดตัวเลขจากชุดตัวเลข $\mathrm{E} = \{\bar{7}, \frac{\overline{13}}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{13}{2}, 7\}$ ไปยังชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{\bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ ในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะภายใต้ฐาน $\beta = -4$ โดยใช้ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบ ซึ่งมีค่า m =7 และค่าความหน่วง $k = 3$ ซึ่งสามารถคำนวณได้จากบทตั้งที่ 5 เราจะแสดงการสร้างออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงดังอัลกอริทึมที่ 6 โดยตัวเลขนำออก z_{j+k} สามารถถูกคำนวณได้จากตัวเลขนำเข้า x_j และค่าสถานะปัจจุบัน q_{j+k}ซึ่งแสดงได้ดังอสมการต่อไปนี้

$$z_{j+k} \leq \frac{-g + (q_{j+k} \times \beta) + x_j}{|\beta|^k}$$

โดยที่สถานะ $g = -16.0$ และสถานะ $h = 15.5$ จะได้ว่า

$$z_{j+k} \leq \frac{16 + (q_{j+k} \times -4) + x_j}{|-4|^3}$$

สำหรับค่าความหน่วง k ที่เป็นเลขคี่ เราจะทำการสลับเครื่องหมายของ z_{j+k} เพื่อหักล้างกับการสลับเครื่องหมายของค่าน้ำหนักในแต่ละตำแหน่งของฐานจำนวนเต็มลบ ดังนั้น

$$z_{j+k} = -z_{j+k}$$

สถานะถัดไปคือ q_{j+k-1} สามารถคำนวณได้ดังสมการ

$$q_{j+k-1} = \big((q_{j+k} \times -4) + x_j\big) - (-z_{j+k} \times |-4|^3)$$

ดังนั้นการแปลงชุดตัวเลขโดยใช้ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงภายใต้ฐานจำนวนเต็มลบด้วยค่าความหน่วง $k = 3$ สามารถแสดงได้ดังกราฟต่อไปนี้

$$0 \xrightarrow{5\ /\ 0} 5 \xrightarrow{\frac{\bar{7}}{2}\ /\ \frac{1}{2}} \frac{17}{2} \xrightarrow{\frac{\bar{1}}{2}\ /\ \frac{1}{2}} \frac{-5}{2} \xrightarrow{1\ /\ 0} 11 \xrightarrow{0\ /\ \frac{1}{2}} -12 \xrightarrow{\bar{7}\ /\ \frac{\bar{1}}{2}} 9$$

ภายหลังจากที่อ่านตัวเลขนำเข้าของจำนวน X ทั้งหมดแล้ว ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงจะผลิตผลลัพธ์ชั่วคราวออกมาคือ $0\frac{1}{2}\frac{1}{2}0\frac{1}{2}\frac{\bar{1}}{2}$ เนื่องจากสถานะสุดท้ายของออโตมาตันหยุดที่สถานะ q =9 และค่าความหน่วง $k = 3$ เราจะนิยามฟังก์ชันสิ้นสุด $\omega: Q \rightarrow \mathcal{D}^*$ ได้เป็น $\omega(9) = \frac{1}{2}01$ เมื่อเรานำตัวเลข $\frac{1}{2}01$ ไปต่อท้ายผลลัพธ์ชั่วคราว จะได้ผลลัพธ์สุดท้ายที่ถูกต้องคือ $0\frac{1}{2}\frac{1}{2}0\frac{1}{2}\frac{\bar{1}}{2}\frac{1}{2}01$ มีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับ -5975 □

5. สรุปผลงานวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลงานวิจัย

ในงานวิจัยนี้เราได้เสนอระบบจำนวนใหม่ที่ชุดตัวเลขประกอบด้วยตัวเลขตรรกยะเรียกว่า ระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะ ซึ่งสามารถทำงานได้ภายใต้ฐาน β ที่เป็นจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบ โดยใช้ชุดตัวเลขตรรกยะ $\mathcal{D} = \{-\alpha, -\alpha + \frac{1}{2}, \ldots, 0, \ldots, \alpha - \frac{1}{2}, \alpha\}$ และตัวเลขตรรกยะ $\alpha = \frac{|\beta| + (|\beta| \ mod\ 2)}{4}$ ข้อดีของการเลือกใช้ตัวเลขตรรกยะคือ เราสามารถออกแบบให้แต่ละสมาชิกของชุดตัวเลข $\mathcal{D}$ มีค่าน้อยกว่า $\frac{|\beta|}{2}$ ได้เสมอ ทำให้การปัดเศษ ณ ตำแหน่งใด ๆ เปรียบเสมือนการปัดเศษแบบราวด์ทูเนียเรสท์นั่นเอง ซึ่งสอดคล้องสมบัติการปัดเศษของการเข้ารหัสอาร์เอน รวมถึงเรายังสามารถเพิ่มจำนวนตัวเลขเข้าไปในชุดตัวเลขเพื่อให้ระบบจำนวนมีความซ้ำซ้อนและสามารถทำการคำนวณแบบเชื่อมตรงได้ ทั้งนี้เราได้พิสูจน์ความสมบูรณ์ของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะโดยแสดงให้เห็นว่าจำนวนใด ๆ สามารถมีรูปแบบแทนจำนวนในระบบนี้ได้ นอกจากนี้เรายังได้เสนออัลกอริทึมการคำนวณแบบเชื่อมตรงสำหรับระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะ โดยแปลงเป็นปัญหาการแปลงชุดตัวเลขที่สามารถแสดงได้ด้วยออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรง ซึ่งพิสูจน์ให้เห็นในงานวิจัยนี้แล้วว่าออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะสามารถทำงานได้ด้วยจำนวนสถานะเท่ากับ $|\beta|^k$ โดยที่ k คือค่าความหน่วงแบบเชื่อมตรงซึ่งมีค่าเท่ากับ $k \geq \log_{\beta}(\frac{1+4\alpha m-\beta}{1+4\alpha-\beta})$ ในฐานจำนวนเต็มบวกและมีค่าเท่ากับ $k \geq \log_{|\beta|}(\frac{(|\beta| \ mod\ 2)(-1+\beta+m)+|\beta|m+2}{1+(|\beta| \ mod\ 2)})$ ในฐานจำนวนเต็มลบ

5.2 บทวิเคราะห์และข้อเสนอแนะ

เนื่องจากระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะที่เราได้นำเสนอในงานวิจัยนี้ได้กำหนดให้ระบบสามารถทำงานได้ภายใต้ฐาน β ที่เป็นได้ทั้งจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบ โดยออกแบบชุดตัวเลขเป็นแบบสมมาตร ดังนั้นจึงมีจำนวนตัวเลขตรรกยะภายในชุดตัวเลขเท่ากับ $|\beta| + 1$ ตัวสำหรับฐานคู่ และ $|\beta| + 2$ ตัวสำหรับฐานคี่ ถ้าเราสนใจในกรณีของการลดจำนวนตัวเลขตรรกยะของชุดตัวเลขให้น้อยลงนั้น เราไม่สามารถลดจำนวนตัวเลขตรรกยะในชุดตัวเลขสำหรับฐานคู่ได้เนื่องจากมีค่าน้อยที่สุดที่ทำให้ระบบจำนวนมีสมบัติซ้ำซ้อนและเป็นสิ่งจำเป็นต่อการคำนวณแบบเชื่อมตรง แต่สำหรับฐานคี่ซึ่งมีจำนวนตัวเลขตรรกยะในชุดตัวเลขมากกว่าฐานคู่จำนวนหนึ่งตัวนั้นอาจสามารถลดจำนวนตัวเลขตรรกยะให้น้อยลงเท่ากับฐานคู่ได้ หนึ่งในวิธีที่สามารถทำได้คือการออกแบบให้ชุดตัวเลขเป็นแบบอสมมาตร นั่นคือกำหนดให้ชุดตัวเลขตรรกยะมีสมาชิกค่าเอียงไปทางฝั่งลบหรือฝั่งบวก เช่น จากเดิมที่ชุดตัวเลขตรรกยะแบบสมมาตรสำหรับฐาน $\beta = 5$ คือ $\mathcal{D} = \{\frac{\overline{3}}{2}, \overline{1}, \frac{\overline{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\}$ ก็เปลี่ยนเป็นชุด

ตัวเลขตรรกยะแบบอสมมาตร คือ $\mathcal{D} = \{\frac{\bar{3}}{2}, \bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ หรือ $\mathcal{D} = \{\bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\}$ ซึ่งสามารถลดจำนวนตัวเลขตรรกยะที่ใช้ในชุดตัวเลขลงจากเดิม 7 ตัวเหลือเพียง 6 ตัว เป็นต้น แต่อย่างไรก็ตามการเลือกใช้ชุดตัวเลขตรรกยะแบบอสมมาตรจะต้องทำการออกแบบอัลกอริทึมการแปลงจำนวนใด ๆ ให้มาอยู่ในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะแบบอสมมาตรใหม่ รวมถึงออกแบบอัลกอริทึมการคำนวณแบบเชื่อมตรงใหม่ด้วย เพราะการที่เราไม่มีคู่ของตัวเลขตรรกยะที่มีทั้งค่าบวกและค่าลบให้เลือกใช้อาจส่งผลต่อความสามารถในการจำกัดขอบเขตการแพร่ของตัวทดในระหว่างการคำนวณและจำเป็นต้องเพิ่มค่าความหน่วงที่ใช้ในออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงด้วย

นอกจากนี้เราได้ออกแบบให้ชุดตัวเลขของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะประกอบด้วยตัวเลขที่มีค่าต่อเนื่องกัน โดยประกอบด้วยตัวเลขจำนวนเต็มและเพิ่มตัวเลขตรรกยะเข้ามาซึ่งมีระยะห่างระหว่างตัวเลขที่เท่ากันคือ $\frac{1}{2}$ ถ้าเราเปรียบเทียบประสิทธิภาพในด้านต่าง ๆ ระหว่างชุดตัวเลขของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะคือ $\mathcal{D}_1 = \{-\alpha, -\alpha + \frac{1}{2}, \ldots, 0, \ldots, \alpha - \frac{1}{2}, \alpha\}$ โดยที่ $\alpha = \frac{|\beta| + (|\beta| \bmod 2)}{4}$ กับชุดตัวเลขแบบสมมาตรของระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายประเภทที่ใช้จำนวนตัวเลขน้อยที่สุดคือ $\mathcal{D}_2 = \{\left\lfloor\frac{-\beta}{2}\right\rfloor, \left\lfloor\frac{-\beta}{2}\right\rfloor + 1, \ldots, 0, \ldots, \left\lceil\frac{\beta}{2}\right\rceil - 1, \left\lceil\frac{\beta}{2}\right\rceil\}$ เมื่อกำหนดให้ฐาน $\beta = 2$ จะได้ว่าชุดตัวเลขของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะคือ $\mathcal{D}_1 = \{\frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$ และชุดตัวเลขของระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายคือ $\mathcal{D}_2 = \{\bar{1}, 0, 1\}$ จะสังเกตได้ว่าถึงแม้ชุดตัวเลข $\mathcal{D}_1$ จะประกอบด้วยตัวเลขที่มีค่าต่ำสุดคือ $\frac{\bar{1}}{2}$ และค่าสูงสุดคือ $\frac{1}{2}$ ซึ่งมีค่าน้อยกว่าตัวเลขในชุดตัวเลข $\mathcal{D}_2$ ที่มีค่าต่ำสุดคือ -1 และค่าสูงสุดคือ 1 อยู่ครึ่งหนึ่ง แต่ไม่ได้ส่งผลต่อขนาดความยาวของรูปแบบแทนจำนวนของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะที่จำเป็นต้องเพิ่มขึ้นสองเท่าตามไปด้วยเมื่อเปรียบเทียบกับจำนวนเดียวกันในระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมาย ในความจริงแล้วความยาวของรูปแบบแทนจำนวนจะเพิ่มขึ้นไม่เกินหนึ่งหลักเท่านั้น

การออกแบบให้ระยะห่างของตัวเลขตรรกยะในชุดตัวเลขของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะมีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่า $\frac{1}{2}$ นั้น เช่น ฐาน $\beta = 2$ กำหนดให้ระยะห่างระหว่างตัวเลขในชุดตัวเลขคือ $\frac{1}{3}$ ตัวอย่างของชุดตัวเลขคือ $\mathcal{D} = \{\frac{\bar{1}}{3}, 0, \frac{1}{3}\}$ หรือฐาน $\beta = 5$ กำหนดให้ระยะห่างระหว่างตัวเลขในชุดตัวเลขคือ $\frac{1}{4}$ จะได้ตัวอย่างของชุดตัวเลขคือ $\mathcal{D} = \{\frac{\bar{3}}{4}, \frac{\bar{2}}{4}, \frac{\bar{1}}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\}$ เป็นต้น เราจะต้องคำนึงถึงความสมบูรณ์ของระบบในการแสดงจำนวนใด ๆ ได้ทุกจำนวน ซึ่งอาจส่งผลต่อความสิ้นเปลืองที่จะเกิดขึ้นกับการที่ต้องใช้จำนวนตัวเลขตรรกยะในชุดตัวเลขที่เพิ่มขึ้นเพื่อให้เพียงพอต่อการแสดงจำนวนต่าง ๆ และจะส่งผลต่อขนาดความยาวของรูปแบบแทนจำนวนที่จำเป็นต้องเพิ่มขึ้นตามไปด้วย นอกจากนี้ถ้าเกิดเหตุการณ์ที่มีการใช้ตัวเลขในระบบที่เพิ่มมากขึ้นก็ย่อมส่งผลกระทบต่ออัลกอริทึมการแปลงที่อาจจะต้องเพิ่มขั้นตอนการแปลงและจัดการกับตัวทดที่เพิ่มขึ้นในระบบ รวมถึงการ

ปรับปรุงอัลกอริทึมการคำนวณแบบเชื่อมตรงที่อาจจะต้องเพิ่มค่าความหน่วงหรือจำนวนสถานะของออโตมาตันด้วย

สำหรับการขยายความสามารถของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะให้รองรับฐานอื่น ๆ นอกเหนือจากฐานจำนวนเต็ม เช่น จำนวนเชิงซ้อน อาจใช้แนวคิดของการเพิ่มจำนวนเชิงซ้อนเข้าไปในชุดตัวเลขตรรกยะหรือใช้ชุดตัวเลขที่ประกอบด้วยตัวเลขตรรกยะและกำหนดให้ฐานมีค่าเป็นจำนวนเชิงซ้อนแทน การทำเช่นนี้จะเพิ่มความสามารถให้ระบบสามารถแสดงค่าของจำนวนเชิงซ้อนได้ซึ่งแตกต่างจากระบบเดิมที่แสดงค่าได้เฉพาะจำนวนจริง แต่อย่างไรก็ตามในอัลกอริทึมการแปลงจำนวนจากระบบจำนวนอื่น ๆ อาจใช้วิธีรวมการพิจารณาส่วนจริง (real part) และส่วนจินตภาพ (imaginary part) เข้าด้วยกันหรือจะแยกกันพิจารณาก็ได้ ซึ่งจะขึ้นอยู่กับวิธีการจัดการตัวทดที่เกิดขึ้นในระหว่างขั้นตอนการแปลง รวมถึงในการคำนวณแบบเชื่อมตรงโดยใช้ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงจะต้องจัดการกับเศษเหลือหรือค่าของสถานะในแต่ละขั้นตอนการคำนวณ โดยอาจจะรวมส่วนจริงและส่วนจินตภาพไว้ในสถานะเดียวกัน หรือจะแยกสถานะกัน ซึ่งส่งผลต่อจำนวนสถานะและค่าความหน่วงที่จำเป็นต้องใช้แตกต่างกันด้วย

ทั้งนี้วิธีการออกแบบชุดตัวเลขแบบต่าง ๆ จะส่งผลต่อประสิทธิภาพของอัลกอริทึมที่ใช้ในการแปลงจำนวนใด ๆ ในระบบจำนวนอื่นมายังระบบจำนวนที่เรากำลังออกแบบอยู่ด้วย ถ้าพิจารณาในด้านของเวลาที่ใช้ในการแปลงก็ขึ้นอยู่กับว่าระบบจำนวนที่เรากำลังออกแบบมีความสามารถในการแปลงจำนวนแบบอนุกรม การแปลงแบบขนาน หรือการแปลงแบบเชื่อมตรง ซึ่งจะเกี่ยวข้องกับความสามารถในการจัดการและจำกัดการแพร่ของตัวทดในระหว่างขั้นตอนการแปลง ถ้าเราสามารถออกแบบให้ระบบจำนวนสามารถทำการแปลงแบบขนานได้ จะช่วยประหยัดเวลาในการแปลงลงไปได้มาก และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ร่วมกับระบบจำนวนแบบอื่น ๆ ในระหว่างการคำนวณได้ เนื่องจากแต่ละระบบจำนวนมีจุดเด่นจุดด้อยที่เหมาะสมกับการนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาที่แตกต่างกันออกไป ดังนั้นในระหว่างขั้นตอนการคำนวณ ถ้าเราพบว่ามีระบบจำนวนอื่นที่มีประสิทธิภาพในการทำงานกับปัญหานั้น ๆ ได้ดีกว่าและคุ้มค่าต่อการเสียเวลาแปลงจำนวนกลับไปกลับมา ก็เป็นอีกหนึ่งแนวทางที่ควรพิจารณา

ในส่วนของขั้นตอนการคำนวณแบบเชื่อมตรงในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะนั้น เราได้แปลงปัญหาของการคำนวณเป็นปัญหาการแปลงชุดตัวเลขและใช้ออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงมาประยุกต์ใช้ ซึ่งจากที่กล่าวไปในบทก่อนหน้านี้เกี่ยวกับองค์ประกอบต่าง ๆ ของออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงที่จำเป็นต้องคำนึงถึงในระหว่างขั้นตอนการออกแบบอัลกอริทึมการคำนวณ เช่น จำนวนสถานะที่จำเป็นต้องใช้ในระหว่างขั้นตอนการคำนวณ การหาค่าความหน่วงแบบเชื่อมตรงที่มีค่าเป็นจำนวณเต็มบวก เป็นต้น สิ่งสำคัญที่ต้องคำนึงถึงในระหว่างขั้นตอนการออกแบบอัลกอริทึมการ

คำนวณแบบเชื่อมตรงคือ ออโตมาตันจะต้องใช้จำนวนสถานะในระหว่างการคำนวณมากน้อยเพียงใด สามารถระบุขอบเขตของค่าสถานะได้หรือไม่ ถ้าเราสามารถพิสูจน์ได้ว่าจำนวนสถานะมีค่าจำกัดก็จะสะดวกต่อการนำไปประยุกต์เพื่อพัฒนาเป็นฮาร์ดแวร์ต่อไป การพิสูจน์เรื่องขอบเขตของค่าสถานะที่เป็นไปได้ในระหว่างการทำงานของออโตมาตันนั้นจะมีปัจจัยที่เกี่ยวข้อง คือ ค่าฐาน (β) ค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของตัวเลขตรรกยะที่อนุญาตให้มีในชุดตัวเลข ($\pm\alpha$) ขนาดจำนวนเท่าของชุดตัวเลขนำเข้า (m) และค่าความหน่วงแบบเชื่อมตรง (k) ทั้งนี้ตัวแปรสำคัญที่ส่งผลอย่างมากต่อผลลัพธ์จากสมการการคำนวณขอบเขตของสถานะของออโตมาตันจำกัดแบบเชื่อมตรงที่ใช้ในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะคือ ค่าความหน่วงแบบเชื่อมตรง (k) เนื่องจากในสมการการคำนวณนั้น ตัวแปร k อยู่ในรูปของ $|\beta|^k$ ดังนั้น ค่า k ยิ่งมากก็ยิ่งส่งผลต่อค่าขอบเขตของสถานะมากขึ้นตามไปด้วย

ปัจจัยที่เกี่ยวข้องกับสมการการหาค่าความหน่วงแบบเชื่อมตรง k คือ ค่าฐาน (β) ค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของตัวเลขตรรกยะที่อนุญาตให้มีในชุดตัวเลข ($\pm\alpha$) และขนาดจำนวนเท่าของชุดตัวเลขนำเข้า (m) โดยตัวแปรที่ส่งผลมากที่สุดต่อค่าของสมการการหาค่าความหน่วงแบบเชื่อมตรง k คือค่า m ในที่นี้ตัวแปร m ยิ่งมีค่ามากก็ยิ่งส่งผลต่อการเพิ่มขึ้นของค่า k ตามไปด้วย แต่อย่างไรก็ตามค่าของ k ไม่ได้เพิ่มขึ้นแปรผันตรงกับค่า m เนื่องจากสมการที่ใช้ในการคำนวณหาค่า k เป็นสมการลอการิทึม ดังนั้นค่า k จึงเพิ่มขึ้นเป็นฟังก์ชันลอการิทึม ทั้งนี้ปัจจัยที่มีต่อการพิสูจน์ว่าค่า k ที่น้อยที่สุดที่เพียงพอต่อการทำงานของออโตมาตันคือค่าใด อาจขึ้นอยู่กับค่าเศษเหลือหรือค่าของสถานะที่ได้จากการคำนวณในแต่ละรอบ ซึ่งจะต้องสอดคล้องกับค่าสถานะที่อนุญาตให้มีในออโตมาตันนอกจากนี้ค่าสถานะดังกล่าวจะต้องสามารถแสดงได้โดยใช้ตัวเลขตรรกยะไม่เกิน k ตัว โดยที่ตัวเลขตรรกยะที่ใช้จะต้องมีอยู่ในชุดตัวเลขของระบบด้วย

นอกจากนี้เรื่องของการปัดเศษในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะที่เราได้เสนอไปนั้น การปัดเศษด้วยวิธีการตัดรูปแบบแทนจำนวน ณ ตำแหน่งที่ต้องการ อาจไม่สามารถรับประกันได้ว่าจะไม่มีรูปแบบแทนจำนวนอื่นที่มีค่าเชิงตัวเลขใกล้เคียงกับค่าตั้งต้นมากกว่าภายใต้ความยาวของรูปแบบแทนจำนวนที่เท่ากัน เช่น รูปแบบแทนจำนวนภายใต้ฐาน $\beta = 3$ และชุดตัวเลข $\mathcal{D} = \{\bar{1}, \frac{\bar{1}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ คือ $1.1\frac{1}{2}1$ มีค่าเชิงตัวเลขประมาณ 1.42593 ถ้าเราตัดตัวเลขทางขวาสุดของรูปแบบแทนจำนวนออกไปหนึ่งตัว จะได้เป็น $1.1\frac{1}{2}$ ซึ่งมีค่าเชิงตัวเลขประมาณ 1.38888 แต่อย่างไรก็ตามเราสามารถหารูปแบบแทนจำนวนอื่นที่มีความยาวของรูปแบบแทนจำนวนที่เท่ากันและสามารถแสดงค่าเชิงตัวเลขได้ใกล้เคียงกับ 1.42593 มากกว่า นั่นคือ 1.11 ซึ่งมีค่าเชิงตัวเลขประมาณ 1.44444

ในส่วนของการเปรียบเทียบสมบัติต่าง ๆ ระหว่างระบบจำนวนที่เรานำเสนอใหม่คือ ระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะกับการเข้ารหัสอาร์เอนของเดิมนั้น สิ่งที่ทั้งสองระบบจำนวนมีเหมือนกันคือสมบัติการปัดเศษแบบราวด์ทูเนียเรสท์ ซึ่งการปัดเศษสามารถทำได้โดยการตัดส่วนของรูปแบบแทน

จำนวนทิ้งไป ณ ตำแหน่งที่ต้องการ ผลลัพธ์จากการตัดคือรูปแบบแทนจำนวนที่มีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับการปัดเศษแบบราวด์ทูเนียเรสท์ แต่สิ่งที่แตกต่างกันของสองระบบจำนวนนี้คือ การคงสมบัติการปัดเศษแบบราวด์ทูเนียเรสท์ของรูปแบบแทนจำนวนในระหว่างขั้นตอนการคำนวณ เนื่องจากในฐานคู่บวกนั้นการเข้ารหัสอาร์เอนอนุญาตให้ใช้ตัวเลขจำนวนเต็มที่มีค่าน้อยที่สุดคือ $\frac{-\beta}{2}$ และค่าสูงสุดคือ $\frac{\beta}{2}$ ซึ่งตัวเลขทั้งสองตัวนี้เองที่เป็นอุปสรรคต่อการผลิตผลลัพธ์จากการคำนวณแบบเชื่อมตรงให้มีรูปแบบแทนจำนวนที่ถูกต้องตรงตามการเข้ารหัสอาร์เอน เนื่องจากไม่สามารถควบคุมการแพร่ของตัวทดไม่ให้กระทบไปถึงตัวเลขหลักทางซ้ายสุดในระหว่างขั้นตอนการคำนวณได้ แต่ในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะอนุญาตให้ใช้ตัวเลขที่มีค่าต่ำสุดคือ $\frac{-\beta}{4}$ และค่าสูงสุดคือ $\frac{\beta}{4}$ ซึ่งตัวเลขทั้งสองตัวมีค่าน้อยกว่าครึ่งหนึ่งของค่าฐาน ทำให้สามารถออกแบบการคำนวณไม่ให้เกิดตัวทดแพร่ไปจนถึงหลักทางซ้ายสุดได้ ส่งผลให้ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณยังคงอยู่ในรูปแบบที่ถูกต้องของระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะและมีสมบัติการปัดเศษแบบราวด์ทูเนียเรสท์ ทั้งนี้สำหรับฐานคี่บวกนั้นการเข้ารหัสอาร์เอนเป็นระบบจำนวนที่ไม่มีสมบัติซ้ำซ้อน จึงไม่รองรับการคำนวณแบบเชื่อมตรงอยู่แล้ว แต่ในระบบจำนวนชุดตัวเลขตรรกยะมีการเพิ่มตัวเลขตรรกยะเข้าไปในชุดตัวเลข ทำให้เกิดสมบัติซ้ำซ้อนขึ้นในระบบและเพียงพอต่อการออกแบบอัลกอริทึมการคำนวณแบบเชื่อมตรงให้สามารถทำงานได้เหมือนกับฐานคู่บวก

รายการอ้างอิง

[1] A. Avizienis, "Signed-digit numbe representations for fast parallel arithmetic," *Electronic Computers, IRE Transactions on,* pp. 389-400, 1961.

[2] B. Parhami, "Generalized signed-digit number systems: A unifying framework for redundant number representations," *Computers, IEEE Transactions on,* vol. 39, pp. 89-98, 1990.

[3] K. S. Trivedi and M. D. Ercegovac, "On-line algorithms for division and multiplication," in *Computer Arithmetic (ARITH), 1975 IEEE 3rd Symposium on*, 1975, pp. 161-167.

[4] M. D. Ercegovac, "On-line arithmetic: An overview," in *28th Annual Technical Symposium*, 1984, pp. 86-93.

[5] C. Frougny and A. Surarerks, "On-line multiplication in real and complex base," in *Computer Arithmetic, IEEE Symposium on*, 2003, pp. 212-212.

[6] N. Tanatechawong, "On-Line Addition on Penney Complex Number System," Master Thesis, Computer Engineering, Chualolongkorn University, 2007.

[7] M. Brzicova, C. Frougny, E. Pelantova, and M. Svobodova, "On-line algorithms for multiplication and division in real and complex numeration systems," *arXiv preprint arXiv:1610.08309,* 2016.

[8] M. Brzicová, C. Frougny, E. Pelantová, and M. Svobodová, "On-line multiplication and division in real and complex bases," in *Computer Arithmetic (ARITH), 2016 IEEE 23nd Symposium on*, 2016, pp. 134-141.

[9] B. Parhami, "Truncated ternary multipliers," *IET Computers & Digital Techniques,* vol. 9, pp. 101-105, 2014.

[10] B. Parhami and M. McKeown, "Arithmetic with binary-encoded balanced ternary numbers," in *Signals, Systems and Computers, 2013 Asilomar Conference on*, 2013, pp. 1130-1133.

[11] G. Songster, "Negative-base number-representation systems," *Electronic Computers, IEEE Transactions on,* pp. 274-277, 1963.

[12] L. B. Wadel, "Conversion from conventional to negative-base number representation," *IEEE Transactions on Electronic Computers,* vol. 4, p. 779, 1961.

[13] S. Ito and T. Sadahiro, "Beta-expansions with negative bases," *Integers,* vol. 9, pp. 239-259, 2009.

[14] D. Dombek, Z. Masáková, and E. Pelantová, "Number representation using generalized ($-\beta$)-transformation," *Theoretical Computer Science,* vol. 412, pp. 6653-6665, 2011.

[15] C. Frougny and A. C. Lai, "Negative bases and automata," *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science,* vol. 13, pp. 75-94, 2011.

[16] C. Frougny and A. C. Lai, "On negative bases," in *Developments in Language Theory*, 2009, pp. 252-263.

[17] D. E. Knuth, "An Imaginary Number System," 1960.

[18] W. Penney, "A Binary System for Complex Numbers," *J. ACM,* vol. 12, pp. 247-248, 1965.

[19] R. E. Moore, *Interval analysis* vol. 4: Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1966.

[20] E. Marshall, "Fatal error: how Patriot overlooked a Scud," *Science,* vol. 255, pp. 1347-1347, 1992.

[21] R. Skeel, "Roundoff error and the Patriot missile," *SIAM News,* vol. 25, p. 11, 1992.

[22] P. Mekraksakit, T. Thanapongsapak, C. Wongchindakhun, and A. Surarerks, "Parallel additive implementation for modified FIRS," in *Computer Science and Software Engineering (JCSSE), 2013 10th International Joint Conference on*, 2013, pp. 127-132.

[23] P. Taweepanyayote and A. Surarerks, "On-line multiplication on signed flexible interval representation system," in *TENCON 2011-2011 IEEE Region 10 Conference*, 2011, pp. 1164-1169.

[24] P. Thienprapasith and A. Surarerks, "A Flexible Interval Representation System and Its Fundamental Arithmetic Operations," in *Proceeding of the 5th International Conference on Information Technology and Applications (ICITA 2008). Cairns*, 2008.

[25] P. Thienprapasith and A. Surarerks, "Flexible interval representation system in negative binary base," in *2016 8th International Conference on Knowledge and Smart Technology (KST)*, 2016, pp. 190-195.

[26] L. H. De Figueiredo and J. Stolfi, "Affine arithmetic: concepts and applications," *Numerical Algorithms,* vol. 37, pp. 147-158, 2004.

[27] J. Stolfi and L. De Figueiredo, "An Introduction to Affine Arithmetic," *Trends in Applied and Computational Mathematics,* vol. 4, pp. 297-312, 2003.

[28] P. Uewichitrapochana and A. Surarerks, "Signed-symmetric function approximation in affine arithmetic," in *Electrical Engineering/Electronics, Computer, Telecommunications and Information Technology (ECTI-CON), 2013 10th International Conference on*, 2013, pp. 1-6.

[29] P. Kornerup and J.-M. Muller, "RN-Coding of Numbers: Definition and some Properties," in *Proceedings of IMACS'2005*, Paris, 2005.

[30] É. Martin-Dorel, G. Melquiond, and J.-M. Muller, "Some issues related to double rounding," *BIT Numerical Mathematics,* vol. 53, pp. 897-924, 2013.

[31] P. Kornerup, J.-M. Muller, and A. Panhaleux, "Performing arithmetic operations on round-to-nearest representations," *Computers, IEEE Transactions on,* vol. 60, pp. 282-291, 2011.

[32] P. Kornerup, J.-M. Muller, and A. Panhaleux, "Floating-Point Arithmetic on Round-to-Nearest Representations," *Internal Report,* October 7 2011.

[33] I. S. Committee, "754-2008 IEEE standard for floating-point arithmetic," *IEEE Computer Society Std,* vol. 2008, 2008.

[34] P. Kornerup, "Digit-set conversions: generalizations and applications," *Computers, IEEE Transactions on,* vol. 43, pp. 622-629, 1994.

[35] B. Phillips and N. Burgess, "Minimal weight digit set conversions," *Computers, IEEE Transactions on,* vol. 53, pp. 666-677, 2004.

[36] J.-M. Muller, "Some characterizations of functions computable in on-line arithmetic," *Computers, IEEE Transactions on,* vol. 43, pp. 752-755, 1994.

[37] A. Surarerks, "Digit Set Conversion by On-Line Finite Automata," *Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin,* vol. 8, pp. 337-358, 2001.

[38] D. E. Knuth, *The art of computer programming: sorting and searching* vol. 3: Pearson Education, 1998.

[39] P. Kornerup and J.-M. Muller, "RN-coding of numbers: definition and some properties," *Research Report,* 2004.

[40] A. D. Booth, "A signed binary multiplication technique," *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics,* vol. 4, pp. 236-240, 1951.

[41] J.-L. Beuchat and J.-M. Muller, "RN-codes: algorithmes d'addition, de multiplication et d'élévation au carré," 2004.

[42] J.-L. Beuchat and J.-M. Muller, "Multiplication Algorithms for Radix-2 RN-Codings and Two's Complement Numbers," 2005.

[43] P. Kornerup and J.-M. Muller, "RN-Codings: New Insights and Some Applications," *and Computers (RNC'7),* p. 117, 2006.

[44] A. Panhaleux, "Contributions to floating-point arithmetic: Coding and correct rounding of algebraic functions," Ecole normale supérieure de lyon-ENS LYON, 2012.

ภาคผนวก

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายพิภพ เทียนประภาสิทธิ์ เกิดวันที่ 12 กันยายน พ.ศ. 2525 ที่กรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2546 สำเร็จการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์ ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2550 และได้เข้าศึกษาในหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต สาขาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2555