

สมการเชิงประจักษ์สำหรับความแข็งแรงของคู่เฟืองตรงด้วยผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2561

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

THE EMPIRICAL FORMULA FOR STIFFNESS OF A SPUR GEAR PAIR BASED ON FINITE
ELEMENT SOLUTIONS



A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering in Mechanical Engineering
Department of Mechanical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2018
Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์	สมการเชิงประจักษ์สำหรับความแข็งแกร่งของคู่เฟืองตรง ด้วยผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
โดย	นายทิวา นันตะภักดิ์
สาขาวิชา	วิศวกรรมเครื่องกล
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชนันต์ รัตน์สุมาวงศ์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้บัณฑิตวิทยาลัย
ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

.....	คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(รองศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ เตชวรสินสกุล)	
คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์	
.....	ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.ไพโรจน์ สิงห์นาคกิจ)	
.....	อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชนันต์ รัตน์สุมาวงศ์)	
.....	กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.จิรพงศ์ กสิวิทย์อำนวย)	
.....	กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย
(ศาสตราจารย์กิตติคุณ ดร.สุรินทร์ พงศ์ศุภสมิทธิ์)	

ทิวา นันตะภักดิ์ : สมการเชิงประจักษ์สำหรับความแข็งเกร็งของคู่เฟืองตรงด้วยผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์. (THE EMPIRICAL FORMULA FOR STIFFNESS OF A SPUR GEAR PAIR BASED ON FINITE ELEMENT SOLUTIONS) อ.ที่ปรึกษาหลัก : ผศ. ดร.ชนัดต์ รัตนสุมาวงศ์

ความแข็งเกร็งของเฟืองตรงเป็นพารามิเตอร์สำคัญที่ใช้ในการศึกษาการสั่นสะเทือนของเฟือง หากทราบค่าที่แม่นยำจะสามารถนำไปใช้ในแบบจำลองเพื่อทำนายลักษณะการสั่นสะเทือนของเฟืองตรงได้อย่างถูกต้อง การหาความแข็งเกร็งของเฟืองตรงโดยส่วนใหญ่มักใช้วิธีการวิเคราะห์ หรือใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ถึงแม้ว่าวิธีเหล่านี้จะสามารถใช้หาค่าความแข็งเกร็งได้ แต่เนื่องจากการคำนวณโดยวิธีการวิเคราะห์มีความซับซ้อน ส่วนการคำนวณด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์มีความยากลำบากในการจัดการสัมผัสของฟันเฟืองและใช้เวลาคำนวณมาก วิธีทั้งสองจึงยังไม่สะดวกในการนำไปใช้งานจริง ในวิทยานิพนธ์นี้จึงมีเป้าหมายที่จะสร้างสมการอย่างง่ายเพื่อคำนวณค่าความแข็งเกร็งของเฟืองตรงสมการที่สร้างขึ้นแบ่งออกเป็น 2 ส่วน ได้แก่ 1) สมการคำนวณความแข็งเกร็งส่วนทรงกระบอกเฟือง ซึ่งสร้างโดยใช้สมการพื้นฐานกลศาสตร์ของแข็ง และ 2) สมการคำนวณความแข็งเกร็งของคู่ฟันเฟือง ซึ่งสร้างโดยใช้ผลการคำนวณพื้นฐานจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ การสร้างสมการในส่วนที่ 2 ทำโดยเลือกพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับความแข็งเกร็งของฟันเฟืองและจัดรูปแบบสมการให้เหมาะสม ต่อจากนั้นหาความสัมพันธ์ของความแข็งเกร็งของฟันเฟืองที่มีพารามิเตอร์รูปร่างต่างๆ กับตำแหน่งการขบด้วยวิธีการถดถอยแบบพหุนาม โดยใช้ข้อมูลผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟืองจำนวน 8 ชุดที่มีพารามิเตอร์แตกต่างกัน และมีภาระกระทำต่างๆ กัน ความแข็งเกร็งของคู่เฟืองหาได้โดยรวมความแข็งเกร็งทั้งสองส่วนเข้าด้วยกันแบบอนุกรม การตรวจสอบความแม่นยำของสมการที่สร้างขึ้นทำโดยเปรียบเทียบความแข็งเกร็งที่คำนวณได้กับผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยเปรียบเทียบทั้งกรณีความแข็งเกร็งของชุดเฟืองตั้งต้นที่ใช้สร้างสมการ และชุดเฟืองอื่นที่มีค่าพารามิเตอร์ต่างจากชุดเฟืองตั้งต้น รวมทั้งตรวจสอบผลกับงานวิจัยอื่นด้วย ผลที่ได้พบว่าค่าความแข็งเกร็งที่ได้มีค่าใกล้เคียงกัน และมีความคลาดเคลื่อนสูงสุดไม่เกิน 10% ซึ่งแสดงให้เห็นว่าสมการที่สร้างขึ้นสามารถทำนายค่าความแข็งเกร็งได้อย่างถูกต้องและสามารถนำไปใช้กับคู่เฟืองอื่นๆ ได้

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY

สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล
ปีการศึกษา 2561

ลายมือชื่อนิสิต
ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาหลัก

5970436721 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING

KEYWORD: Stiffness, Spur Gear, Finite Element Method, Empirical Formula

Thiwa Nantapak : THE EMPIRICAL FORMULA FOR STIFFNESS OF A SPUR GEAR PAIR BASED ON FINITE ELEMENT SOLUTIONS. Advisor: Asst. Prof. CHANAT RATANASUMAWONG, Ph.D.

Stiffness of a spur gear is an important parameter used in the study of gear vibration. If it is precisely known, it can be used in a vibration model to predict gear vibration characteristics accurately. The gear stiffness is frequently determined by the analytical method or the finite element method (FEM). Although both methods can be used to find the stiffness, the calculation in the analytical method is quite complicate. Likewise, the FEM is also troubled from the tooth contact setting, and large computation time. Thus both methods are still not suitable to use in practice. Hence the objective of this thesis is to propose the empirical formula to calculate the spur gear stiffness. The formula is divided into 2 parts that are 1) the equation to calculate the stiffness of the gear cylinder that is derived based on the solid mechanics equations, and 2) the formula to determine the stiffness of the tooth pair that is constructed base on the finite element solutions. The second part formula is constructed by selection of parameters related to the tooth stiffness, finding the appropriate formula pattern, and determining the relation between tooth stiffness of various gear parameters and the normalized meshing position by the polynomial regression method. The data used in calculation are from the finite element solution of 8 gear pairs having various parameters and are operated at various loads. The stiffness of the gear pair can be determined by combining the stiffness of two parts connected in series together. The accuracy of the empirical formula was verified by comparing the calculated stiffnesses with the results from the FEM. The comparisons were done in both the database-gear-pair-cases for the gear pairs used to construct the formula, and the other-gear-pair-cases for the gear pairs having parameters differ from the database-gear pairs. Moreover, the results were compared to the stiffnesses from the other researches. The results show that the calculated stiffnesses conform to the others, and the maximum errors are less than 10%. These confirm that the proposed empirical formula can be used to determine the stiffness correctly and can be applied to any spur gear pair.

Field of Study: Mechanical Engineering

Student's Signature

Academic Year: 2018

Advisor's Signature

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงลงได้ด้วยความกรุณาของ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชนัดต์ รัตนสุมาวงศ์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ให้คำแนะนำ คำปรึกษา ข้อคิดเห็นอันเป็นประโยชน์ต่อวิทยานิพนธ์ และความอนุเคราะห์ด้านอื่นๆ อีกหลายประการด้วยดีเสมอมา ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในพระคุณและความกรุณาเป็นอย่างยิ่ง จึงขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ไพโรจน์ สิงห์นันทกิจ ประธานกรรมการ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิรพงศ์ กสิวิทย์อำนวย และ ศาสตราจารย์กิตติคุณ ดร.สุรินทร์ พงศ์ศุภสมิทธิ์ กรรมการที่ให้คำแนะนำ ตลอดระยะเวลาทำงานวิจัย ที่ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความครบถ้วนสมบูรณ์มากขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณ คณะวิศวกรรมศาสตร์ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ที่ให้ทุนสนับสนุนในงานวิจัยนี้

ขอขอบพระคุณ นายธีรเดช ฤทธิ์ไกรเกรียง ที่ช่วยเหลือและให้คำแนะนำในด้านการใช้โปรแกรมระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ANSYS Workbench นายกุลภัทร์ ธีระรังษฤษฎ์ ที่ให้คำปรึกษาด้านการเขียนวิทยานิพนธ์ และขอขอบคุณ เพื่อนๆ รุ่นพี่ รุ่นน้องปริญญาโททุกคนที่ให้ความช่วยเหลือในด้านต่างๆ เสมอมา

สุดท้ายนี้ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดามารดา ที่ให้กำลังใจและสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยเสมอมา และคุณค่าอันใดที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์นี้ ขอมอบเป็นกตัญญูตราบาบุแก่ บิดา มารดา ครูบาอาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY

ทิวา นันทะภักดิ์

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญตาราง.....	ฅ
สารบัญรูปภาพ.....	ฉ
คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ	ณ
บทที่ 1	1
บทนำ.....	1
1.1 ที่มาและความสำคัญของวิทยานิพนธ์.....	1
1.2 ปรัชญาบรรณกรรม	2
1.3 วัตถุประสงค์	23
1.4 ขอบเขต	23
1.5 ขั้นตอนการดำเนินงาน	23
1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	24
บทที่ 2	25
การหาค่าความแข็งแรงของคู่เฟืองตรงด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.....	25
2.1 ค่าความแข็งแรงของคู่เฟืองตรง.....	25
2.2 การกำหนดปัญหาและการตั้งสมมติฐานของคู่เฟืองตรง.....	28
2.3 การหาค่าความแข็งแรงส่วนของทรงกระบอกเฟืองด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.....	30
2.3.1 รูปร่างของทรงกระบอกที่ใช้คำนวณ.....	30

2.3.2 การกำหนดลักษณะปัญหาของทรงกระบอก	31
2.3.3 การแบ่งเอลิเมนต์ของทรงกระบอก	31
2.3.4 การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตและการให้ภาระกระทำกับทรงกระบอก	32
2.3.5 ผลลัพธ์และการเก็บค่าการเสียรูป (Result and Deformation)	32
2.3.6 วิธีการคำนวณหาค่าความแข็งแรงของทรงกระบอก	33
2.4 การหาค่าความแข็งแรงของคู่เฟืองตรงด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	34
2.4.1 การจัดวางโมเดลของคู่เฟืองตรง	34
2.4.2 การสร้างและการประกอบโมเดลเฟืองตรงที่ตำแหน่งการขบต่างๆ	35
2.4.3 การกำหนดคุณสมบัติของวัสดุ (Material Properties)	36
2.4.4 การเลือกลักษณะการสัมผัส (Connections Contact)	37
2.4.5 การแบ่งเอลิเมนต์ (Discretization)	40
2.4.6 การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา (Boundary Conditions)	42
2.4.7 การเลือกรูปแบบภาระ (Loads)	43
2.4.8 การเรียกดูผลลัพธ์การเสียรูป (Results)	45
2.4.9 วิธีการหาค่าความแข็งแรงของคู่เฟืองตรงกรณีฟันเฟืองขบกัน 1 คู่	46
2.5 การหาค่าความแข็งแรงของคู่ฟันเฟือง	48
2.6 สรุป	49
บทที่ 3	50
ผลการคำนวณหาค่าความแข็งแรงของเฟืองตรงจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	50
3.1 พารามิเตอร์ของชุดเฟืองตรงที่ใช้ในการคำนวณ	50
3.2 ผลการคำนวณหาค่าความแข็งแรงของทรงกระบอกเฟือง	52
3.3 ผลการคำนวณหาค่าความแข็งแรงของคู่เฟือง	54
3.3.1 ผลการคำนวณความแข็งแรงของคู่เฟืองตรงกรณีฟันเฟืองขบกัน 1 คู่ฟัน	54
3.3.2 ผลของมุมกดต่อค่าความแข็งแรงของคู่เฟืองตรง	55

3.3.3	ผลของจำนวนฟันต่อค่าความแข็งเกร็งของคู่เฟืองตรง	56
3.3.4	ผลของโมดูลต่อค่าความแข็งเกร็งของคู่เฟืองตรง	58
3.3.5	ความแข็งเกร็งของคู่เฟืองที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางพิตซ์เท่ากันแต่โมดูลต่างกัน	59
3.4	ผลการคำนวณค่าความแข็งเกร็งของคู่ฟันเฟือง	60
3.4.1	ผลของมุมกดต่อค่าความแข็งเกร็งของคู่ฟันเฟือง	60
3.4.2	ผลของจำนวนฟันต่อค่าความแข็งเกร็งของคู่ฟันเฟือง	61
3.4.3	ผลของโมดูลต่อค่าความแข็งเกร็งของคู่ฟันเฟือง	61
3.4.4	ความแข็งเกร็งคู่ฟันเฟืองที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางพิตซ์เท่ากันแต่โมดูลต่างกัน	62
3.5	การศึกษาผลของภาระต่อค่าความแข็งเกร็ง	63
3.5.1	การให้ภาระกระทำกับชุดเฟืองตั้งต้นเพื่อตรวจสอบผล	63
3.5.2	ผลของภาระต่อค่าความแข็งเกร็งของชุดเฟืองตั้งต้น	65
3.6	สรุป	67
บทที่ 4	68
สมการอย่างง่ายเพื่อใช้คำนวณค่าความแข็งเกร็งของคู่เฟือง		68
4.1	สมการเพื่อใช้คำนวณค่าความแข็งเกร็งของส่วนทรงกระบอก	68
4.1.1	สมการพื้นฐานของความเค้น ความเครียด และกฎของฮุก	69
4.1.2	การประยุกต์ใช้สมการพื้นฐานในการสร้างสมการความแข็งเกร็งส่วนทรงกระบอก	70
4.1.3	ผลการคำนวณหาค่าความแข็งเกร็งของทรงกระบอกเฟือง	73
4.2	การสร้างสมการอย่างง่ายเพื่อหาความแข็งเกร็งของคู่ฟันเฟือง	75
4.2.1	รูปแบบของสมการอย่างง่ายเพื่อใช้ประมาณค่าความแข็งเกร็งของฟันเฟือง	75
4.2.2	การสร้างสมการอย่างง่ายพื้นฐาน	79
4.2.3	การปรับแก้ผลของโมดูล	81
4.2.4	ผลการคำนวณความแข็งเกร็งของคู่ฟันเฟือง	84
4.3	ค่าความแข็งเกร็งของคู่เฟือง	86

4.4 สรุป	90
บทที่ 5	91
การตรวจสอบผลการคำนวณความแข็งแรงของคู่เฟืองตรงด้วยสมการที่สร้างขึ้น	91
5.1 ชุดเฟืองที่ใช้ตรวจสอบผลการคำนวณด้วยสมการ.....	91
5.2 การตรวจสอบผลการคำนวณในกรณีค่าโมดูล์ต่างจากชุดเฟืองที่ใช้สร้างสมการ	93
5.3 การตรวจสอบผลการคำนวณกับเฟืองที่มีโมดูล์ต่างจากเฟืองที่ใช้สร้างสมการ.....	95
5.4 การตรวจสอบผลการคำนวณในกรณีความกว้างหน้าฟันต่างจากชุดเฟืองที่ใช้สร้างสมการ	97
5.5 การตรวจสอบผลการคำนวณกับคู่เฟืองที่มีอัตราทดต่างจากชุดเฟืองที่ใช้สร้างสมการ.....	99
5.6 การตรวจสอบผลการคำนวณกับผลของงานวิจัยอื่น.....	102
5.6.1 เปรียบเทียบความแข็งแรงกับงานวิจัย Hui Ma [12]	102
5.6.2 เปรียบเทียบความแข็งแรงกับงานวิจัย A. Fernandez Del Rincon [22]	105
5.7 สรุป	108
บทที่ 6	109
บทสรุป.....	109
6.1 สารสำคัญของวิทยานิพนธ์.....	109
6.2 ข้อเสนอแนะ	113
บรรณานุกรม.....	114
ประวัติผู้เขียน.....	118

สารบัญตาราง

หน้า

ตารางที่ 1.1 งานวิจัยที่ศึกษาความแข็งแรงของเฟืองตรง	22
ตารางที่ 2.1 การเปรียบเทียบสมมุติฐานที่ตั้งขึ้นกับงานวิจัยอื่น.....	29
ตารางที่ 2.2 ชนิดและพฤติกรรมของลักษณะการสัมผัสในแบบต่างๆ	38
ตารางที่ 3.1 พารามิเตอร์ของชุดเฟืองตรงที่ใช้ในการคำนวณ.....	51
ตารางที่ 3.2 ค่าความแข็งแรงของทรงกระบอกเฟือง.....	53
ตารางที่ 3.3 ชุดเฟืองที่ใช้ตรวจสอบภาระบนเส้นแนวแรงกระทำ	64
ตารางที่ 3.4 ค่าความคลาดเคลื่อนผลของภาระต่อค่าความแข็งแรงในรูปที่ 3.15	66
ตารางที่ 4.1 การเปรียบเทียบค่าความแข็งแรงที่คำนวณได้จากสมการอย่างง่ายกับ FEM.....	75
ตารางที่ 4.2 ค่าความคลาดเคลื่อนของผลการเปรียบเทียบค่า k/E_w จากรูปที่ 4.7.....	86
ตารางที่ 4.3 ค่าความคลาดเคลื่อนของความแข็งแรงของคู่เฟืองจากรูปที่ 4.8	88
ตารางที่ 5.1 ชุดเฟืองที่ใช้ตรวจสอบผลการคำนวณด้วยสมการที่สร้างขึ้น.....	92
ตารางที่ 5.2 ความคลาดเคลื่อนของชุดเฟืองที่พารามิเตอร์ต่างจากชุดเฟืองที่ใช้สร้างสมการ	101
ตารางที่ 5.3 พารามิเตอร์ของชุดเฟืองจากงานวิจัยของ Hui Ma	102
ตารางที่ 5.4 พารามิเตอร์ของเฟืองตรงจากงานวิจัยของ A. Fernandez Del Rincon [22].....	105
ตารางที่ 5.5 ความคลาดเคลื่อนจากงานวิจัยอื่น	107

สารบัญรูปภาพ

หน้า

รูปที่ 1.1 รูปแบบการวิเคราะห์หาสมการการเสีรูปของพื้นเฟือง [1]	2
รูปที่ 1.2 การเปรียบเทียบค่าการเสีรูประหว่างระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และการทดลอง [2]	3
รูปที่ 1.3 ความแข็งแรงในแต่ช่วงการขบของพื้นเฟืองตรง [3]	4
รูปที่ 1.4 ความแข็งแรงของเฟืองที่มีจำนวนฟันต่างกัน [4]	5
รูปที่ 1.5 การเสีรูปในแต่ละกรณีและการเสีรูปรวมของพื้นเฟือง [5]	6
รูปที่ 1.6 การเปรียบเทียบผลลัพธ์การเสีรูป [6]	7
รูปที่ 1.7 ค่าความแข็งแรงของเฟืองตรงจาก Plane Stress และ Plane Strain [7]	8
รูปที่ 1.8 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดกับความแข็งแรงจากผลของการเสีรูปทั้ง 3 ส่วน [8]	9
รูปที่ 1.9 การเปรียบเทียบความแข็งแรงจากวิธีการวิเคราะห์และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [8]	9
รูปที่ 1.10 การเปรียบเทียบผลลัพธ์ความแข็งแรงกับผลลัพธ์จาก FEM [9]	10
รูปที่ 1.11 ผลลัพธ์การเสีรูปในแต่ละส่วนของเฟืองตรง [10]	11
รูปที่ 1.12 โมเดล 3 มิติของเฟืองตรง [11]	12
รูปที่ 1.13 ผลการเปรียบเทียบค่าความแข็งแรงของเฟืองตรง [12]	13
รูปที่ 1.14 รูปแบบความเค้นพอนมิสเสสของการสัมผัสกันของพื้นเฟืองตรง [13]	14
รูปที่ 1.15 ค่าความแข็งแรงของเฟืองในแต่ละกรณี [14]	15
รูปที่ 1.16 การเสีรูปของพื้นเฟืองจากโปรแกรม ANSYS [15]	16
รูปที่ 1.17 ค่าความแข็งแรงของเฟืองที่มีโมดูลต่างกัน [16]	17
รูปที่ 1.18 การเปรียบเทียบผลระหว่างวิธีการวิเคราะห์กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [17]	18
รูปที่ 1.19 การเปรียบเทียบค่าความแข็งแรงของ 2 ลักษณะการสัมผัส [18]	19
รูปที่ 1.20 เฟืองที่มีรูเพลตต่างกัน [19]	19
รูปที่ 1.21 ค่าความแข็งแรงของเฟืองที่มีรูเพลตต่างกัน [19]	20
รูปที่ 2.1 การแบ่งลักษณะความแข็งแรงของเฟืองตรง	26

รูปที่ 2.2 การต่ออนุกรมของเฟืองขับและเฟืองตาม	26
รูปที่ 2.3 โมเดลสปริงการขบกันของเฟืองตรง 2 คู่	27
รูปที่ 2.4 ลักษณะความแข็งแรงของทรงกระบอกเฟือง	30
รูปที่ 2.5 การตั้งค่าปัญหาแบบความเครียดในระนาบ (Plane Strain).....	31
รูปที่ 2.6 การแบ่งเอลิเมนต์ของทรงกระบอกเฟือง.....	31
รูปที่ 2.7 การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตและการให้ภาระกระทำกับทรงกระบอกเฟือง	32
รูปที่ 2.8 การเสียรูปของทรงกระบอกเฟืองในทิศทางแกน Y	33
รูปที่ 2.9 แผนภาพแสดงการจัดวางโมเดลของคู่เฟืองตรง	34
รูปที่ 2.10 โปรแกรมสำเร็จรูปสำหรับสร้างโมเดลเฟือง GearTrax2008	35
รูปที่ 2.11 การประกอบโมเดลของเฟืองตรงในโปรแกรมการออกแบบ CATIA	36
รูปที่ 2.12 คุณสมบัติทางวิศวกรรมของ Structural Steel	37
รูปที่ 2.13 การกำหนดลักษณะการสัมผัส	39
รูปที่ 2.14 การตั้งค่าโปรแกรมการเลือกลักษณะการสัมผัส	39
รูปที่ 2.15 การกำหนดโมเดลเป็นปัญหาความเครียดในระนาบ Plain Strain	41
รูปที่ 2.16 การแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปสามเหลี่ยม	41
รูปที่ 2.17 จุดรองรับที่กำหนดในปัญหา	42
รูปที่ 2.18 การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาเฟืองตรง.....	43
รูปที่ 2.19 แรงกระจายบนขอบร่องลิ้นทั้งสองที่กำหนดในปัญหา.....	44
รูปที่ 2.20 ผลลัพธ์ความเค้นและการเสียรูปของเฟืองในรูปของเฉดสี.....	45
รูปที่ 2.21 การเสียรูปบริเวณขอบที่เกิดการสัมผัสและค่าการเสียรูปตามแนวแกน Y	46
รูปที่ 2.22 โมเดลสปริงแสดงลักษณะการขบกันของเฟืองขับและเฟืองตาม	47
รูปที่ 2.23 ลักษณะความแข็งแรงของคู่ฟันเฟือง	48
รูปที่ 3.1 พารามิเตอร์วงกลมพิตช์ วงกลมฐาน และวงกลมโคนฟันของเฟืองตรง.....	52
รูปที่ 3.2 ความแข็งแรงของเฟืองขับ เฟืองตาม และคู่เฟืองในตำแหน่งการขบต่างๆ	55

รูปที่ 3.3 รูปร่างพื้นเฟืองที่มีมุมกตค่าต่างๆ [13].....	55
รูปที่ 3.4 ค่าความแข็งเกร็งของคู่เฟืองที่มีมุมกตต่างกันที่ตำแหน่งการขบต่างๆ.....	56
รูปที่ 3.5 เฟืองที่มีโมดูลเท่ากันแต่มีจำนวนฟันต่างกัน [21].....	56
รูปที่ 3.6 ค่าความแข็งเกร็งของคู่เฟืองที่มีจำนวนฟันต่างกันที่ตำแหน่งการขบต่างๆ.....	57
รูปที่ 3.7 ฟันเฟืองที่มีขนาดโมดูลต่างกัน [21]	58
รูปที่ 3.8 ค่าความแข็งเกร็งของคู่เฟืองที่มีโมดูลต่างกันที่ตำแหน่งการขบต่างๆ.....	58
รูปที่ 3.9 ความแข็งเกร็งของคู่เฟืองที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางพิตซ์เท่ากันแต่โมดูลต่างกัน	59
รูปที่ 3.10 ผลของมุมกตต่อค่าความแข็งเกร็งของคู่ฟันเฟือง	60
รูปที่ 3.11 ผลของจำนวนฟันต่อค่าความแข็งเกร็งของคู่ฟันเฟือง	61
รูปที่ 3.12 ผลของโมดูลต่อค่าความแข็งเกร็งของคู่ฟันเฟือง	62
รูปที่ 3.13 ความแข็งเกร็งของเฟืองที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางพิตซ์เท่ากันแต่โมดูลต่างกัน.....	63
รูปที่ 3.14 ผลในรูปแบบความสัมพันธ์ของแรงในแนวเส้นแนวแรงกระทำตำแหน่งที่ #1 - #11.....	65
รูปที่ 3.15 ผลในรูปแบบความสัมพันธ์ของแรงในแนวเส้นแนวแรงกระทำตำแหน่งที่ #1 - #6.....	66
รูปที่ 4.1 เงื่อนไขขอบเขตและภาระที่กระทำกับทรงกระบอก.....	70
รูปที่ 4.2 ลักษณะของฟันเฟืองตรง.....	76
รูปที่ 4.3 ลักษณะของคานยื่น Cantilever beam	76
รูปที่ 4.4 การ Fit curve หาสมการความแข็งเกร็งของฟันเฟืองที่มีมุมกต 20°	80
รูปที่ 4.5 ค่าการปรับแก้ผลของโมดูลในตำแหน่งการขบต่างๆ ของเฟืองแต่ละชุด	82
รูปที่ 4.6 ค่าเฉลี่ยค่าการปรับแก้ผลของโมดูลของทุกตำแหน่งการขบ	83
รูปที่ 4.7 การเปรียบเทียบระหว่างผลการคำนวณค่า k/E_w ของชุดเฟือง A - H	85
รูปที่ 4.8 การเปรียบเทียบความแข็งเกร็งที่คำนวณได้จากสมการกับ FEM ของชุดเฟือง A - H.....	87
รูปที่ 4.9 แผนผังการคำนวณค่าความแข็งเกร็งของเฟือง.....	89
รูปที่ 5.1 ผลลัพธ์ความแข็งเกร็งของชุดเฟือง TE1.....	93
รูปที่ 5.2 ผลลัพธ์ความแข็งเกร็งของชุดเฟือง TE2	94

รูปที่ 5.3 ผลลัพธ์ความแข็งแกร่งของชุดเฟือง TE3	94
รูปที่ 5.4 ผลลัพธ์ความแข็งแกร่งของชุดเฟือง TM1	95
รูปที่ 5.5 ผลลัพธ์ความแข็งแกร่งของชุดเฟือง TM2	96
รูปที่ 5.6 ผลลัพธ์ความแข็งแกร่งของชุดเฟือง TM3	96
รูปที่ 5.7 ผลลัพธ์ความแข็งแกร่งของชุดเฟือง TW1	97
รูปที่ 5.8 ผลลัพธ์ความแข็งแกร่งของชุดเฟือง TW2	98
รูปที่ 5.9 ผลลัพธ์ความแข็งแกร่งของชุดเฟือง TW3	98
รูปที่ 5.10 การเสียรูปของเฟืองที่มีอัตราทดแตกต่างจากชุดเฟืองที่ใช้สร้างสมการ	99
รูปที่ 5.11 ผลลัพธ์ความแข็งแกร่งของชุดเฟือง TR1	100
รูปที่ 5.12 ผลลัพธ์ความแข็งแกร่งจากงานวิจัยของ Hui Ma [12]	103
รูปที่ 5.13 ผลการเปรียบเทียบชุดเฟือง Empirical 1	104
รูปที่ 5.14 ผลการเปรียบเทียบชุดเฟือง Empirical 2	104
รูปที่ 5.15 ผลลัพธ์ความแข็งแกร่งจากงานวิจัย A. Fernandez Del Rincon [22]	106
รูปที่ 5.16 การเปรียบเทียบผลลัพธ์กับงานวิจัยของ A. Fernandez Del Rincon	107

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

FEM	ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method)
ANL	วิธีการวิเคราะห์ (Analytical Method)
$k_{Driving}$	ความแข็งเกร็งของเฟืองขับ
k_{Driven}	ความแข็งเกร็งของเฟืองตาม
k_M	ความแข็งเกร็งจากการสัมผัสกันของฟันเฟือง (Contact Meshing Stiffness)
k_T	ความแข็งเกร็งจากการดัดโค้งของฟันเฟือง (Tooth Bending Stiffness)
k_C	ความแข็งเกร็งจากการเสียรูปของทรงกระบอกเฟือง (Cylinder Gear Stiffness)
$k_{Gear Pair}$	ความแข็งเกร็งของคู่เฟืองตรง (Stiffness of Spur Gear Pair)
$k_{Double Tooth Pair}$	ความแข็งเกร็งของคู่ฟันเฟืองตรงกรณีขบสองกำลัง 2 คู่ฟัน
$k_{\#1 Tooth Pair}$	ความแข็งเกร็งของฟันคู่ที่ 1
$k_{\#2 Tooth Pair}$	ความแข็งเกร็งของฟันคู่ที่ 2
$k_{Double Gear Pair}$	ความแข็งเกร็งของคู่เฟืองตรงกรณีขบสองกำลัง 2 คู่ฟัน
r_i	รัศมีของรูเพลลา (Inner radius)
R_{root}	รัศมีของวงกลมโคนฟัน (Root radius)
F	แรงกระทำในแนวเส้นแนวแรงกระทำ
M	โมเมนต์
r	รัศมี

δ_c	ค่าการเสียรูปสูงสุดของทรงกระบอกเฟืองในทิศทางสัมผัสผิวทรงกระบอก
LOA	เส้นแนวแรงกระทำ (Line of Action)
d_1	เส้นผ่านศูนย์กลางของรูเฟืองขับ
d_2	เส้นผ่านศูนย์กลางของรูเฟืองตาม
μ	สัมประสิทธิ์ของการเลื่อนไถล
$F_{Sliding}$	แรงจากสัมประสิทธิ์ของการเลื่อนไถล
$F_{Friction}$	แรงจากสัมประสิทธิ์ของแรงเสียดทาน
w_1	แรงกระจาย 1
w_2	แรงกระจาย 2
τ	แรงบิด
x_1	ขนาดของค่าเคลื่อนตัวที่ผิวสัมผัสของเฟืองตามในแนวแกน Y ที่อ่านค่าได้จากโปรแกรม ANSYS
x_2	ผลการเสียรูปของสปริงขับและสปริงตาม
$k_{Tooth Driving}$	ความแข็งเกร็งของฟันเฟืองขับ
$k_{Tooth Driven}$	ความแข็งเกร็งของฟันเฟืองตาม
τ_A	แรงบิดที่กระทำกับทรงกระบอกเฟืองของชุดเฟือง A
r_A	รัศมีขอบด้านนอกของทรงกระบอกของชุดเฟือง A
d	เส้นผ่านศูนย์กลางพิตช์
m	โมดูล
z	จำนวนฟัน
u	ค่าเคลื่อนตัวในทิศทาง $r(u)$
v	ค่าเคลื่อนตัวในทิศทาง $\theta(v)$

σ_r	ความเค้นในทิศทาง r
σ_θ	ความเค้นในทิศทาง θ
$\tau_{r\theta}$	ความเค้นเฉือนในพิกัด $r-\theta$
ϕ	ฟังก์ชันของความเค้น (Stress Function)
ε_r	ความเครียดในทิศทาง r
ε_θ	ความเครียดในทิศทาง θ
$\gamma_{r\theta}$	ความเครียดเฉือนในพิกัด $r-\theta$
E	ยังโมดูลัส (Young's Modulus)
ν	อัตราส่วนปัวซอง (Poisson's ratio)
G	โมดูลัสเฉือน (Shear Modulus)
M_t	โมเมนต์ต่อหน่วยความกว้างของทรงกระบอก
w	ความกว้างของทรงกระบอก
C	ค่าคงที่
P	ความหนาพื้น
L	ระยะจากโคนพื้นถึงจุดพิตช์
b	ความกว้างคาน
h	ความสูงคาน
I	โมเมนต์ความเฉื่อย
C'	ค่าคงที่
C_m	ตัวปรับแก้โมดูล
π	กลุ่มตัวแปรไร้มิติ (Dimensionless Group)

$f(\pi)$	ฟังก์ชันของกลุ่มตัวแปรไร้มิติ
α	มุมกด
n	ตำแหน่งการขบกันของฟันเฟือง
y	สมการถดถอยแบบพหุนาม (Polynomial Regression)
R	สัมประสิทธิ์การตัดสินใจ (Coefficient of Determination)
ref	อ้างอิง
C_i	อัตราส่วนความแข็งแรงต่อน้ำหนักต่อค่าโมดูลัสและความกว้างหน้าฟันที่ตำแหน่ง i
m_{ref}	โมดูลอ้างอิง
r_m	อัตราส่วนผลต่างโมดูล



บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของวิทยานิพนธ์

เฟืองตรง (Spur Gear) เป็นชิ้นส่วนทางกลพื้นฐานที่ใช้ในการถ่ายทอดกำลังในงานทางวิศวกรรมต่างๆ เนื่องจากมีความแข็งแรง ทนทาน สามารถรับภาระในการส่งกำลังได้สูงและมีประสิทธิภาพในการส่งกำลังสูงกว่าชิ้นส่วนทางกลอื่น เฟืองมีใช้กันอยู่แพร่หลายในเครื่องจักรกลอุตสาหกรรม ระบบส่งกำลังในรถยนต์ กังหันลมผลิตกระแสไฟฟ้า เป็นต้น ด้วยเหตุนี้จึงมีการศึกษาเกี่ยวกับเฟืองในหลายแขนงตั้งแต่อดีตมาจนถึงปัจจุบัน เช่น การศึกษาเกี่ยวกับความแข็งแรงของเฟือง การศึกษาเกี่ยวกับเสียงและการสั่นสะเทือนของเฟือง หรือการศึกษาเกี่ยวกับการลดกำลังสูญเสียและเพิ่มประสิทธิภาพในการส่งกำลังของเฟือง สำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนนั้น การจะสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อทำนายลักษณะการสั่นสะเทือนของเฟืองได้แม่นยำนั้น จำเป็นที่จะต้องทราบค่าความแข็งแรงของเฟืองที่แม่นยำเสียก่อน นอกจากปัญหาเรื่องการสั่นสะเทือนแล้ว ความแข็งแรงของเฟืองยังเกี่ยวข้องกับการแบ่งภาระระหว่างคู่ฟันเฟืองขณะขบ ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการคำนวณกำลังสูญเสียและประเมินประสิทธิภาพในการส่งกำลังได้ด้วย

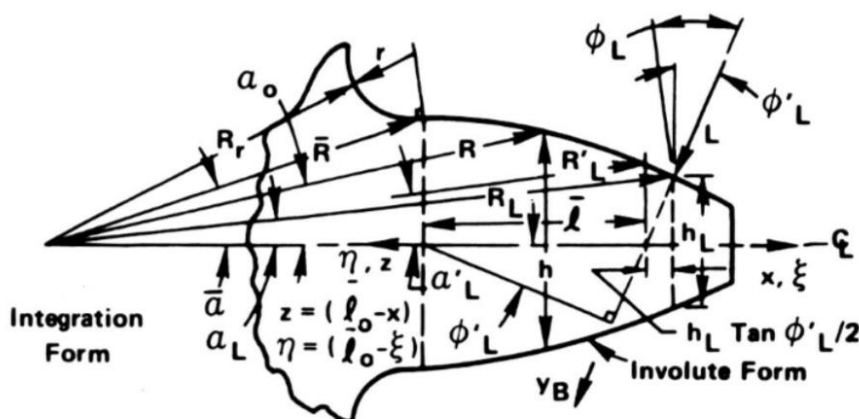
จากที่กล่าวมา จะเห็นว่าความแข็งแรงของเฟืองเป็นพารามิเตอร์พื้นฐานที่มีความสำคัญต่อการศึกษเกี่ยวกับเฟืองในแขนงต่างๆ เป็นอย่างมาก โดยเฉพาะกับปัญหาการสั่นสะเทือนของเฟือง การหาความแข็งแรงของเฟืองในงานวิจัยก่อนหน้านั้นมักใช้วิธีการวิเคราะห์หรือใช้การคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ อย่างไรก็ตาม วิธีเหล่านี้ไม่สามารถคำนวณได้โดยง่าย จึงไม่สะดวกในการนำไปใช้งานจริง ในงานศึกษานี้จึงมีเป้าหมายในการสร้างสมการอย่างง่ายเพื่อหาความแข็งแรงของเฟืองตรงโดยใช้ผลการคำนวณพื้นฐานจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

1.2 ปรีทัศน์วรรณกรรม

การศึกษาหาความแข็งเกร็ง (Stiffness) ของเฟืองตรงเป็นหัวข้อวิจัยที่ได้รับความสนใจเป็นอย่างมาก เนื่องจากมีความเกี่ยวข้องกับการศึกษาเกี่ยวกับเฟืองด้านอื่นๆ การหาความแข็งเกร็งของเฟืองตรงอาจทำได้โดยใช้วิธีการวิเคราะห์ (Analytical Method) โดยใช้พื้นฐานกลศาสตร์ของแข็งและสมการการสัมผัสของเฮิร์ตซ์ หรือใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) ตัวอย่างงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการหาค่าความแข็งเกร็งของเฟืองตรงมีดังต่อไปนี้

R. Cornell [1]

R. Cornell ศึกษาหาความแข็งเกร็งของเฟืองตรงด้วยวิธีการวิเคราะห์ โดยแสดงระยะต่างๆ บนฟันเฟืองที่ใช้วิเคราะห์หาการเสียรูปดังแสดงในรูปที่ 1.1 ซึ่งงานวิจัยของ R. Cornell พิจารณาให้ความแข็งเกร็งเป็นผลมาจากการเสียรูปของฟันเฟือง 3 ลักษณะด้วยกันคือ 1. การเสียรูปของโคนฟัน (Fillet Deflection) 2. การเสียรูปจากการดัดโค้งของฟันเฟือง (Bending Deflection) โดยพิจารณาให้ฟันเฟืองตรงมีลักษณะคล้ายกับคานายื่น (Cantilever beam) และใช้สมการผลรวมอินทิเกรตวิเคราะห์หาการเสียรูปของฟัน และ 3. การเสียรูปเนื่องจากการสัมผัสและการกดอัดกันของฟันเฟือง (Contact Deflection) โดยใช้สมการการเสียรูปจากทฤษฎีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์



รูปที่ 1.1 รูปแบบการวิเคราะห์หาสมการการเสียรูปของฟันเฟือง [1]

เมื่อเปรียบเทียบความแข็งแรงที่คำนวณได้จากผลการเสียรูปของเฟืองทั้ง 3 ลักษณะจากวิธีการวิเคราะห์ดังกล่าวกับผลลัพธ์ความแข็งแรงจากวิธีการวิเคราะห์ของงานวิจัยอื่น พบว่าความแข็งแรงมีค่าใกล้เคียงกัน จึงสามารถสรุปได้ว่าค่าความแข็งแรงจากวิธีการดังกล่าวมีความถูกต้อง อย่างไรก็ตาม สมการหาความแข็งแรงที่ได้จากวิธีการในงานวิจัยดังกล่าวมีความยุ่งยากและซับซ้อนในการนำมาใช้คำนวณจริง เนื่องจากต้องคำนวณหาความแข็งแรงที่ระยะต่างๆ บนฟันเฟืองอย่างละเอียด มีการแบ่งช่วงการคำนวณและเอามารวมกัน ทำให้จำเป็นต้องเขียนโปรแกรมคำนวณ จึงยังไม่เหมาะสมในการนำมาใช้งานจริง

R. Muthukumar และ M. Raghavan [2]

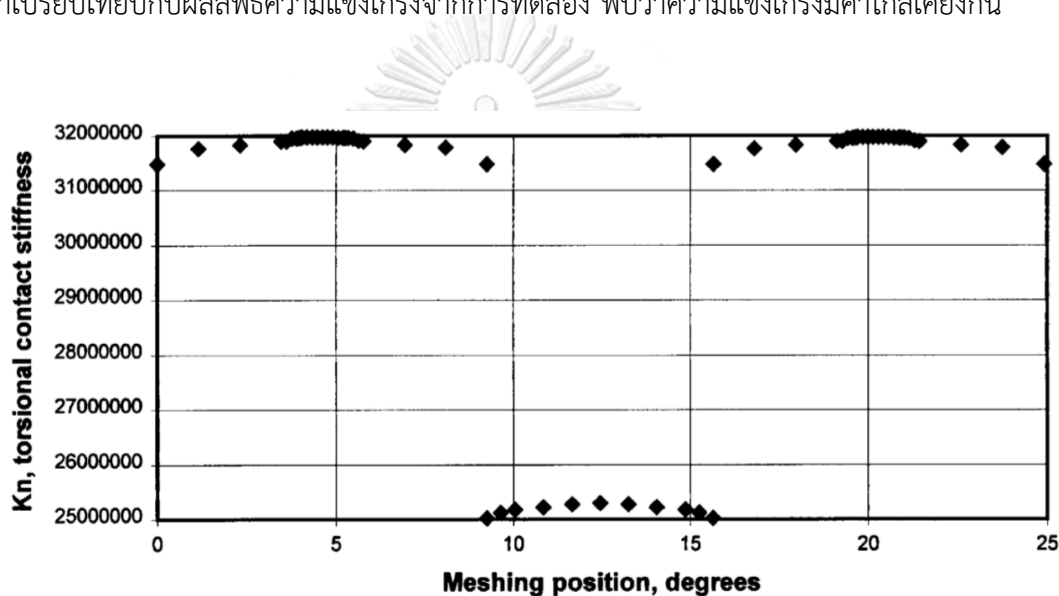
R. Muthukumar และ M. Raghavan ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ศึกษาหาการเสียรูปของเฟืองตรง โดยคำนวณหาการเสียรูปของเฟืองที่ตำแหน่งการขบ 3 ตำแหน่ง คือ 1. ตำแหน่งปลายฟัน (Tip-point) 2. ตำแหน่งตรงกลางระหว่างตำแหน่งปลายฟันกับตำแหน่งพิตช์ (Mid-point) และ 3. ตำแหน่งพิตช์ (Pitch point) โดยคำนวณหาค่าการเสียรูปของเฟืองที่มีจำนวนฟัน 14, 21, 26, และ 34 ซึ่งตามลำดับ พารามิเตอร์และคุณสมบัติอื่นๆ มีค่าเท่ากัน และนำผลลัพธ์การเสียรูปที่คำนวณได้จากวิธีการดังกล่าวมาเปรียบเทียบกับผลลัพธ์การเสียรูปจากการทดลอง (Experimental Method) จากงานวิจัยอื่นดังรูปที่ 1.2 พบว่ามีความคลาดเคลื่อนสูงสุดน้อยกว่า 10% ซึ่งค่าการเสียรูปที่คำนวณได้จากวิธีการดังกล่าวสามารถนำไปหาค่าความแข็งแรงได้

Description	FEM results $\delta \times 10^3$ cm	Deoli's experimental data $\delta \times 10^3$ cm	% Deviation
14 teeth			
Mid-point load	18.31	18.00	1.7
21 teeth			
Mid-point load	19.92	20.30	- 1.9
Pitch-point load	11.20	11.00	1.8
26 teeth			
Tip load	31.00	34.00	- 8.8
Mid-point load	20.02	19.30	3.7
Pitch-point load	11.60	11.90	- 2.5
34 teeth			
Tip load	29.68	—	—
Mid-point load	20.40	18.30	11.5
Pitch-point load	12.13	10.75	12.8

รูปที่ 1.2 การเปรียบเทียบค่าการเสียรูประหว่างระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และการทดลอง [2]

S. Sirichai [3]

S. Sirichai ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ศึกษาหาความแข็งเกร็งของเฟืองตรงที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ของฟันเฟือง โดยใช้โปรแกรม AutoCAD สร้างโมเดลเฟืองและใช้โปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS คำนวณหาการเสีयरูปของเฟือง โดยตำแหน่งการขบกันของฟันเฟืองจะมีทั้งช่วงที่ฟันเฟืองขบกันคู่เดียวและสองคู่ โดยค่าความแข็งเกร็งในช่วงที่ฟันเฟืองขบกันสองคู่ได้จากการนำค่าความแข็งเกร็งจากการขบของฟันเฟืองคู่ที่ 1 และ 2 มารวมกัน ทำให้มีค่ามากกว่าความแข็งเกร็งในช่วงที่ฟันเฟืองขบกันคู่เดียวดังแสดงในรูปที่ 1.3 S. Sirichai นำผลลัพธ์ความแข็งเกร็งที่ได้จากการหาด้วยวิธีการดังกล่าวมาเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ความแข็งเกร็งจากการทดลอง พบว่าความแข็งเกร็งมีค่าใกล้เคียงกัน

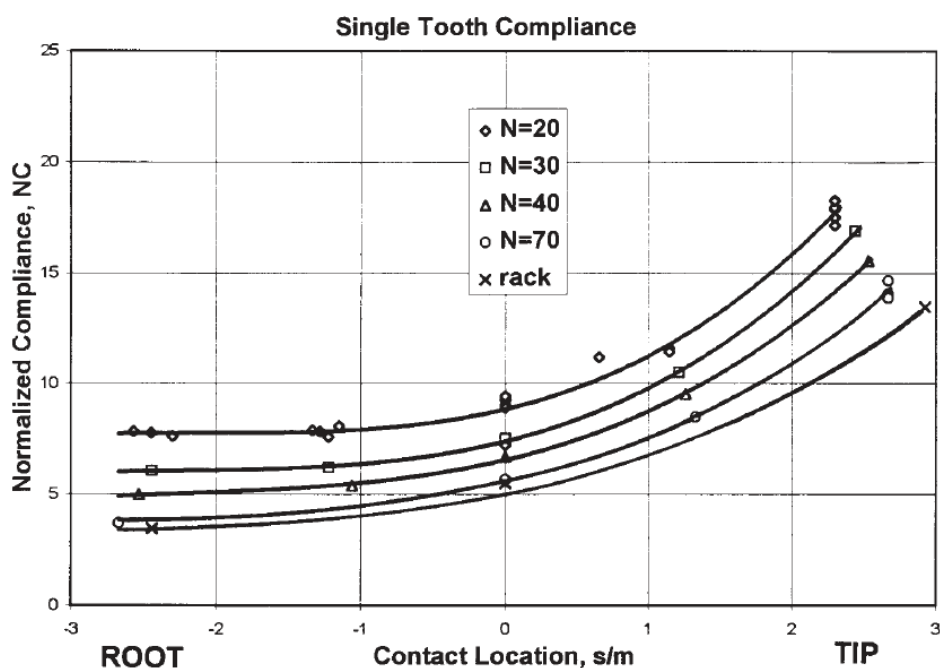


รูปที่ 1.3 ความแข็งเกร็งในแต่ละช่วงการขบของฟันเฟืองตรง [3]

M. Arafa และ M. Megahed [4]

M. Arafa และ M. Megahed ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ศึกษาผลของพารามิเตอร์ของเฟืองต่อค่าความแข็งเกร็ง โดยศึกษาผลของจำนวนฟันต่อค่าความแข็งเกร็งของเฟืองตรง การศึกษาคำนวณการเสีयरูปจากโมเดลเฟืองที่มีจำนวนฟันต่างกันแต่มีพารามิเตอร์และคุณสมบัติอื่นๆ เหมือนกัน จากรูปที่ 1.4 ผลการศึกษาพบว่าเฟืองที่มีจำนวนฟันน้อยจะมีค่าความแข็งเกร็งน้อยกว่าเฟืองที่มีจำนวนฟันมาก อย่างไรก็ตาม เฟืองที่มีจำนวนฟันต่างกันแต่มีโมดูลเท่ากันจะทำให้เส้นผ่านศูนย์กลางพิตช์ของเฟืองมีค่าแตกต่างกัน ซึ่งเฟืองที่มีจำนวนฟันมากกว่าจะมีขนาดใหญ่กว่าเฟืองที่มี

จำนวนฟันน้อย จึงยังไม่สามารถทราบได้ว่าขนาดของทรงกระบอกเฟืองและขนาดของฟันเฟืองส่งผลต่อค่าความแข็งเกร็งอย่างไร



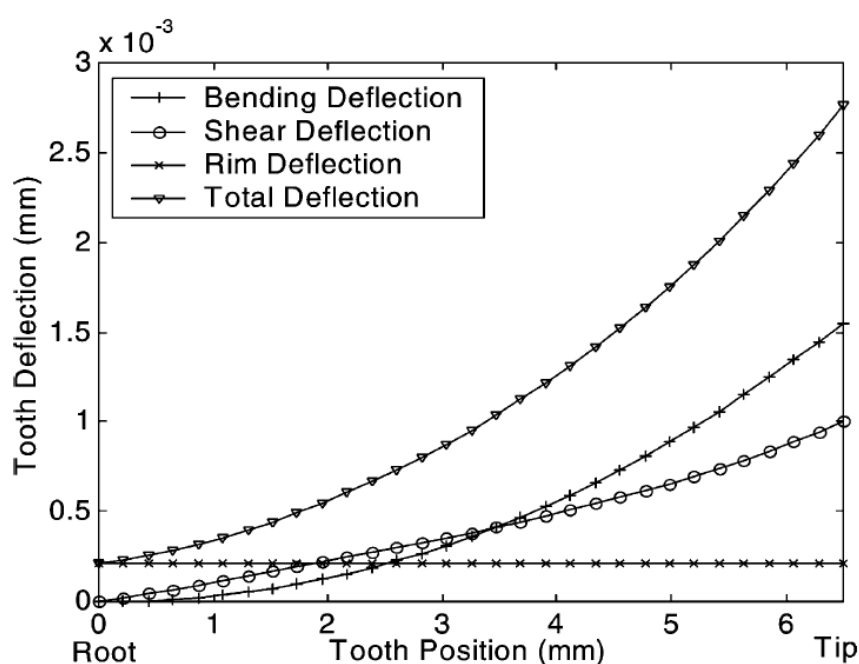
รูปที่ 1.4 ความแข็งเกร็งของเฟืองที่มีจำนวนฟันต่างกัน [4]

จากงานวิจัยดังกล่าว พบว่าการศึกษาผลของพารามิเตอร์ต่อค่าความแข็งเกร็งของเฟืองตรงเพียงพารามิเตอร์เดียวอาจยังไม่สามารถอธิบายถึงค่าความแข็งเกร็งที่แท้จริงของเฟืองได้ จึงควรมีการศึกษาผลของพารามิเตอร์อื่นๆ ของเฟืองเพิ่มเติมเพื่อเป็นข้อมูลในการวิเคราะห์หาค่าความแข็งเกร็งของเฟืองได้อย่างแม่นยำมากขึ้น เช่น ผลของมุมกดต่อค่าความแข็งเกร็ง ผลของโมดูลต่อค่าความแข็งเกร็ง หรือผลของขนาดเฟืองต่อค่าความแข็งเกร็ง เป็นต้น

I. Yesilyurt [5]

I. Yesilyurt ใช้วิธีการวิเคราะห์ศึกษาหาความแข็งเกร็งของฟันเฟืองตรง โดยกำหนดให้ความแข็งเกร็งมาจากผลการเสียรูปของฟันเฟือง 3 ส่วน คือ 1. การเสียรูปจากการดัดโค้งของฟันเฟือง (Bending Deflection) โดยพิจารณาฟันเฟืองตรงมีลักษณะคล้ายกับคานยื่น (Cantilever beam) 2. การเสียรูปจากแรงเฉือน (Shear Deflection) และ 3. การเสียรูปของขอบเฟือง (Rim Deflection)

โดยใช้สมการผลรวมอินทิเกรตในการวิเคราะห์หาค่าการเสีรูปของเฟืองตรง จากรูปที่ 1.5 ที่ตำแหน่งเริ่มต้นขบของฟันเฟือง (Root) ค่าการเสีรูปจากการตัดโค้งจะมีค่าน้อยกว่าค่าการเสีรูปจากส่วนอื่นของฟันเฟือง ทำให้มีค่าความแข็งแรงมากกว่าค่าความแข็งแรงจากส่วนอื่นของฟันเฟือง เนื่องจากตำแหน่งโคนฟันมีความหนามากกว่าปลายฟัน ส่วนบริเวณปลายฟันการเสีรูปจากการตัดโค้งจะมีค่ามากกว่าค่าการเสีรูปจากส่วนอื่น เนื่องจากตำแหน่งปลายฟันมีความหนาน้อยกว่าส่วนอื่นๆ ค่าความแข็งแรงจึงน้อยกว่าค่าความแข็งแรงจากส่วนอื่นของฟันเฟือง



รูปที่ 1.5 การเสีรูปในแต่ละกรณีและการเสีรูปรวมของฟันเฟือง [5]

Y. Afework และ T. Tesfaye [6]

Y. Afework และ T. Tesfaye ได้ศึกษาหาความแข็งแรง (Variable Mesh Stiffness VMS) ของเฟืองตรงโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยไม่พิจารณาผลของแรงเสียดทานจากการเลื่อนไถล และเฟืองไม่มีการตัดแปรงรูปร่าง และพิจารณาให้ค่าความแข็งแรงเป็นผลมาจากการเสีรูปเนื่องจากการสัมผัสกันของฟันเฟือง และผลของการเสีรูปของเฟืองขับและเฟืองตาม โดยงานวิจัยดังกล่าวได้นำค่าการเสีรูป (Deflection) ของเฟืองที่มีจำนวนฟันต่างๆ ที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิ

เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับค่าการเสียรูปจากงานวิจัยของ R. Cornell [1] ดังแสดงในรูปที่ 1.6(ก) และเปรียบเทียบผลลัพธ์การเสียรูปในกรณีที่ตั้งตำแหน่งการขบต่างๆ ของฟันเฟืองดังแสดงในรูปที่ 1.6(ข)

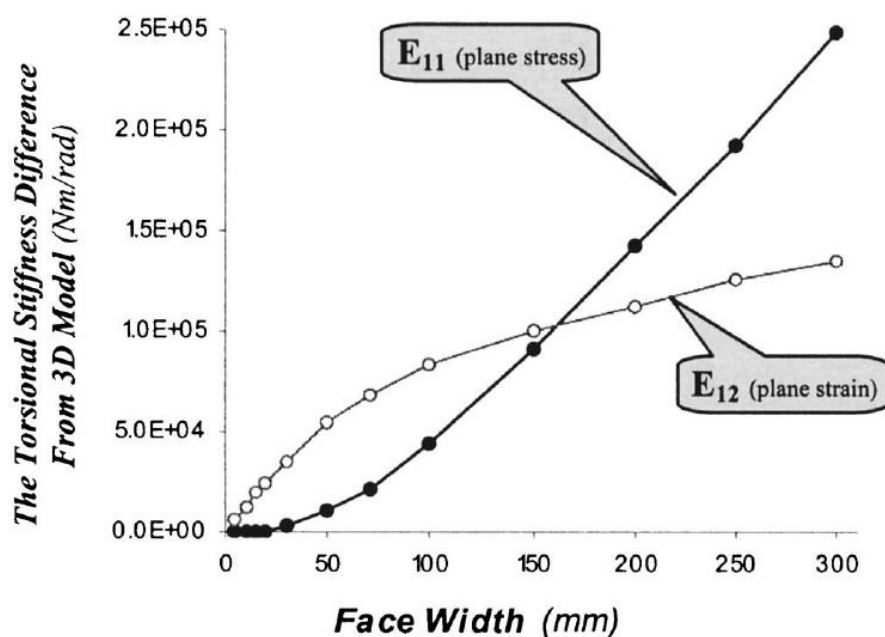
$E = 1.9 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ $b = 25.4 \text{ mm}$ $V = 0.3$ $F_n = 3 \times 10^4 \text{ N}$ $\phi = 20^\circ$				$E = 1.9 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ $b = 25.4 \text{ mm}$ $V = 0.3$ $F_n = 3 \times 10^4 \text{ N}$ $\phi = 20^\circ$ $N = 30$ $m = 5 \text{ mm}$				
No. of teeth	Deflection			Normal force application point (coordinate)	Deflection			
	Comell {7} result (mm)	VMS result (mm)	Error (%)		Comell {7} result (mm)	VMS result (mm)	Error (%)	
17	0.0933	0.0941	0.4695	x	y	0.0229	0.0226	1.31
18	0.0969	0.0981	0.7042					
19	0.1002	0.0991	0.6455	4.1326	4.0043	0.0376	0.0394	4.7872
20	0.1040	0.1032	0.4695	3.3831	6.2813	0.0457	0.0472	3.2823
21	0.1073	0.1072	0.0587	3.1667	6.8387	0.0549	0.0563	2.5501
22	0.1111	0.1110	0.0900	2.9402	7.391	0.0656	0.0669	1.9817
23	0.1145	0.1130	0.8803	2.7041	7.9379	0.0779	0.0789	1.2837
24	0.1183	0.1150	1.9366	2.4591	8.4794	0.0923	0.0925	0.2167
25	0.1218	0.1194	1.4805	1.9442	9.5459	0.1359	0.1289	5.1508
26	0.1253	0.1237	0.939	1.8825	9.6627	0.1395	0.140	0.3584
27	0.1288	0.1265	1.3498					
28	0.1323	0.1310	0.7629					
29	0.1359	0.1356	0.1761					
30	0.1398	0.1393	0.3577					

(ก) การเสียรูปของเฟืองที่มีจำนวนฟันต่างกัน (ข) การเสียรูปที่ตั้งตำแหน่งการขบต่างๆ

รูปที่ 1.6 การเปรียบเทียบผลลัพธ์การเสียรูป [6]

J. D. Wang and และ I. M. Howard [7]

J. D. Wang and และ I. M. Howard ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ศึกษาความแข็งแรงของเฟืองตรง โดยกำหนดแรงกระจายตลอดหน้าฟันเท่ากันและพิจารณาโมเดลใน 2 มิติ โดยใช้การคำนวณแบบปัญหาความเค้นในระนาบ (Plane Stress) E_{11} และปัญหาความเครียดในระนาบ (Plane Strain) E_{12} รูปที่ 1.7 แสดงผลการเปรียบเทียบค่าความแข็งแรงของเฟืองตรงที่คำนวณได้จากลักษณะของปัญหาทั้ง 2 ที่ความกว้างหน้าฟันต่างๆ ผลที่ได้พบว่าค่าความแข็งแรงที่ได้จากปัญหาความเค้นในระนาบจะมีค่าน้อยกว่าค่าความแข็งแรงที่ได้จากปัญหาความเครียดในระนาบเมื่อความกว้างหน้าฟันมีค่าประมาณ 0-150 mm แต่ค่าความแข็งแรงที่คำนวณได้จากการคำนวณแบบความเค้นในระนาบจะมีค่าสูงชันมากกว่าผลที่คำนวณแบบความเครียดในระนาบ เมื่อความกว้างหน้าฟันมีค่ามากกว่า 150 mm



รูปที่ 1.7 ค่าความแข็งเกร็งของเฟืองตรงจาก Plane Stress และ Plane Strain [7]

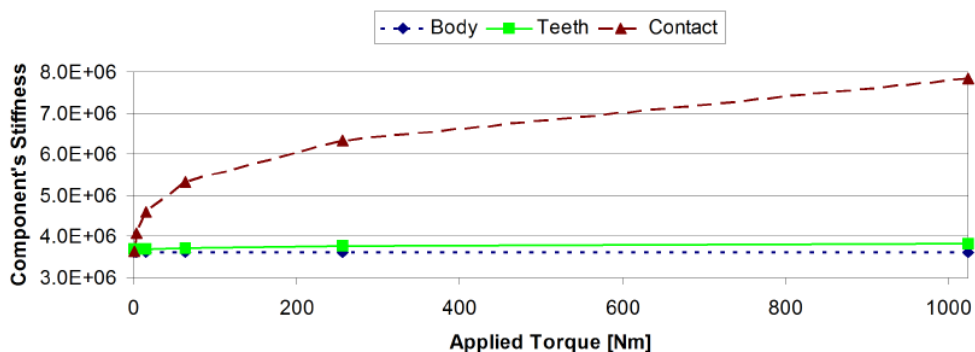
อย่างไรก็ตามการศึกษาดังกล่าวไม่ได้สรุปว่าลักษณะของปัญหาแบบไหนที่มีความเหมาะสมในการนำมาให้กับปัญหาของเฟืองตรง จึงควรมีการศึกษาต่อเพื่อวิเคราะห์และนำเอาลักษณะของปัญหาที่เหมาะสมมาใช้วิเคราะห์ปัญหาของเฟืองตรง

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY

T. Kiekbusch และ I. Howard [8]

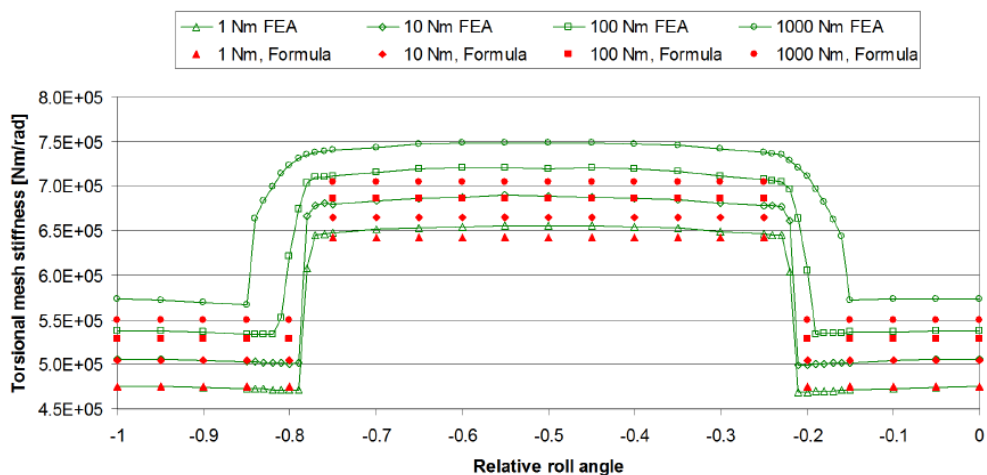
T. Kiekbusch และ I. Howard ได้ใช้วิธีการวิเคราะห์ในการหาความแข็งเกร็งของเฟืองตรง โดยพิจารณาให้ความแข็งเกร็งเป็นผลมาจากสมการการเสีयरูป 3 ส่วน คือ 1. การเสีयरูปของตัวเฟือง (Deformation of Body) 2. การเสีयरูปของฟันเฟือง (Deformation of Teeth) และ 3. การเสีयरูปจากการสัมผัสกันของฟันเฟือง (Deformation of Contact) ผลการคำนวณค่าความแข็งเกร็งของแต่ละส่วนแสดงในรูปที่ 1.8 จากรูปพบว่าความแข็งเกร็งจากการสัมผัสกันของฟันเฟือง (Stiffness of Contact) มีค่ามากที่สุด และมีค่าเปลี่ยนแปลงมากเมื่อแรงบิดมีค่าเพิ่มขึ้น ส่วนความแข็งเกร็งของตัวเฟือง (Stiffness of Body) และฟันเฟือง (Stiffness of Teeth) มีค่าใกล้เคียงกัน โดยความแข็งเกร็ง

ของฟันเฟืองมีค่ามากกว่าเล็กน้อย และค่าความแข็งเกร็งของทั้ง 2 ส่วนนี้มีการเปลี่ยนแปลงน้อยเมื่อแรงบิดที่กระทำเพิ่มขึ้น



รูปที่ 1.8 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดกับความแข็งเกร็งจากผลของการเสียรูปทั้ง 3 ส่วน [8]

นอกจากนี้ในงานวิจัยดังกล่าวยังได้ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการหาความแข็งเกร็งของเฟืองตรง โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS ลดรูปโมเดลเฟืองให้เหลือเพียง 2 มิติ และคำนวณหาค่าการเสียรูป (Deformation) เพื่อนำมาคำนวณหาความแข็งเกร็ง และนำผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีการวิเคราะห์และจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาทำการเปรียบเทียบกันดังแสดงในรูปที่ 1.9 พบว่าผลการเปรียบเทียบค่าความแข็งเกร็งของทั้ง 2 วิธีที่เกิดจากแรงบิดที่มีค่าน้อยจะมีค่าใกล้เคียงกัน แต่ค่าความแข็งเกร็งจะมีค่าต่างกันมากขึ้นเรื่อยๆ เมื่อแรงบิดเพิ่มขึ้น

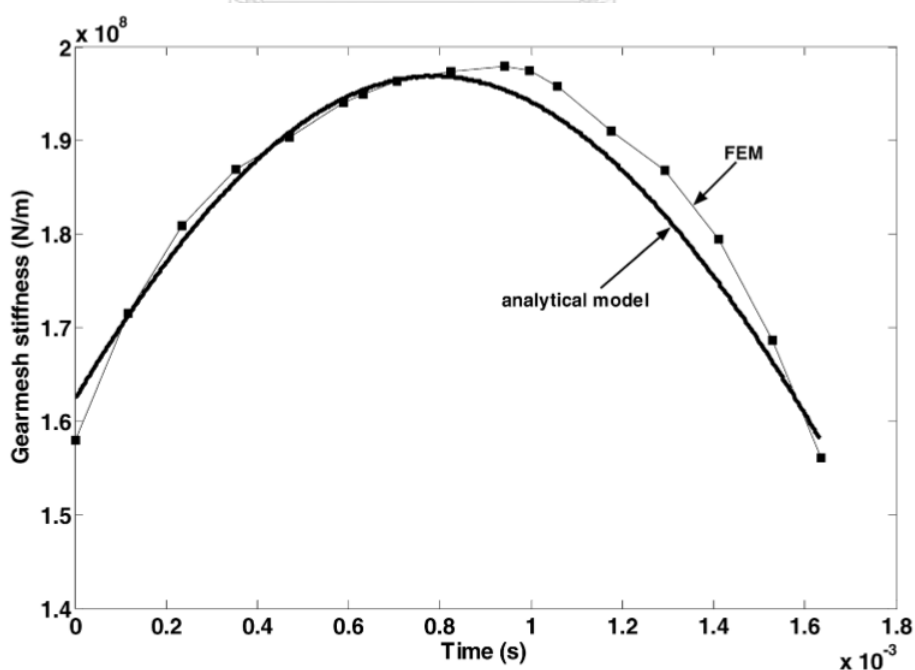


รูปที่ 1.9 การเปรียบเทียบความแข็งเกร็งจากวิธีการวิเคราะห์และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [8]

จากการศึกษานี้ทำให้ทราบว่าปัญหาการสัมผัสกันของฟันเฟืองเป็นปัญหาแบบไม่เชิงเส้น ทำให้ค่าความแข็งแกร่งของฟันเฟืองมีค่าเปลี่ยนแปลงไป เมื่อภาระที่ให้เปลี่ยนไป

F. Chaari [9]

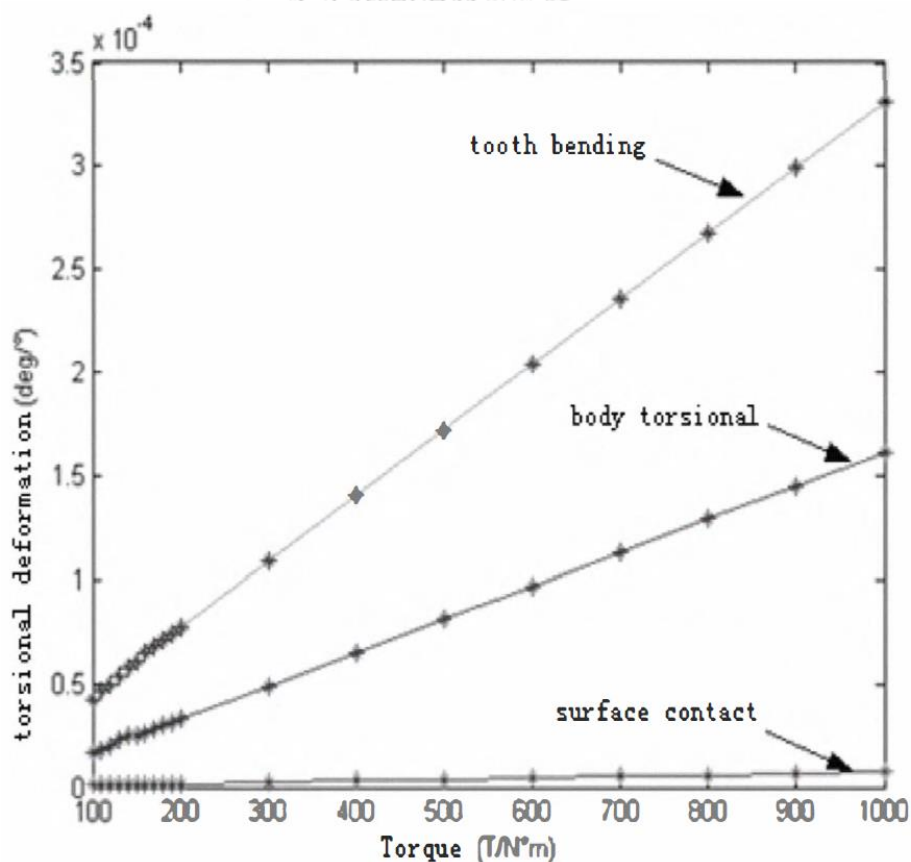
F. Chaari ใช้วิธีการวิเคราะห์ในการศึกษาหาความแข็งแกร่งของเฟืองตรง โดยกำหนดให้ความแข็งแกร่งเป็นผลมาจากการเสีรูปของเฟือง 3 ส่วน คือ 1. การเสีรูปจากการดัดโค้งของฟันเฟือง (Bending deflection) โดยพิจารณาฟันเฟืองตรงมีลักษณะคล้ายกับคานยื่น (Cantilever beam) และใช้สมการอินทิกรัล (Integral Equation) ในการวิเคราะห์หาค่าการเสีรูปของฟันเฟือง 2. การเสีรูปของโคนฟัน (Fillet-foundation deflection) คำนวณโดยใช้กลศาสตร์การแตกหักในการวิเคราะห์หาการเสีรูปของโคนฟัน และ 3. การเสีรูปจากการสัมผัสกันของฟันเฟือง (Contact deflection) คำนวณโดยใช้สมการการเสีรูปจากทฤษฎีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์ สมการที่ได้จากวิธีการวิเคราะห์เมื่อนำมาคำนวณหาความแข็งแกร่งและนำมาเปรียบเทียบกับค่าความแข็งแกร่งที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ดังแสดงในรูปที่ 1.10 พบว่าผลลัพธ์ค่าความแข็งแกร่งที่คำนวณได้มีค่าใกล้เคียงกับค่าความแข็งแกร่งที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์



รูปที่ 1.10 การเปรียบเทียบผลลัพธ์ความแข็งแกร่งกับผลลัพธ์จาก FEM [9]

W. Zhifei, W. Tie และ Z. Ruiliang [10]

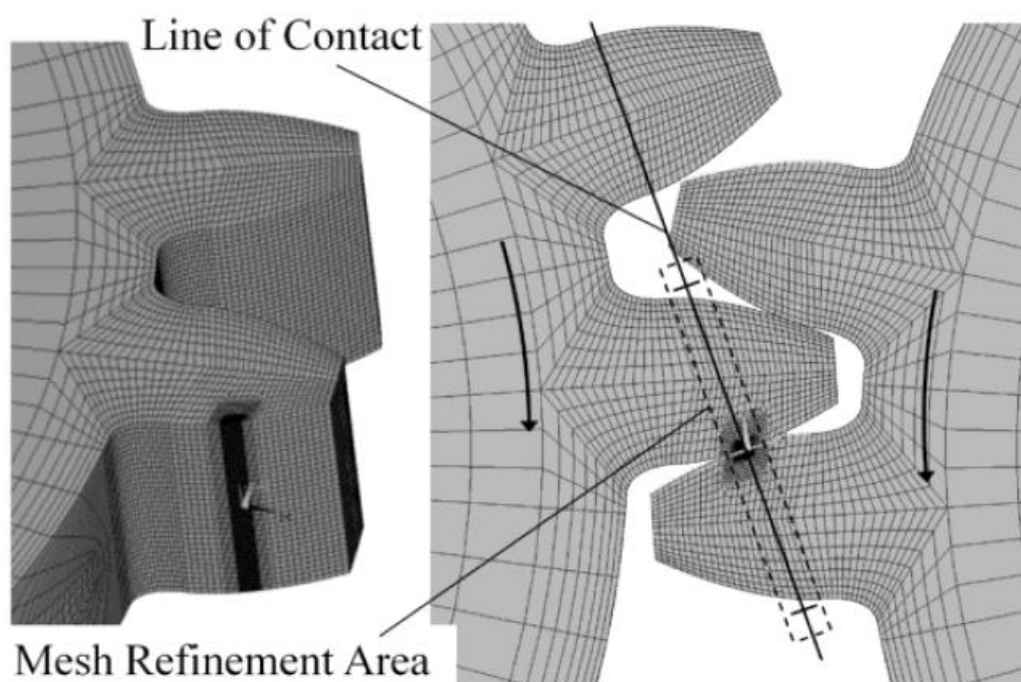
W. Zhifei, W. Tie และ Z. Ruiliang ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ศึกษาหาความแข็งแรงของเฟืองตรง โดยคำนวณหาการเสียรูปของเฟือง 3 ส่วน คือ 1. การเสียรูปของตัวเฟือง (gear body torsional deformation) 2. การเสียรูปจากการดัดโค้งของฟันเฟือง (gear tooth bending deformation) และ 3. การเสียรูปจากการสัมผัสกันของฟันเฟือง (tooth surface contact deformation) จากรูปที่ 1.11 พบว่าเมื่อให้ค่าแรงบิดเพิ่มขึ้น การเสียรูปจากการดัดโค้งของฟันเฟืองจะมีค่ามากที่สุด รองลงมาคือการเสียรูปของตัวเฟืองและการเสียรูปจากการสัมผัสกันของฟันเฟืองจะมีค่าน้อยที่สุด เมื่อได้ค่าการเสียรูปจากส่วนต่างๆ ของเฟืองสามารถหาค่าความแข็งแรงรวมของเฟืองได้ โดยงานวิจัยดังกล่าวได้นำผลลัพธ์ความแข็งแรงที่ได้เปรียบเทียบกับผลลัพธ์ความแข็งแรงจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของงานวิจัยอื่น พบว่าค่าความแข็งแรงที่ได้มีแนวโน้มไปในทิศทางเดียวกัน และเป็นค่าที่สามารถยอมรับได้



รูปที่ 1.11 ผลลัพธ์การเสียรูปในแต่ละส่วนของเฟืองตรง [10]

R. Ramasamy [11]

R. Ramasamy ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในหาความแข็งแรงของเฟืองตรง โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS คำนวณหาค่าการเสียรูป โดยคำนวณการเสียรูปจากโมเดล 3 มิติของเฟืองตรง ดังแสดงในรูปที่ 1.12 และนำผลลัพธ์ความแข็งแรงที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ความแข็งแรงจากโมเดล 2 มิติของเฟืองตรงจากงานวิจัย T. Kiebusch และ I. Howard [8] ผลการศึกษาพบว่าความแข็งแรงที่คำนวณได้จากโมเดลเฟืองตรงทั้ง 2 แบบ มีค่าใกล้เคียงกัน



รูปที่ 1.12 โมเดล 3 มิติของเฟืองตรง [11]

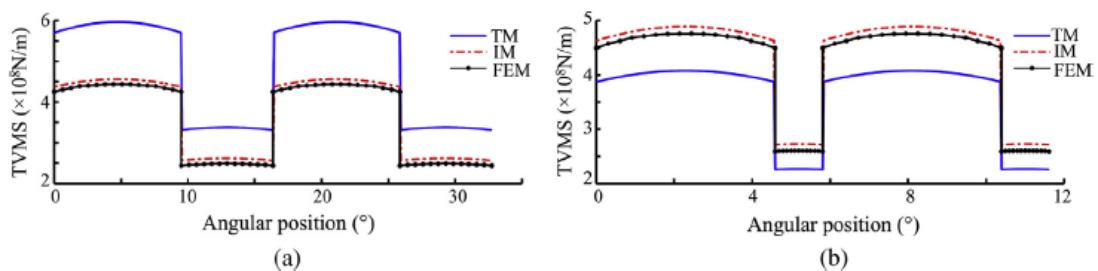
จากงานวิจัยดังกล่าว ทำให้ทราบว่าสามารถใช้โมเดล 2 มิติของเฟืองตรงในการคำนวณหาค่าความแข็งแรงได้ เนื่องจากคำนวณได้ง่ายกว่าโมเดล 3 มิติ ลดความซับซ้อนของปัญหาและลดระยะเวลาในการคำนวณให้น้อยลง

H. Ma [12]

H. Ma ใช้วิธีการวิเคราะห์หาความแข็งเกร็งของเฟืองตรง โดยสร้างสมการเพื่อคำนวณการเสียรูปของเฟืองจากสมการอนุรักษ์พลังงานและสมการการเสียรูปจากทฤษฎีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์ โดยความแข็งเกร็งของเฟืองจากงานวิจัยดังกล่าวมาจากผลการเสียรูปของเฟือง 5 ส่วน คือ 1. การเสียรูปจากการสัมผัสกันของฟันเฟือง 2. การเสียรูปจากการตัดโค้งของฟันเฟือง 3. การเสียรูปตามแนวแกนของฟันเฟือง 4. การเสียรูปจากแรงเฉือน และ 5. การเสียรูปของโคนฟัน และนำสมการความแข็งเกร็งที่ได้จากวิธีการวิเคราะห์ (Time-varying mesh stiffness) TM มาคำนวณหาค่าความแข็งเกร็ง พบว่าค่าความแข็งเกร็งที่ได้เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับค่าความแข็งเกร็งที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ มีค่าแตกต่างกันพอสมควร H. Ma ได้ปรับปรุงสมการขึ้นมาใหม่ (Improve time-varying mesh stiffness) IM และนำมาเปรียบเทียบกับค่าความแข็งเกร็งที่ได้จากสมการเดิมและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ FEM โดยเปรียบเทียบกับชุดเฟือง 2 ชุดที่มีพารามิเตอร์แตกต่างกัน พบว่าค่าความแข็งเกร็งจากสมการที่ปรับปรุงแล้วมีค่าใกล้เคียงกับค่าความแข็งเกร็งที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มากกว่าสมการจากวิธีการวิเคราะห์ดังแสดงในรูปที่ 1.13

Parameters of spur gear pairs parameters

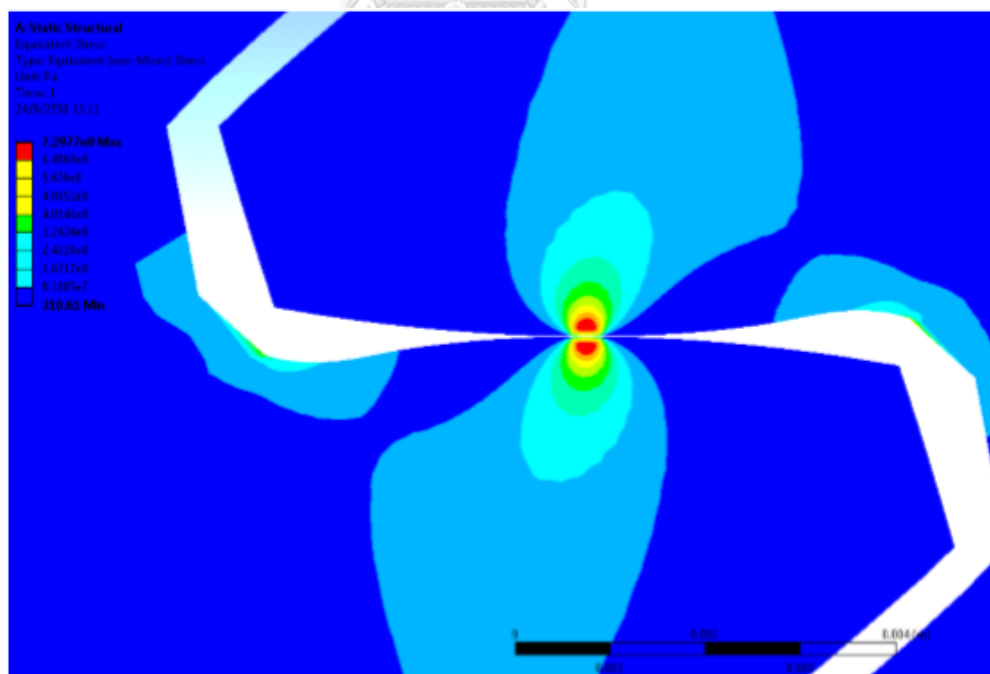
	Gear Pair 1		Gear Pair 2	
	Pinion	Gear	Pinion	Gear
Number of teeth N	22	22	62	62
Young's Modulus E (GPa)	206	206	206	206
Possion's ratio ν	0.3	0.3	0.3	0.3
Module m (mm)	3	3	3	3
Addendum coefficient h_a^*	1	1	1	1
Tip clearance coefficient C	0.25	0.25	0.25	0.25
Tooth width L (mm)	20	20	20	20
Pressure angle α (°)	20	20	20	20
Hub bore radius r_{int} (mm)	11.7	11.7	35.7	35.7



รูปที่ 1.13 ผลการเปรียบเทียบค่าความแข็งเกร็งของเฟืองตรง [12]

ธีรเดช ฤทธิ์ไกรเกรียง [13]

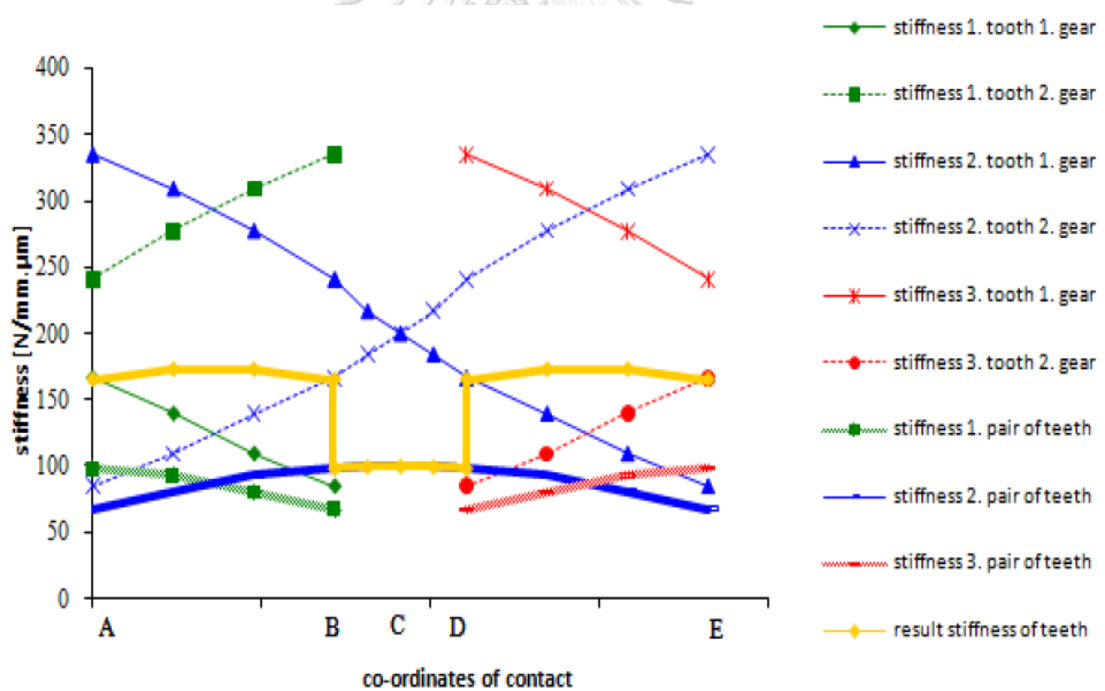
ธีรเดช ฤทธิ์ไกรเกรียง ศึกษาการกระจายความเค้นบนหน้าฟันเฟืองตรงที่มีอัตราทด 1 : 1 โดยใช้ผลเฉลยจากทฤษฎีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS ในการศึกษา ธีรเดช ตั้งสมมติฐานต่างๆ ได้แก่ การพิจารณาให้การกระจายแรงตลอดหน้าฟันเป็นแบบสม่ำเสมอและลักษณะของปัญหาเป็นปัญหาความเครียดในระนาบ ผิวหน้าฟันไม่มีการดัดแปลง ทำให้สามารถลดรูปปัญหาเฟืองจาก 3 มิติให้เหลือเพียง 2 มิติ และพิจารณาการขบกันของฟันเฟือง ณ เวลาใกล้เคียงสภาวะหยุดนิ่ง ซึ่งสมมติฐานต่างๆ ช่วยลดความซับซ้อนของปัญหาและช่วยลดระยะเวลาในการคำนวณลง ผลลัพธ์ของค่าความเค้นพอนมิสเสส (Von-Misses) ที่ได้ออกมาดังแสดงในรูปที่ 1.14 มีค่าใกล้เคียงกับผลลัพธ์ที่ได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้จากทฤษฎีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์และมีค่าใกล้เคียงกับผลลัพธ์จากงานวิจัยอื่น นอกจากนี้ ธีรเดช ได้ศึกษาผลของพารามิเตอร์เฟืองต่อค่าความแข็งแรงในเบื้องต้น เพื่อใช้อธิบายการกระจายภาระระหว่างฟันเฟือง อย่างไรก็ตามผลลัพธ์ของค่าความแข็งแรงที่ได้นั้นยังไม่เพียงพอที่จะทำนายค่าความแข็งแรงของเฟืองให้ได้ค่าที่แม่นยำและนำไปใช้งานจริงได้



รูปที่ 1.14 รูปแบบความเค้นพอนมิสเสสของการสัมผัสกันของฟันเฟืองตรง [13]

S. Medvecka-Benova [14]

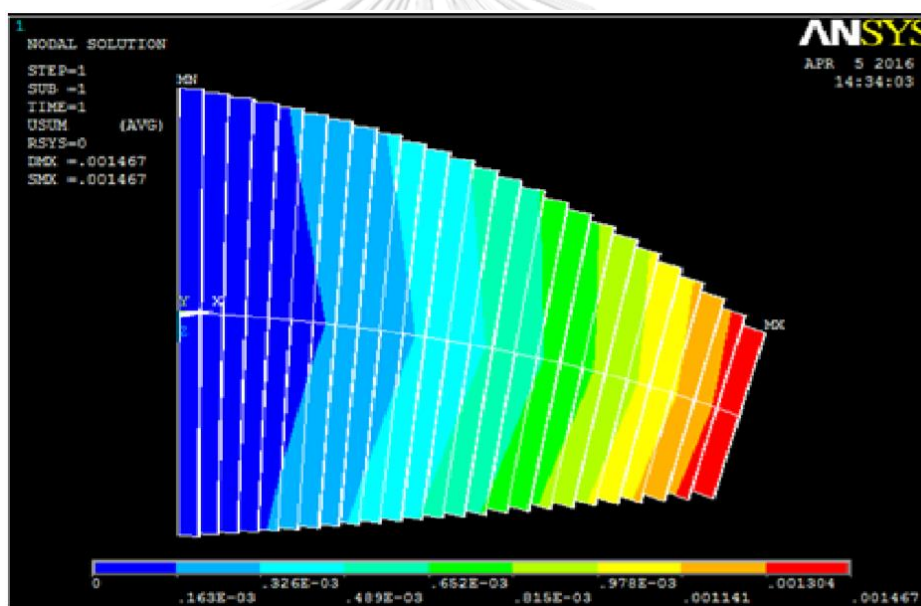
S. Medvecka-Benova ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ศึกษาหาความแข็งเกร็งของเฟืองตรง โดยผลการคำนวณแสดงในรูปที่ 1.15 ความแข็งเกร็งของเฟืองตามตำแหน่งเริ่มต้นขบที่ปลายฟันเฟืองจะมีค่าน้อยกว่าความแข็งเกร็งของเฟืองขบที่ตำแหน่งเริ่มต้นขบที่โคนของฟันเฟือง เนื่องจากที่โคนของฟันเฟืองจะมีความหนามากกว่าปลายฟัน เมื่อถูกแรงกระทำจะมีการเสียรูปน้อยกว่า จึงส่งผลให้มีความแข็งเกร็งมากกว่า ค่าความแข็งเกร็งรวมของคู่ฟันได้จากการนำค่าความแข็งเกร็งของเฟืองขบและเฟืองตามมาต่อกันแบบอนุกรม และคำนวณจากสมการการต่อแบบอนุกรมของสปริง แต่ในตำแหน่งการขบของเฟืองจะมีบางช่วงที่ฟันเฟืองขบพร้อมกัน 2 คู่ฟัน ค่าความแข็งเกร็งคำนวณได้จากการนำค่าความแข็งเกร็งของการขบของฟันเฟืองคู่ที่ 1 และ 2 มารวมกัน ทำให้ค่าความแข็งเกร็งขณะที่เฟืองขบกัน 2 คู่ฟันมีค่ามากกว่าค่าความแข็งเกร็งจากการขบ 1 คู่ฟัน



รูปที่ 1.15 ค่าความแข็งเกร็งของเฟืองในแต่ละกรณี [14]

S. A. Badkas และ N. Ajmera [15]

S. A. Badkas และ N. Ajmera ใช้วิธีการวิเคราะห์โดยใช้หลักการของ Castigliano's Theorem หาสมการการเสีรูปจากการตัดโค้งของฟันเฟืองตรง โดยกำหนดให้ฟันเฟืองมีลักษณะคล้ายกับคานายื่น (cantilever beam) นอกจากนี้ยังใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้โปรแกรม CATIA สร้างโมเดลฟันเฟืองและใช้โปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS คำนวณค่าการเสีรูปตั้งรูปที่ 1.16 ผลที่ได้พบว่าเมื่อตรวจสอบค่าการเสีรูปที่คำนวณได้จากสมการดังกล่าวกับ FEM ได้ค่าการเสีรูปที่ใกล้เคียงกัน ซึ่งค่าการเสีรูปที่ได้สามารถนำไปหาค่าความแข็งแรงจากการตัดโค้งของฟันเฟืองได้อย่างไรก็ตาม S.A. Badkas ได้วิเคราะห์หาการเสีรูปจากการตัดโค้งของฟันเฟืองเพียงอย่างเดียว ข้อมูลดังกล่าวจึงยังไม่เพียงพอที่จะนำไปหาค่าความแข็งแรงของเฟืองทั้งหมด

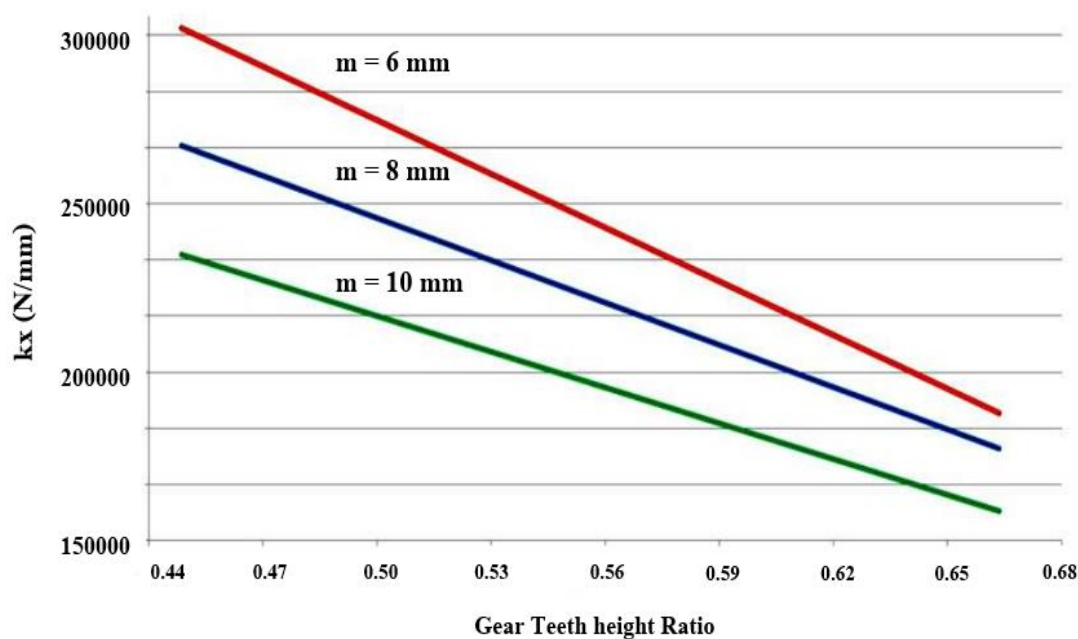


รูปที่ 1.16 การเสีรูปของฟันเฟืองจากโปรแกรม ANSYS [15]

A. D. Tsolakis [16]

A. D. Tsolakis ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ศึกษาผลของพารามิเตอร์ของเฟืองต่อค่าความแข็งแรง โดยศึกษาผลของโมดูลต่อค่าความแข็งแรงของเฟืองตรง ในการศึกษาได้คำนวณค่าการเสีรูปจากโมเดลเฟืองที่มีโมดูลต่างกันแต่มีพารามิเตอร์และคุณสมบัติอื่นๆ เหมือนกัน จากรูปที่ 1.17 ผลการศึกษาพบว่าเฟืองที่มีโมดูลน้อยจะมีค่าความแข็งแรงมากกว่าเฟืองที่มีโมดูลมาก อย่างไรก็ตาม

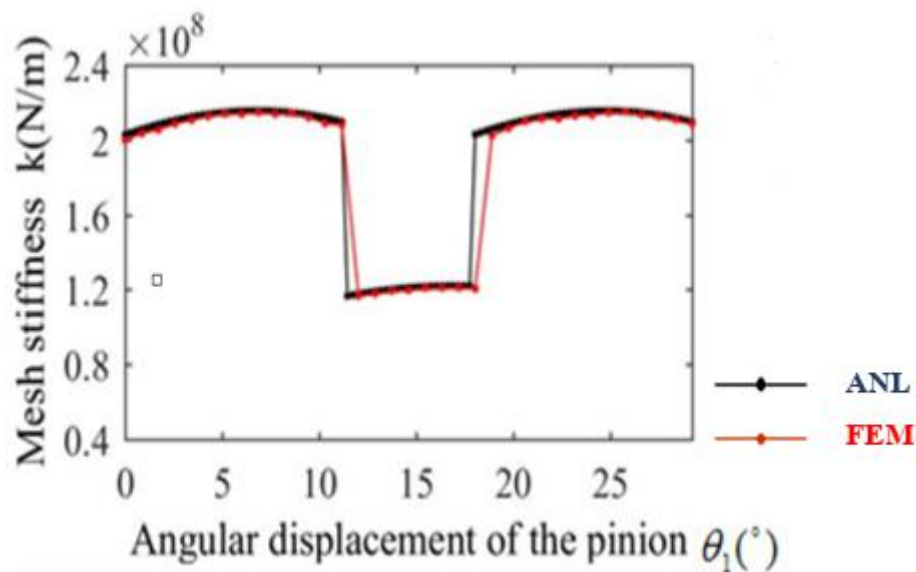
เฟืองที่มีโมดูลต่างกันแต่มีจำนวนฟันเท่ากันจะทำให้เส้นผ่านศูนย์กลางพิตซ์ของเฟืองมีค่าแตกต่างกัน ซึ่งเฟืองที่มีโมดูลมากกว่าจะมีขนาดใหญ่กว่าเฟืองที่มีโมดูลน้อย จึงยังไม่สามารถสรุปได้ว่าความแข็งแรงที่ต่างกันเป็นผลมาจากขนาดของฟันเฟืองหรือโมดูลหรือขนาดของทรงกระบอกเฟือง



รูปที่ 1.17 ค่าความแข็งแรงของเฟืองที่มีโมดูลต่างกัน [16]

Y. Lei [17]

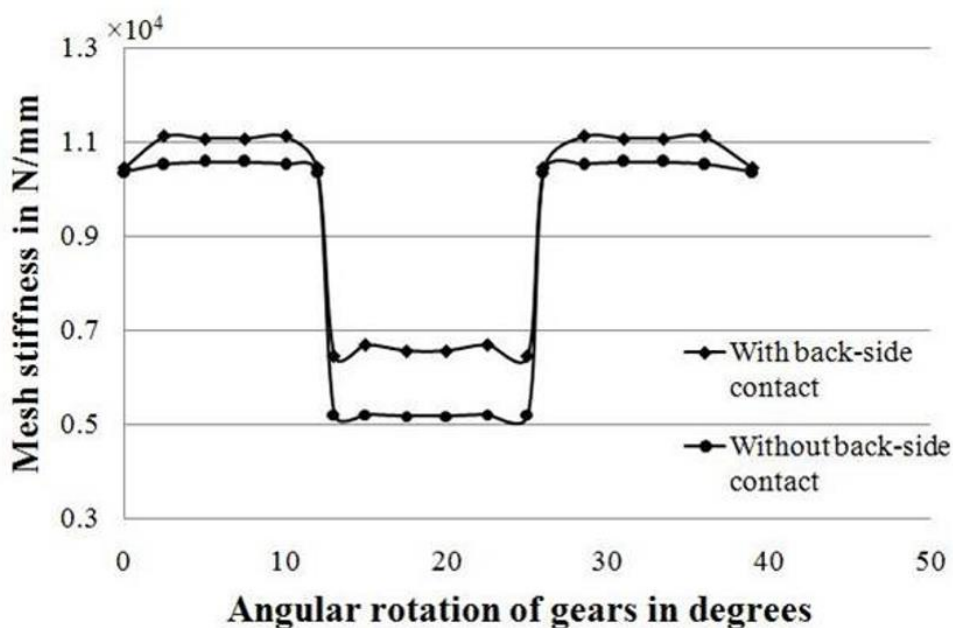
Y. Lei ได้ปรับปรุงสมการหาค่าการเสียรูปเพื่อคำนวณหาความแข็งแรงของเฟืองตรงจากวิธีการวิเคราะห์ของงานวิจัย H. Ma [12] โดยใช้หลักการเดียวกัน และได้นำผลลัพธ์ความแข็งแรงที่คำนวณได้จากสมการจากการปรับปรุงมาเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ พบว่าผลลัพธ์ที่ได้มีค่าใกล้เคียงกันดังแสดงในรูปที่ 1.18 ซึ่งผลลัพธ์จากงานวิจัยดังกล่าวสามารถนำมาเปรียบเทียบกับผลจากงานวิจัยนี้ได้



รูปที่ 1.18 การเปรียบเทียบผลระหว่างวิธีการวิเคราะห์กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [17]

N. K. Raghuwanshi และ A. Parey [18]

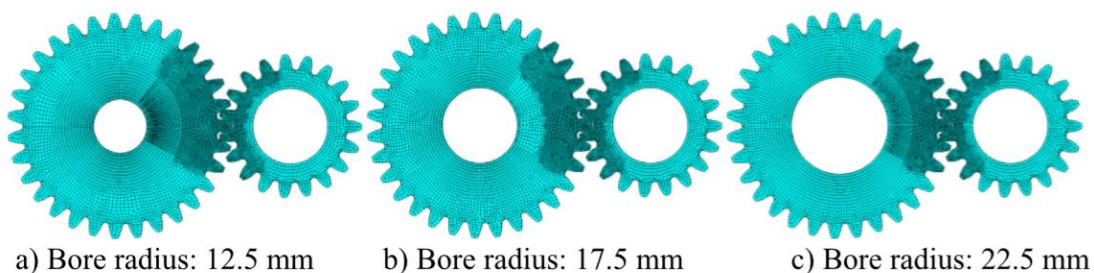
N. K. Raghuwanshi และ A. Parey ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการหาความแข็งแรงของฟันเฟืองตรงจากผลของการเสียรูปจากการสัมผัสกันของฟันเฟือง โดยคำนวณหาค่าการเสียรูปจากโมเมนต์ของฟันเฟือง 3 มิติ โดยงานวิจัยดังกล่าวได้แบ่งลักษณะการสัมผัสของฟันเฟืองเพื่อคำนวณหาค่าการเสียรูปเป็น 2 ลักษณะ คือ 1. การสัมผัสเพียงส่วนด้านหน้าของฟันเฟือง (Without back-side contact) และ 2. การสัมผัสทั้งด้านหน้าและด้านหลังของฟันเฟือง (With back-side contact) ผลการคำนวณแสดงในรูปที่ 1.19 เมื่อเปรียบเทียบความแข็งแรงที่ได้ พบว่าการสัมผัสทั้งด้านหน้าและด้านหลังของฟันเฟืองจะมีค่าความแข็งแรงมากกว่าการสัมผัสเพียงส่วนด้านหน้าของฟันเฟือง เนื่องจากการสัมผัสทั้งด้านหน้าและด้านหลังของฟันเฟืองจะมีการกระจายของแรงมากกว่าแรงที่กระทำกับวัตถุจึงมีค่าน้อยลง ส่งผลให้การเสียรูปของเฟืองมีค่าน้อยกว่า ทำให้ความแข็งแรงมีค่ามากกว่า



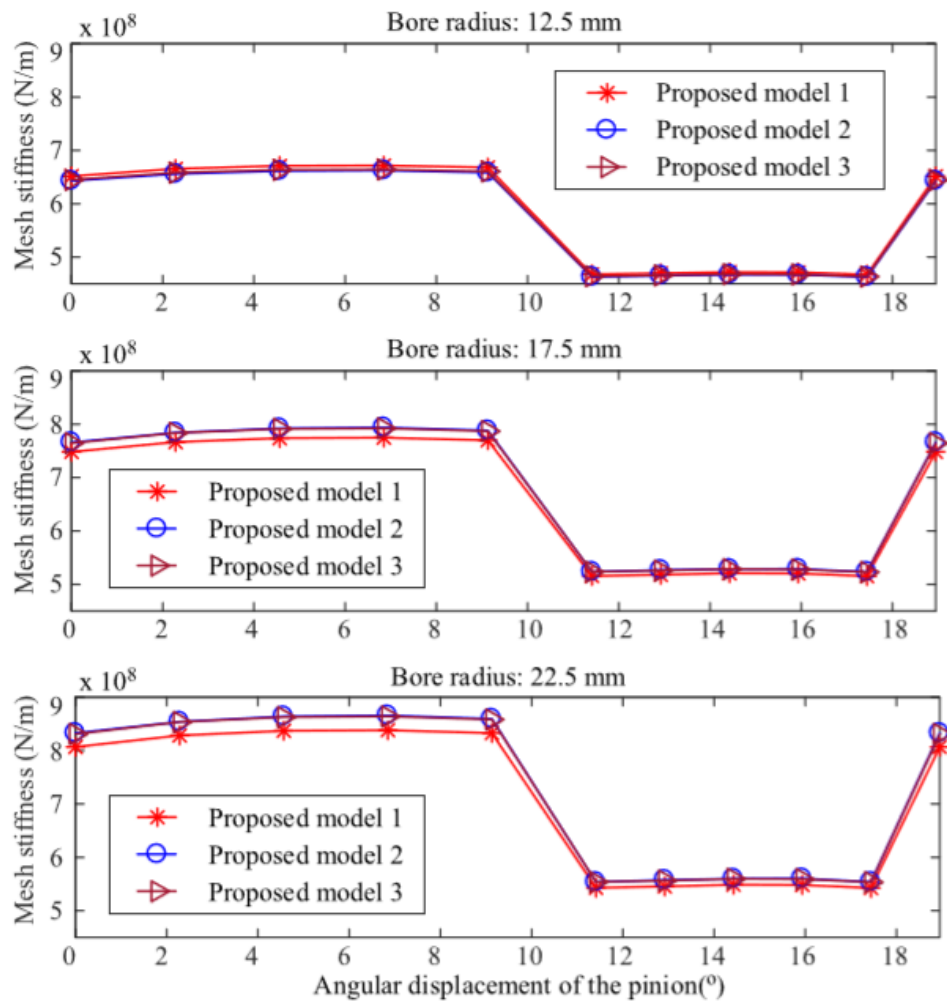
รูปที่ 1.19 การเปรียบเทียบค่าความแข็งเกร็งของ 2 ลักษณะการสัมผัส [18]

X. Liang [19]

X. Liang ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ศึกษาหาความแข็งเกร็งของเฟืองตรง โดยสร้างโมเดล คู่เฟืองที่มีเฟืองขับเหมือนกันแต่เฟืองตามมีขนาดของรูเพลลาแตกต่างกันดังแสดงในรูปที่ 1.20a-1.20c ผลการคำนวณแสดงดังรูปที่ 1.21 พบว่าค่าความแข็งเกร็งของเฟืองที่มีรัศมีรูเพลลาเท่ากับ 12.5 mm จะมีค่าน้อยที่สุด รองลงมาคือเฟืองที่มีรัศมีรูเพลลา 17.5 mm และเฟืองที่มีรัศมีรูเพลลา 22.5 mm จะมีค่ามากที่สุด จึงสามารถสรุปได้ว่าขนาดของทรงกระบอกเฟืองมีผลต่อค่าความแข็งเกร็งของเฟืองด้วย จึงควรมีการศึกษาความแข็งเกร็งเนื่องจากขนาดของเฟืองด้วย



รูปที่ 1.20 เฟืองที่มีรูเพลลาต่างกัน [19]



รูปที่ 1.21 ค่าความแข็งเกร็งของเฟืองที่มีรูเพลลาต่างกัน [19]

H. Sachidanada [20]

ใช้วิธีการวิเคราะห์หาค่าความแข็งเกร็งของเฟืองตรง โดยใช้สมการจากทฤษฎีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์และสมการผลรวมอินทิเกรตวิเคราะห์หาการเสีรूपของฟันเฟืองที่มีมุมกด 20° และ 25° ซึ่งลักษณะของฟันเฟืองที่มีมุมกดมากจะมีโคนของฟันกว้างกว่าและมีปลายของฟันแคบกว่าเฟืองที่มีมุมกดน้อย โดยผลการคำนวณพบว่าเฟืองที่มีมุมกดมากกว่าแต่มีพารามิเตอร์อื่นเหมือนกัน จะมีค่าความแข็งเกร็งมากกว่าเฟืองที่มีมุมกดน้อย อย่างไรก็ตาม เฟืองมาตรฐานที่มีการใช้อยู่ในปัจจุบันมักมีมุมกด 3 ค่า ได้แก่ 14.5° 20° และ 25° จึงควรมีการศึกษาเฟืองที่มีมุมกด 14.5° และ 25° เพิ่มเติม เพื่อเพิ่มความถูกต้องและครบถ้วน

จากการศึกษาที่ได้กล่าวมาทั้งหมด สรุปไว้ดังตารางที่ 1.1 จะเห็นได้ว่าการหาความแข็งแรงของเฟืองตรงด้วยวิธีการต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นการหาด้วยวิธีการวิเคราะห์หรือคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ล้วนแล้วแต่มีความต้องการค่าความแข็งแรงของเฟืองที่แม่นยำในการนำไปใช้วิเคราะห์กับปัญหาอื่นๆ อย่างไรก็ตาม การศึกษาด้วยวิธีการทั้งหมดเหล่านี้มีทั้งข้อดีและข้อด้อย สำหรับวิธีการวิเคราะห์มักใช้รูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equations) หรือในรูปแบบของสมการอินทิกรัล (Integral Equations) สร้างสมการคำนวณหาการเสียรูปของเฟืองตรง ซึ่งสมการเหล่านี้มักมีความยุ่งยากและซับซ้อน การนำมาใช้คำนวณจริงทำได้ยาก จึงยังไม่เหมาะสมเท่าที่ควร สำหรับการคำนวณหาความแข็งแรงของเฟืองตรงด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ต้องคำนวณค่าการเสียรูปของเฟืองที่ตำแหน่งการขบต่างๆ บนฟันเฟืองอย่างละเอียด การสร้างและประกอบโมเดลให้อยู่ในตำแหน่งการขบกันของฟันเฟืองที่ต้องการทำได้ยาก การคำนวณโมเดลในสามมิติใช้เวลานาน ไม่เหมาะสมในการนำมาใช้มาคำนวณจริงเช่นกัน นอกจากนี้ผลที่กล่าวมาจากทั้งสองวิธียังทำเฉพาะพารามิเตอร์ที่เจาะจงบางค่าและยังไม่มี การเสนอว่าจะนำไปใช้ในกรณีอื่นอย่างไร

งานวิจัยนี้จึงมีเป้าหมายในการสร้างสมการคำนวณหาความแข็งแรงของเฟืองตรงโดยใช้ทฤษฎีพื้นฐานกลศาสตร์ของแข็งและผลการคำนวณพื้นฐานที่คำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยพิจารณาให้ความแข็งแรงของเฟืองเป็นผลมาจากการเสียรูปของเฟือง 2 ส่วน คือ 1. การเสียรูปซึ่งรวมการเสียรูปจากการสัมผัสและดัดโค้งของฟันเฟือง (Contact Deformation & Bending Deformation) และ 2. การเสียรูปของทรงกระบอกเฟือง (Cylinder Gear Deformation) โดยสมการที่สร้างขึ้นสามารถนำไปประยุกต์ใช้คำนวณหาความแข็งแรงของเฟืองตรงที่มีพารามิเตอร์รูปร่างต่างๆ ได้โดยง่าย

ตารางที่ 1.1 งานวิจัยที่ศึกษาความแข็งแรงของเฟืองตรง

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	ANL	FEM	สรุปผลการศึกษา
R. Cornell [1]	✓	-	คำนวณการเสีรูปหลายตำแหน่งการขบ ผลความแข็งแรงใกล้เคียงกับวิธีวิเคราะห์ของงานวิจัยอื่น
R. Muthukumar [2]	-	✓	คำนวณการเสีรูป 3 ตำแหน่งการขบ เปรียบเทียบผลกับการทดลองคลาดเคลื่อนไม่เกิน 10%
S. Sirichai [3]	-	✓	เปรียบเทียบค่า k กับผลการทดลองได้ค่าใกล้เคียงกัน
M. Arafa [4]	-	✓	ศึกษาผลของจำนวนฟันต่อความแข็งแรง จำนวนฟันมากมีความแข็งแรงมากกว่าจำนวนฟันน้อย
I. Yesilyurt [5]	✓	-	ศึกษาการเสีรูปในแต่ละส่วนของเฟืองตรงเพื่อหาค่า k
Y. Afework [6]	-	✓	คำนวณการเสีรูปที่จำนวนฟันต่างกัน เปรียบเทียบผลกับงานวิจัยของ R. Cornell มีค่าใกล้เคียงกัน
J.D. Wang [7]	-	✓	ศึกษาความแตกต่างของลักษณะปัญหาการสัมผัสใน 2 มิติ ของ Plane Stress และ Plane Strain
T. Kiekbusch [8]	✓	-	ศึกษาความแข็งแรงในส่วนต่างๆ ของเฟืองตรง
F. Chaari [9]	-	✓	คำนวณ k ด้วยวิธีวิเคราะห์และ FEM ได้ค่าใกล้เคียงกัน
W. Zhifei [10]	✓	✓	คำนวณการเสีรูปในส่วนต่างๆ ของเฟืองตรง การตัดโค้ง >> ตัวเฟือง >> การสัมผัส
R.S. Ramasamy [11]	-	✓	คำนวณโมเดล Kiekbusch ใน 3 มิติ ได้ค่าใกล้เคียงกัน
H. Ma [12], Y. Lei [17]	✓	✓	วิเคราะห์หาความแข็งแรงด้วยการสร้างสมการปรับปรุงสมการ และคำนวณด้วย FEM
ธีรเดช [13]	-	✓	ศึกษาการกระจายภาระบนหน้าฟันเฟืองด้วย FEM
M. Silvia [14]	-	✓	ศึกษาช่วงการขบส่งกำลัง 2 คู่ฟันของเฟืองตรง
S.A. Badkas [15]	✓	-	วิเคราะห์การเสีรูปจากการตัดโค้งของฟันเฟืองตรง
A.D. Tsolakis [16]	-	✓	ศึกษาความแข็งแรงของเฟืองตรงที่มีโมดูลต่างกัน
A. Parey [18]	✓	-	ศึกษาความแตกต่างของการสัมผัสของฟันเฟือง 2 แบบ
X. Liang [19]	-	✓	ศึกษาความแข็งแรงของเฟืองตรงที่มีรูเพลลาต่างกัน
Sachidananda [20]	✓	-	เปรียบเทียบค่า k ที่มีมุมกด 20° และ 25°

หมายเหตุ

✓

ใช้วิธีการศึกษา ,

-

ไม่ได้ใช้วิธีการศึกษา

1.3 วัตถุประสงค์

1. คำนวณค่าความแข็งเกร็ง (Stiffness) ของเฟืองตรงโดยใช้ผลการเสียรูปจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method)
2. ศึกษาผลของพารามิเตอร์ต่างๆ ที่มีผลต่อค่าความแข็งเกร็งของเฟืองตรง
3. เสนอสมการอย่างง่ายเพื่อใช้ประมาณค่าความแข็งเกร็งของคู่เฟืองตรงที่มีพารามิเตอร์ต่างๆ

1.4 ขอบเขต

1. คำนวณหาค่าการเสียรูป (Deformation) ของเฟืองตรงด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS
2. คำนวณค่าความแข็งเกร็งที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ของฟันเฟืองตั้งแต่ตำแหน่งเริ่มต้นขบจนถึงตำแหน่งสิ้นสุดการขบ
3. ศึกษาเฟืองตรงที่มีพารามิเตอร์ต่างๆ ได้แก่ โมดูล มุมกด จำนวนฟันและภาวะต่างๆ กัน

1.5 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1. ศึกษาบทความทางวิชาการและตำราเพื่อหาแนวทางในการคำนวณค่าความแข็งเกร็งของเฟืองตรง
2. ศึกษาวิธีการใช้โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำเร็จรูป ANSYS สำหรับปัญหาการสัมผัสอย่างง่าย
3. คำนวณค่าการเสียรูปของเฟืองตรงที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS
4. คำนวณค่าความแข็งเกร็งของเฟืองตรงที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ของฟันเฟืองจากผลที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method)
5. สร้างสมการเพื่อใช้ประมาณค่าความแข็งเกร็งจากทฤษฎีพื้นฐานกลศาสตร์ของแข็งและข้อมูลค่าความแข็งเกร็งที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
6. ตรวจสอบผลลัพธ์ความแข็งเกร็งที่คำนวณได้จากสมการที่สร้างขึ้นกับผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และผลลัพธ์จากการศึกษาที่มีก่อนหน้า

7. วิเคราะห์แก้ไขและปรับปรุงสมการที่สร้างขึ้น
8. ทำรายงานและนำเสนอผลงาน
9. แก้ไขรูปเล่มรายงาน

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ทราบวิธีการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหากลศาสตร์การสัมผัสพื้นฐาน และสามารถหาการเสียรูปของเฟืองตรง เพื่อคำนวณหาค่าความแข็งแรงของเฟืองได้
2. สามารถอธิบายผลของพารามิเตอร์ต่างๆ ที่มีผลต่อค่าความแข็งแรงของเฟืองตรงได้
3. ได้สมการอย่างง่ายเพื่อใช้คำนวณค่าความแข็งแรงของเฟืองตรง และสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับเฟืองที่มีพารามิเตอร์อื่นๆ ได้

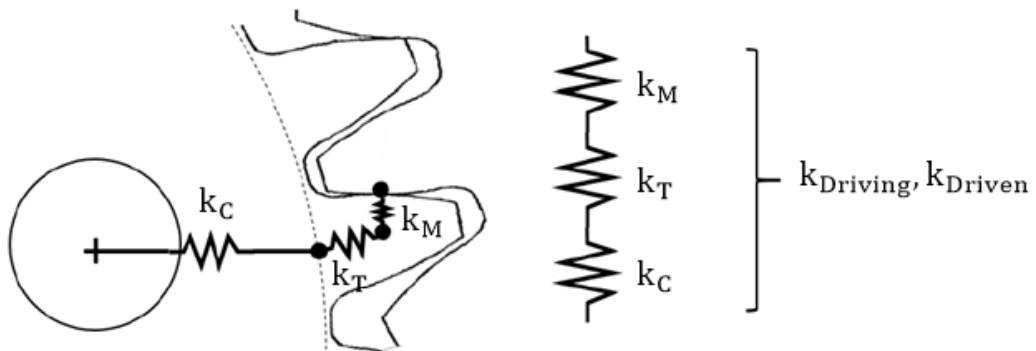
บทที่ 2

การหาค่าความแข็งเกร็งของคู่เฟืองตรงด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ปัญหาทางด้านวิศวกรรมมักเขียนอยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equations) หรือในรูปแบบของสมการอินทิกรัล (Integral Equations) ซึ่งการหาคำตอบด้วยวิธีการวิเคราะห์ (Analytical Method) นั้นทำได้ยากหรือไม่สามารถหาได้เลย ปัญหาเหล่านี้อาจแก้ได้ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับงานศึกษานี้ได้ประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS เพื่อแก้ปัญหาการสัมผัสกันของฟันเฟืองตรง โดยเลือกใช้โปรแกรม ANSYS Workbench ในโหมด Static Structural ซึ่งในบทนี้จะกล่าวถึงการออกแบบโมเดลของปัญหา การกำหนดลักษณะของปัญหา การแบ่งเอลิเมนต์ของวัสดุ การกำหนดการสัมผัส และการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตต่างๆ ในโปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS สำหรับการคำนวณปัญหาเพื่อหาค่าความแข็งเกร็งของคู่เฟืองตรง

2.1 ค่าความแข็งเกร็งของคู่เฟืองตรง

ค่าความแข็งเกร็งของคู่เฟืองเป็นค่าที่บ่งบอกถึงความสามารถในการต้านทานการเสียรูป เนื่องจากกฎการกระทำ ค่าความแข็งเกร็งของคู่เฟืองตรงเป็นผลมาจากการเสียรูป (Deformation) ในรูปแบบต่างๆ ได้แก่ การเสียรูปจากการสัมผัสกันของฟันเฟือง การเสียรูปจากการดัดโค้งของฟันเฟือง และการเสียรูปของทรงกระบอกเฟือง โดยการเสียรูปต่างๆ ของเฟืองที่ใช้คำนวณหาค่าความแข็งเกร็งจะเป็นการเสียรูปในเส้นแนวแรงกระทำ (Line of action) ทำให้ค่าความแข็งเกร็งที่ได้เป็นความแข็งเกร็งในเส้นแนวแรงกระทำ ซึ่งสามารถนำไปใช้วิเคราะห์กับปัญหาอื่นๆ ได้ง่าย ด้วยเหตุนี้ค่าความแข็งเกร็งของเฟืองขณะขบจึงสามารถพิจารณาให้เป็นผลรวมของความแข็งเกร็งจากการสัมผัสกันของฟันเฟือง (Contact Meshing Stiffness) k_M ความแข็งเกร็งจากการดัดโค้งของฟันเฟือง (Tooth Bending Stiffness) k_T และความแข็งเกร็งจากการเสียรูปของทรงกระบอกเฟือง (Cylinder Gear Stiffness) k_C ดังแสดงในรูปที่ 2.1

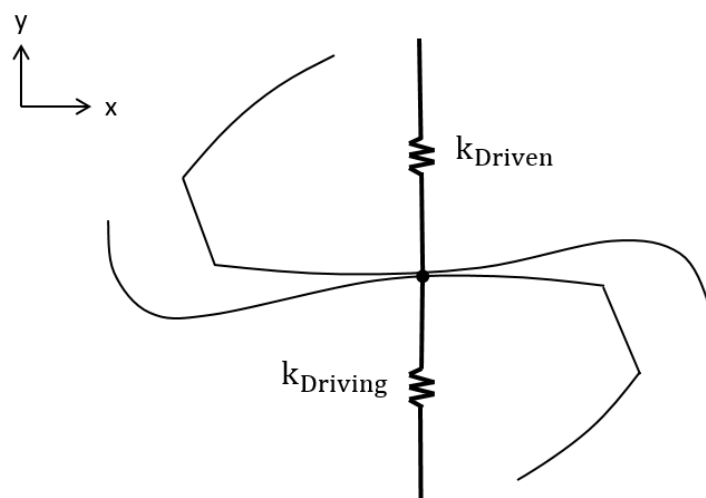


รูปที่ 2.1 การแบ่งลักษณะความแข็งเกร็งของเฟืองตรง

ค่าความแข็งเกร็งรวมของเฟืองขับหรือเฟืองตามซึ่งถูกพิจารณาจากการแบ่งในลักษณะดังกล่าว สามารถหาได้จากสมการการต่อความแข็งเกร็งสปริงแบบอนุกรม ดังสมการ

$$\frac{1}{k_{Driving}} \text{ or } \frac{1}{k_{Driven}} = \frac{1}{k_M} + \frac{1}{k_T} + \frac{1}{k_C} \quad (2.1)$$

โดยที่ $k_{Driving}$ และ k_{Driven} คือความแข็งเกร็งของเฟืองขับและเฟืองตามตามลำดับ โดยการยุบความแข็งเกร็งในแต่ละส่วนของเฟืองให้เหลือเพียงความแข็งเกร็งของเฟืองขับและเฟืองตาม จะได้ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 การต่ออนุกรมของเฟืองขับและเฟืองตาม

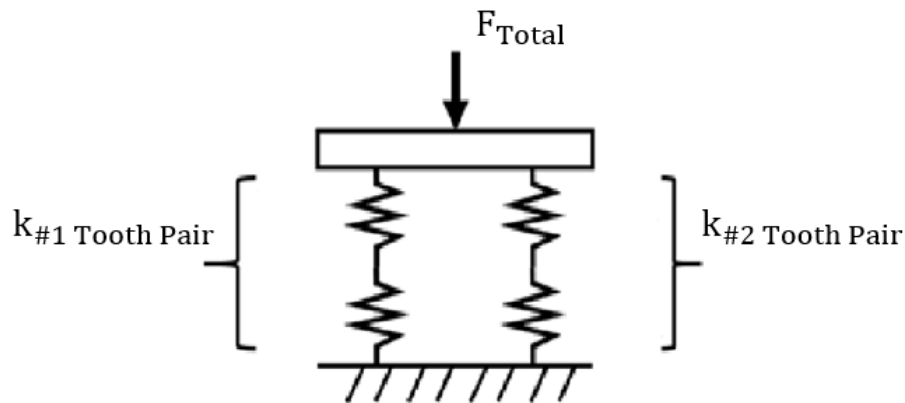
ความแข็งแรงของคู่เฟือง $k_{Gear\ Pair}$ ได้จากการนำความแข็งแรงของเฟืองขับ k_{Driven} และความแข็งแรงของเฟืองตาม $k_{Driving}$ มาต่ออนุกรมกันดังสมการ

$$\frac{1}{k_{Gear\ Pair}} = \frac{1}{k_{Driving}} + \frac{1}{k_{Driven}} \quad (2.2)$$

โดยที่ $k_{Gear\ Pair}$ คือ ค่าความแข็งแรงรวมของคู่เฟือง (N/m)

ในการทำงานของเฟืองบางช่วงเวลาฟันเฟืองอาจจะขบสั่กำลังพร้อมๆ กัน 2 คู่ฟัน ขณะที่ฟันเฟืองขบพร้อมกัน 2 คู่ฟันนี้ ค่าความแข็งแรงรวมของคู่เฟืองจะเพิ่มมากขึ้น โดยวิธีการหาความแข็งแรงของคู่เฟืองในลำดับแรกจะพิจารณาความแข็งแรงของคู่ฟันเฟืองได้จากสปริง 2 ตัวต่อขนานกันดังแสดงในรูปที่ 2.3 ดังนั้นค่าความแข็งแรงรวมของคู่ฟันเฟือง $k_{Double\ Tooth\ Pair}$ จึงเท่ากับผลรวมของความแข็งแรงของฟันคู่ที่ 1 $k_{\#1\ Tooth\ Pair}$ และของฟันคู่ที่ 2 $k_{\#2\ Tooth\ Pair}$ ตามตำแหน่งการขบจริงดังสมการ

$$k_{Double\ Tooth\ Pair} = k_{\#1\ Tooth\ Pair} + k_{\#2\ Tooth\ Pair} \quad (2.3)$$



รูปที่ 2.3 โมเดลสปริงการขบกันของเฟืองตรง 2 คู่

ความแข็งแรงรวมของคู่เฟืองได้จากการนำความแข็งแรงของคู่ฟันเฟืองทั้ง 2 คู่ และความแข็งแรงส่วนทรงกระบอกของทั้งเฟืองขับและเฟืองตามต่อสปริงแบบอนุกรมกันดังสมการ

$$\frac{1}{k_{Double\ Gear\ Pair}} = \frac{1}{k_{Double\ Tooth\ Pair}} + \frac{1}{k_C} \quad (2.4)$$

สำหรับในการศึกษานี้ เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์ผลของพารามิเตอร์รูปร่างเฟืองต่างๆ เพื่อใช้ในการสร้างสมการทำนายความแข็งแรงต่อไป จำเป็นที่จะต้องทราบค่าความแข็งแรงในส่วนต่างๆ ของเฟือง ทั้งความแข็งแรงส่วนทรงกระบอกเฟือง k_C ความแข็งแรงส่วนของฟันเฟือง (k_M และ k_T) ความแข็งแรงรวมของเฟืองขับ ($k_{Driving}$) และเฟืองตาม (k_{Driven}) และความแข็งแรงรวมของคู่เฟือง ($k_{Gear Pair}$) ในที่นี้ค่าความแข็งแรงส่วนของทรงกระบอก (k_C) และความแข็งแรงส่วนของเฟืองตาม (k_{Driven}) และเฟืองขับ ($k_{Driving}$) หาได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยตรง ส่วนค่าความแข็งแรงของฟันเฟืองซึ่งในที่นี้จะพิจารณารวมกันทั้ง k_M และ k_T จะหาจากสมการ (2.1) และค่าความแข็งแรงของคู่เฟือง $k_{Gear Pair}$ หาได้จากสมการ (2.2) รายละเอียดการหาค่าความแข็งแรงแต่ละตัวจะอธิบายในหัวข้อถัดๆ ไป

2.2 การกำหนดปัญหาและการตั้งสมมติฐานของคู่เฟืองตรง

เนื่องจากตลอดความกว้างหน้าฟันของเฟืองตรงถูกภาวะกระทำอย่างสม่ำเสมอ ดังนั้นจึงสามารถพิจารณาปัญหาของเฟืองตรงให้เป็นปัญหาความเครียดในระนาบ (Plane Strain) ซึ่งทำให้สามารถลดรูปจากปัญหาในสามมิติเป็นปัญหาในสองมิติได้ ในการศึกษานี้โมเดลเฟืองตรงที่นำมาวิเคราะห์จึงนำมาพิจารณาแค่เพียงส่วนเดียวเท่านั้น ไม่ได้พิจารณาตลอดความกว้างหน้าฟัน เนื่องจากในแต่ละระนาบที่ลึกเข้าไปนั้นมีพฤติกรรมเหมือนกัน ซึ่งส่งผลให้ระยะเวลาในการคำนวณ (Computational Time) นั้นลดลง สมมติฐานต่างๆ ที่ใช้ในกรณีของเฟืองตรงสรุปได้ดังนี้

1. สมมุติว่าวัสดุเฟืองเป็นเนื้อเดียวกัน (Homogeneous) ไอโซโทรปิก (Isotropic) และมีความสมบัติยืดหยุ่น (Elastic) ตามกฎของฮุก
2. การกระจายแรงตลอดหน้าฟันมีค่าเท่ากันและเป็นแบบสม่ำเสมอ
3. ไม่พิจารณาแรงเสียดทานจากการเลื่อนไถล (Sliding Friction) ระหว่างคู่ฟันเฟือง
4. พิจารณาการขบกันของฟันเฟืองตรงเป็นปัญหาความเครียดในระนาบ (Plane Strain) เนื่องจากพิจารณาว่าแรงที่เกิดขึ้นตลอดหน้าฟันมีค่าเท่ากัน ดังนั้นในแต่ละระนาบของฟันจึงมีพฤติกรรมเหมือนกัน

5. เฟืองไม่มีการดัดแปลงรูปร่าง
6. พิจารณาความแข็งแรงของเฟืองเมื่อหมุนด้วยความเร็วต่ำ จึงสามารถพิจารณาเป็นสภาวะใกล้เคียงสภาวะหยุดนิ่ง (Quasi-Static)
7. พิจารณาให้ฟันเฟืองตรงมีลักษณะคล้ายกับคานยื่น (Cantilever beam)

ตารางที่ 2.1 แสดงการเปรียบเทียบสมมุติฐานที่ใช้พิจารณาตรงกันกับงานวิจัยอื่น นอกจากนี้ยังมีบางสมมุติฐานของบางงานวิจัยอื่น เช่น การคำนวณโมเดลเฟืองแบบ 3 มิติ ทำให้การกระจายแรงตลอดหน้าฟันอาจไม่สม่ำเสมอ การพิจารณาแรงเสียดทานจากการเลื่อนไถลหรือเฟืองหมุนด้วยความเร็วคงที่ อาจทำให้ความแข็งแรงของเฟืองมีความคลาดเคลื่อน อย่างไรก็ตาม ข้อจำกัดบางอย่างของโปรแกรมทำให้กระบวนการคำนวณมีความซับซ้อนและเสียเวลาในการคำนวณ ในงานวิจัยนี้จึงพิจารณาเพียงสมมุติฐานที่ตั้งขึ้นเพื่อลดเวลาคำนวณและความซับซ้อนของปัญหา

ตารางที่ 2.1 การเปรียบเทียบสมมุติฐานที่ตั้งขึ้นกับงานวิจัยอื่น

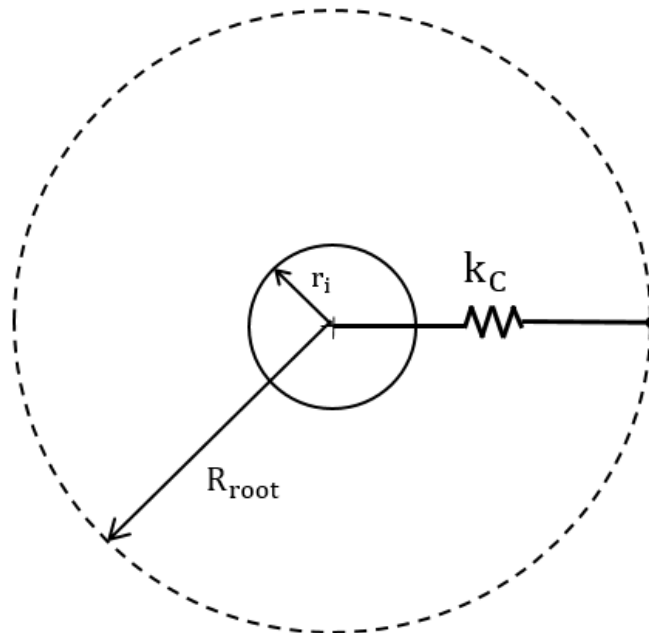
สมมุติฐานของเฟืองตรงในงานวิจัยนี้	สมมุติฐานของเฟืองตรงของงานวิจัยอื่น
สมมติว่าวัสดุเฟืองเป็น Homogeneous Isotropic และ Elastic	[1] – [19]
การกระจายแรงตลอดหน้าฟันสม่ำเสมอ	[7], [8], [9], [10], [12], [13], [14], [17]
ไม่พิจารณาแรงเสียดทานจากการเลื่อนไถลระหว่างคู่ฟันเฟือง	[6], [8], [11], [13], [16]
การขบกันเป็นปัญหา Plane Strain ฟันเฟืองมีพฤติกรรมเหมือนกัน	[7], [8], [12], [10], [13], [14], [16], [17]
เฟืองไม่มีการดัดแปลงรูปร่าง	[1] – [19]
พิจารณาการหมุนของเฟืองใกล้เคียงสภาวะหยุดนิ่ง	[1], [5], [6], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [15], [17], [19]
พิจารณาให้ฟันเฟืองตรงมีลักษณะคล้ายกับคานยื่น	[1], [5], [6], [9], [12], [13], [15], [17]

2.3 การหาค่าความแข็งแกร่งส่วนของทรงกระบอกเฟืองด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

การคำนวณหาค่าความแข็งแกร่งในส่วนที่เป็นทรงกระบอกเฟืองด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จะเริ่มจากการสร้างทรงกระบอกให้มีเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมฐานของเฟือง โดยเจาะรูตรงกลางให้เหมือนกันกับรูเพลลาของเฟือง เมื่อสร้างโมเดลทรงกระบอกได้แล้ว ขั้นตอนต่อไปคือ การตั้งค่าลักษณะของปัญหา การแบ่งเอลิเมนต์ของทรงกระบอก การตั้งค่าเงื่อนไขขอบเขต การให้ภาระที่กระทำกับทรงกระบอก การเก็บค่าการเสียรูปบนเส้นแนวแรงกระทำ และการหาค่าความแข็งแกร่งของทรงกระบอก รายละเอียดของแต่ละขั้นตอนเป็นดังต่อไปนี้

2.3.1 รูปร่างของทรงกระบอกที่ใช้คำนวณ

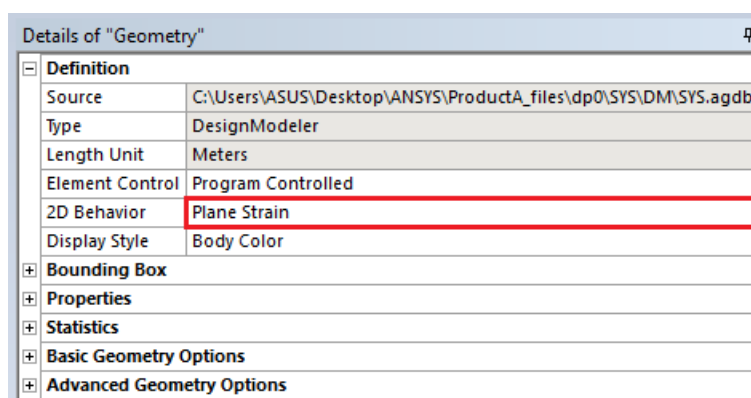
โมเดลในสองมิติของทรงกระบอกที่ใช้ในการคำนวณหาค่าความแข็งแกร่งแสดงดังรูปที่ 2.4 โดยมีรัศมีวงกลมด้านใน r_i เท่ากับรัศมีของรูเพลลาและรัศมีวงกลมด้านนอกเท่ากับรัศมีของวงกลมโคนฟัน (*Root radius* , R_{root})



รูปที่ 2.4 ลักษณะความแข็งแกร่งของทรงกระบอกเฟือง

2.3.2 การกำหนดลักษณะปัญหาของทรงกระบอก

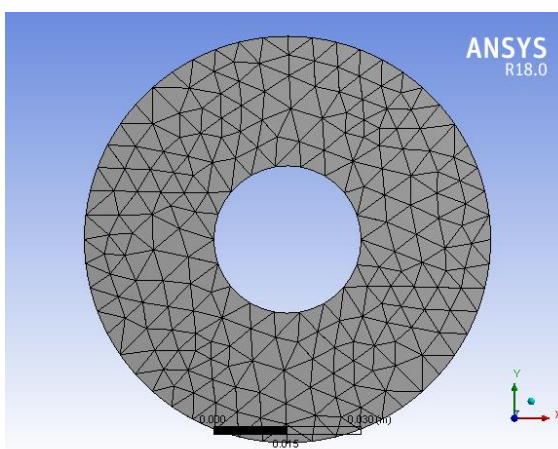
เนื่องจากการกระจายของแรงตลอดหน้าพื้นของคู่เฟืองตรงเป็นแบบสม่ำเสมอ ดังนั้นจึงตั้งค่าเพื่อกำหนดลักษณะปัญหาในการคำนวณหาค่าการเสียรูปของทรงกระบอกให้เป็นปัญหาแบบความเครียดในระนาบ (Plane Strain) ด้วย โดยพิจารณาว่าทรงกระบอกไม่มีการเสียรูปตามแนวแกนเพลาดังแสดงในรูปที่ 2.5 ซึ่งการตั้งค่าในลักษณะแบบนี้จะสามารถลดรูปของปัญหาทรงกระบอกจาก 3 มิติให้เหลือ 2 มิติ ทำให้ลดระยะเวลาในการคำนวณให้น้อยลงได้



รูปที่ 2.5 การตั้งค่าปัญหาแบบความเครียดในระนาบ (Plane Strain)

2.3.3 การแบ่งเอลิเมนต์ของทรงกระบอก

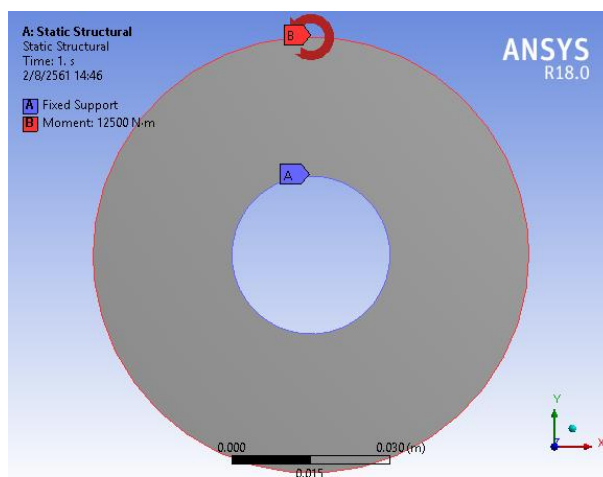
ในการแบ่งเอลิเมนต์ของวัสดุรูปทรงกระบอกจะใช้คำสั่ง Method → All Triangles ซึ่งหมายความว่าโปรแกรมจะแบ่งเอลิเมนต์ของทรงกระบอกเป็นรูปสามเหลี่ยมทั้งหมด และยังใช้คำสั่ง Body Sizing กำหนดขนาดเอลิเมนต์ให้มีความละเอียดมากขึ้นดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 การแบ่งเอลิเมนต์ของทรงกระบอกเฟือง

2.3.4 การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตและการให้ภาระกระทำกับทรงกระบอก

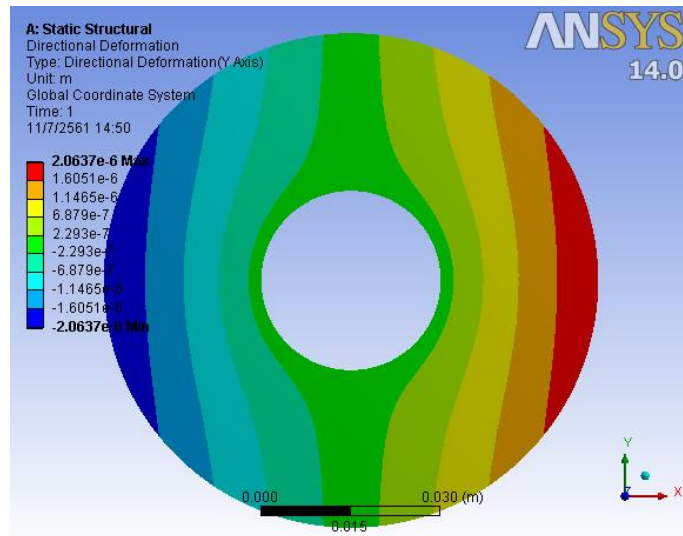
เนื่องจากพิจารณาให้เฟืองหมุนด้วยความเร็วต่ำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตและการให้ภาระจึงสามารถกำหนดให้การยึดที่ขอบด้านในของรูเพลลาเป็นแบบยึดแน่นได้โดยใช้คำสั่ง Fixed Support ที่ขอบของรูเพลลาในบริเวณ A และให้โมเมนต์กระทำที่ขอบด้านนอกของทรงกระบอกโดยใช้คำสั่ง Moment ในบริเวณ B ดังแสดงในรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7 การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตและการให้ภาระกระทำกับทรงกระบอกเฟือง

2.3.5 ผลลัพธ์และการเก็บค่าการเสียรูป (Result and Deformation)

เมื่อกำหนดเงื่อนไขขอบเขตและการให้ภาระที่กระทำกับทรงกระบอกเฟืองและคำนวณเรียบร้อยแล้ว ต่อไปจะเป็นการเรียกดูผลลัพธ์ค่าต่างๆ ที่เกิดขึ้นกับทรงกระบอกเฟือง เช่น ความเค้น ความเครียด ค่าการเสียรูป เป็นต้น โดยในงานวิจัยนี้จะเลือกเก็บค่าการเสียรูป (Deformation) เพื่อนำมาหาค่าความแข็งแรงของทรงกระบอกเฟือง โดยเก็บค่าการเสียรูปที่ขอบของทรงกระบอก ซึ่งในแบบที่สร้างในรูปที่ 2.8 คือในแนวแกน Y โดยใช้คำสั่ง Deformation Y axis และเก็บค่าการเสียรูปโดยเลือกค่าที่มีขนาดการเสียรูปสูงสุด (Maximum Deformation) จะเห็นได้ว่าการเสียรูปในบริเวณสีแดงและสีน้ำเงินซึ่งเป็นบริเวณขอบด้านนอกของทรงกระบอกเฟืองจะมีขนาดการเสียรูปมากที่สุด เนื่องจากเป็นบริเวณที่ใกล้กับภาระที่กระทำที่สุด



รูปที่ 2.8 การเสียรูปของทรงกระบอกเฟืองในทิศทางแกน Y

2.3.6 วิธีการคำนวณหาค่าความแข็งเกร็งของทรงกระบอก

แรงที่กระทำกับทรงกระบอกเฟืองในแนวสัมผัสผิวทรงกระบอกหาได้จากความสัมพันธ์ของโมเมนต์ที่กระทำกับทรงกระบอกเฟืองและรัศมีของทรงกระบอกเฟืองดังสมการ

$$F = \frac{M}{r} \quad (2.5)$$

โดยที่ F คือ แรงที่กระทำในแนวสัมผัสทรงกระบอกเฟือง (N)

M คือ โมเมนต์ที่กระทำกับทรงกระบอกเฟือง (Nm)

r คือ รัศมีของทรงกระบอกเฟือง (m)

ค่าความแข็งเกร็งของทรงกระบอกเฟือง หาได้จากความสัมพันธ์ของแรงและการเสียรูปดังสมการ

$$k = \frac{F}{\delta_c} \quad (2.6)$$

โดยที่ k คือ ความแข็งเกร็งของทรงกระบอกเฟือง (N/m)

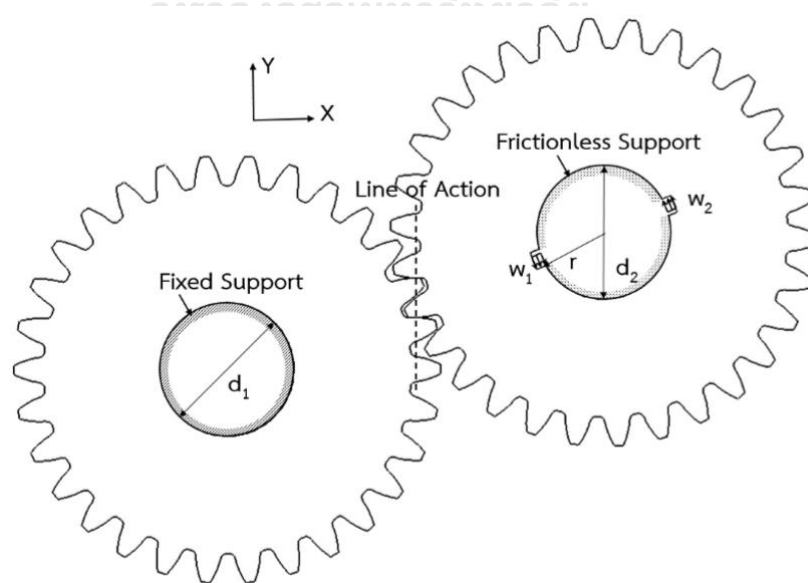
δ_c คือ ค่าการเสียรูปสูงสุดของทรงกระบอกเฟืองในทิศทางสัมผัสผิวทรงกระบอก (m)

2.4 การหาค่าความแข็งแรงของคู่เฟืองตรงด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ปัญหาการสัมผัสกันของฟันเฟืองเป็นปัญหาแบบเงื่อนไขขอบเขตไม่เชิงเส้น (Boundary Nonlinearity) จึงจำเป็นต้องใช้ระเบียบวิธีทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสันในการคำนวณผลลัพธ์ จนกว่าจะเกิดการลู่เข้าของแรง ดังนั้นระยะเวลาในการคำนวณ (Computational Time) จึงมากกว่าปัญหาเชิงเส้น (Linear Problem) แบบทั่วไป ซึ่งสมมติฐานบางอย่างของเฟืองตรงที่ได้ตั้งไว้ในหัวข้อที่ 2.2 จะสามารถช่วยลดระยะเวลาในการคำนวณลงและยังช่วยลดความซับซ้อนของปัญหาได้ ซึ่งรายละเอียดของสมมติฐานและประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับปัญหาการสัมผัสกันของคู่เฟืองตรงกล่าวได้ดังนี้

2.4.1 การจัดวางโมเดลของคู่เฟืองตรง

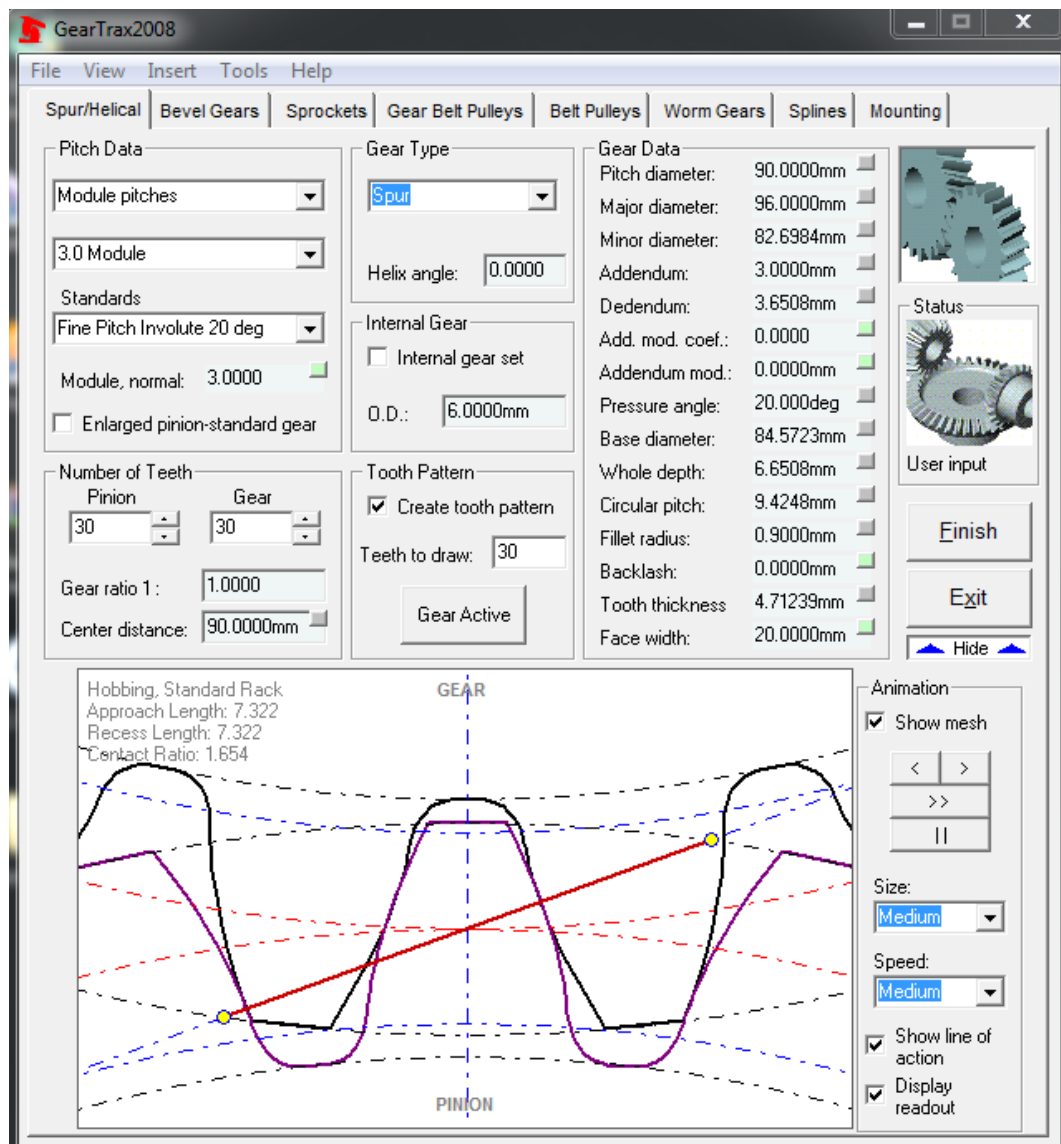
จากสมมติฐานการกระจายแรงตลอดหน้าฟันเป็นแบบสม่ำเสมอ จึงสามารถตั้งปัญหาที่จำลองการขบอัดกันของฟันเฟืองในสองมิติดังแสดงในรูปที่ 2.9 เพื่อวิเคราะห์หาค่าความแข็งแรงของเฟืองได้ โดยกำหนดให้เฟืองมีเส้นผ่านศูนย์กลางของรูเฟืองขับและรูเฟืองตาม $d_1 = d_2$ โดยการศึกษาได้จัดวางชุดเฟืองให้เส้นแนวแรงกระทำ (Line of Action) อยู่ในแนวตั้ง (ทิศทางตามแกน Y) การจัดวางให้อยู่ในทิศทางเช่นนี้จะทำให้ค่าการเสียรูปที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในทิศทาง Y อยู่ในทิศทางเดียวกับทิศทางเส้นแนวแรงกระทำตลอดเวลา เพื่อความสะดวกในการเก็บค่าและคำนวณหาค่าความแข็งแรง และง่ายต่อการนำไปวิเคราะห์ให้ใช้กับปัญหาอื่นๆ



รูปที่ 2.9 แผนภาพแสดงการจัดวางโมเดลของคู่เฟืองตรง

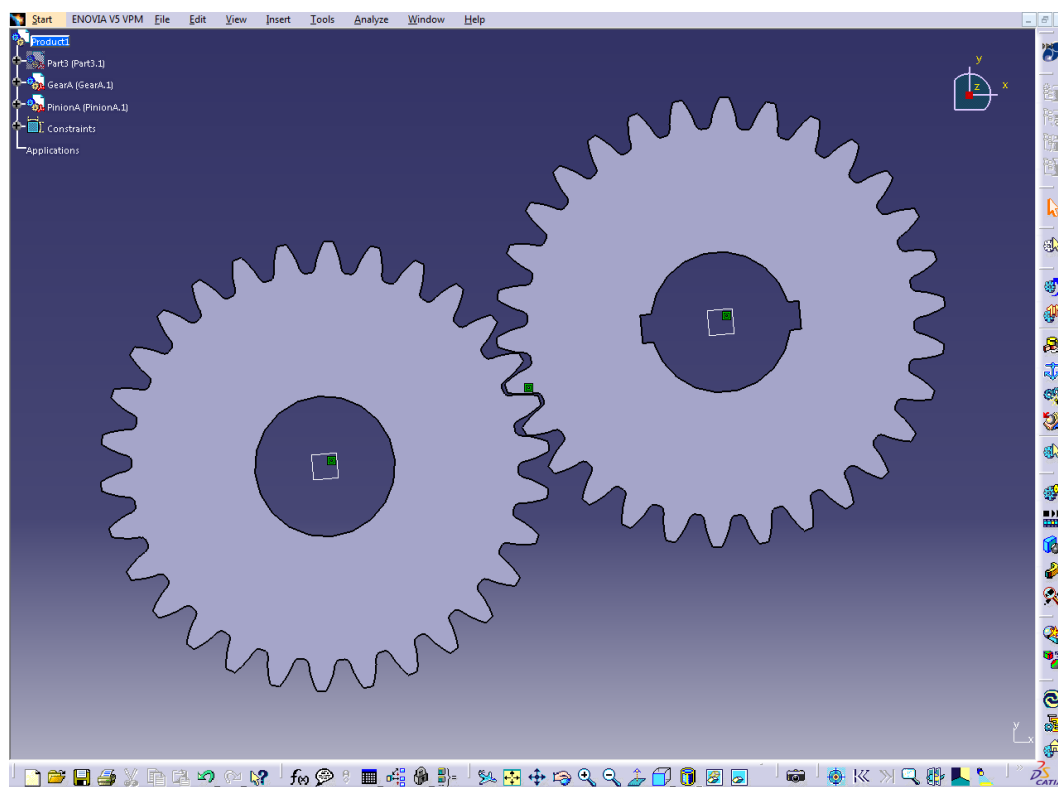
2.4.2 การสร้างและการประกอบโมเดลเฟืองตรงที่ตำแหน่งการขบต่างๆ

ในการศึกษาความแข็งแรงเกร็งของเฟืองตรงที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ของฟันเฟือง ณ ช่วงเวลาขณะใดขณะหนึ่ง (Quasi-Static) ทำได้โดยสร้างโมเดลจำลองการขบกันของฟันเฟืองที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ในการศึกษานี้จึงเลือกใช้โปรแกรมสำเร็จรูป GearTrax2008 ที่ใช้สำหรับสร้างโมเดลเฟืองโดยเฉพาะ โดยโปรแกรมห้สามารถสร้างโมเดลเฟืองที่สมจริงมีรูปร่างผิวเป็นโค้งอินโวลูต (Involute Curve) ดังแสดงในรูปที่ 2.10



รูปที่ 2.10 โปรแกรมสำเร็จรูปสำหรับสร้างโมเดลเฟือง GearTrax2008

เมื่อสร้างโมเดลเฟืองตรงเสร็จแล้วจึงนำมาประกอบ (Assembly) เพื่อจำลองการชกกันของฟันเฟืองที่ตำแหน่งการชกต่างๆ ด้วยโปรแกรมการออกแบบ CATIA ดังแสดงในรูปที่ 2.11 เมื่อกำหนดโมเดลเฟืองให้อยู่ในตำแหน่งการชกที่ต้องการแล้วจึงทำการบันทึกข้อมูลไฟล์เป็นสกุล .IGS และนำไปวิเคราะห์ต่อในโปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS ต่อไป



รูปที่ 2.11 การประกอบโมเดลของเฟืองตรงในโปรแกรมการออกแบบ CATIA

CHULALONGKORN UNIVERSITY

2.4.3 การกำหนดคุณสมบัติของวัสดุ (Material Properties)

ในโปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS นั้นมีฐานข้อมูลวัสดุต่างๆ ที่ใช้ในงานวิศวกรรมเป็นจำนวนมาก ในการตั้งค่าคุณสมบัติวัสดุสามารถทำได้ง่ายและสะดวกโดยการคลิกเลือกการวัสดุที่ตรงกับปัญหาที่จะพิจารณา ซึ่งในแต่ละรายการก็จะแสดงคุณสมบัติพื้นฐานของวัสดุไว้โดยสามารถพิมพ์เพื่อเปลี่ยนแปลงเป็นค่าที่ต้องการได้ภายในช่องหลัก B หรือเปลี่ยนเป็นหน่วยที่ต้องการได้ในช่องหลัก C ดังแสดงในรูปที่ 2.12 โดยในการศึกษานี้กำหนดให้เฟืองตรงมีคุณสมบัติของวัสดุเป็นเนื้อเดียวกัน (Homogeneous) ไอโซโทรปิก (Isotropic) คุณสมบัติยืดหยุ่น (Elastic) ตามกฎของฮุก และเลือกใช้วัสดุ Structural Steel ที่มีค่าอัตราส่วนปัวซอง 0.3 และค่ายังโมดูลัส 200 GPa

Outline of Schematic A2: Engineering Data				
	A	B	C	D
1	Contents of Engineering Data	source		Description
2	Material			
3	Structural Steel			Fatigue Data at zero mean stress comes from 1998 ASME BPV Code, Section 8, Div 2, Table 5-110.1
*	Click here to add a new material			

Properties of Outline Row 3: Structural Steel				
	A	B	C	D
1	Property	Value	Unit	
2	Density	7850	kg m ⁻³	
3	Isotropic Secant Coefficient of Thermal Expansion			
6	Isotropic Elasticity			
7	Derive from	Young's Modulus and Po...		
8	Young's Modulus	2E+11	Pa	
9	Poisson's Ratio	0.3		
10	Bulk Modulus	1.6667E+11	Pa	
11	Shear Modulus	7.6923E+10	Pa	
12	Alternating Stress Mean Stress	Tabular		
16	Strain-Life Parameters			
24	Tensile Yield Strength	2.5E+08	Pa	
25	Compressive Yield Strength	2.5E+08	Pa	
26	Tensile Ultimate Strength	4.6E+08	Pa	
27	Compressive Ultimate Strength	0	Pa	

รูปที่ 2.12 คุณสมบัติทางวิศวกรรมของ Structural Steel

2.4.4 การเลือกลักษณะการสัมผัส (Connections Contact)

ปัญหาของแข็งที่อยู่ในสมดุลส่วนใหญ่มักจะเป็นในลักษณะวัตถุขึ้นเดียวที่วางอยู่บนจุดรองรับหรือถูกยึดติดแล้วมีแรงภายนอกกระทำ แต่ถ้าพิจารณาเป็นระบบของวัตถุที่มีการสัมผัสกัน คำสั่งพวกนี้ถึงจะปรากฏขึ้น โดยผู้ใช้งานสามารถเลือกว่าวัตถุใดเป็นวัตถุที่เข้าชนและวัตถุที่ถูกชน นอกจากนี้ยังสามารถเลือกได้ว่าลักษณะการสัมผัสของผิววัตถุเป็นไปในลักษณะใดซึ่งรายละเอียดของแต่ละผิวสัมผัสสามารถกล่าวได้ดังนี้

Bonded	กำหนดให้ผิวสัมผัสของชิ้นส่วนที่ประกบกันเชื่อมติดกัน และไม่สามารถแยกจากกันหรือทับซ้อนกันได้
No Separation	กำหนดให้ผิวสัมผัสของชิ้นส่วนสามารถเลื่อนไถลได้ แต่ไม่สามารถแยกออกจากกันหรือทับซ้อนกันได้
Rough	กำหนดให้ผิวสัมผัสของชิ้นส่วนสามารถแยกออกจากกันได้แต่ไม่สามารถเลื่อนไถลได้
Frictionless	กำหนดให้ผิวสัมผัสของชิ้นส่วนสามารถแยกออกจากกันหรือเลื่อนไถลได้ แต่ไม่ทับซ้อนกัน

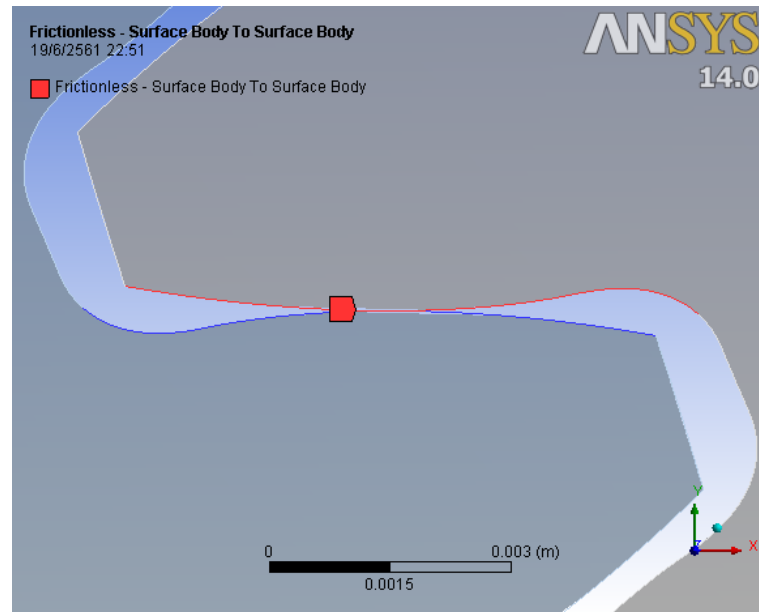
Frictional กำหนดให้ผิวสัมผัสของชิ้นส่วนสามารถแยกออกจากกันหรือเลื่อนไถลได้ถ้ามีแรงกระทำมากกว่าแรงเสียดทานสถิต

โดยการกำหนดรูปแบบลักษณะการสัมผัสแบบ Bonded และ No Separation ที่กำหนดให้ผิวสัมผัสเชื่อมติดกันจะทำให้พฤติกรรมโครงสร้างของวัตถุเป็นแบบเชิงเส้น (Linear) ส่วนในกรณีการสัมผัสอื่นๆ ที่ได้กล่าวมานอกเหนือจาก 2 ลักษณะนี้ พฤติกรรมโครงสร้างของวัตถุจะเป็นแบบไม่เชิงเส้น (Non-linear) ซึ่งลักษณะของแต่ละผิวสัมผัสตามที่ได้กล่าวไว้ สามารถเขียนสรุปดังตารางที่ 2.2 โดยกรณีผิวสัมผัสที่ถูกเชื่อมติดกันไม่สามารถแยกออกจากกันได้ หมายถึงช่องว่างระหว่างชิ้นส่วนปิด ส่วนกรณีที่ผิวสามารถแยกออกจากกันได้หมายถึงช่องว่างเปิด

ตารางที่ 2.2 ชนิดและพฤติกรรมของลักษณะการสัมผัสในแบบต่างๆ

ลักษณะการสัมผัส	ช่องว่างระหว่างชิ้นงาน	ความสามารถการเลื่อนไถล
Bonded	ปิด	ไม่สามารถ
No Separation	ปิด	สามารถ , $\mu = 0$
Rough	เปิด	ไม่สามารถ , $\mu = 0$
Frictionless	เปิด	สามารถ , $\mu = 0$
Frictional	เปิด	สามารถ , ถ้า $F_{Sliding} > F_{Friction}$

เพื่อจำลองปัญหาพื้นเฟืองที่ถูกขบอัดกัน ณ เวลาใกล้เคียงสภาวะหยุดนิ่ง โดยไม่พิจารณาผลของแรงเสียดทาน ในงานวิจัยนี้จึงได้เลือกให้ผิวสัมผัสบนหน้าฟันเฟืองเป็นแบบ Frictionless ซึ่งแสดงว่าผิวสัมผัสของชิ้นส่วนสามารถแยกออกจากกันหรือเลื่อนไถลได้ แต่ไม่ทับซ้อนกัน ดังแสดงในรูปที่ 2.13 โดยเส้นสีแดงแสดงถึงวัตถุที่เข้าชน และเส้นสีน้ำเงินแสดงถึงวัตถุที่ถูกชน



รูปที่ 2.13 การกำหนดลักษณะการสัมผัส

เพื่อจัดให้โมเดลเฟืองทั้งคู่สัมผัสกันพอดี จึงเลือกให้โปรแกรมปรับโมเดลให้เกิดการสัมผัสโดยใช้คำสั่ง Adjust to Touch และเนื่องจากปัญหาการสัมผัสของฟันเฟืองเป็นปัญหาแบบไม่เชิงเส้น ดังนั้นจึงต้องตั้งให้โปรแกรมมีการคำนวณซ้ำโดยใช้คำสั่ง Update Stiffness – Each Iteration และคำสั่งอื่นๆ ตั้งค่าตามรูปที่ 2.14

Details of "Frictionless - Surface Body To Surface Body"	
Scope	
Scoping Method	Geometry Selection
Contact	25 Edges
Target	25 Edges
Contact Bodies	Surface Body
Target Bodies	Surface Body
Definition	
Type	Frictionless
Scope Mode	Manual
Behavior	Asymmetric
Suppressed	No
Advanced	
Formulation	Augmented Lagrange
Detection Method	Nodal-Projected Normal From Contact
Interface Treatment	Adjust to Touch
Normal Stiffness	Manual
Normal Stiffness Factor	1.
Update Stiffness	Each Iteration
Stabilization Damping Factor	0.
Pinball Region	Program Controlled
Time Step Controls	None

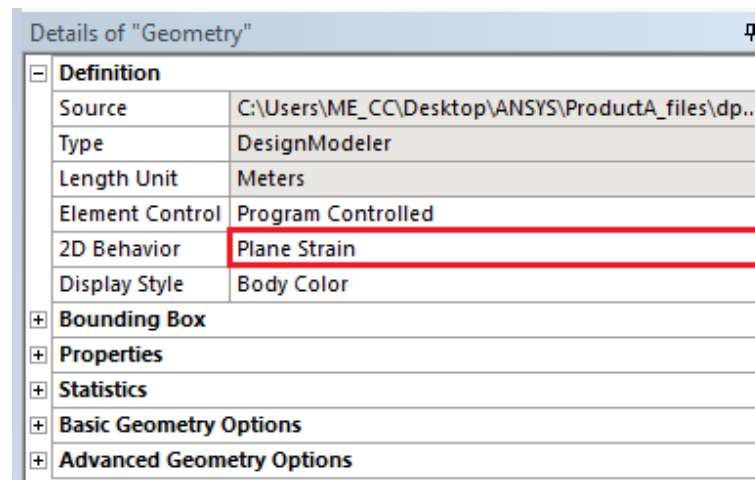
รูปที่ 2.14 การตั้งค่าโปรแกรมการเลือกลักษณะการสัมผัส

2.4.5 การแบ่งเอลิเมนต์ (Discretization)

หนึ่งในขั้นตอนของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สำคัญคือขั้นตอนการแบ่งเอลิเมนต์ ซึ่งในโปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS จะดำเนินการแบ่งเอลิเมนต์ให้โดยอัตโนมัติเมื่อกดปุ่ม Mesh → Generate Mesh ยกตัวอย่างเช่น ถ้าปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์เป็นปัญหาในสองมิติ โปรแกรมจะพยายามแบ่งโมเดลปัญหาเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมให้โดยอัตโนมัติ หรือถ้าโมเดลปัญหานั้นนำมาวิเคราะห์ มีรูปร่างซับซ้อนไม่สามารถแบ่งเอลิเมนต์ในลักษณะดังกล่าวได้ โปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS จะแบ่งเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแทน ซึ่งในโปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS ผู้ใช้สามารถควบคุมลักษณะการแบ่งเอลิเมนต์ได้พอสมควร โดยกดปุ่ม Mesh Control ก็จะมีตัวเลือกขึ้นมาให้ จากนั้นก็เลือกปรับได้ตามต้องการ โดยทางเลือกในการควบคุมการแบ่งเอลิเมนต์ที่น่าสนใจ กล่าวพอสังเขปได้ดังนี้

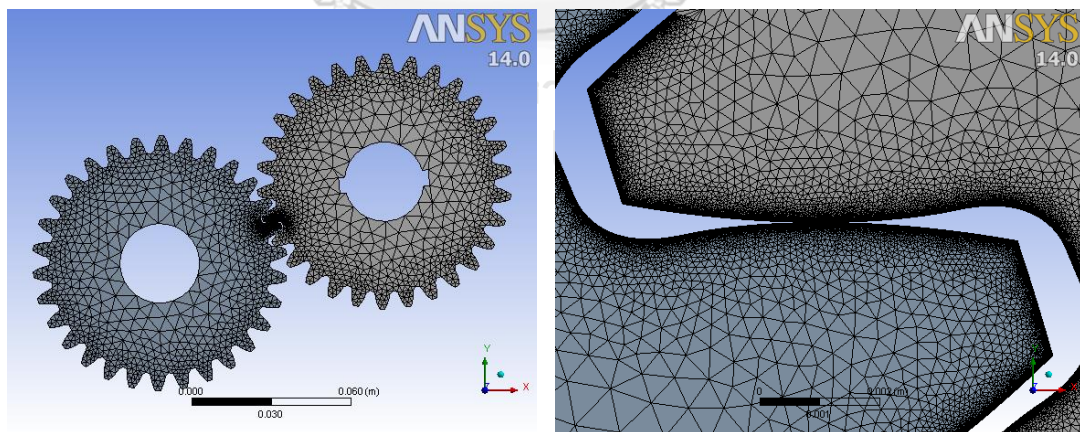
Method	กำหนดว่าจะให้โปรแกรมแบ่งเอลิเมนต์รูปแบบไหน เช่น ทรงหกหน้า, ทรงสี่หน้า, ทรงปริซึม ในกรณี 3 มิติ หรือ เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมหรือสามเหลี่ยมในกรณี 2 มิติ
Sizing	กำหนดขนาดของ Element บริเวณที่เลือก โดยอาจเลือกทั้งวัตถุหรือหรือเส้นก็ได้
Contact Sizing	กำหนดขนาดของ Element เฉพาะบริเวณผิวสัมผัส
Refinement	กำหนดให้แบ่ง Element ให้มีความละเอียดมากขึ้นบริเวณที่เลือกอัตโนมัติ
Inflation	กำหนดให้แบ่ง Element โดยสามารถขยายตัวตามรูปร่างของโมเดลจริงได้

เนื่องจากการศึกษานี้ได้ตั้งสมมุติฐานให้การกระจายแรงตลอดหน้าพื้นของเฟืองตรงเป็นแบบสม่ำเสมอ จึงสามารถสรุปปัญหาการสัมผัสกันของฟันเฟืองเป็นปัญหาความเครียดในระนาบ (Plain Strain) ในแบบสองมิติดังแสดงในรูปที่ 2.15 เนื่องจากเฟืองมีรูปร่างซับซ้อนและมีขนาดของเอลิเมนต์ในแต่ละพื้นที่ของโมเดลแตกต่างกัน ทำให้การแบ่งเอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมไม่สามารถกระทำได้ตามนั้นในที่นี้จึงได้แบ่งเอลิเมนต์เป็นเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมสามจุดต่อแบบ Plain Strain โดยใช้คำสั่ง Method



รูปที่ 2.15 การกำหนดโมเดลเป็นปัญหาความเครียดในระนาบ Plain Strain

การแบ่งเอลิเมนต์ของคู่เฟืองตรงจะแบ่งแบบ All Triangles ทำให้เอลิเมนต์เป็นรูปสามเหลี่ยมทั้งหมดดังรูปที่ 2.16ก และเพื่อเพิ่มความละเอียดในการคำนวณจะเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ในส่วนที่สัมผัสกันของฟันเฟืองให้มากขึ้น โดยในตัวอย่างนี้กำหนดขนาดเอลิเมนต์ตรงบริเวณผิวที่ฟันเฟืองสัมผัสกันมีขนาดประมาณ 5×10^{-6} m ซึ่งถือว่าเพียงพอกับขนาดของเฟืองในตัวอย่างนี้ โดยในตัวอย่างนี้จะใช้ชุดเฟืองที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางพิตซ์ 90 mm ดังแสดงในรูปที่ 2.16ข



(ก)

(ข)

(ก) เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมทั้งหมดของคู่เฟือง

(ข) เอลิเมนต์บริเวณผิวที่ฟันเฟืองสัมผัสกัน

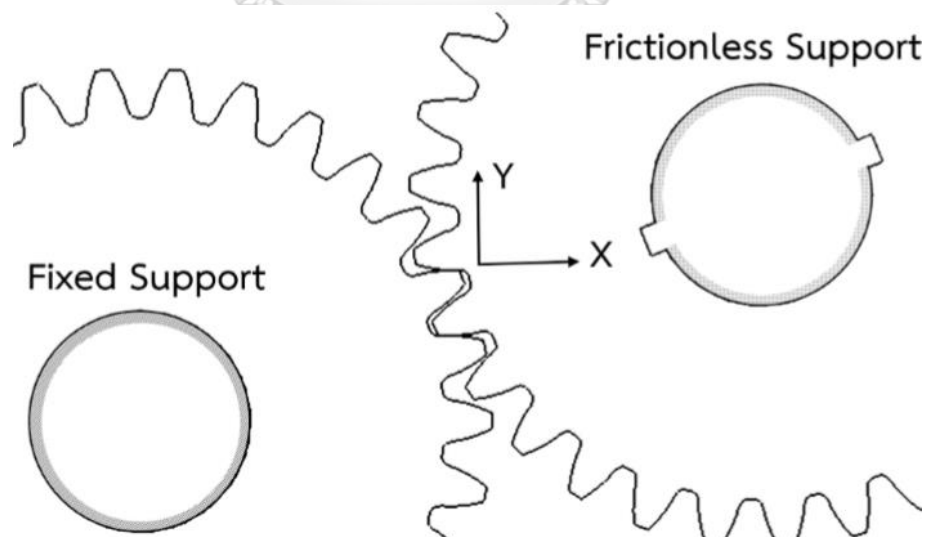
รูปที่ 2.16 การแบ่งเอลิเมนต์แบบรูปสามเหลี่ยม

2.4.6 การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา (Boundary Conditions)

ในการแก้ปัญหาของแข็งที่มีความจำเป็นต้องกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ซึ่งการกำหนดจุดรองรับวัตถุก็เป็นรูปแบบหนึ่งโดยกำหนดค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อ (Node) ในระบบสมการรวม รูปแบบจุดรองรับที่สามารถเลือกได้ กล่าวได้พอสังเขปดังนี้

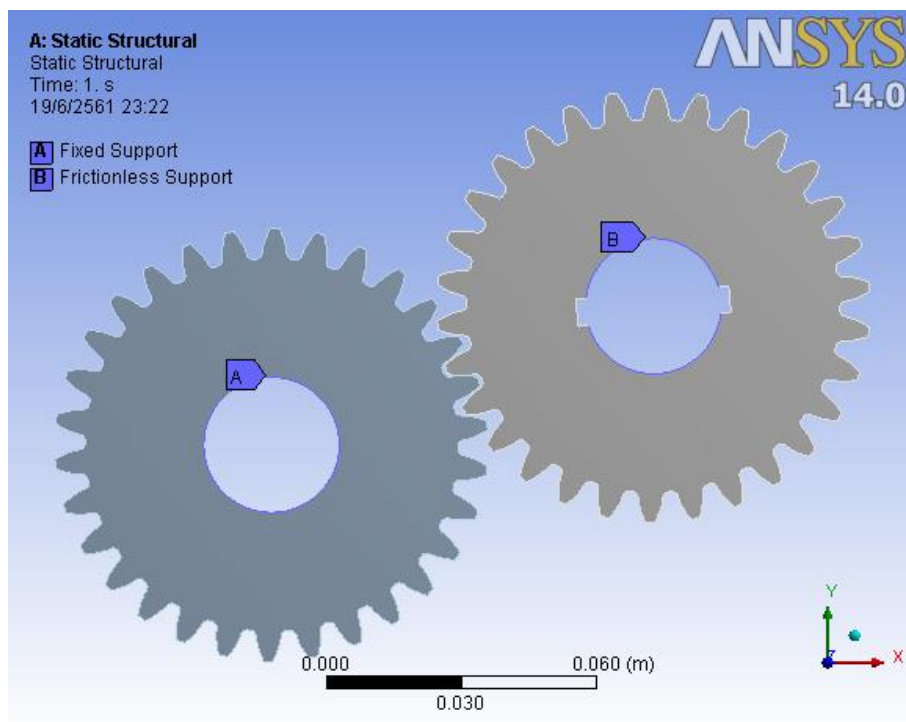
Fixed Support	กำหนดบริเวณที่เลือกไม่สามารถเคลื่อนที่ได้ทุกองศาอิสระ
Displacement	กำหนดให้บริเวณที่เลือกไม่สามารถเคลื่อนที่ได้ในองศาอิสระที่เลือก
Frictionless Support	กำหนดให้บริเวณที่เลือกไม่สามารถเคลื่อนที่ได้ในแนวตั้งฉากกับพื้นผิว

ในปัญหานี้ เพื่อจำลองการขบอัดกันของฟันเฟืองตรงจึงกำหนด Frictionless Support ที่ขอบรูปเฟลาของเฟืองขับ (เฟืองด้านขวา) ยกเว้นในบริเวณร่องลิ้นทั้งสอง ซึ่งจะทำให้บริเวณที่กำหนดไม่สามารถเคลื่อนที่ในทิศทางรัศมีแกนเฟลา แต่เคลื่อนที่ในทิศทางเส้นสัมผัสกับขอบของรูปเฟลาได้ และเนื่องจากเฟืองหมุนด้วยความเร็วต่ำ จึงกำหนด Fixed Support ที่ขอบรูปเฟลาของเฟืองตาม (เฟืองด้านซ้าย) ซึ่งทำให้บริเวณที่กำหนดนั้นไม่สามารถเคลื่อนที่ในทิศทางใดๆ ได้ดังแสดงรูปขยายเน้นส่วนจุดรองรับของปัญหาในรูปที่ 2.17



รูปที่ 2.17 จุดรองรับที่กำหนดในปัญหา

เพื่อกำหนดจุดรองรับปัญหาการสัมผัสกันของเฟืองในโปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS ในที่นี้จึงกำหนดจุดรองรับตามปัญหาดังกล่าวโดยติดตั้งจุดรองรับแบบ Fixed Support (แถบ A) ที่ผิวรูเพลลาของเฟืองตาม และกำหนดจุดรองรับแบบ Frictionless Support (แถบ B) ที่ผิวรูเพลลาของเฟืองขัวยกเว้นในบริเวณร่องลิ้นทั้งสอง โดยแสดงขอบที่กำหนดจุดรองรับตามที่กล่าว โดยแสดงเน้นเป็นเส้นสีม่วงดังรูปที่ 2.18



รูปที่ 2.18 การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาเฟืองตรง

2.4.7 การเลือกรูปแบบภาระ (Loads)

การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตนอกจากรูปแบบรองรับแล้ว อีกวิธีที่เหลือก็คือการกำหนดรูปแบบภาระ รูปแบบภาระที่สามารถกำหนดได้ในโปรแกรม สามารถกล่าวได้พอสังเขปดังนี้

Pressure	กำหนดให้บริเวณที่เลือกมีความดันกระทำ
Force	กำหนดให้บริเวณที่เลือกถูกแรงกระทำ
Moment	กำหนดให้บริเวณที่เลือกมีโมเมนต์กระทำ

เนื่องจากในการศึกษาการสัมผัสกันของเฟืองตรงได้พิจารณาให้เป็นปัญหาแบบสองมิติ ดังนั้นในที่นี้จึงได้ใส่แรงต่อหนึ่งหน่วยความยาวที่มีขนาดสมมูลกับแรงบิดที่ตำแหน่งร่องลิ้นทั้งสองของเฟือง

ตาม การใส่แรงของปัญหาแสดงในรูปที่ 2.19ก โดยแรงกระจายที่ใส่มีขนาดเท่ากันคือ w_1 และ w_2 ที่ขอบของร่องลึมหันทั้งสอง ซึ่งมีระยะจากแกนรูปเพลลาของเฟืองขับถึงตำแหน่งกึ่งกลางของร่องลึมหัน r การคำนวณแรงที่ใส่แสดงได้ดังต่อไปนี้

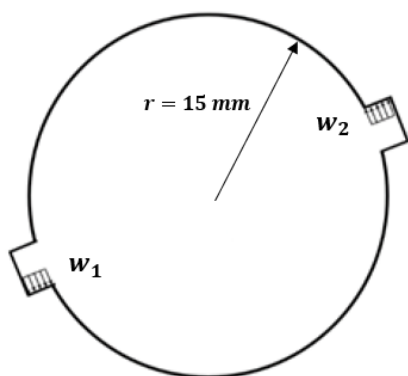
กำหนดให้เฟืองขับมีแรงบิด 250 N-m กระทำ แรงบิดนี้มีค่าเทียบเท่ากับผลคูณของแรงสมมูลที่กระทำที่ร่องลึมหันกับระยะห่างระหว่างแรงทั้งสอง ซึ่งวัดจากกึ่งกลางของร่องลึมหันหนึ่งไปยังอีกร่องลึมหันหนึ่ง ซึ่งสำหรับเฟืองในรูปที่ 2.19ก ระยะนี้เท่ากับ 32 mm จากความสัมพันธ์นี้จะสามารถหาขนาดแรงสมมูลได้จากสมการ

$$F = \frac{\tau}{r} = \frac{250 \text{ N}\cdot\text{m}}{32 \times 10^{-3} \text{ m}} = 7812.5 \text{ N}$$

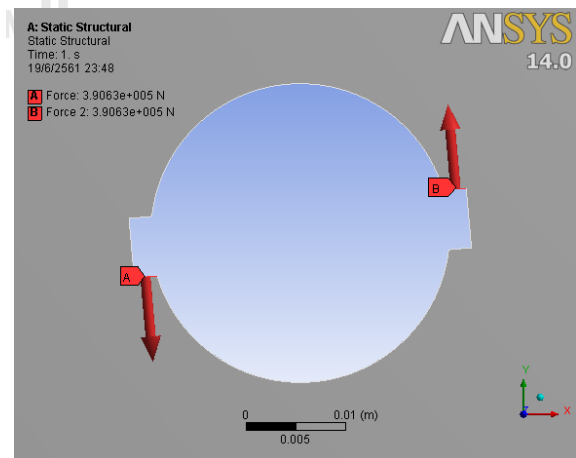
แรงสมมูลที่คำนวณข้างต้น เป็นแรงรวมที่กระทำบนพื้นที่รับแรงของร่องลึมหัน เนื่องจากพิจารณาปัญหาเป็นแบบ 2 มิติ ทำให้แรงที่ใส่เข้าไปในโปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS เป็นแรงต่อความยาวร่องลึมหัน ซึ่งคำนวณได้จากการนำเอาแรงสมมูลหารด้วยความกว้างหน้าฟันของเฟือง หากสมมติให้ความกว้างหน้าฟันมีค่า 20 mm จะสามารถคำนวณได้จากสมการ

$$w_1 = w_2 = \frac{7812.5 \text{ N}}{20 \times 10^{-3} \text{ m}} = 390625 \text{ N/m}$$

แรงต่อความยาวที่คำนวณได้จะถูกใส่ลงในโปรแกรมด้วยคำสั่ง Force ที่ตำแหน่งขอบของร่องลึมหันของเฟืองขับ (แถบ C และ D) ดังแสดงขอบผิวที่ใส่แรงกระทำโดยเน้นขอบด้วยเส้นหนาในรูปที่ 2.19ข



(ก) การให้แรงกระจายบนร่องลึมหัน

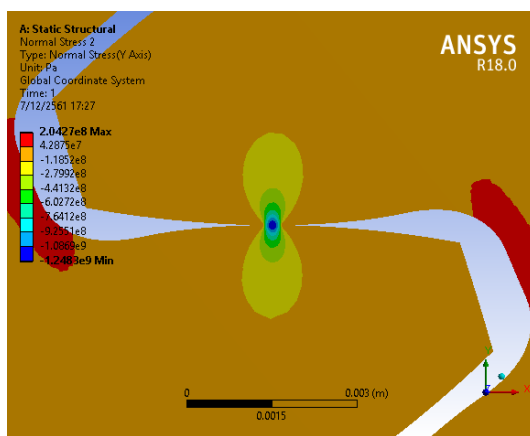


(ข) การให้แรงกระจายบนร่องลึมหันในโปรแกรม

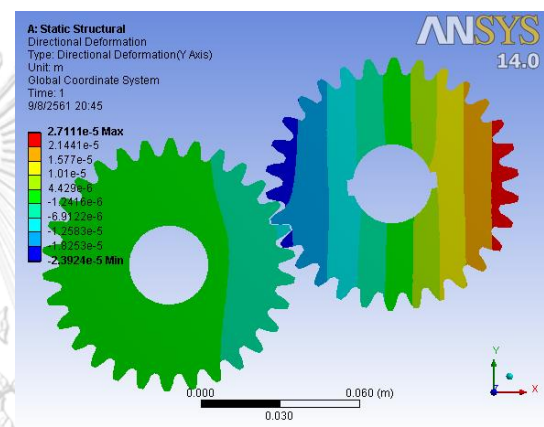
รูปที่ 2.19 แรงกระจายบนขอบร่องลึมหันทั้งสองที่กำหนดในปัญหา

2.4.8 การเรียกดูผลลัพธ์การเสียรูป (Results)

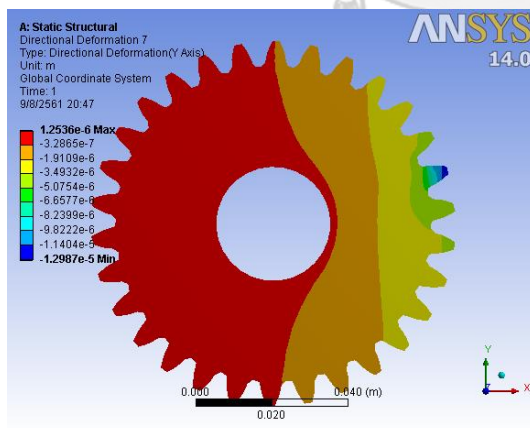
เมื่อคำนวณด้วยโปรแกรมเสร็จสิ้นแล้วจะสามารถเรียกดูผลลัพธ์ต่างๆ ได้แก่ ความเค้น ความเครียด หรือการเสียรูปในทิศทางต่างๆ ได้ ในการคำนวณค่าความแข็งเกร็งของเฟืองจะต้องเก็บค่าการเสียรูปในแนวเส้นแรงกระทำ ซึ่งตรงกับแนวแกน Y พอดี โดยแสดงผลการคำนวณความเค้นรวมในแนวแกน Y บนพื้นที่สัมผัส ซึ่งมีค่าเท่ากับแรงในแนว line of action ดังรูปที่ 2.20(ก) และการเสียรูปของเฟืองดังรูปที่ 2.20(ข)-2.20(ง) บริเวณสีน้ำเงินในรูปซึ่งเกิดที่พื้นของเฟืองขับเป็นตำแหน่งที่มีการเสียรูปมากที่สุด ส่วนบริเวณสีแดงมีการเสียรูปน้อยที่สุด



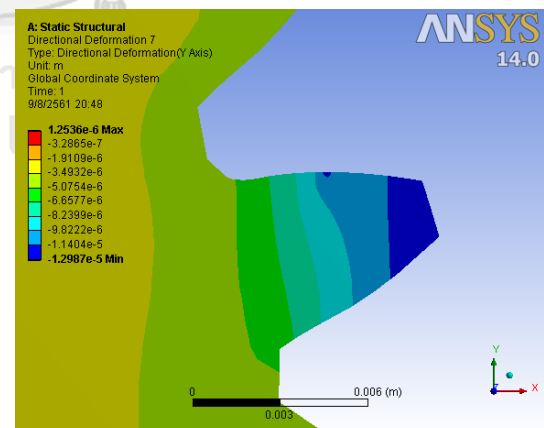
(ก) ความเค้นในแนว line of action



(ข) การเสียรูปของคู่เฟือง



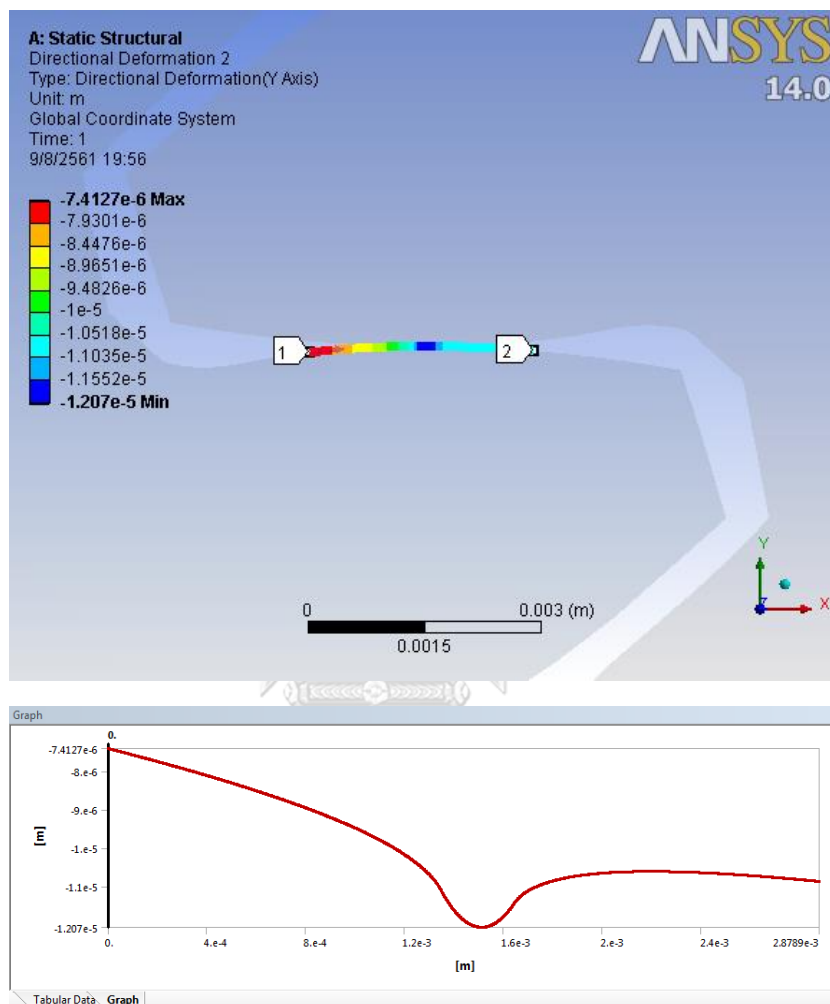
(ค) การเสียรูปของเฟืองตาม



(ง) การเสียรูปของพื้นเฟืองตาม

รูปที่ 2.20 ผลลัพธ์ความเค้นและการเสียรูปของเฟืองในรูปของเฉดสี

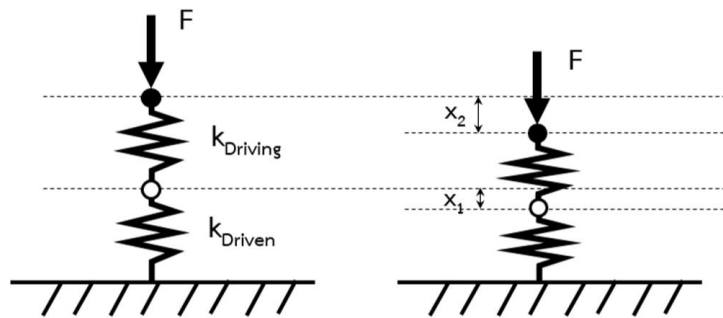
รูปที่ 2.21 แสดงค่าการเสียรูปในแนวแกน Y ของบริเวณที่พื้นเฟืองสัมผัสกัน จากจุดที่ 1 ถึงจุดที่ 2 โดยตัวอย่างในรูปแบบแสดงค่าการเสียรูปมากที่สุด 1.207×10^{-5} m ค่านี้จะนำไปคำนวณหาค่าความแข็งแรงในหัวข้อถัดไป



รูปที่ 2.21 การเสียรูปบริเวณขอบที่เกิดการสัมผัสและค่าการเสียรูปตามแนวแกน Y

2.4.9 วิธีการหาค่าความแข็งแรงของคู่เฟืองตรงกรณีพื้นเฟืองขบกัน 1 คู่

ค่าการเสียรูปที่อ่านได้จากโปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS เป็นการเสียรูปของเฟืองแค่ตัวเดียวเท่านั้น ดังนั้นค่าความแข็งแรงที่คำนวณได้จึงเป็นของเฟืองขับหรือตามตัวใดตัวหนึ่งเท่านั้น อย่างไรก็ตามในการขบกันของคู่เฟือง เฟืองทั้งคู่จะมีการเสียรูป ค่าความแข็งแรงของคู่พื้นเฟืองจึงต้องเป็นผลรวมของความแข็งแรงของทั้งเฟืองขับและเฟืองตาม ซึ่งอาจพิจารณาได้เช่นเดียวกับการต่อสปริงอนุกรมกันดังแสดงในรูปที่ 2.22



รูปที่ 2.22 โมเดลสปริงแสดงลักษณะการขบกันของเฟืองขับและเฟืองตาม

ค่าเคลื่อนตัวที่คำนวณออกมาได้เมื่อเทียบกับกรณีโมเดลสปริงคือค่า x_1 และ x_2 แต่เนื่องจากค่า x_2 เป็นผลจากการเสียรูปของทั้งสปริงขับและสปริงตาม ดังนั้นในการศึกษานี้จึงทำการอ่านค่าเคลื่อนตัวของสปริงตาม x_1 (ค่าเคลื่อนตัวของจุดสีขาว) ซึ่งเป็น ค่ายุบตัวของสปริงจริงๆ เพื่อคำนวณค่าความแข็งแรงของเฟืองตาม หลังจากนั้นจึงคำนวณค่าความแข็งแรงของคู่เฟืองขับและเฟืองตามโดยพิจารณาให้ค่าความแข็งแรงของเฟืองขับในตำแหน่งเดียวกันกับเฟืองตามมีค่าเท่ากับค่าความแข็งแรงของเฟืองตาม เนื่องจากในที่นี้กำหนดให้เฟืองมีอัตราทด 1 : 1 เฟืองขับจึงมีขนาดเท่ากับเฟืองตาม โดยการคำนวณจะตั้งค่าโปรแกรมให้เกิดการสัมผัสเพียงแค่นั้นคู่ฟัน และทำการเก็บค่าความแข็งแรงของเฟืองตามตั้งแต่เริ่มการขบจนกระทั่งสิ้นสุดการขบ

ค่าการเสียรูปตามแนวแกน $Y(x)$ อ่านได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จะนำมาหาค่าความแข็งแรง (k) ได้ดังสมการ

$$k_{Driven} = \frac{F}{x_1} \quad (2.7)$$

โดยที่ x_1 คือ ขนาดของค่าเคลื่อนตัวที่ผิวสัมผัสของเฟืองตามในแนวแกน Y ที่อ่านค่าได้จากโปรแกรม ANSYS (m)

F คือ ขนาดของแรงที่สมมูลกับแรงบิดที่กระทำกับชุดเฟืองในแนว LOA (N)

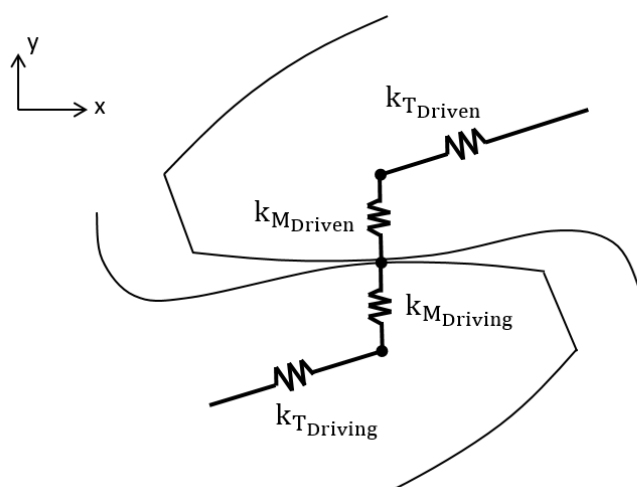
จากขั้นตอนดังกล่าวสามารถหาค่าความแข็งแรงของเฟืองตาม k_{Driven} ได้ ค่านี้จะมีค่าเท่ากับค่าความแข็งแรงของเฟืองขับ $k_{Driving}$ ที่ตำแหน่งเดียวกันบนฟันเฟือง ค่าความแข็งแรงของคู่

เฟืองในทุกๆ ตำแหน่งการขบ ตั้งแต่ตำแหน่งเริ่มต้นขบ ซึ่งโคนของเฟืองขับจะสัมผัสกับปลายของเฟืองตาม จนถึงสิ้นสุดการขบเมื่อปลายฟันของเฟืองขับจะสัมผัสกับโคนฟันของเฟืองตาม สามารถหาได้จาก การต่ออนุกรมค่าความแข็งเกร็งของเฟืองขับและเฟืองตามดังสมการ

$$k_{Gear\ Pair} = \frac{k_{Driving} \times k_{Driven}}{k_{Driven} + k_{Driving}} \quad (2.8)$$

2.5 การหาค่าความแข็งเกร็งของคู่ฟันเฟือง

การหาค่าความแข็งเกร็งในหัวข้อที่แล้วเป็นการหาค่าความแข็งเกร็งของทั้งคู่เฟือง หากต้องการหาค่าความแข็งเกร็งเฉพาะคู่ฟันเฟืองก็สามารถหาได้โดยตัดความแข็งเกร็งในส่วนของทรงกระบอกเฟืองออก ทำให้เหลือความแข็งเกร็งในส่วนของฟันเฟือง 2 ส่วน คือ ความแข็งเกร็งเนื่องจากการสัมผัสกันของฟันเฟือง (k_M) และความแข็งเกร็งเนื่องจากการดัดโค้งของฟันเฟือง (k_T) ดังแสดงในรูปที่ 2.23



รูปที่ 2.23 ลักษณะความแข็งเกร็งของคู่ฟันเฟือง

ค่าความแข็งเกร็งของฟันเฟืองขับหรือเฟืองตามในกรณีที่ไม่คิดค่าความแข็งเกร็งจากการเสียดรูปของทรงกระบอกเฟือง (Cylinder Gear Stiffness) k_C สามารถหาได้จากสมการ

$$\frac{1}{k_{Tooth\ Driving\ or\ Driven}} = \frac{1}{k_{Driving\ or\ Driven}} - \frac{1}{k_C} \quad (2.9)$$

2.6 สรุป

บทนี้กล่าวถึงการหาความแข็งแรงในแต่ละส่วนของเฟืองตรงด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ได้แก่ ความแข็งแรงของทรงกระบอกเฟือง และความแข็งแรงของคู่เฟือง โดยเริ่มอธิบายจากการตั้งค่าต่างๆ ในโปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS เช่น การกำหนดลักษณะของปัญหา การตั้งสมมติฐาน การแบ่งเอลิเมนต์ การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา การให้ภาระกระทำ และการเรียกดูผลลัพธ์ ซึ่งการตั้งค่าเหล่านี้สามารถช่วยลดความซับซ้อนของปัญหาและช่วยลดระยะเวลาในการคำนวณลง สำหรับความแข็งแรงของคู่ฟันเฟืองสามารถหาได้จากสมการที่ (2.8) โดยใช้ค่าความแข็งแรงของคู่เฟืองและค่าความแข็งแรงของทรงกระบอกเฟือง



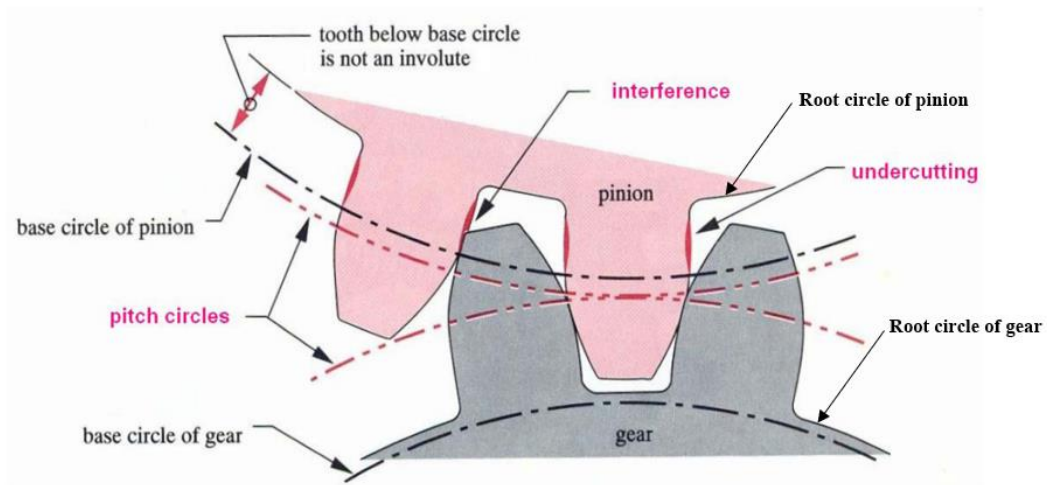
บทที่ 3

ผลการคำนวณหาค่าความแข็งแรงของเฟืองตรงจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ในบทนี้จะแสดงถึงผลการคำนวณค่าความแข็งแรงในส่วนทรงกระบอกเฟือง ค่าความแข็งแรงของคู่เฟือง และค่าความแข็งแรงของคู่ฟันเฟือง ซึ่งจะแสดงผลลัพธ์ในรูปแบบความสัมพันธ์ของผลพารามิเตอร์ทางเรขาคณิตของเฟืองต่อค่าความแข็งแรง ผลลัพธ์ที่ได้จากความสัมพันธ์ดังกล่าวจะนำไปใช้เป็นข้อมูลในการสร้างสมการอย่างง่ายเพื่อใช้คำนวณหาค่าความแข็งแรงของคู่เฟืองตรง ซึ่งจะอธิบายในบทต่อไป

3.1 พารามิเตอร์ของชุดเฟืองตรงที่ใช้ในการคำนวณ

ผลของพารามิเตอร์รูปร่างต่างๆ ต่อค่าความแข็งแรงของเฟือง ทราบได้โดยเปรียบเทียบค่าความแข็งแรงของชุดเฟืองที่มีพารามิเตอร์ต่างๆ กัน จำนวน 8 ชุด โดยชุดเฟืองทั้งหมดมีอัตราทด 1 : 1 ดังแสดงในตารางที่ 3.1 และรัศมีโคนฟันของเฟืองดังแสดงในรูปที่ 3.1 ซึ่งคำนวณได้จากโปรแกรมออกแบบเฟือง GearTrax2008 ผลของโมดูลต่อความแข็งแรงจะทราบได้จากการเปรียบเทียบชุดเฟือง A B C และ D ซึ่งมีค่าโมดูลต่างกันแต่พารามิเตอร์อื่นเท่ากัน ส่วนผลของมุมกดต่อความแข็งแรงจะทราบได้จากการเปรียบเทียบชุดเฟือง A E และ F ซึ่งมีมุมกดต่างกันแต่พารามิเตอร์อื่นมีค่าเท่ากัน และผลของจำนวนฟันต่อความแข็งแรงจะทราบได้จากการเปรียบเทียบชุดเฟือง B G และ H ซึ่งมีจำนวนฟันต่างกันแต่พารามิเตอร์อื่นมีค่าเท่ากัน นอกจากนี้ยังมีผลเปรียบเทียบความแข็งแรงในกรณีนี้ของเฟืองที่มีโมดูลต่างกันแต่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางพิตซ์เท่ากันโดยการเปรียบเทียบชุดเฟือง A กับชุดเฟือง G และชุดเฟือง B กับชุดเฟือง H



รูปที่ 3.1 พารามิเตอร์วงกลมพิตซ์ วงกลมฐาน และวงกลมโคนฟันของเฟืองตรง

3.2 ผลการคำนวณค่าความแข็งแรงของทรงกระบอกเฟือง

ผลการคำนวณค่าความแข็งแรงในส่วน of ทรงกระบอกเฟืองของชุดเฟืองต่างๆ จะกำหนดให้แรงกระทำที่ขอบของทรงกระบอกเฟืองทุกชุดมีค่าเท่ากัน ซึ่งทำให้แรงบิดที่กระทำกับเฟืองในแต่ละชุดจะมีค่าไม่เท่ากัน เนื่องจากทรงกระบอกเฟืองแต่ละชุดมีขนาดต่างกัน ในที่นี้จะยกตัวอย่างการคำนวณแรงที่กระทำของชุดเฟือง A ซึ่งมีรัศมีขอบด้านนอกของทรงกระบอกเฟืองเท่ากับ $r = 41.35 \text{ mm}$ และให้แรงบิดกระทำกับทรงกระบอกเฟือง A เท่ากับ 250 Nm โดยแรงกระทำที่ขอบด้านนอกของทรงกระบอกเฟืองสามารถคำนวณได้จากสมการ

$$F = \frac{\tau_A}{r_A} = \frac{250 \text{ Nm}}{41.35 \text{ mm}} = 5912.10 \text{ N}$$

โดยที่ τ_A คือ แรงบิดที่กระทำกับทรงกระบอกของชุดเฟือง A

r_A คือ รัศมีขอบด้านนอกของทรงกระบอกของชุดเฟือง A

เมื่อได้ค่าแรงที่กระทำกับทรงกระบอกเฟืองแล้ว สามารถคำนวณหาค่าความแข็งเกร็งของทรงกระบอกเฟืองจากความสัมพันธ์ของแรงและค่าการเสีรูปในแนวเส้นสัมผัสทรงกระบอกที่คำนวณได้จากโปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS จากสมการ

$$k_c = \frac{F}{\delta_c} \quad (3.1)$$

โดยที่ k_c คือ ค่าความแข็งเกร็งของทรงกระบอกเฟือง (N/m)

ค่าการเสีรูปของทรงกระบอกเฟืองของเฟืองและค่าความแข็งเกร็งของทรงกระบอกเฟืองของเฟืองแต่ละชุดเมื่อให้ภาระในแนวเส้นแรงกระทำ 5912.10 N เท่ากันทุกชุดดังตารางที่ 3.2

ตารางที่ 3.2 ค่าความแข็งเกร็งของทรงกระบอกเฟือง

Model	Root Radius (mm)	Deformation Y axis (μm)	Stiffness of Cylinder (MN/m)
A	41.35	2.02	2931.14
B	27.55	0.73	8149.00
C	55.15	3.82	1548.97
D	68.95	6.13	965.24
E	41.35	2.02	2931.14
F	41.25	2.01	2947.50
G	42.55	2.15	2745.98
H	57.55	4.20	1409.19

จะเห็นได้ว่าค่าการเสีรูปในแนวแกน Y ของทรงกระบอกเฟืองของชุดเฟืองที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางน้อยจะมีค่าน้อยกว่าค่าการเสีรูปของทรงกระบอกเฟืองของชุดเฟืองที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางมาก ส่งผลให้ค่าความแข็งเกร็งของทรงกระบอกเฟืองของชุดเฟืองที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางน้อยมีค่ามากกว่าค่าความแข็งเกร็งของทรงกระบอกเฟืองของชุดเฟืองที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางมาก

3.3 ผลการคำนวณค่าความแข็งแรงของคูเฟือง

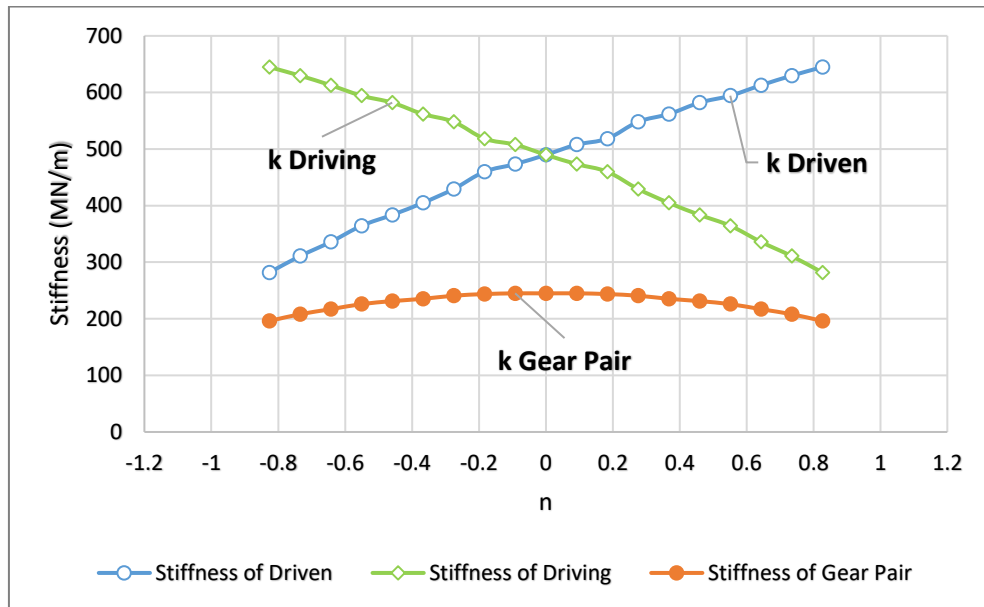
การคำนวณค่าความแข็งแรงของคูเฟืองของชุดเฟืองต่างๆ จะกำหนดให้แรงกระทำที่เส้นแนวแรงกระทำเท่ากันทุกชุดเฟืองโดยมีค่าเท่ากับ $5912.10 N$ เช่นเดียวกับค่าที่ใช้คำนวณในกรณีของทรงกระบอกเฟือง แต่การให้แรงบิดที่กระทำกับคูเฟืองในแต่ละชุดเฟืองจะมีค่าไม่เท่ากัน โดยรายละเอียดของผลทั้งหมดกล่าวได้ดังนี้

3.3.1 ผลการคำนวณค่าความแข็งแรงของคูเฟืองตรงกรณีฟันเฟืองขบกัน 1 คู่ฟัน

ผลการคำนวณค่าความแข็งแรงที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ของคูเฟือง A แสดงในรูปที่ 3.2 โดยตำแหน่งการขบ n ในรูปเป็นอัตราส่วนระหว่างระยะจากจุดสัมผัสถึงจุดพิตช์บนเส้นแนวแรงกระทำต่อระยะ base pitch ดังสมการ

$$n = \frac{\text{ระยะจากจุดสัมผัสถึงจุดพิตช์บนเส้นแนวแรงกระทำ}}{\text{base pitch}} \quad (3.2)$$

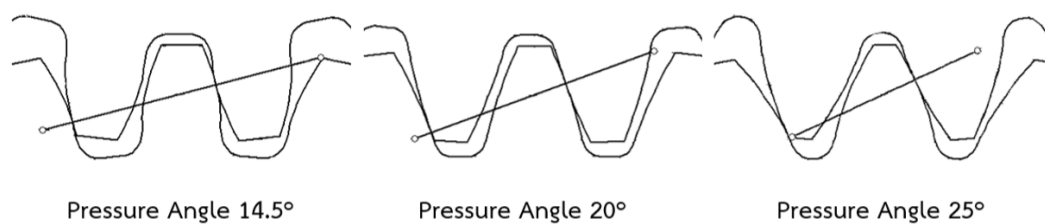
เมื่อได้ค่าการเสียรูปของเฟืองตามที่ได้คำนวณได้จากโปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS สามารถนำมาคำนวณหาค่าความแข็งแรงของเฟืองตาม โดยค่าความแข็งแรงของเฟืองตามตำแหน่งเริ่มขบจะมีค่าน้อยเนื่องจากตำแหน่งเริ่มขบจะขบที่ปลายฟันซึ่งมีความหนาน้อย ค่าความแข็งแรงจะมีค่าเพิ่มมากขึ้นเรื่อยๆ เนื่องจากความหนาของฟันส่วนที่ขบมีค่ามากขึ้นจนมีค่ามากที่สุดที่ตำแหน่งสิ้นสุดการขบที่โคนฟันของเฟืองตาม และเนื่องจากคูเฟืองมีอัตราทด 1 : 1 ค่าความแข็งแรงของเฟืองขับจะมีค่าเท่ากับค่าความแข็งแรงของเฟืองตามในตำแหน่งการขบเดียวกัน โดยเฟืองขับจะเริ่มสัมผัสที่โคนฟันและสิ้นสุดการขบที่ปลายฟัน ดังนั้น ลักษณะของกราฟความแข็งแรงของเฟืองขับและเฟืองตามจึงเหมือนกันเพียงแคกลับด้านเท่านั้น เมื่อนำค่าความแข็งแรงของเฟืองทั้ง 2 มาต่อกันแบบอนุกรมจะได้ค่าความแข็งแรงรวมของคูเฟืองดังแสดงด้วยเส้นกราฟที่มีจุดทึบในรูป



รูปที่ 3.2 ความแข็งเกร็งของเฟืองขับ เฟืองตาม และคู่เฟืองในตำแหน่งการขบต่างๆ

3.3.2 ผลของมุมกดต่อค่าความแข็งเกร็งของคู่เฟืองตรง

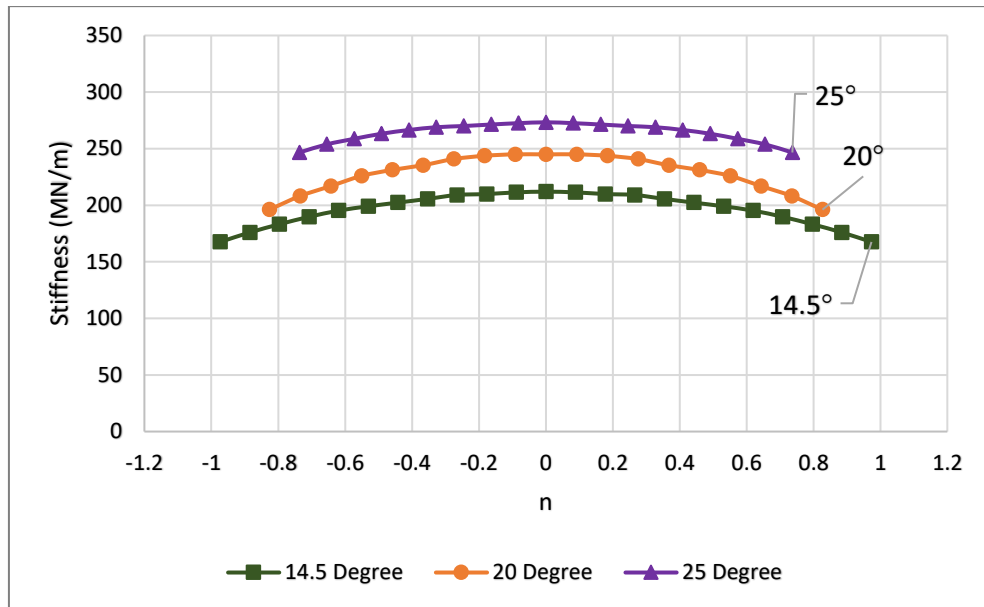
ค่าของมุมกดจะส่งผลต่อรูปร่างของเฟือง โดยเมื่อเฟืองมีมุมกดมากขึ้นซี่ฟันจะแหลมขึ้นดังแสดงในรูปที่ 3.3 และสำหรับผลของมุมกดสามารถทราบได้โดยเปรียบเทียบชุดเฟือง E A และ F ซึ่งมีมุมกด 14.5° , 20° และ 25° ตามลำดับ



รูปที่ 3.3 รูปร่างฟันเฟืองที่มีมุมกดค่าต่างๆ [13]

รูปที่ 3.4 แสดงค่าความแข็งเกร็งของคู่เฟืองที่มีมุมกดต่างๆ กัน โดยจะเห็นได้ว่าเฟืองที่มีมุมกดน้อยจะมีค่าความแข็งเกร็งน้อยกว่าเฟืองที่มีมุมกดมากกว่า ซึ่งสอดคล้องกับลักษณะของฟันเฟือง ที่ฟันของเฟืองที่มีมุมกดน้อยจะมีลักษณะรูปร่างเรียกว่าฟันของเฟืองที่มีมุมกดมาก สำหรับระยะการขบของคู่เฟืองแต่ละคู่จะแตกต่างกัน โดยคู่เฟืองที่มีมุมกดน้อยจะมีระยะการขบมากกว่าเฟืองที่มีมุมกด

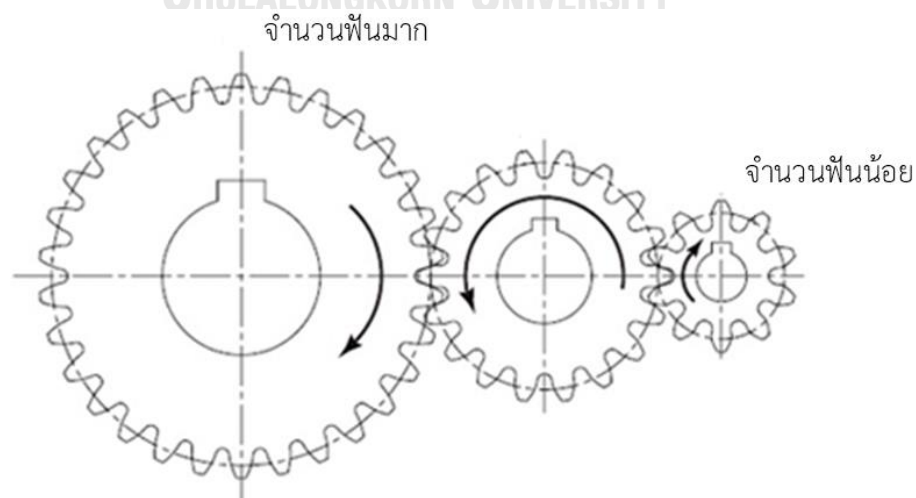
มาก ซึ่งสอดคล้องกับผลการศึกษาความแข็งแรงของเฟืองตรงที่มีมุมกดต่างกันของงานวิจัย H. Sachidananda [20]



รูปที่ 3.4 ค่าความแข็งแรงของคู่เฟืองที่มีมุมกดต่างกันที่ตำแหน่งการขบต่างๆ

3.3.3 ผลของจำนวนฟันต่อค่าความแข็งแรงของคู่เฟืองตรง

เฟืองตรงที่มีค่าโมดูลเท่ากันแต่มีจำนวนฟันต่างกัน จะมีเส้นผ่านศูนย์กลางของเฟืองต่างกัน โดยเฟืองที่มีจำนวนฟันมากกว่าก็จะมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางเฟืองใหญ่กว่า ส่วนเฟืองที่มีจำนวนฟันน้อยกว่าก็จะมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางเฟืองน้อยกว่าดังแสดงในรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5 เฟืองที่มีโมดูลเท่ากันแต่มีจำนวนฟันต่างกัน [21]

โดยความสัมพันธ์ของจำนวนฟันกับเส้นผ่านศูนย์กลางและโมดูลแสดงดังสมการ

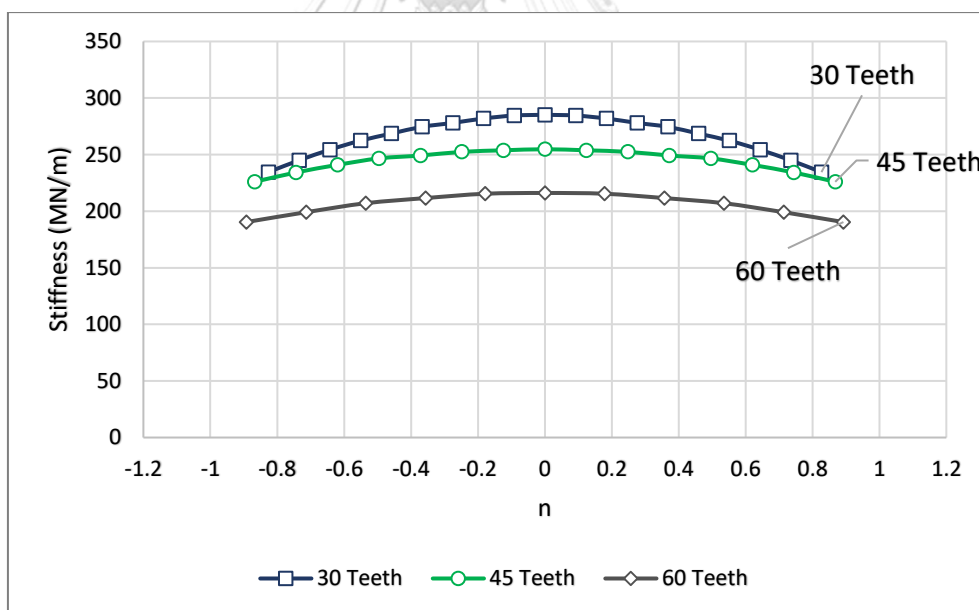
$$d = m \times z \quad (3.3)$$

โดย d คือ เส้นผ่านศูนย์กลางของเฟืองที่ตำแหน่งพิตช์

m คือ โมดูล

z คือ จำนวนฟัน

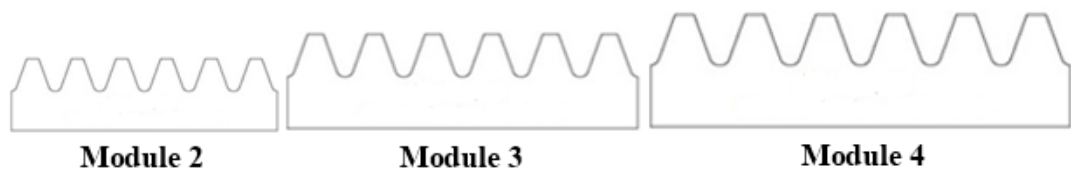
เมื่อเปรียบเทียบค่าความแข็งแรงของชุดเฟือง B G และ H ที่มีจำนวนฟันต่างกันแต่มีขนาดโมดูลและมุมกดเท่ากันดังแสดงในรูปที่ 3.6 พบว่าชุดเฟือง H ที่มีจำนวนฟันมากที่สุดจะมีค่าความแข็งแรงน้อยกว่าชุดเฟือง B และ G ที่มีจำนวนฟันน้อยกว่า และชุดเฟือง B ที่มีจำนวนฟันน้อยที่สุดจะมีค่าความแข็งแรงมากที่สุด ซึ่งสอดคล้องกับผลการศึกษาความแข็งแรงของเฟืองตรงที่มีจำนวนฟันต่างกันของงานวิจัย Y. Afework และ T. Tesfaye [6]



รูปที่ 3.6 ค่าความแข็งแรงของคู่เฟืองที่มีจำนวนฟันต่างกันที่ตำแหน่งการขบต่างๆ

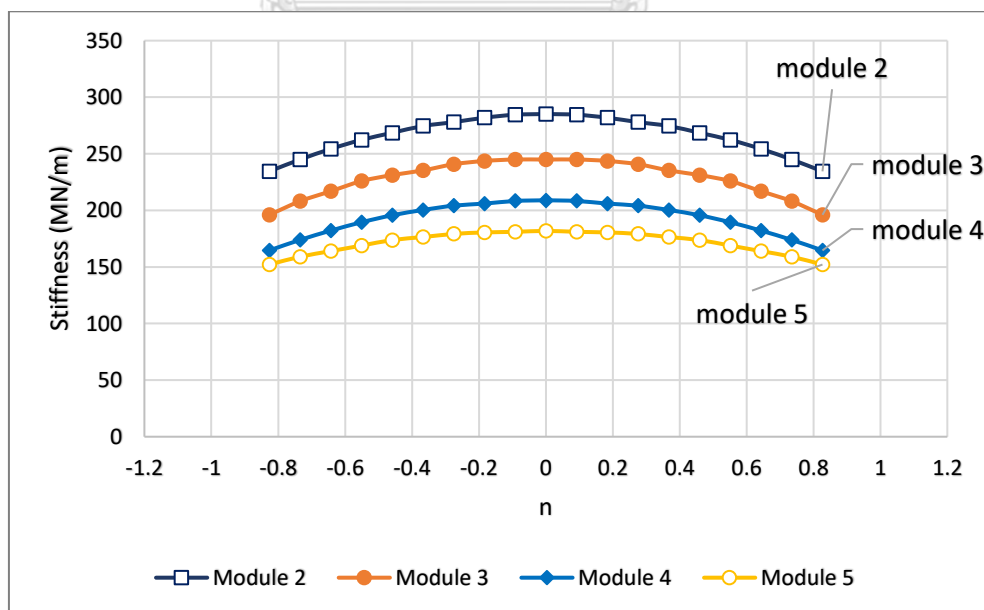
3.3.4 ผลของโมดูลต่อค่าความแข็งแรงของคู่เฟืองตรง

ค่าของโมดูลจะส่งผลต่อทั้งขนาดของฟันเฟืองและขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของเฟือง โดยเมื่อโมดูลมีค่าเพิ่มขึ้น เฟืองจะมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางใหญ่ขึ้นตามสมการที่ 3.2 และขนาดของซี่ฟันก็จะใหญ่ขึ้นเช่นกัน ดังรูปที่ 3.7



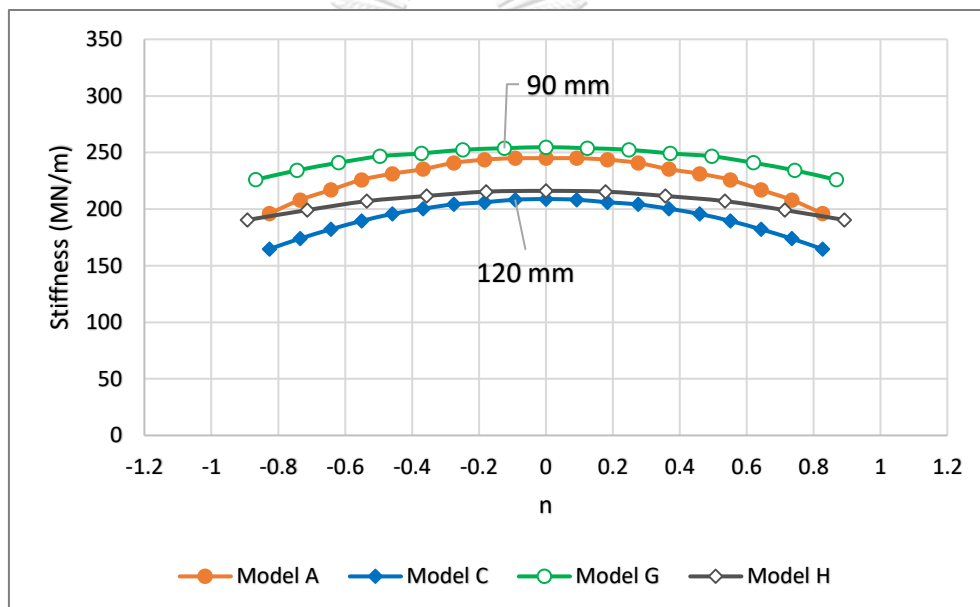
รูปที่ 3.7 ฟันเฟืองที่มีขนาดโมดูลต่างกัน [21]

เมื่อเปรียบเทียบค่าความแข็งแรงของชุดเฟืองที่มีจำนวนฟันและมุมกดเท่ากันแต่มีขนาดโมดูลแตกต่างกันของชุดเฟือง B A C และ D ที่มีโมดูลจาก 2 3 4 และ 5 ตามลำดับดังแสดงในรูปที่ 3.8 จะเห็นว่าชุดเฟือง D ที่มีขนาดโมดูลใหญ่ที่สุดจะมีค่าความแข็งแรงน้อยที่สุด ส่วนชุดเฟือง B ที่มีโมดูลเล็กที่สุดจะมีค่าความแข็งแรงมากที่สุด ซึ่งสอดคล้องกับผลการศึกษาความแข็งแรงของเฟืองตรงที่มีโมดูลต่างกันของงานวิจัย A. D. Tsolakis [16]



รูปที่ 3.8 ค่าความแข็งแรงของคู่เฟืองที่มีโมดูลต่างกันที่ตำแหน่งการขบต่างๆ

3.3.5 ความแข็งแรงของคู่เฟืองที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางพิตซ์เท่ากันแต่โมดูลต่างกัน
 รูปที่ 3.9 แสดงการเปรียบเทียบค่าความแข็งแรงของชุดเฟืองที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางวงกลมพิตซ์เท่ากันแต่มีขนาดโมดูลต่างกัน โดยชุดเฟืองเฟือง A และ G จะมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางพิตซ์ 90 มม. เท่ากันแต่โมดูลของเฟือง A จะใหญ่กว่าเฟือง G ส่วนชุดเฟือง C และ H จะมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางพิตซ์ 120 มม. เท่ากันแต่โมดูลของเฟือง C จะใหญ่กว่าเฟือง H ผลที่ได้พบว่าเฟืองที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางพิตซ์เท่ากันจะมีค่าความแข็งแรงใกล้เคียงกันแม้ว่าจะมีขนาดโมดูลต่างกันก็ตาม และชุดเฟืองที่ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางมากจะมีการเสียรูปจากการดัดโค้งมากกว่า จึงมีค่าความแข็งแรงน้อยกว่า ซึ่งสอดคล้องกับผลการศึกษาความแข็งแรงของเฟืองตรงที่มีรูเพลาต่างกันของงานวิจัย X. Liang [19]



รูปที่ 3.9 ความแข็งแรงของคู่เฟืองที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางพิตซ์เท่ากันแต่โมดูลต่างกัน

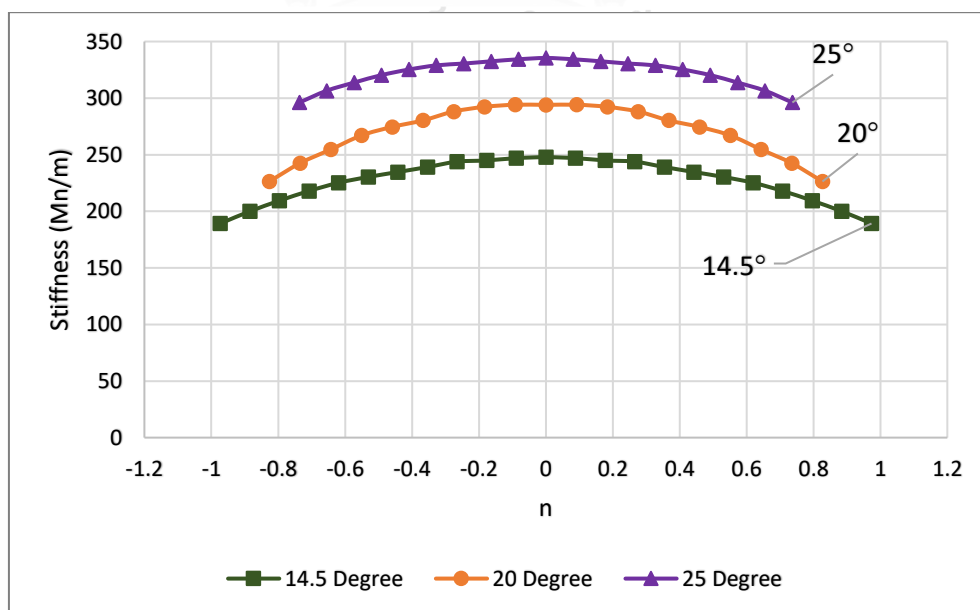
3.4 ผลการคำนวณค่าความแข็งเกร็งของคู่ฟันเฟือง

ผลในหัวข้อที่แล้วเป็นผลความแข็งเกร็งของคู่เฟืองซึ่งรวมทั้งผลส่วนที่เป็นทรงกระบอกเฟือง และฟันเฟือง ความแข็งเกร็งเฉพาะส่วนฟันเฟืองสามารถหาได้โดยไม่พิจารณาผลความแข็งเกร็งในส่วนที่เป็นทรงกระบอกของเฟือง โดยการพิจารณาค่าความแข็งเกร็งเฉพาะส่วน จะทำให้วิเคราะห์ผลของพารามิเตอร์ต่างๆ ที่ส่งผลต่อความแข็งเกร็งของคู่เฟืองได้ชัดเจนยิ่งขึ้น ซึ่งคำนวณได้จากสมการที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 2 และนำมาแสดงไว้อีกครั้งดังนี้

$$k_{\text{Tooth Driven}} = \frac{k_{\text{Driven}} \times k_C}{k_C - k_{\text{Driven}}} \quad (3.4)$$

3.4.1 ผลของมุมกดต่อค่าความแข็งเกร็งของคู่ฟันเฟือง

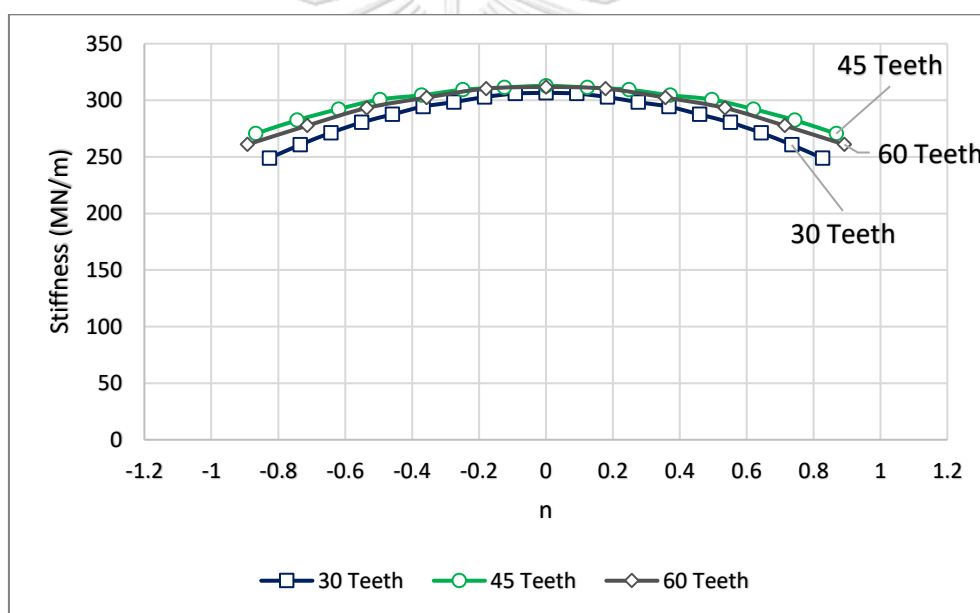
ผลของมุมกดต่อค่าความแข็งเกร็งของคู่ฟันเฟืองแสดงในรูปที่ 3.10 เมื่อเปรียบเทียบกับค่าความแข็งเกร็งของคู่เฟืองในรูปที่ 3.4 จะเห็นได้ว่าคุณค่าความแข็งเกร็งรวมของคู่ฟันเฟืองจะมีค่ามากกว่าค่าความแข็งเกร็งของคู่เฟือง ความแตกต่างของคุณค่าความแข็งเกร็งของชุดเฟืองที่มีมุมกดต่างๆ จะมีค่ามากกว่าในกรณีค่าความแข็งเกร็งของคู่เฟือง ในกรณีนี้เฟืองทั้ง 3 ชุดมีจำนวนฟันและโมดูลเท่ากัน ทำให้เส้นผ่านศูนย์กลางพิตซ์ของเฟืองทั้ง 3 ชุดมีค่าเท่ากัน ดังนั้นแนวโน้มของคุณค่าความแข็งเกร็งที่มุมกดต่างๆ จึงยังคงเหมือนกับกรณีความแข็งเกร็งของคู่เฟืองที่แสดงในรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.10 ผลของมุมกดต่อค่าความแข็งเกร็งของคู่ฟันเฟือง

3.4.2 ผลของจำนวนฟันต่อค่าความแข็งเกร็งของคู่ฟันเฟือง

ผลของจำนวนฟันต่อค่าความแข็งเกร็งของคู่ฟันเฟืองดังแสดงในรูปที่ 3.11 เมื่อเปรียบเทียบกับผลของจำนวนฟันต่อค่าความแข็งเกร็งของคู่เฟืองในรูปที่ 3.6 จะเห็นได้ว่าเมื่อไม่นำค่าความแข็งเกร็งจากการเสียรูปของทรงกระบอกเฟืองมารวม ค่าความแข็งเกร็งของเฟืองทั้ง 3 ชุดจะมีค่าใกล้เคียงกันและมีค่ามากกว่าในกรณีค่าความแข็งเกร็งของคู่เฟือง โดยเฟืองที่มีจำนวนฟันน้อยจะมีการเพิ่มขึ้นของค่าความแข็งเกร็งน้อยกว่าเฟืองที่มีจำนวนฟันมาก เมื่อพิจารณาถึงรูปร่างของเฟืองทั้ง 3 ชุด จะเห็นได้ว่า เฟืองทั้งหมดมีโมดูลและมุมกดเท่ากัน ขนาดฟันจึงเท่ากัน ส่งผลให้ค่าความแข็งเกร็งของฟันเฟืองทั้ง 3 ชุดใกล้เคียงกัน โดยที่จำนวนฟันแทบไม่มีผลต่อค่าความแข็งเกร็งของฟันเฟืองเลย ความแตกต่างของความแข็งเกร็งของคู่เฟืองในรูปที่ 3.6 จึงเป็นผลมาจากความแข็งเกร็งของทรงกระบอกเฟืองเป็นหลัก

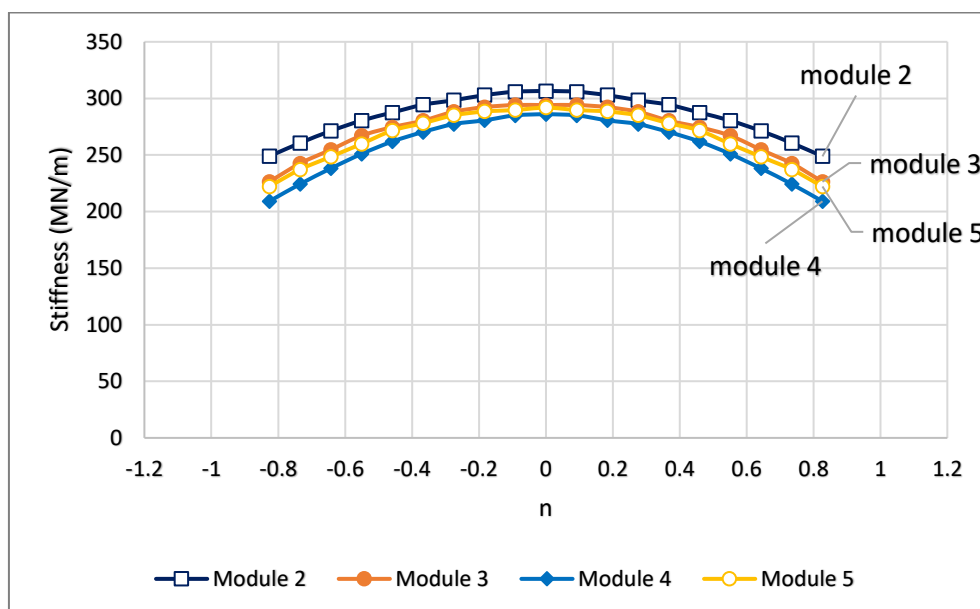


รูปที่ 3.11 ผลของจำนวนฟันต่อค่าความแข็งเกร็งของคู่ฟันเฟือง

3.4.3 ผลของโมดูลต่อค่าความแข็งเกร็งของคู่ฟันเฟือง

ผลของโมดูลต่อค่าความแข็งเกร็งของคู่ฟันเฟืองดังแสดงในรูปที่ 3.12 เมื่อเปรียบเทียบกับผลกับกรณีคู่เฟืองในรูปที่ 3.8 พบว่าขนาดความแข็งเกร็งเฉพาะฟันของเฟืองที่มีค่าโมดูลต่างๆ มีค่าใกล้เคียงกันมากกว่าในกรณีที่เปรียบเทียบทั้งคู่เฟือง ทั้งนี้เนื่องจากโมดูลต่างกัน ขนาดของทรงกระบอกเฟืองจะต่างกัน ดังนั้นความแตกต่างของความแข็งเกร็งของคู่เฟืองในรูป 3.8 จึงเป็นผลมาจากความแข็งเกร็งของทรงกระบอกเฟืองที่ต่างกันมากกว่า

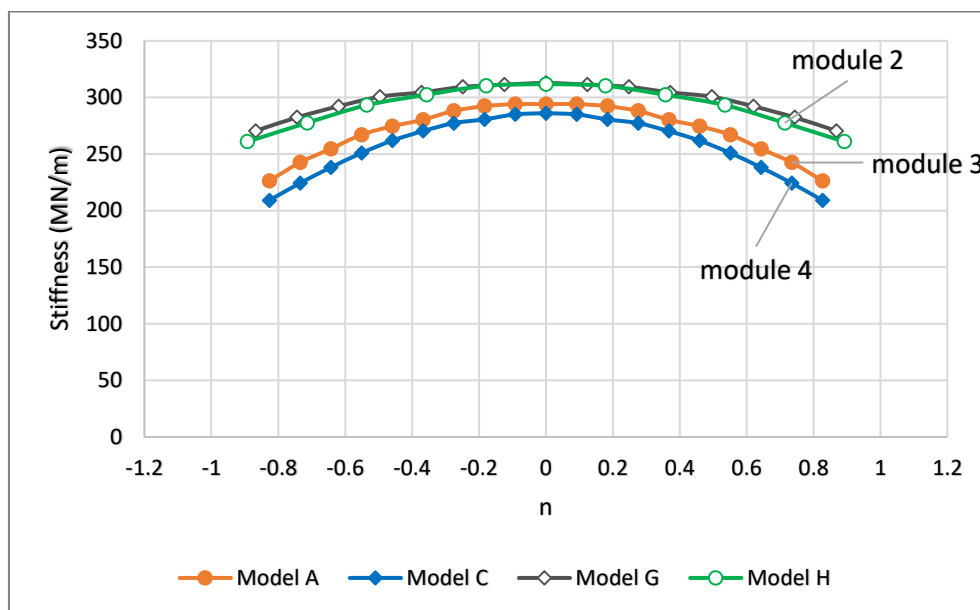
จากผลที่ได้สรุปได้ว่า โมดูลมีผลน้อยต่อค่าความแข็งเกร็งของพื้นเฟือง เพราะถึงแม้ว่าขนาดพื้นจะใหญ่ขึ้น แต่ระยะวัดจากโคนพื้นถึงจุดที่แนวแรงกระทำ ซึ่งส่งผลต่อการดัดของพื้นก็เพิ่มมากขึ้นเช่นกัน ทำให้ค่าความแข็งเกร็งของคู้พื้นเฟืองไม่เปลี่ยนแปลงมากนัก



รูปที่ 3.12 ผลของโมดูลต่อค่าความแข็งเกร็งของคู้พื้นเฟือง

3.4.4 ความแข็งเกร็งคู้พื้นเฟืองที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางพิตซ์เท่ากันแต่โมดูลต่างกัน

ผลของเฟืองที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางพิตซ์เท่ากันแต่โมดูลต่างกันต่อค่าความแข็งเกร็งแสดงในรูปที่ 3.13 เมื่อเทียบกับผลกรรมของคู้เฟืองในรูปที่ 3.9 จะพบว่ามีความแตกต่างกัน โดยในรูปที่ 3.9 เฟืองที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางพิตซ์เท่ากันจะมีความแข็งเกร็งใกล้เคียงกัน แต่เนื่องจากในกรณีนี้ได้หักผลของทรงกระบอกเฟืองทิ้งไปเหลือเฉพาะผลของพื้นเฟืองแล้ว จะพบว่าเฟือง G และ H ซึ่งมีโมดูลและมุมกดเท่ากันแต่จำนวนฟันต่างกันจะมีความแข็งเกร็งใกล้เคียงกันและมีค่ามากกว่าเฟือง A และ C ซึ่งมีค่าโมดูลมากกว่าเล็กน้อย ผลในรูปที่ 3.13 นี้ยังสอดคล้องกับผลของจำนวนฟันในรูปที่ 3.11 และผลของโมดูลในรูปที่ 3.12 อีกด้วย



รูปที่ 3.13 ความแข็งเกร็งของเฟืองที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางพิตซ์เท่ากันแต่โมดูลต่างกัน

3.5 การศึกษาผลของภาระต่อค่าความแข็งเกร็ง

ค่าความแข็งเกร็งของระบบที่มีการเสียรูปในช่วงอีลาสติกโดยทั่วไปจะมีค่าคงที่ อย่างไรก็ตาม ค่าความแข็งเกร็งในส่วนของฟันเฟืองนั้น จะรวมถึงค่าความแข็งเกร็งในส่วนของการสัมผัสด้วย ซึ่งปัญหาการสัมผัสเป็นปัญหาไม่เชิงเส้น ซึ่งอาจจะทำให้ความสัมพันธ์ของภาระที่กระทำกับการเสียรูปไม่เป็นแบบเส้นตรงได้ ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องศึกษาผลของภาระต่อค่าความแข็งเกร็งเพิ่มเติม

3.5.1 การให้ภาระกระทำกับชุดเฟืองตั้งต้นเพื่อตรวจสอบผล

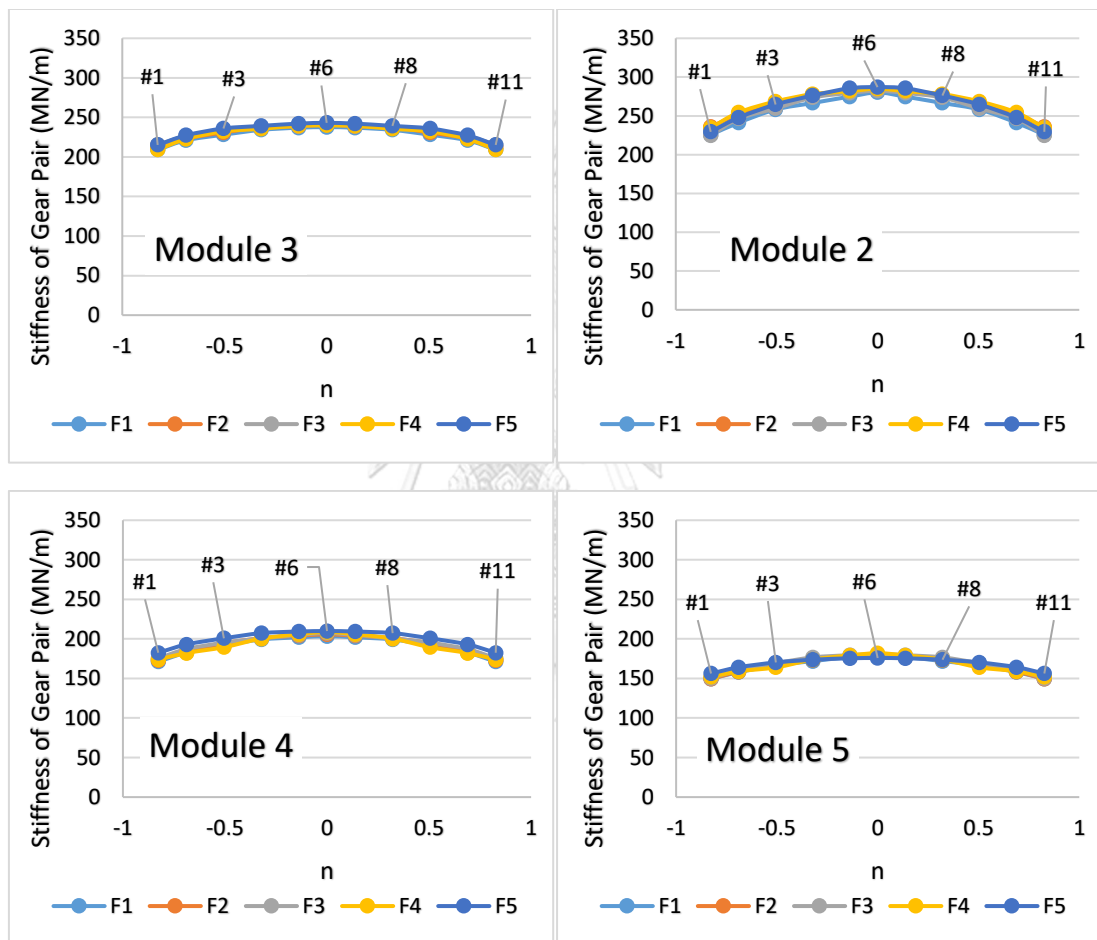
เนื่องจากความแข็งเกร็งของชุดเฟืองที่คำนวณโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และใช้สร้างสมการทำนายค่าความแข็งเกร็งในบทก่อนคำนวณมาจากการให้ภาระตามแนวเส้นแรงกระทำเป็นค่าคงที่ค่าเดียว เพื่อเป็นการตรวจสอบผลของแรงที่กระทำกับชุดเฟืองต่อค่าความแข็งเกร็ง ในที่นี้จะเปลี่ยนค่าแรงกระทำกับชุดเฟืองเดิม โดยใช้แรงบนเส้นแนวแรงกระทำของเฟืองชุด A เท่ากับ 100 Nm 150 Nm 200 Nm 250 Nm และ 300 Nm เพื่อให้แรงขนาดสมมูลกับแรงที่กระทำกับชุดเฟือง A กับชุดเฟืองอื่นๆ จะทำให้ได้ค่าแรง F1 – F5 ที่กระทำบนเส้นแนวแรงของชุดเฟืองต่างๆ ดังแสดงในตารางที่ 3.3

ตารางที่ 3.3 ชุดเฟืองที่ใช้ตรวจสอบภาระบนเส้นแนวแรงกระทำ

พารามิเตอร์ของเฟือง	ชุดเฟืองที่ใช้คำนวณ			
	A	B	C	D
จำนวนฟัน (ซี่)	30	30	30	30
โมดูล (mm)	3	2	4	5
มุมกด (องศา)	20	20	20	20
ความกว้างหน้าฟัน (mm)	20	20	20	20
อัตราทด	1 : 1	1 : 1	1 : 1	1 : 1
ภาระที่ LOA F1 (N)	2364.8	2364.8	2364.8	2364.8
ภาระที่ LOA F2 (N)	3547.3	3547.3	3547.3	3547.3
ภาระที่ LOA F3 (N)	4729.7	4729.7	4729.7	4729.7
ภาระที่ LOA F4 (N)	5912.1	5912.1	5912.1	5912.1
ภาระที่ LOA F5 (N)	7094.6	7094.6	7094.6	7094.6
อัตราส่วนปัวซอง	0.3	0.3	0.3	0.3
ค่ายังโมดูลัส (GPa)	200	200	200	200

3.5.2 ผลของภาระต่อค่าความแข็งเกร็งของชุดเฟืองตั้งต้น

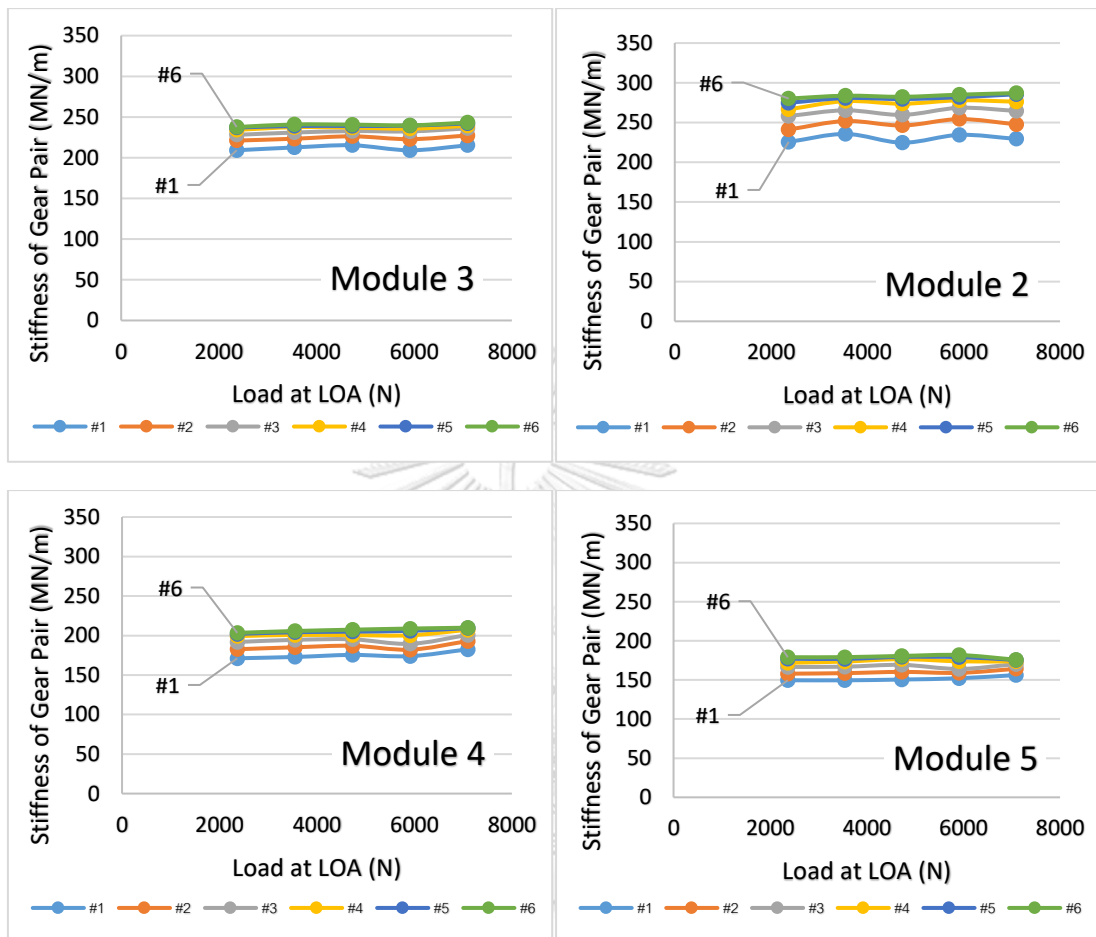
หัวข้อนี้จะแสดงผลลัพธ์ความแข็งเกร็งจากการเปลี่ยนค่าแรงในแนวเส้นแนวแรงกระทำกับชุดเฟือง A B C และ D ที่มีโมดูลเท่ากับ 2 3 4 และ 5 ทำโดยเปลี่ยนภาระกระทำในเส้นแนวแรงกระทำ F1 – F5 ในโปรแกรมคำนวณ จากนั้นนำค่าการเสียรูปที่คำนวณได้จากโปรแกรมมาหาความแข็งเกร็งของคู่เฟือง พบว่าความแข็งเกร็งของคู่เฟืองที่ตำแหน่งการขบตั้งแต่เริ่มขบถึงสิ้นสุดการขบ ดังแสดงในรูป 3.14 ยังคงมีค่าใกล้เคียงกัน



รูปที่ 3.14 ผลในรูปแบบความสัมพันธ์ของแรงในแนวเส้นแนวแรงกระทำตำแหน่งที่ #1 - #11

รูปที่ 3.15 แสดงให้เห็นว่าแรงมีผลต่อความแข็งเกร็งน้อย โดยยืนยันได้จากการเลือกผลจากตำแหน่งเริ่มต้นขบ (ตำแหน่งที่ #1) จนถึงตำแหน่งพิตช์ (ตำแหน่งที่ #6) มา plot เทียบเพื่อคำนวณหาความคลาดเคลื่อน โดยในที่นี้ให้ความแข็งเกร็งเนื่องจากแรง F4 เป็นค่าความแข็งเกร็งอ้างอิง ผลการคำนวณพบว่าเมื่อแรงมีค่าเปลี่ยนไปความแข็งเกร็งของคู่เฟืองเปลี่ยนไปน้อยมาก โดยมี

ค่าความคลาดเคลื่อนสูงสุด 6% และมีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยเพียง 2% ดังแสดงในตารางที่ 3.4 ในกรณีนี้จึงสรุปได้ว่าภาระที่กระทำไม่มีผลกับชุดเฟือง



รูปที่ 3.15 ผลในรูปแบบความสัมพันธ์ของแรงในแนวเส้นแนวแรงกระทำตำแหน่งที่ #1 - #6

ตารางที่ 3.4 ค่าความคลาดเคลื่อนผลของภาระต่อค่าความแข็งแกร่งในรูปที่ 3.15

Model	Module	Maximum Absolute Error %	Average Error %
A	3	2.936	-0.463
B	2	5.153	1.507
C	4	5.947	-0.964
D	5	3.817	-0.153

3.6 สรุป

จากผลการคำนวณความแข็งแรงของทรงกระบอกของชุดเฟือง A – H ผลการคำนวณพบว่าความแข็งแรงของทรงกระบอกเฟืองของชุดเฟืองที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางน้อยมีค่ามากกว่าความแข็งแรงของทรงกระบอกเฟืองของชุดเฟืองที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางมาก สำหรับผลการคำนวณหาค่าความแข็งแรงของคู่เฟืองตรงที่มีพารามิเตอร์รูปร่างต่างๆ กัน พบว่าเฟืองที่มีมุมกดน้อยจะมีความแข็งแรงน้อยกว่าเฟืองที่มีมุมกดมาก ผลของขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางพิตซ์มีผลอย่างมากต่อความแข็งแรงของคู่เฟือง โดยเฟืองขนาดใหญ่ที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางพิตซ์มากจะมีค่าความแข็งแรงน้อยกว่าเฟืองที่มีขนาดเล็กกว่า สำหรับการศึกษาผลของพารามิเตอร์ต่อค่าความแข็งแรงของคู่ฟันเฟือง ทำโดยตัดค่าความแข็งแรงในส่วนที่เป็นทรงกระบอกของเฟืองออกไป ผลการศึกษาพบว่ามุมกดมีผลอย่างมากต่อความแข็งแรงของคู่ฟัน โมดูลมีผลเล็กน้อย ส่วนจำนวนฟันแทบไม่มีผลต่อความแข็งแรงของคู่ฟันเฟืองเลย นอกจากนี้ยังศึกษาผลของภาวะที่กระทำในเส้นแนวแรงกระทำกับชุดเฟือง พบว่าเมื่อแรงมีค่าเปลี่ยนไปความแข็งแรงของคู่เฟืองเปลี่ยนไปน้อยมาก โดยมีค่าความคลาดเคลื่อนสูงสุดประมาณ 6% และมีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยประมาณ 2% จึงสามารถสรุปได้ว่าภาวะที่กระทำไม่มีผลกับชุดเฟือง

การคำนวณการเสียรูปและหาค่าความแข็งแรงโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ถึงแม้ว่าจะประยุกต์ใช้ได้กับเฟืองที่มีพารามิเตอร์และรูปร่างต่างๆ อย่างไรก็ตามการหาค่าความแข็งแรงด้วยวิธีนี้ยังมีข้อด้อยที่สำคัญอยู่ด้วย ในการคำนวณค่าการเสียรูปด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS เนื่องจากต้องคำนวณที่ละตำแหน่งการขบของฟันเฟือง และเลือกเก็บค่าที่ละค่า จึงต้องใช้เวลาในการคำนวณมาก เมื่อพารามิเตอร์เปลี่ยนไปการคำนวณก็ต้องทำใหม่ การคำนวณในลักษณะนี้ไม่เหมาะสมที่จะนำมาคำนวณหาค่าความแข็งแรงในการใช้งานจริง ซึ่งอาจจะต้องคำนวณค่าของเฟืองหลายๆ ชุด ในงานวิจัยนี้จึงจะเสนอการสร้างสมการอย่างง่ายเพื่อใช้คำนวณค่าความแข็งแรงของคู่เฟืองตรง โดยใช้ผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นข้อมูลในการสร้างสมการ เพื่อให้สมการที่ได้สามารถใช้คำนวณค่าความแข็งแรงของเฟืองอื่นๆ โดยสามารถคำนวณได้อย่างรวดเร็วและไม่ซับซ้อน

บทที่ 4

สมการอย่างง่ายเพื่อใช้คำนวณค่าความแข็งเกร็งของคู่เฟือง

ในบทนี้จะกล่าวถึงการสร้างสมการอย่างง่ายเพื่อใช้คำนวณค่าความแข็งเกร็งของคู่เฟืองตรง โดยจะแบ่งสมการอย่างง่ายเพื่อใช้คำนวณค่าความแข็งเกร็งของคู่เฟืองออกเป็น 2 ส่วนคือ สมการเพื่อใช้คำนวณค่าความแข็งเกร็งของทรงกระบอกเฟือง k_C และสมการอย่างง่ายเพื่อใช้คำนวณค่าความแข็งเกร็งของคู่ฟันเฟือง $k_{Tooth Pair}$ การสร้างสมการอย่างง่ายเพื่อใช้คำนวณค่าความแข็งเกร็งโดยการแยกส่วนของทรงกระบอกเฟืองและส่วนของคู่ฟันเฟืองออกจากกันในลักษณะนี้เป็นประโยชน์อย่างมากในการนำสมการไปใช้คำนวณจริง เนื่องจากคู่เฟืองจริงแม้ว่าจะมีพารามิเตอร์เฟือง เช่น มุมกด จำนวนฟัน โมดูล หรือความกว้างหน้าฟัน ที่เหมือนกันแต่ก็อาจมีลักษณะทรงกระบอกเฟืองและรูเพลลาแตกต่างกันได้ การแยกคำนวณหาความแข็งเกร็งเป็นส่วนๆ จะทำให้การคำนวณมีความยืดหยุ่นและสามารถประยุกต์ใช้กับปัญหาจริงได้ง่าย โดยเมื่อได้สมการอย่างง่ายทั้ง 2 ส่วนนี้จะสามารถคำนวณหาความแข็งเกร็งรวมของคู่เฟืองได้จากสมการต่อสปริงแต่ละส่วนแบบอนุกรม การสร้างสมการอย่างง่ายเพื่อใช้คำนวณค่าความแข็งเกร็งของเฟืองแต่ละส่วนและสมการอย่างง่ายเพื่อใช้คำนวณค่าความแข็งเกร็งของคู่เฟืองกล่าวได้ดังต่อไปนี้

4.1 สมการเพื่อใช้คำนวณค่าความแข็งเกร็งของส่วนทรงกระบอก

สมการเพื่อใช้คำนวณค่าความแข็งเกร็งของทรงกระบอกเฟือง จะเป็นการประยุกต์ใช้สมการพื้นฐานของความเค้น (Stress) ความเครียด (Strain) และกฎของฮุก (Hooke's Law) ในพิกัด $r-\theta$ ในการหาค่าเคลื่อนตัว (Displacements) ในทิศทาง $r(u)$ และในทิศทาง $\theta(v)$ เมื่อหาค่าเคลื่อนตัวได้แล้วจะนำค่านี้ไปหาสมการเพื่อใช้คำนวณค่าความแข็งเกร็งของทรงกระบอกเฟือง k_C ต่อไป โดยขั้นตอนการสร้างสมการเพื่อใช้คำนวณค่าความแข็งเกร็งของทรงกระบอกเฟืองกล่าวได้ดังต่อไปนี้

4.1.1 สมการพื้นฐานของความเค้น ความเครียด และกฎของฮุก

สมการพื้นฐานของความเค้น ความเครียด และกฎของฮุก ในพิกัด $r-\theta$ ที่ใช้ในการคำนวณหาค่าเคลื่อนตัว u และ v มีดังต่อไปนี้

สมการพื้นฐานของความเค้น (Stress)

ความเค้นในทิศทาง r

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \quad (4.1)$$

ความเค้นในทิศทาง θ

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \quad (4.2)$$

ความเค้นเฉือนในพิกัด $r-\theta$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \quad (4.3)$$

โดยที่ φ คือ ฟังก์ชันของความเค้น (Stress Function)

สมการพื้นฐานของความเครียด (Strain)

ความเครียดในทิศทาง r

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (4.4)$$

ความเครียดในทิศทาง θ

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} \quad (4.5)$$

ความเครียดเฉือนในพิกัด $r-\theta$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad (4.6)$$

โดยที่ u และ v คือค่าเคลื่อนตัวในทิศทาง r และ θ ตามลำดับ

กฎของฮุค (Hooke's Law)

ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับความเค้นในทิศทาง r

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu \sigma_\theta] \quad (4.7)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับความเค้นในทิศทาง θ

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu \sigma_r] \quad (4.8)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดเฉือนกับความเค้นเฉือนในพิกัด $r-\theta$

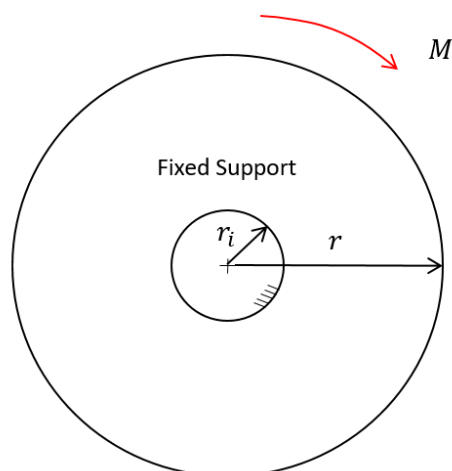
$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{G} \tau_{r\theta} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{r\theta} \quad (4.9)$$

โดยที่ G คือ โมดูลัสเฉือนมีค่าเท่ากับ

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.10)$$

4.1.2 การประยุกต์ใช้สมการพื้นฐานในการสร้างสมการความแข็งเกร็งส่วนทรงกระบอก

การหาสมการค่าเคลื่อนตัว u และ v จากสมการพื้นฐานจำเป็นต้องทราบลักษณะของปัญหาการจับยึดและการให้ภาระที่ชัดเจนเสียก่อน รูปที่ 4.1 แสดงถึงเงื่อนไขขอบเขตและการให้ภาระที่กระทำกับทรงกระบอก โดยในกรณีนี้จะให้เงื่อนไขขอบเขต Fixed Support ที่ขอบวงกลมด้านในของทรงกระบอก และจะให้โมเมนต์กระทำที่ขอบด้านนอกของผิวทรงกระบอก



รูปที่ 4.1 เงื่อนไขขอบเขตและภาระที่กระทำกับทรงกระบอก

โดยการให้เงื่อนไขขอบเขตและภาวะที่กระทำกับทรงกระบอกในลักษณะนี้สามารถหาคำตอบได้จากวิธีการที่เขียนในเอกสารอ้างอิง [20] และจะมีฟังก์ชันของความเค้น ดังสมการ

$$\varphi = \frac{M_t \theta}{2\pi} \quad (4.11)$$

โดยที่ M_t คือ โมเมนต์ต่อหน่วยความกว้างของทรงกระบอก $\left(\frac{N.m}{m}\right)$

และโมเมนต์ที่กระทำกับทรงกระบอกหาจาก $M = M_t w$ โดย w คือความกว้างทรงกระบอก

เมื่อได้ฟังก์ชันของความเค้นของปัญหาที่จะทำการวิเคราะห์แล้ว ขั้นตอนต่อไปเป็นการนำฟังก์ชันของความเค้นมาหาสมการค่าเคลื่อนตัว u และ v จากสมการพื้นฐานต่างๆ และเงื่อนไขขอบเขตและภาวะที่กระทำกับทรงกระบอก โดยขั้นตอนการหาสมการค่าเคลื่อนตัวกล่าวได้ดังนี้

1. แทนค่าฟังก์ชันของความเค้น φ ลงในสมการความเค้น (4.1)-(4.3) จะได้

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (4.12)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0 \quad (4.13)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = \frac{M_t}{2\pi} \frac{1}{r^2} \quad (4.14)$$

จะเห็นว่าในกรณีนี้ค่าความเค้นในแนว r และ θ จะมีค่าเป็นศูนย์มีเพียงความเค้นเฉือน $\tau_{r\theta}$ เท่านั้น

2. แทนค่าความเค้นที่ได้จากสมการ (4.12)-(4.14) ลงในสมการความสัมพันธ์ของความเค้น-ความเครียด (4.7)-(4.9) จะได้

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu \sigma_\theta] = 0 \quad (4.15)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu \sigma_r] = 0 \quad (4.16)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{G} \tau_{r\theta} = \frac{M_t}{2G\pi r^2} \quad (4.17)$$

จะพบว่าค่าความเครียด ε_r และ ε_θ มีค่าเป็นศูนย์และมีเพียงความเครียดเฉือน $\gamma_{r\theta}$ เท่านั้น

3. แทนค่าความเครียดที่ได้ลงในสมการค่าเคลื่อนตัว (4.4)-(4.6)

สำหรับค่า ε_r จะได้

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad (4.18)$$

จากสมการนี้จะพบว่า u จะต้องเป็นฟังก์ชันของ θ หรือเป็นค่าคงที่ อย่างไรก็ตามเนื่องจากปัญหาทรงกระบอกนี้เป็นปัญหาสมมาตรรอบแกนของทรงกระบอก ดังนั้น u จึงไม่เป็นฟังก์ชันของ θ ดังนั้นในกรณีนี้ u จึงเป็นค่าคงที่

สำหรับค่า ε_θ เมื่อแทนค่าในสมการ (4.16) ลงในสมการ (4.5) จะได้

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} = 0 \quad (4.19)$$

เนื่องจากปัญหานี้เป็นปัญหาสมมาตรรอบแกน ดังนั้น v จึงไม่เป็นฟังก์ชันของ θ ทำให้ $\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$ จากสมการนี้จะได้อีกว่า $\frac{u}{r} = 0$ หรือ $u = 0$ ด้วย

เมื่อพิจารณาค่า $\gamma_{r\theta}$ จะได้

$$\gamma_{r\theta} = \frac{M_t}{2G\pi r^2} = \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad (4.20)$$

เนื่องจาก $u = 0$ จะได้

$$\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = \frac{M_t}{2G\pi r^2} \quad (4.21)$$

สมการอนุพันธ์นี้จะมีคำตอบในรูป

$$v = -\frac{M_t}{4G\pi r} + Cr \quad (4.22)$$

โดย C คือ ค่าคงที่ ซึ่งสามารถหาได้จากเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

พิจารณาที่ $r = r_i$ เนื่องจากเป็นการจับยึดแบบยึดแน่น ดังนั้น $v = 0$ แทนเงื่อนไขนี้ลงในสมการ (4.22) จะได้

$$0 = -\frac{M_t}{4G\pi r_i} + Cr_i$$

ดังนั้น จะได้ค่าคงที่

$$C = \frac{M_t}{4G\pi r_i^2}$$

แทนค่า C ลงในสมการ (4.22) และจัดรูปจะหาค่าเคลื่อนตัว v ได้ดังสมการ

$$v = \frac{M_t}{4\pi G r_i^2} \left[\frac{r^2 - r_i^2}{r} \right] \quad (4.23)$$

ความแข็งเกร็งของทรงกระบอกเฟือง k_C สามารถคำนวณได้จากความสัมพันธ์ระหว่างแรงในแนวสัมผัสผิวทรงกระบอก F กับค่าเคลื่อนตัวของทรงกระบอกเฟือง v ดังสมการ

$$k = \frac{F}{v} \quad (4.24)$$

โดยแรงในแนวเส้นสัมผัสทรงกระบอกได้จากความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิด M กับรัศมีของทรงกระบอกดังสมการ

$$F = \frac{M}{r} = \frac{M_t w}{r} \quad (4.25)$$

แทนค่า v ในสมการ (4.23) และ F ในสมการ (4.25) ลงในสมการ (4.24) จะได้สมการที่ใช้คำนวณค่าความแข็งเกร็งของทรงกระบอกดังสมการ

$$k = \frac{4\pi w G r_i^2}{r^2 - r_i^2} \quad (4.26)$$

4.1.3 ผลการคำนวณหาค่าความแข็งเกร็งของทรงกระบอกเฟือง

จากสมการที่ใช้คำนวณหาค่าความแข็งเกร็งของทรงกระบอก สามารถนำมาใช้หาค่าความแข็งเกร็งของทรงกระบอกเฟืองของเฟืองที่มีพารามิเตอร์ต่างๆ ได้ โดยในที่นี้จะยกตัวอย่างการคำนวณหาค่าความแข็งเกร็งของทรงกระบอกเฟืองของชุดเฟือง A ดังตัวอย่างที่ 4.1

ตัวอย่างที่ 4.1 การคำนวณหาค่าความแข็งแรงของทรงกระบอกเฟืองของชุดเฟือง A

จากคุณสมบัติของชุดเฟืองในตารางที่ 3.1 เฟือง A มีค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น $E = 200 \text{ GPa}$ อัตราส่วนปัวซองของ $\nu = 0.3$ ความกว้างหน้าฟัน $w = 0.02 \text{ m}$ และขนาดรัศมีของรูเพลลาของเฟืองมีค่าเท่ากับ $r_i = 0.015 \text{ m}$

คำนวณหาค่า shear modulus G จากสมการ

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{200 \text{ GPa}}{2(1+0.3)} = 76.923 \text{ GPa}$$

สำหรับรัศมีที่ขอบด้านนอกของทรงกระบอกเฟือง r จะมีขนาดเท่ากับรัศมีของโคนฟัน Root radius สำหรับค่ารัศมีนี้สามารถหาได้จากโปรแกรม GearTrax ที่ใช้เขียนแบบเฟืองในงานวิจัยนี้ โดยมีค่า $r = 41.35 \text{ mm}$

แทนค่าต่างๆ ลงในสมการ (4.26) เพื่อคำนวณหาค่าความแข็งแรงของทรงกระบอกเฟืองของชุดเฟือง A จะได้

$$k = \frac{4\pi w G r_i^2}{r^2 - r_i^2} = \frac{4 \times \pi \times 0.02 \text{ m} \times 76.923 \times 10^9 \text{ Pa} \times (0.015 \text{ m})^2}{(0.04135 \text{ m})^2 - (0.015 \text{ m})^2} = 2929.705 \text{ MN} / \text{m}$$

ผลการคำนวณค่าความแข็งแรงของทรงกระบอกเฟืองจากสมการอย่างง่ายของชุดเฟืองอื่นๆ แสดงไว้ในตารางที่ 4.1 โดยได้แสดงค่าความแข็งแรงของส่วนทรงกระบอกที่คำนวณโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เปรียบเทียบไว้ด้วย จากตารางจะพบว่าค่าจากสมการและค่าจากการคำนวณด้วย FEM มีค่าใกล้เคียงกันมาก โดยมีความคลาดเคลื่อนมากที่สุดเพียงประมาณ 0.5 % เท่านั้น ผลที่ได้ยืนยันว่าสมการที่สร้างขึ้นมีความถูกต้องและเหมาะสมที่จะใช้ในการคำนวณหาค่าความแข็งแรงในส่วนของทรงกระบอกเฟือง

ตารางที่ 4.1 การเปรียบเทียบค่าความแข็งเกร็งที่คำนวณได้จากสมการอย่างง่ายกับ FEM

Model	Shear Modulus G (GPa)	Shaft Radius r_i (mm)	Root Radius r (mm)	Stiffness of Cylinder (MN/m)	Stiffness from FEM (MN/m)	%Error %
A	76.92	15	41.35	2929.71	2931.14	0.05
B	76.92	15	27.55	8146.51	8149.00	0.03
C	76.92	15	55.15	1544.47	1548.97	0.29
D	76.92	15	68.95	960.46	965.24	0.50
E	76.92	15	41.35	2929.71	2931.14	0.05
F	76.92	15	41.25	2945.96	2947.50	0.05
G	76.92	15	42.55	2743.66	2745.98	0.08
H	76.92	15	57.55	1409.14	1409.19	0.01
I	76.92	15	41.95	2834.30	2836.36	0.07

4.2 การสร้างสมการอย่างง่ายเพื่อหาความแข็งเกร็งของคัปฟันเฟือง

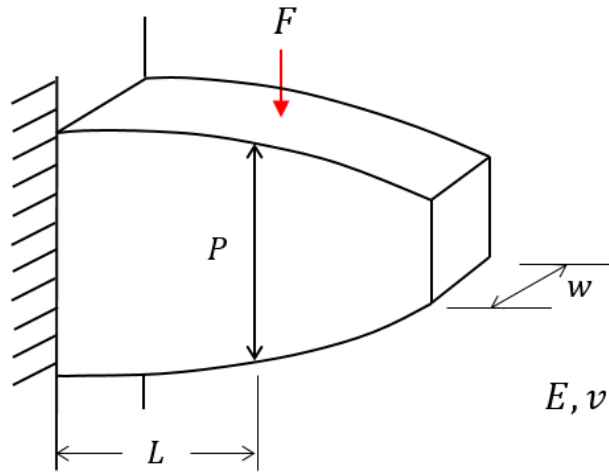
ลักษณะส่วนโค้งของฟันเฟืองคือโค้งอินโวลูต การหาตำแหน่งบนส่วนโค้งฟันเฟืองจึงซับซ้อน การหาค่าความแข็งเกร็งในส่วนของคัปฟันเฟืองจึงไม่สามารถทำได้ด้วยวิธีการวิเคราะห์โดยง่าย ในส่วนนี้จึงจะสร้างสมการอย่างง่าย (Empirical formula) เพื่อหาความแข็งเกร็งของคัปฟันเฟืองแทน

สมการอย่างง่ายที่จะสร้างขึ้นนี้ได้จากการนำผลลัพธ์ของค่าความแข็งเกร็งที่คำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในหัวข้อที่ 3.4 มาใช้ในการสร้างสมการ โดยกระบวนการสร้างสมการจะเริ่มจากการกำหนดพารามิเตอร์ที่ส่งผลต่อความแข็งเกร็งของฟันเฟืองจากนั้นจึงจัดกลุ่มตัวแปรให้เป็นกลุ่มตัวแปรไร้มิติ (Dimensional Group) เพื่อให้ไม่มีปัญหาเกี่ยวกับหน่วยในสมการ ทำให้สะดวกกับการสร้างสมการทำนายค่าความแข็งเกร็งต่อไป

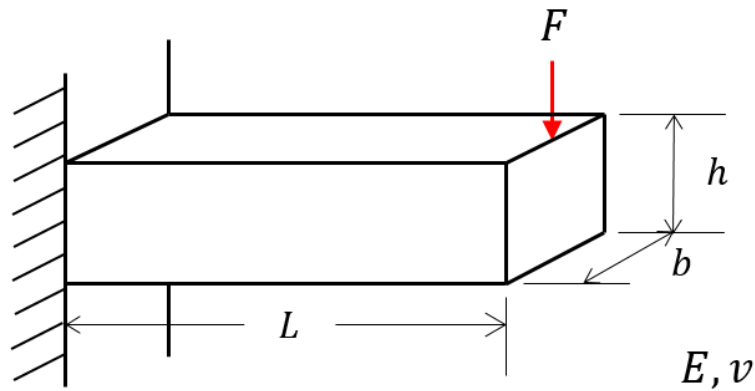
4.2.1 รูปแบบของสมการอย่างง่ายเพื่อใช้ประมาณค่าความแข็งเกร็งของฟันเฟือง

ลักษณะของฟันเฟืองตรงในรูปที่ 4.2 สามารถพิจารณาได้ว่ามีความคล้ายคลึงกับลักษณะของคานยื่น (Cantilever beam) ในรูปที่ 4.3 โดยสมการที่ใช้หาค่าความแข็งเกร็งของคานยื่นจะอยู่ใน

เทอมของตัวแปรรูปร่างและสมบัติวัสดุของคาน ซึ่งในการหารูปแบบของสมการเพื่อประมาณค่าความแข็งแรงของพื้นเฟืองตรงก็จะใช้รูปแบบทำนองเดียวกับรูปแบบของสมการหาค่าความแข็งแรงของคานยื่น



รูปที่ 4.2 ลักษณะของพื้นเฟืองตรง



รูปที่ 4.3 ลักษณะของคานยื่น Cantilever beam

ค่าความแข็งแรงของคานยื่นสามารถหาได้จากสมการซึ่งอยู่ในหนังสือกลศาสตร์วัสดุ โดยทั่วไปและมีรูปแบบดังสมการ

$$k = \frac{3EI}{L^3}$$

ในกรณีของคานหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งมีความสูง h และความลึก b ดังรูปที่ 4.3 ค่าโมเมนต์ความเฉื่อย I มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{12}bh^3$ แทนค่านี้ลงในสมการค่าความแข็งแกร่งจะได้

$$k = \frac{3E}{L^3} \left(\frac{1}{12}bh^3 \right) = \frac{1}{4}Eb \frac{h^3}{L^3}$$

เมื่อเปรียบเทียบกับกรณีพืนเฟืองจึงอาจพิจารณาได้ว่าความแข็งแกร่งของพืนเฟือง k ควรมีความสัมพันธ์กับตัวแปรต่างๆ ในรูป

$$k = CEw \frac{P^3}{L^3} \quad (4.27)$$

โดย C คือ ค่าคงที่

อย่างไรก็ตาม หากพิจารณาให้แรงกระทำที่ตำแหน่งพิตช์ของพืนเฟืองพอดี จะได้ว่า P จะเท่ากับความหนาของพืนเฟืองซึ่งหาได้จาก

$$P = \frac{1}{2} \frac{\pi D}{z} = \frac{\pi m}{2}$$

และ L ของพืนเฟืองมาตรฐานจะมีค่าเท่ากับระยะ dedendum ซึ่งมีค่าสัมพันธ์กับโมดูล โดยกรณีพืนเฟืองมีมุมกด 20° L จะมีค่าเท่ากับ $1.25 m$

เมื่อแทนค่าต่างๆ เหล่านี้ลงในสมการ (4.27) จะได้

$$k = CEw \left(\frac{\pi m/2}{1.25 m} \right)^3 = CEw \left(\frac{\pi}{2.5} \right)^3 \quad (4.28)$$

โดย C' คือ ค่าคงที่

จะเห็นว่าค่าความแข็งแกร่ง k จะขึ้นกับโมดูลัส E และความกว้างหน้าพืน w เท่านั้น โดยโมดูลไม่รวมอยู่ในสมการนี้ด้วย และเมื่อพิจารณาผล FEM ในรูป 3.11 จะเห็นว่าเมื่อโมดูลต่างกัน ค่าความแข็งแกร่งจะมีความแตกต่างกันไม่มากนัก

ดังนั้นรูปแบบสมการอย่างง่ายพื้นฐานจะไม่รวมผลของโมดูลในสมการ ผลของโมดูลจะถูกรวมในตัวแปรปรับแก้ C_m ซึ่งก็อยู่ในรูปตัวแปรไร้มิติเช่นกันดังจะกล่าวถึงในภายหลัง

สมการ (4.28) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปกลุ่มตัวแปรไร้มิติได้ดังสมการ

$$\frac{k}{Ew} = Const \quad (4.29)$$

ตัวอย่างที่แสดงข้างต้นและใช้พิจารณาจนได้ความสัมพันธ์ในสมการ (4.28) และ (4.29) นั้น เป็นความสัมพันธ์ที่ตำแหน่งจุดพิชท์เท่านั้น หากตำแหน่งการขบเปลี่ยนไปค่าอัตราส่วนไร้มิติ $\frac{k}{Ew}$ จะเปลี่ยนไปด้วย ดังนั้นจึงได้ว่า $\frac{k}{Ew}$ เป็นฟังก์ชันของตำแหน่งการขบ

นอกจากค่าโมดูลัส E ความกว้างหน้าฟัน w และโมดูล m แล้วยังมีพารามิเตอร์อื่นที่ส่งผลต่อค่าความแข็งแรงของคู้ฟันเฟืองอีก ได้แก่

1. ตำแหน่งการขบ : เพื่อให้สะดวกในการเปรียบชุดเฟืองต่างๆ ที่มีระยะการขบแตกต่างกัน ในที่นี้จัดรูปแบบตำแหน่งการขบให้เป็นทอมไร้มิติดังสมการ

$$n = \frac{\text{ระยะจากจุดสัมผัสถึงจุดพิชท์บนเส้นแนวแรงกระทำ}}{\text{base pitch}}$$

2. มุมกด α : จากผล FEM ในบทที่ 3 จากรูปที่ 3.9 จะเห็นว่ามุมกดมีผลอย่างมากต่อความแข็งแรงของฟันเฟือง อย่างไรก็ตาม ค่ามุมกดมาตรฐานที่ใช้กันทั่วไปมีเพียง 3 ค่าคือ 14.5° , 20° และ 25° ดังนั้นในการสร้างสมการจึงควรสร้างสมการอย่างง่ายแยกต่างหากสำหรับค่ามุมกดแต่ละค่า
3. ผลของจำนวนฟันนั้น จะส่งผลต่อขนาดของทรงกระบอกเฟืองเป็นหลัก และจากผล FEM รูปที่ 3.10 จะพบว่าหากค่าโมดูลและมุมกดเท่ากันแล้วค่าความแข็งแรงของคู้ฟันเฟืองที่มีจำนวนฟันต่างกันแทบจะมีค่าเท่ากัน ดังนั้นพารามิเตอร์จำนวนฟันจึงจะไม่ถูกรวมในการพิจารณา
4. สำหรับผลของภาระที่กระทำกับชุดเฟืองจากรูปที่ 3.14 - 3.15 และตารางที่ 3.4 จะเห็นว่าถึงแม้จะเปลี่ยนค่าแรงที่กระทำกับชุดเฟือง แต่ความความแข็งแรงที่คำนวณได้จากโปรแกรมยังคงมีค่าใกล้เคียงกัน จึงสรุปได้ว่าแรงแทบไม่มีผลต่อความแข็งแรงของเฟือง ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงไม่รวมผลของแรงเข้าไปในสมการอย่างง่าย

จากที่กล่าวมาข้างต้น จะสามารถสรุปกลุ่มพารามิเตอร์ไรมิติ π ที่ใช้ในการสร้างสมการอย่างง่ายได้ดังนี้

$$\pi_1 = \frac{k}{Ew}, \pi_2 = C_m, \pi_3 = n, \pi_4 = \alpha \quad (4.30)$$

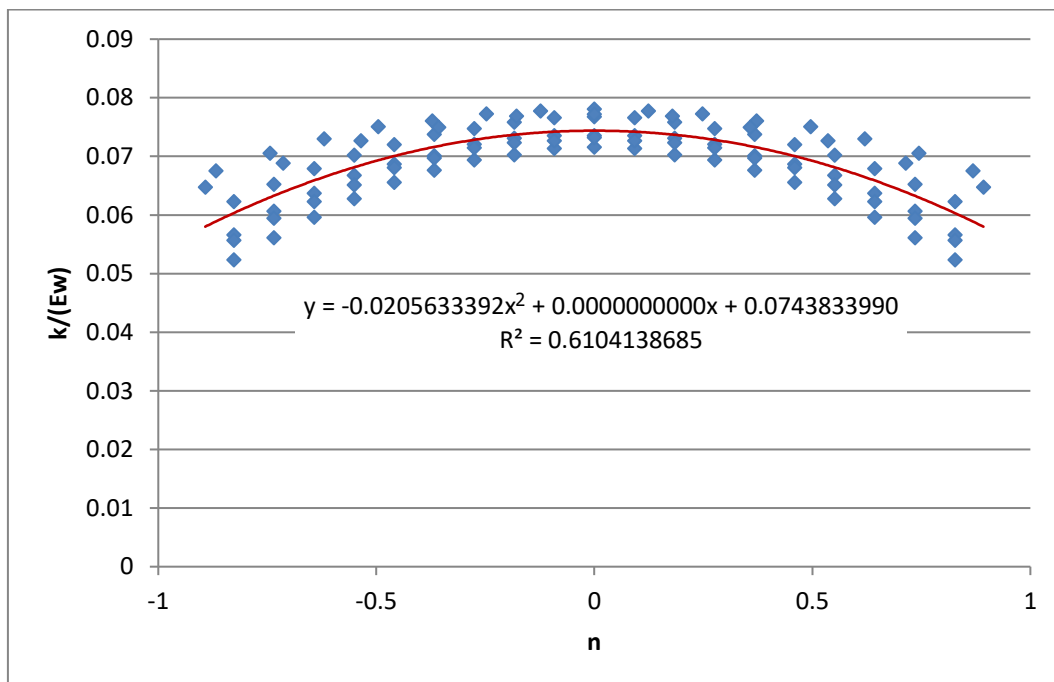
โดยรูปแบบของสมการเพื่อหาความแข็งแรงจะเขียนให้อยู่ในรูปของความสัมพันธ์ของกลุ่มพารามิเตอร์ไรมิติได้ดังสมการ

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \pi_2 \times f(\pi_3) && \text{เมื่อ } \pi_4 \text{ มีค่าคงที่} \\ \text{หรือ } \frac{k}{Ew} &= C_m f(n) && \text{เมื่อ มุมกด } \alpha \text{ คงที่} \end{aligned} \quad (4.31)$$

4.2.2 การสร้างสมการอย่างง่ายพื้นฐาน

การสร้างสมการเพื่อหาค่าความแข็งแรงตามรูปแบบสมการ (4.31) ทำได้โดยหาความสัมพันธ์ของกลุ่มพารามิเตอร์ไรมิติ $\pi_1 = \frac{k}{Ew}$ กับ $\pi_3 = n$ ก่อน โดยกำหนดให้ π_4 หรือมุมกด α คงที่ ซึ่งในที่นี้จะกำหนดให้ $\alpha = 20^\circ$ ส่วนการปรับค่าเนื่องจากผลของโมดูล C_m จะกล่าวถึงในหัวข้อถัดไป

รูปที่ 4.4 แสดงความสัมพันธ์ของค่า $\pi_1 = \frac{k}{Ew}$ ที่ตำแหน่งการขบ n ต่างๆ ของชุดเฟืองที่มีมุมกด 20° ซึ่งได้แก่ชุดเฟือง A B C D G และ H ซึ่งรวบรวมมาจากผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เช่นเดียวกับผลที่แสดงในรูปที่ 3.11, 3.12 และ 3.13



รูปที่ 4.4 การ Fit curve ทาสมการความแข็งเกร็งของพื้นเฟืองที่มีมุมกด 20°

จากรูปพบว่าค่า $\frac{k}{Ew}$ ของชุดเฟืองต่างๆ จะมีค่าเกาะกลุ่มกันในช่วงกึ่งกลางการขบไถล์ตำแหน่งพิตช์ ($n=0$) และจะมีการกระจายมากขึ้นในช่วงเริ่มต้นขบและสิ้นสุดการขบ โดยมีความแตกต่างกันไม่เกิน 0.02 เนื่องจากค่าทั้งหมดมีการกระจายไม่มากจึงสามารถสร้างสมการความสัมพันธ์ของค่า $\frac{k}{Ew}$ ที่ตำแหน่งการขบ n ต่างๆ ได้ เส้นโค้งในรูปคือเส้นแนวโน้มที่คำนวณได้โดยวิธีการถดถอยแบบพหุนาม (polynomial regression) โดยเลือกใช้เส้นโค้งกำลังสอง ซึ่งมีสมการ

$$\frac{k}{Ew} = -0.0205633392 n^2 + 0.074383399 \quad (4.32)$$

โดยมีค่าสัมประสิทธิ์แสดงการตัดสินใจ (coefficient of determination)

$$R^2 = 0.6104138685$$

เมื่อพิจารณาลักษณะเส้นแนวโน้มและค่า R^2 พบว่าสมการที่ได้สามารถทำนายค่า $\frac{k}{Ew}$ ที่ตำแหน่งการขบ n ต่างๆ ได้ดีพอสมควร อย่างไรก็ตาม เพื่อเพิ่มความแม่นยำของสมการจึงจำเป็นที่จะต้องเพิ่มค่าการปรับแก้ผลของโมดูล C_m ลงในสมการด้วย

4.2.3 การปรับแก้ผลของโมดูล

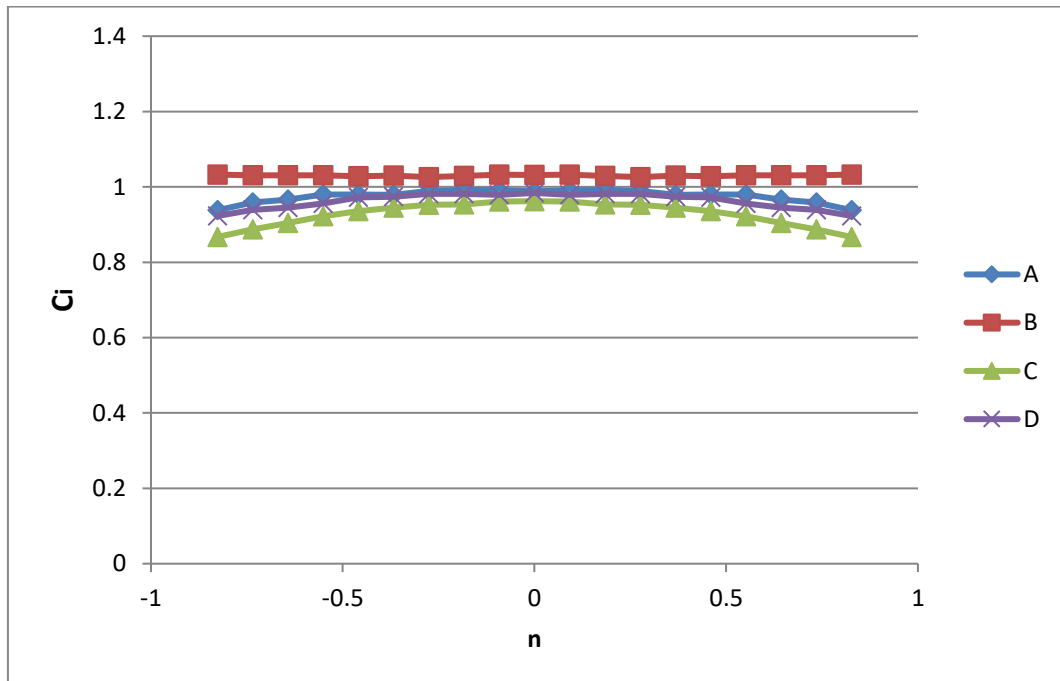
จากผลคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในบทที่ 3 พบว่าโมดูลมีผลต่อค่าความแข็งแรงด้วย โดยเฟืองที่มีโมดูลต่างกันจะมีค่าความแข็งแรงต่างกันเล็กน้อย รูปที่ 4.5 แสดงการเปรียบเทียบอัตราส่วนระหว่างค่า k/Ew ที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ของเฟืองต่างๆ กับค่า $(k/Ew)_{ref}$ ซึ่งเป็นค่าที่คำนวณได้จากสมการ (4.32) จากรูปหากสมการ (4.32) สามารถทำนายค่า k/Ew ได้ถูกต้อง อัตราส่วน $(k/Ew)/(k/Ew)_{ref}$ จะมีค่าเท่ากับ 1 อย่างไรก็ตาม อัตราส่วนนี้มีความเบี่ยงเบนออกไป เมื่อให้สมการ (4.32) ทำนายค่าเฟืองที่มีโมดูลต่างๆ ดังนั้น หากต้องการให้การทำนายมีความแม่นยำมากขึ้นแล้ว จะต้องคูณผลการทำนายด้วยค่าปรับแก้โมดูลซึ่งมีค่าเท่ากับอัตราส่วนนี้เข้าไปด้วย

กำหนดให้ C_i คืออัตราส่วน $(k/Ew)/(k/Ew)_{ref}$ ที่ตำแหน่งการขบ i ดังสมการ

$$C_i = [(k/Ew)/(k/Ew)_{ref}]_i$$

จากรูปที่ 4.5 จะพบว่าค่า C_i ที่ตำแหน่งการขบ n ต่างกันจะมีค่าต่างกันไม่มากนัก ดังนั้นจะสามารถหาค่า C_m ที่เป็นตัวแทนของ C_i ที่ตำแหน่งต่างๆ ได้จากการหาค่าเฉลี่ยดังสมการ

$$C_m = \text{ค่าเฉลี่ยของ } C_i = \text{ค่าเฉลี่ยของ } \left[\frac{(k/Ew)}{(k/Ew)_{ref}} \right]_i \quad (4.33)$$



รูปที่ 4.5 ค่าการปรับแก้ผลของโมดูลในตำแหน่งการขบต่างๆ ของเฟืองแต่ละชุด

รูปที่ 4.6 แสดงความสัมพันธ์ของค่า C_m ที่คำนวณจากสมการ (4.33) ของเฟืองที่มีโมดูลต่างๆ กัน โดยแกนนอนในกราฟเป็นค่าอัตราส่วนผลต่างโมดูล r_m เทียบกับโมดูลอ้างอิง ซึ่ง r_m ก็เป็นกลุ่มตัวแปรไร้มิติตั้งสมการ

$$r_m = \frac{m - m_{ref}}{m_{ref}} \quad (4.34)$$

โดยในที่นี้เลือกใช้ $m = 3 \text{ mm}$ เป็นค่า m_{ref}

จากรูปจะสามารถประมาณค่าความสัมพันธ์ระหว่างค่า r_m กับค่า C_m ได้โดยวิธีการถดถอยแบบพหุนามได้ตามสมการ

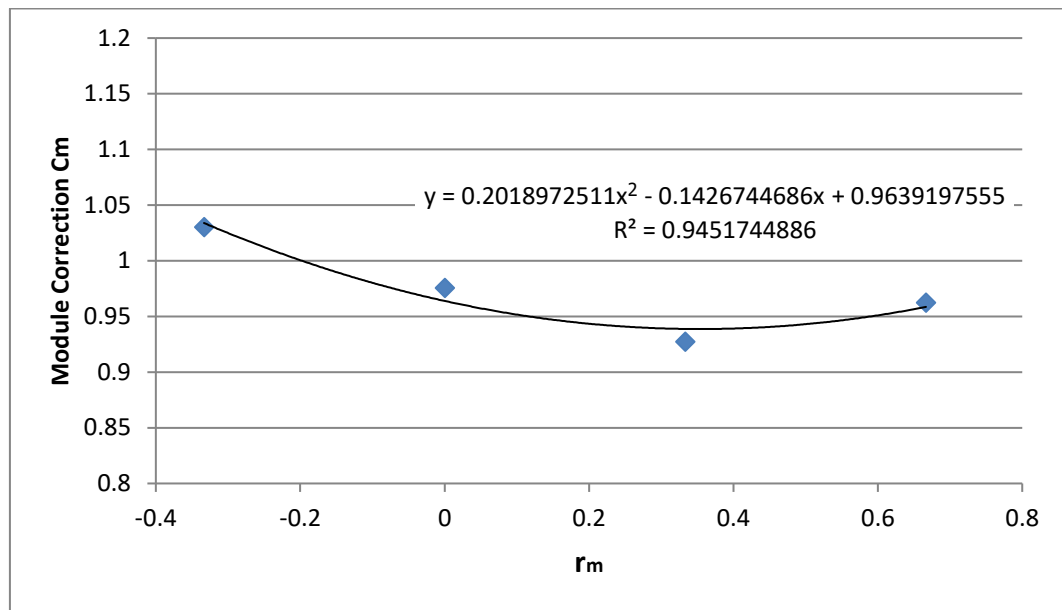
$$C_m = 0.2018972511 r_m^2 - 0.1426744686 r_m + 0.9639197555 \quad (4.35)$$

โดยค่าสัมประสิทธิ์แสดงการตัดสินใจในกรณีนี้คือ 0.945

สมการ (4.35) จะใช้หาค่าตัวปรับแก้ของโมดูล C_m ในการคำนวณค่าความแข็งแรงของคู่ฟันเฟืองต่อไป

เมื่อแทนค่าความสัมพันธ์ของ (k/E_w) ที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ในสมการ (4.32) และค่า C_m ในสมการที่ (4.35) ลงในสมการที่ (4.31) จะได้สมการที่ใช้ทำนายค่าความแข็งเกร็งของคู่ฟันเฟืองดังสมการ

$$\frac{k}{E_w} = C_m (-0.020563392 n^2 + 0.074383399) \quad (4.36)$$

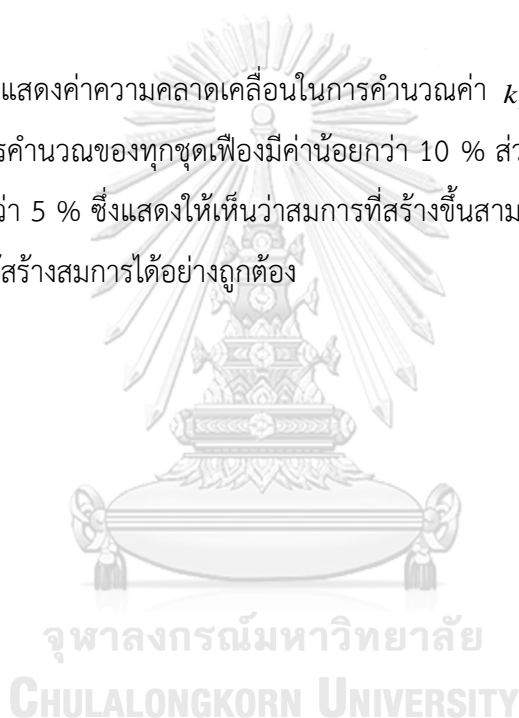


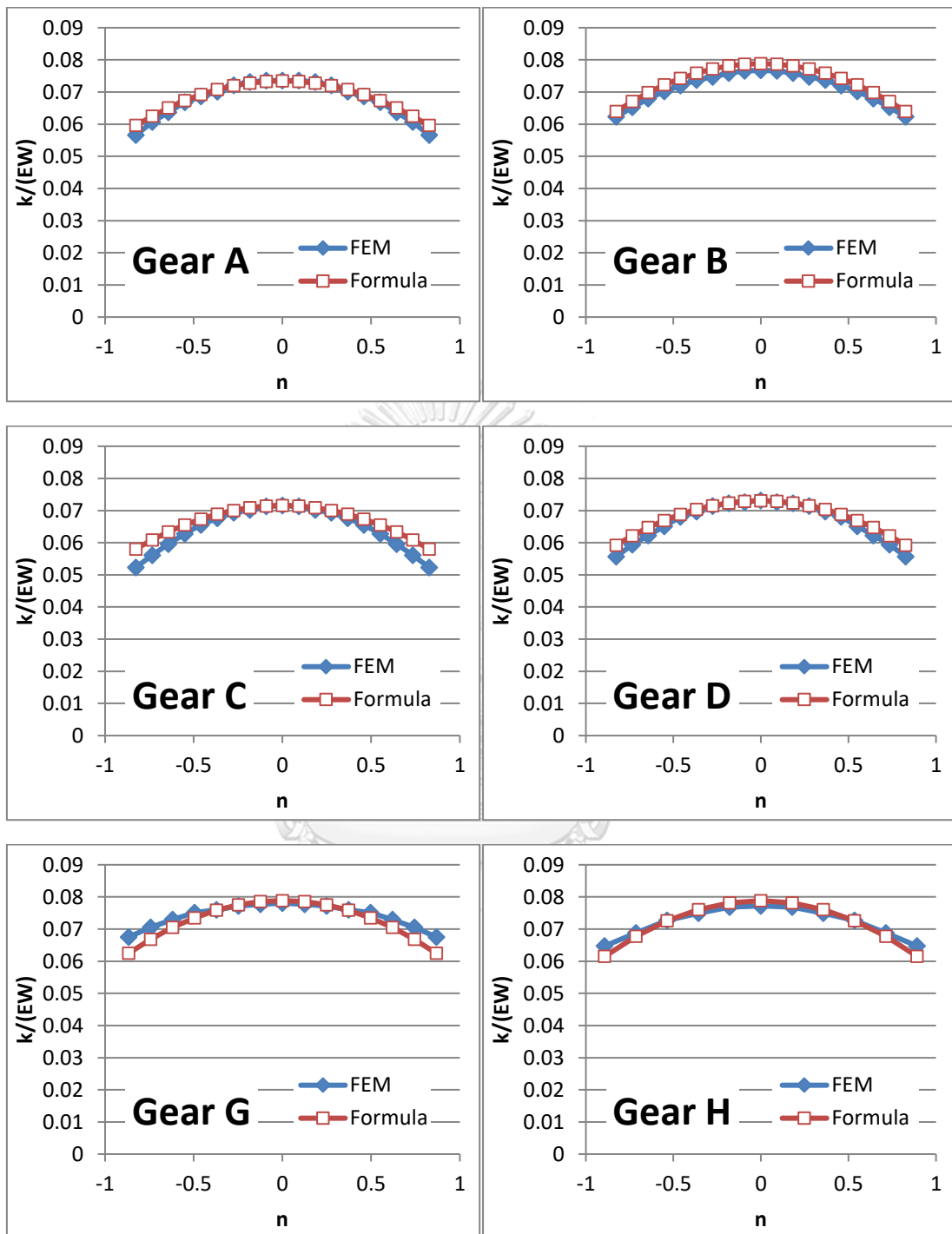
รูปที่ 4.6 ค่าเฉลี่ยค่าการปรับแก้ผลของโมดูลของทุกตำแหน่งการขบ

4.2.4 ผลการคำนวณความแข็งแรงของคูปั้นเฟือง

ในหัวข้อนี้จะแสดงผลการคำนวณค่าความแข็งแรงของคูปั้นเฟืองเพื่อตรวจสอบในเบื้องต้นว่าสมการที่สร้างขึ้นสามารถทำนายค่าความแข็งแรงของเฟืองตั้งต้นที่ใช้สร้างสมการได้ถูกต้องหรือไม่ รูปที่ 4.7 แสดงผลการเปรียบเทียบระหว่างผลการคำนวณค่า k/E_w โดยใช้สมการ (4.36) กับผลคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่แสดงในบทที่ 3 ผลที่ได้พบว่าค่าจากสมการมีความใกล้เคียงกับค่าที่คำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยค่าที่บริเวณกึ่งกลางการขบจะมีความคลาดเคลื่อนน้อย ความคลาดเคลื่อนจะมากขึ้นที่ตำแหน่งบริเวณที่เริ่มต้นขบและสิ้นสุดการขบ

ตารางที่ 4.2 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนในการคำนวณค่า k/E_w จากรูปที่ 4.7 ความคลาดเคลื่อนมากที่สุดในการคำนวณของทุกชุดเฟืองมีค่าน้อยกว่า 10 % ส่วนค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนในแต่ละกรณีมีค่าน้อยกว่า 5 % ซึ่งแสดงให้เห็นว่าสมการที่สร้างขึ้นสามารถทำนายค่าความแข็งแรงของชุดเฟืองตั้งต้นที่ใช้สร้างสมการได้อย่างถูกต้อง





รูปที่ 4.7 การเปรียบเทียบระหว่างผลการคำนวณค่า k/E_w ของชุดเฟือง A – H

ตารางที่ 4.2 ค่าความคลาดเคลื่อนของผลการเปรียบเทียบค่า k/E_w จากรูปที่ 4.7

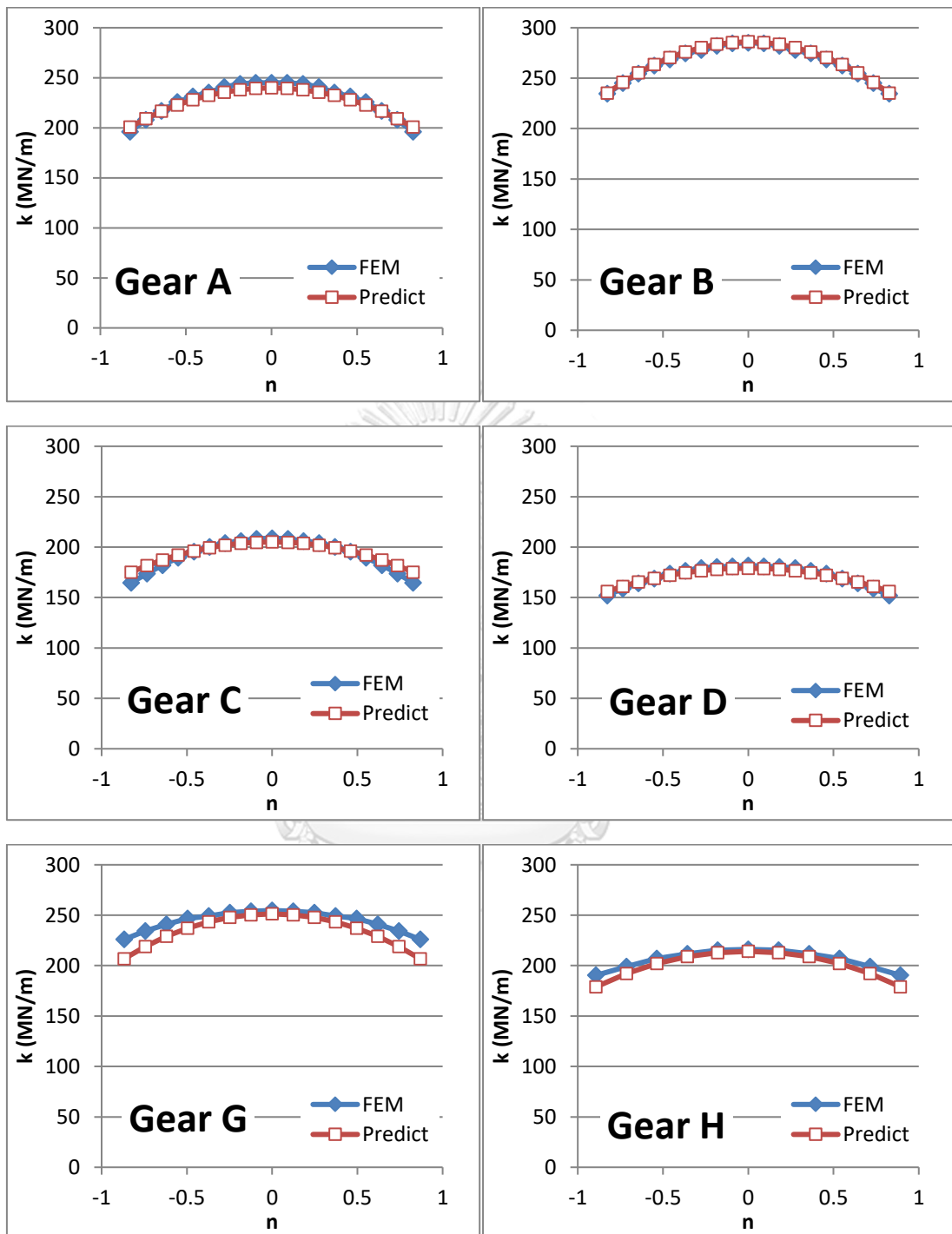
Model	Module	Maximum Error %	Average Error %
A	3	2.756	-1.162
B	2	0.778	0.376
C	4	8.269	1.370
D	5	3.863	-0.358
G	2	-1.477	-4.637
H	2	-0.393	-2.890

4.3 ค่าความแข็งแรงของคู่เฟือง

ค่าความแข็งแรงของคู่เฟืองซึ่งรวมทั้งส่วนทรงกระบอกและฟันเฟืองสามารถหาได้จากสมการอย่างง่ายที่ใช้คำนวณหาความแข็งแรงของทรงกระบอกเฟือง k_C ในหัวข้อที่ 4.1 และสมการอย่างง่ายที่ใช้คำนวณหาความแข็งแรงของคู่ฟันเฟือง $k_{Tooth Pair}$ ในหัวข้อที่ 4.2 โดยนำสมการทั้ง 2 มาต่อแบบอนุกรมกันดังสมการ

$$\frac{1}{k_{Gear Pair}} = \frac{1}{k_{Tooth Pair}} + \frac{1}{(k_C)_{Driving}} + \frac{1}{(k_C)_{Driven}} \quad (4.37)$$

ผลการเปรียบเทียบค่าความแข็งแรงของคู่เฟืองที่คำนวณตามสมการที่ (4.37) กับค่าที่คำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แสดงในรูป 4.8 จากรูปพบว่าแนวโน้มความแข็งแรงที่คำนวณด้วยวิธีการทั้งสองมีลักษณะเป็นเส้นโค้งพาราโบลาคว่ำ (Paragliding) โดยมีความแข็งแรงสูงสุดบนจุดยอด (Vertex) ตรงกับตำแหน่งพิตช์พอดี้ ผลความคลาดเคลื่อนของการคำนวณด้วยวิธีทั้ง 2 แสดงดังตารางที่ 4.3 ผลที่ได้พบว่าสมการที่สร้างขึ้นสามารถคำนวณค่าความแข็งแรงของคู่เฟืองตั้งต้นได้อย่างถูกต้อง โดยผลจากสมการมีความคลาดเคลื่อนจากผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สูงสุดไม่เกิน 10% และมีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยสูงสุดน้อยกว่า 5% โดยขั้นตอนการคำนวณสามารถสรุปได้อีกครั้งดังรูปที่ 4.9

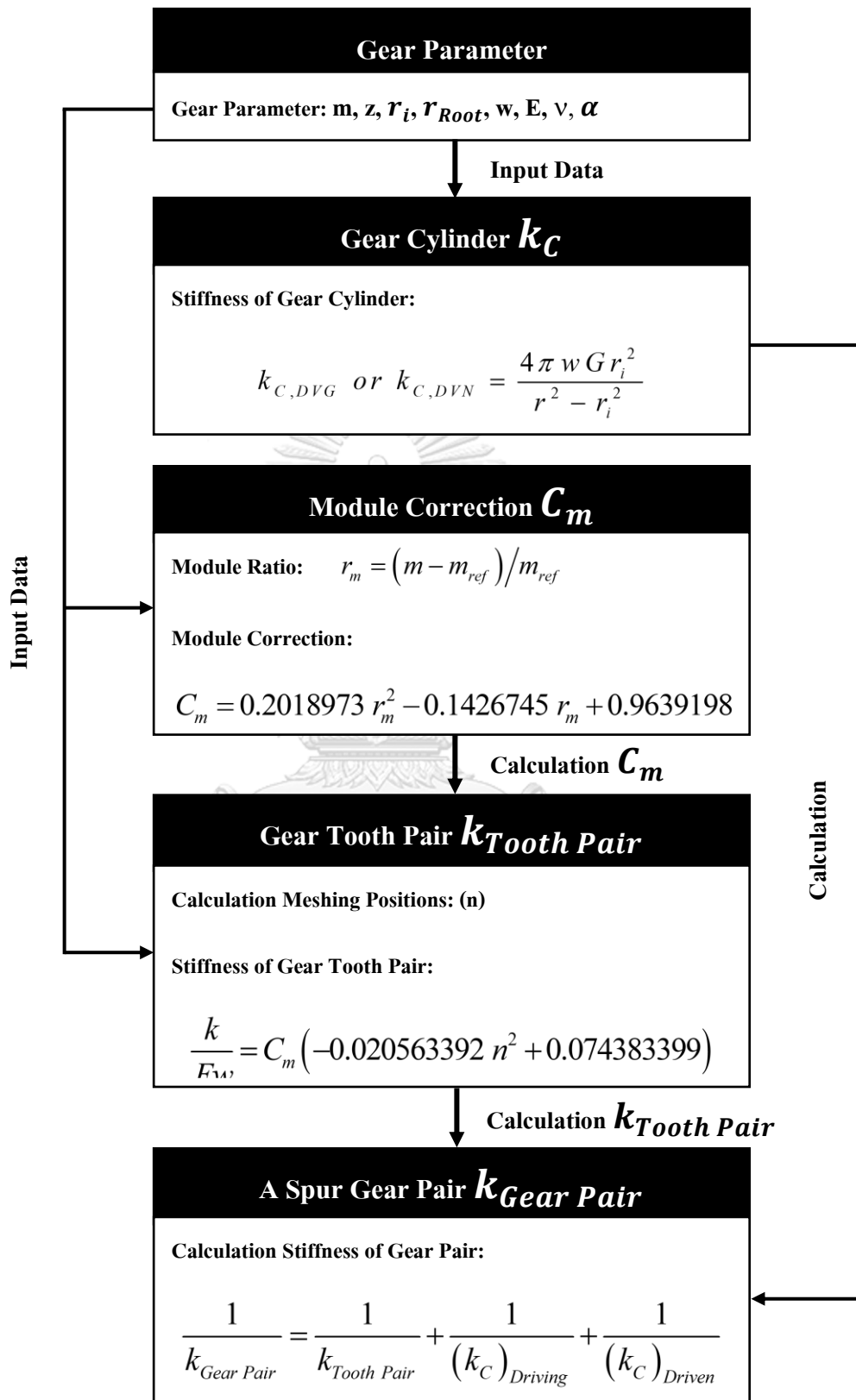


รูปที่ 4.8 การเปรียบเทียบความแข็งแรงที่คำนวณได้จากสมการกับ FEM ของชุดเฟือง A – H

ตารางที่ 4.3 ค่าความคลาดเคลื่อนของความแข็งแกร่งของคู่เฟืองจากรูปที่ 4.8

Model	Module	Maximum Absolute Error %	Average Error %
A	3	2.378	-0.968
B	2	0.878	0.498
C	4	6.393	1.070
D	5	2.607	-0.198
G	2	8.456	-3.992
H	2	6.002	-2.701





รูปที่ 4.9 แผนผังการคำนวณค่าความแข็งเกร็งของเฟือง

4.4 สรุป

ในบทนี้กล่าวถึงกระบวนการสร้างสมการอย่างง่ายเพื่อใช้ประมาณค่าความแข็งแรงของคู่เฟืองตรง โดยแบ่งค่าความแข็งแรงออกเป็น 2 ส่วน ได้แก่ 1. ค่าความแข็งแรงส่วนทรงกระบอกเฟือง และ 2. ค่าความแข็งแรงส่วนของคู่ฟันเฟือง โดยสมการคำนวณค่าความแข็งแรงส่วนทรงกระบอกเฟืองสร้างจากสมการพื้นฐานกลศาสตร์ของแข็ง สำหรับสมการคำนวณความแข็งแรงของคู่ฟันเฟืองสร้างโดยใช้การ Fit curve จากผลการคำนวณพื้นฐานที่คำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และคุณการปรับแก้โมดูลเพิ่มเข้าไปเพื่อให้ค่าที่ได้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น

ผลการคำนวณข้างต้นพบว่าสมการที่สร้างขึ้นสามารถประมาณค่าความแข็งแรงของชุดเฟืองที่ใช้ในการสร้างสมการได้อย่างถูกต้อง โดยมีความผิดพลาดสูงสุดน้อยกว่า 10% และมีความผิดพลาดเฉลี่ยน้อยกว่า 5% ซึ่งแสดงให้เห็นว่าเป็นไปได้ที่สมการที่สร้างขึ้นจะสามารถนำไปใช้ทำนายค่าความแข็งแรงของเฟืองตรงได้ โดยการตรวจสอบสมการที่สร้างขึ้นกับชุดเฟืองอื่นๆ และงานวิจัยอื่นๆ จะแสดงในบทต่อไป

วิธีการคำนวณค่าความแข็งแรงของเฟืองตรงที่แสดงในบทนี้เป็นเฉพาะเฟืองที่มีมุมกด 20° เท่านั้น สำหรับเฟืองที่มีมุมกด 14.5° หรือ 25° ก็สามารถทำได้โดยใช้หลักการเดียวกัน

บทที่ 5

การตรวจสอบผลการคำนวณความแข็งแรงของคู่เฟืองตรงด้วยสมการที่สร้างขึ้น

ในบทที่ผ่านมาได้นำเสนอสมการอย่างง่ายเพื่อใช้ประเมินค่าความแข็งแรงของคู่เฟืองตรงไปแล้ว อย่างไรก็ตามยังมีประเด็นที่จะต้องศึกษาเพิ่มเติมเพื่อให้ได้สมการที่สมบูรณ์มากขึ้น โดยการศึกษาในขั้นตอนต่อไปมีรายการดังนี้ 1. การตรวจสอบผลการคำนวณด้วยสมการที่สร้างขึ้นกับผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟืองอื่นๆ โดยตรวจสอบกับชุดเฟืองที่มีโมดูลัส โมดูล ความกว้างหน้าฟันและอัตราทดแตกต่างจากชุดเฟืองที่ใช้สร้างสมการ และ 2. การเปรียบเทียบผลการคำนวณด้วยสมการที่สร้างขึ้นกับผลของงานวิจัยอื่น โดยรายละเอียดแต่ละหัวข้อเป็นต่อไป

5.1 ชุดเฟืองที่ใช้ตรวจสอบผลการคำนวณด้วยสมการ

จากบทที่ 4 จะเห็นได้ว่าสมการอย่างง่ายที่สร้างขึ้นสามารถใช้ทำนายค่าความแข็งแรงของชุดเฟืองที่ใช้สร้างสมการได้อย่างถูกต้อง อย่างไรก็ตามเพื่อให้มั่นใจได้ว่าสมการที่สร้างขึ้นสามารถนำไปใช้ได้จริง จึงจำเป็นต้องคำนวณเพื่อตรวจสอบกับชุดเฟืองอื่นๆ ด้วย โดยในที่นี้ได้เลือกตรวจสอบผลการคำนวณด้วยสมการกับผลที่คำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟืองอื่นๆ ซึ่งมีพารามิเตอร์ดังตารางที่ 5.1 ได้แก่ 1. การตรวจสอบผลของค้ายังโมดูลัสด้วยชุดเฟือง TE 2. การตรวจสอบผลของโมดูลด้วยชุดเฟือง TM 3. การตรวจสอบผลของความกว้างหน้าฟันด้วยชุดเฟือง TW และ 4. การตรวจสอบกับชุดเฟืองที่มีอัตราทดแตกต่างไปจากชุดเฟืองตั้งต้นด้วยชุดเฟือง TR

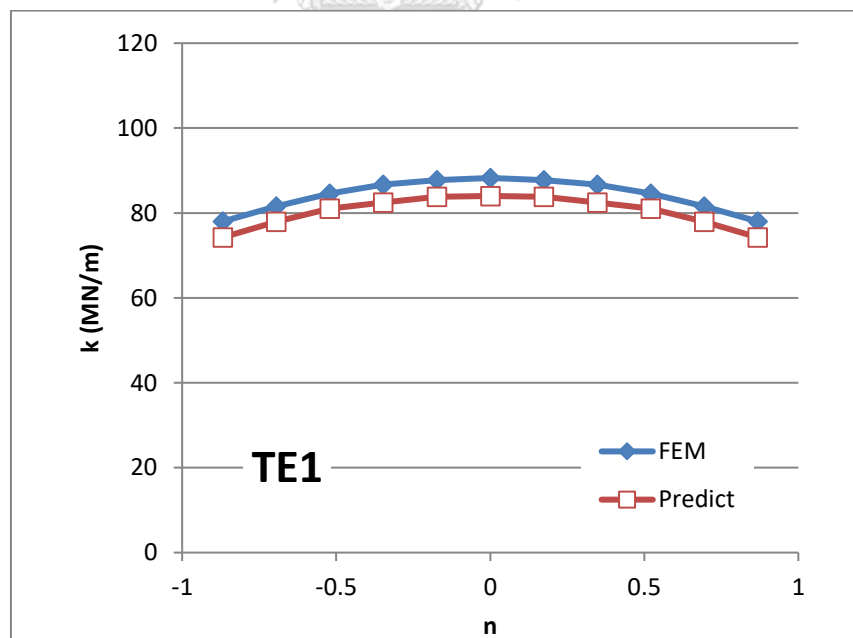
ตารางที่ 5.1 ชุดเฟืองที่ใช้ตรวจสอบผลการคำนวณด้วยสมการที่สร้างขึ้น

Gear Parameter	Gear Verify										
	TE1	TE2	TE3	TM1	TM2	TM3	TR1		TW1	TW2	TW3
Number of Teeth (Teeth)	30	30	45	60	36	15	18	36	30	30	30
Module (mm)	3	2	2	1	2.5	6	3		3	3	3
Pressure Angle (°)	20	20	20	20	20	20	20		20	40	60
Gear Ratio	1 : 1	1 : 1	1 : 1	1 : 1	1 : 1	1 : 1	1 : 2		1 : 1	1 : 1	1 : 1
Poisson's Ratio	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3		0.3	0.3	0.3
Young's Modulus (GPa)	70	70	115	200	200	200	200		200	200	200
Force at LOA (N)	2364	2364	2364	2364	2364	2364	2364		7094	7094	7094

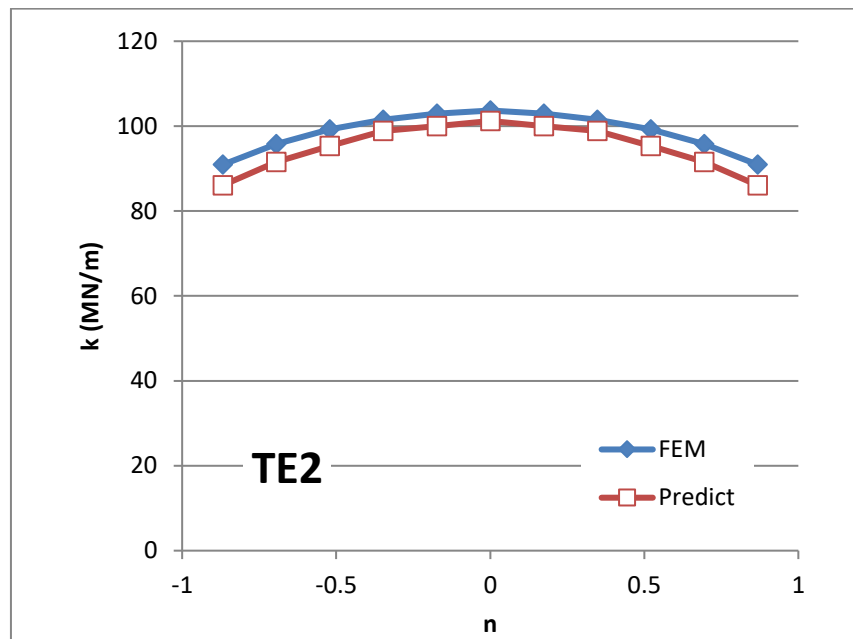
5.2 การตรวจสอบผลการคำนวณในกรณีค่าโมดูลัสต่างจากชุดเฟืองที่ใช้สร้างสมการ

การตรวจสอบผลการคำนวณในกรณีที่เฟืองมีค่าโมดูลัสต่างจากชุดเฟืองที่ใช้สร้างสมการ โดยคำนวณเทียบกับชุดเฟือง TE1, TE2, TE3 ที่มีพารามิเตอร์ทางเรขาคณิตเช่นเดียวกับเฟือง A B และ G แต่มีค่าโมดูลัสแตกต่างกันออกไป โดยวัสดุที่เลือกใช้ทำเฟือง ได้แก่ Aluminum, Bronze และ Iron ซึ่งมีค่าเท่ากับ 70 GPa, 115 GPa และ 200 GPa ตามลำดับ

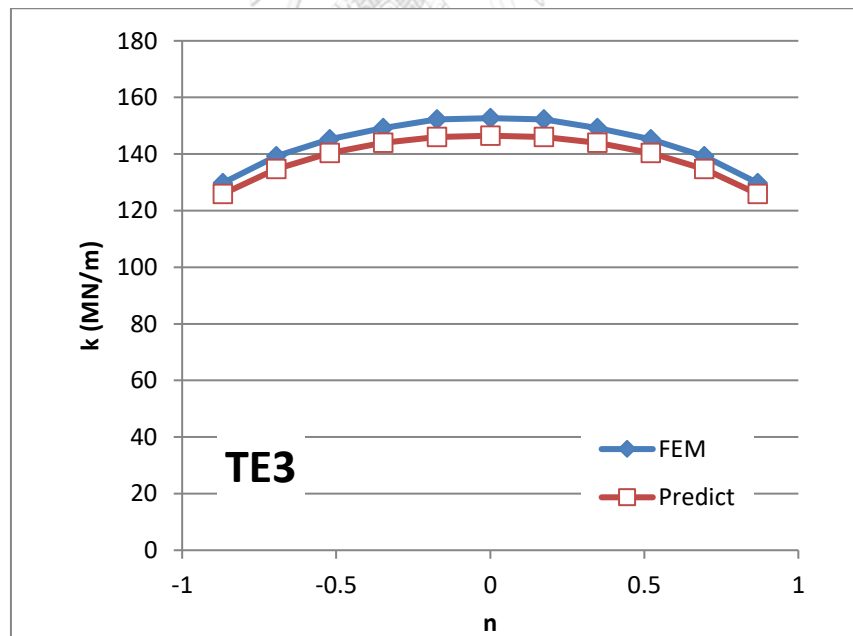
รูปที่ 5.1 - 5.3 แสดงการเปรียบเทียบผลลัพธ์ความแข็งแรงที่คำนวณได้จากสมการที่สร้างขึ้นและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง TE1 TE2 และ TE3 ที่มีค่าโมดูลัสต่างจากชุดเฟืองที่ใช้สร้างสมการ พบว่าความแข็งแรงที่คำนวณได้จากทั้ง 2 วิธีของเฟืองทั้ง 3 ชุดมีค่าใกล้เคียงกันมาก โดยมีความคลาดเคลื่อนสูงสุดไม่เกิน 10% และมีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยไม่เกิน 5% ดังตารางที่ 5.2 โดยชุดเฟืองที่มีค่าโมดูลัสมากกว่าแต่พารามิเตอร์อื่นเท่ากันก็จะมีค่าความแข็งแรงมากกว่าชุดเฟืองที่มีโมดูลัสน้อยกว่า ซึ่งการตรวจสอบแบบนี้แสดงให้เห็นว่าสมการที่สร้างขึ้นสามารถใช้นำมาหาค่าความแข็งแรงของเฟืองที่มีค่าโมดูลัสแตกต่างกันได้อย่างถูกต้อง



รูปที่ 5.1 ผลลัพธ์ความแข็งแรงของชุดเฟือง TE1



รูปที่ 5.2 ผลลัพธ์ความแข็งเกร็งของชุดเฟือง TE2

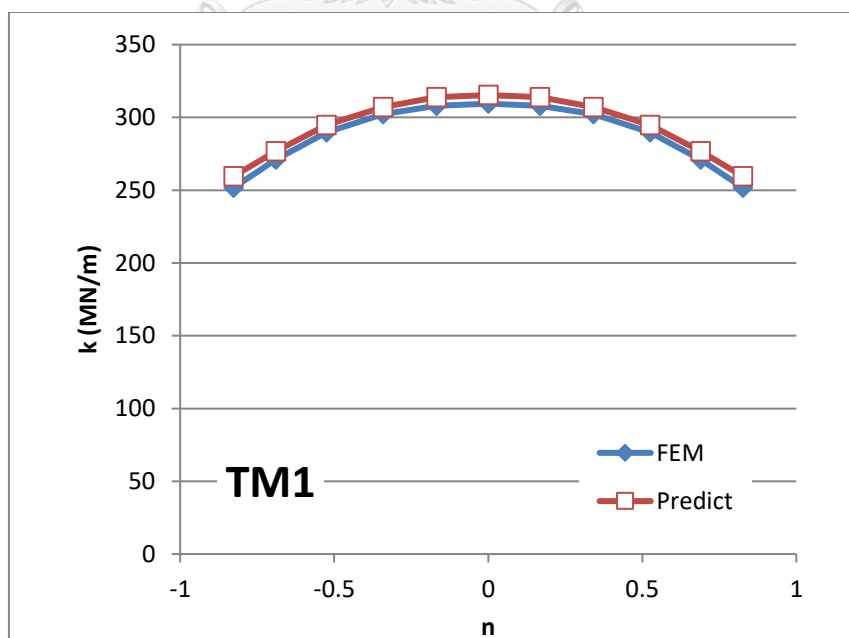


รูปที่ 5.3 ผลลัพธ์ความแข็งเกร็งของชุดเฟือง TE3

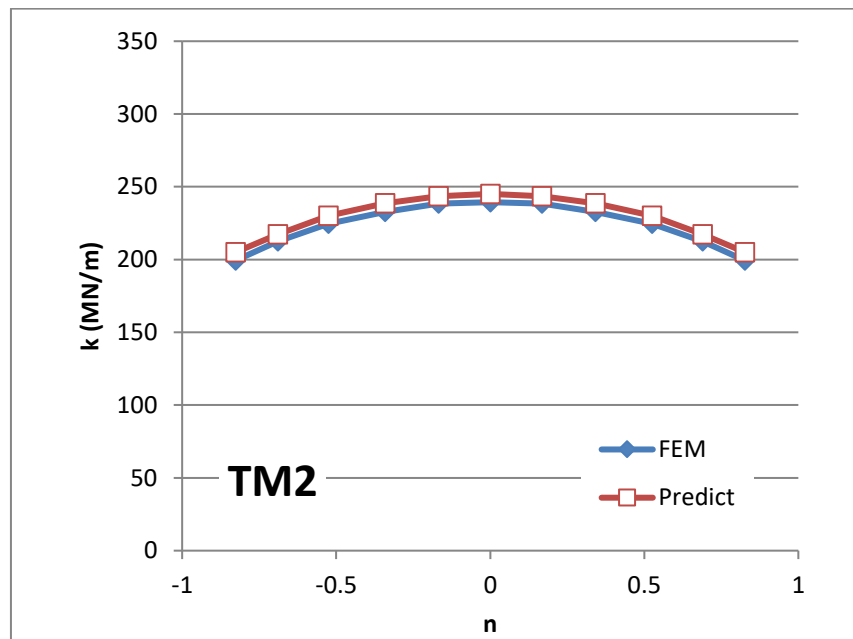
5.3 การตรวจสอบผลการคำนวณกับเฟืองที่มีโมดูลต่างจากเฟืองที่ใช้สร้างสมการ

การสร้างสมการเพื่อทำนายความแข็งแรงได้ใช้ผลของชุดเฟืองที่มีโมดูล 2, 3, 4 และ 5 ในการสร้าง อย่างไรก็ตามสมการที่สร้างขึ้นจะสามารถยืนยันว่าใช้ได้กับชุดเฟืองที่มีค่าโมดูลต่างออกไปหรือไม่ ในที่นี้จึงใช้ชุดเฟือง TM1, TM2, TM3 ซึ่งมีโมดูลเท่ากับ 1 mm, 2.5 mm และ 6 mm เพื่อตรวจสอบสมการที่สร้างขึ้น โดยเฟือง TM2 จะมีค่าโมดูลอยู่ในช่วงโมดูลของเฟืองตั้งต้นที่ใช้สร้างสมการ (2 - 5 mm) ส่วนเฟือง TM1 และ TM3 จะมีค่าโมดูลน้อยกว่าและมากกว่าโมดูลของชุดเฟืองที่ใช้สร้างสมการตามลำดับ

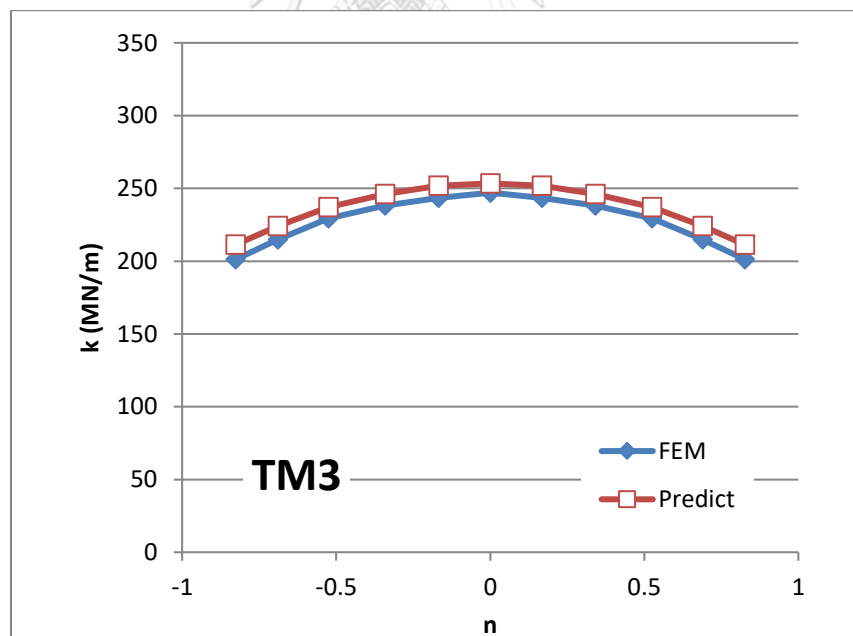
รูปที่ 5.4 - 5.6 แสดงผลลัพธ์ความแข็งแรงที่คำนวณได้จากสมการที่สร้างขึ้นและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง TM1 TM2 และ TM3 ตามลำดับ พบว่าความแข็งแรงของชุดเฟืองทั้ง 3 มีแนวโน้มไปในทิศทางเดียวกันและมีค่าใกล้เคียงกัน โดยมีความคลาดเคลื่อนสูงสุดของเฟืองทุกชุดมีค่าไม่เกิน 10% และมีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยไม่เกิน 5% ดังตารางที่ 5.2 ในกรณีนี้แสดงให้เห็นว่าสมการคำนวณที่สร้างขึ้นสามารถทำนายความแข็งแรงของชุดเฟืองที่มีโมดูลแตกต่างกันได้อย่างถูกต้อง



รูปที่ 5.4 ผลลัพธ์ความแข็งแรงของชุดเฟือง TM1



รูปที่ 5.5 ผลลัพธ์ความแข็งเกร็งของชุดเฟือง TM2

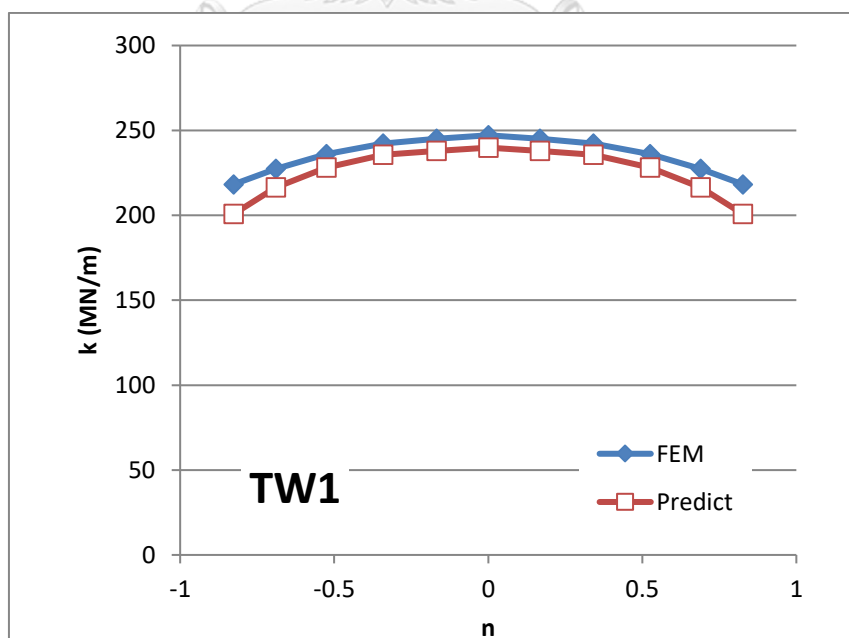


รูปที่ 5.6 ผลลัพธ์ความแข็งเกร็งของชุดเฟือง TM3

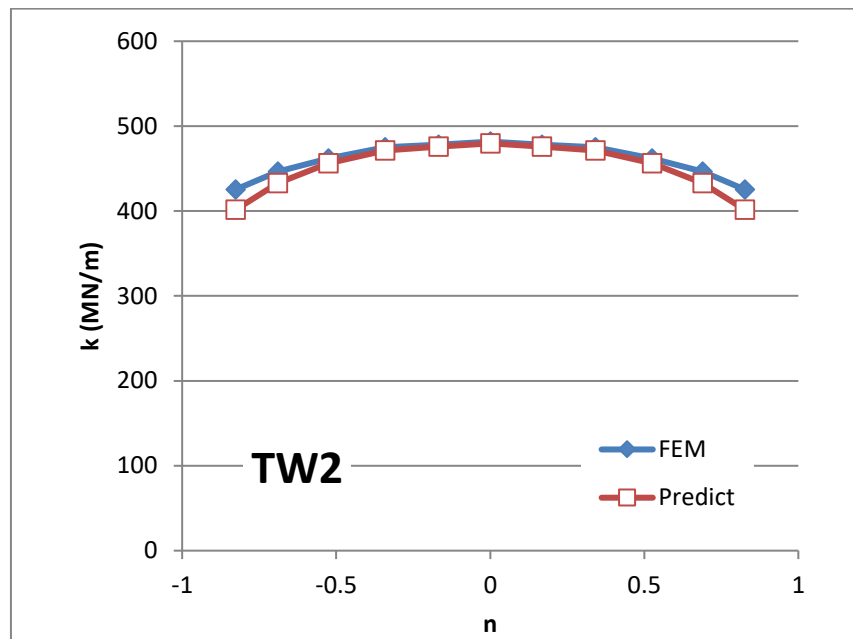
5.4 การตรวจสอบผลการคำนวณในกรณีความกว้างหน้าฟันต่างจากชุดเฟืองที่ใช้สร้างสมการ

เนื่องจากสมการที่สร้างขึ้นเพื่อคำนวณความแข็งแรงของคู่เฟืองขึ้นอยู่กับค่ายังโมดูลัสและความกว้างหน้าฟัน ซึ่งการตรวจสอบผลการคำนวณในกรณีที่เฟืองมีค่าโมดูลัสต่างออกไปได้กล่าวไปแล้ว ในหัวข้อนี้จึงจะกล่าวถึงการตรวจสอบผลของความกว้างหน้าฟัน โดยเลือกใช้ชุดเฟืองตั้งต้น A ที่มีโมดูลเท่ากับ 3 mm ซึ่งมีความกว้างหน้าฟันเท่ากับ 20 mm 40 mm และ 60 mm และให้แรงกระทำในเส้นแนวแรงกระทำเท่ากันมีค่าเท่ากับ 7094.6 N

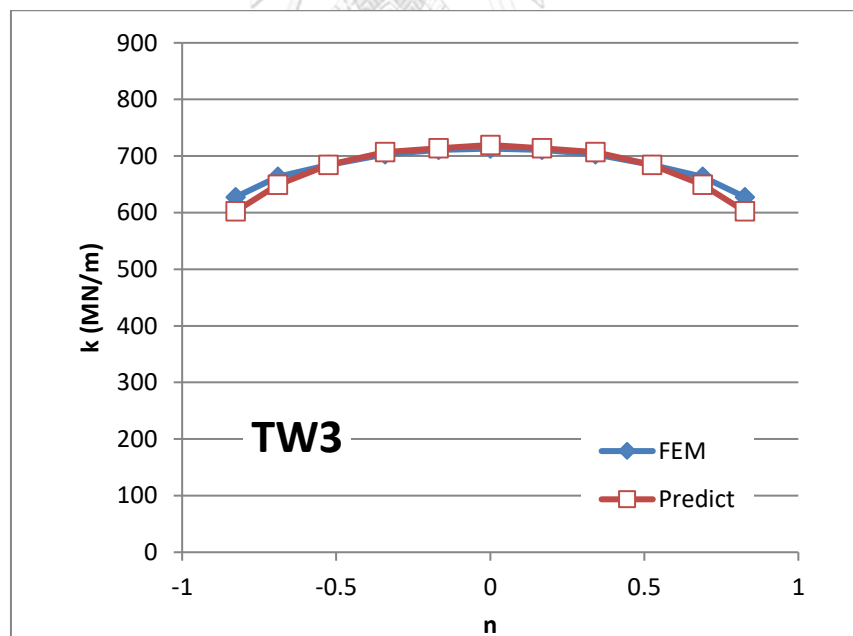
รูปที่ 5.7 – 5.9 แสดงผลการคำนวณด้วยสมการเปรียบเทียบกับผลที่คำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง TW1 TW2 และ TW3 พบว่าความแข็งแรงของชุดเฟืองที่มีความกว้างหน้าฟันมากกว่าจะมีค่ามากกว่าความแข็งแรงของชุดเฟืองที่มีความกว้างหน้าฟันน้อยกว่า เนื่องจากความกว้างหน้าฟันมากขึ้นส่งผลให้ความต้านทานการเสียรูปของเฟืองมากขึ้นเช่นกัน ดังนั้นการเสียรูปของเฟืองจึงน้อย ทำให้ความแข็งแรงของเฟืองก็จะมีค่ามากขึ้นด้วย โดยผลการคำนวณมีความคลาดเคลื่อนสูงสุดของเฟืองทุกชุดมีค่าไม่เกิน 10% และมีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยไม่เกิน 5% ดังตารางที่ 5.2



รูปที่ 5.7 ผลลัพธ์ความแข็งแรงของชุดเฟือง TW1



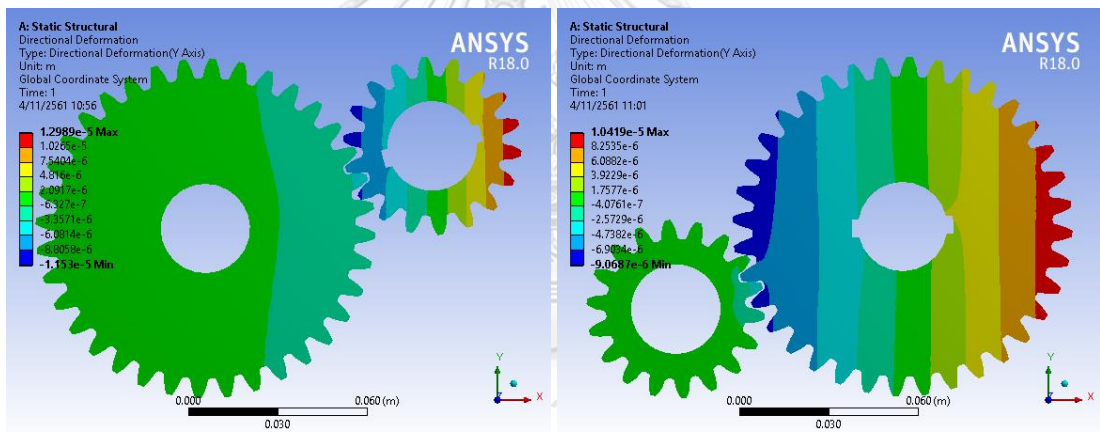
รูปที่ 5.8 ผลลัพธ์ความแข็งเกร็งของชุดเฟือง TW2



รูปที่ 5.9 ผลลัพธ์ความแข็งเกร็งของชุดเฟือง TW3

5.5 การตรวจสอบผลการคำนวณกับคู่เฟืองที่มีอัตราทดต่างจากชุดเฟืองที่ใช้สร้างสมการ

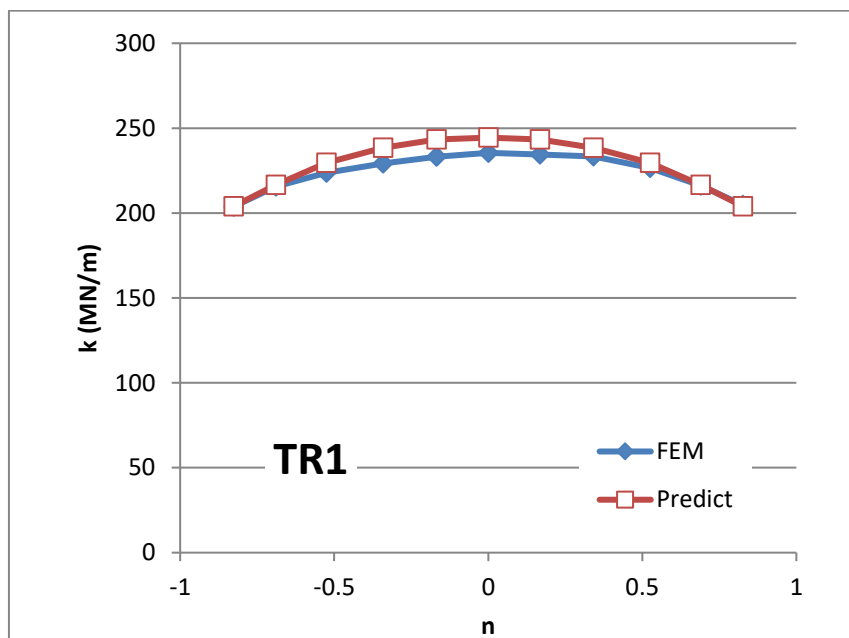
เนื่องจากชุดเฟืองตั้งต้นทั้งหมดที่ใช้สร้างสมการมีอัตราทด 1 : 1 เพื่อตรวจสอบว่าสมการที่สร้างขึ้นสามารถทำนายความแข็งแรงของชุดเฟืองที่มีอัตราทดแตกต่างกันออกไปได้หรือไม่ ในที่นี้ใช้ชุดเฟือง TR1 ซึ่งมีอัตราทด 1 : 2 โมดูลเท่ากับ 3 mm เฟืองตัวแรกมีจำนวนฟันเท่ากับ 18 ซี่ และเฟืองตัวที่สองมี 36 ซี่ โดยเปรียบเทียบระหว่างผลที่คำนวณด้วยสมการที่สร้างขึ้นกับผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งวิธีการคำนวณค่าการเสียรูปของเฟืองด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะกำหนดให้เฟืองทั้ง 2 เป็นเฟืองตามทั้งคู่ โดยให้เฟืองที่เหลืออีกตัวเป็นเฟืองขับสลับกันดังแสดงในรูปที่ 5.10 จากนั้นคำนวณหาการเสียรูปของเฟืองตาม โดยใช้หลักการที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 2 และสามารถนำค่าการเสียรูปมาหาความแข็งแรงรวมของคู่เฟืองได้



รูปที่ 5.10 การเสียรูปของเฟืองที่มีอัตราทดแตกต่างจากชุดเฟืองที่ใช้สร้างสมการ

ความแข็งแรงของคู่เฟืองที่มีอัตราทด 1 : 2 ที่คำนวณได้จากสมการที่สร้างขึ้นเทียบกับผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ดังแสดงในรูปที่ 5.11 พบว่าแนวโน้มความแข็งแรงที่คำนวณได้จากสมการมีลักษณะเป็นเส้นโค้ง โดยมีความแข็งแรงรวมของคู่เฟืองที่ตำแหน่งการขบเดียวกันแต่ทิศทางตรงกันข้ามมีค่าเท่ากัน ส่วนผลจาก FEM กราฟจะมีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมหนึ่งเนื่องจากผลของการเสียรูปของเฟืองขับและเฟืองตามมีค่าไม่เท่ากัน ความแข็งแรงของเฟืองทั้งสองจึงมีค่าไม่เท่ากัน แต่เมื่อนำมาหาความแข็งแรงรวมแล้วยังมีแนวโน้มของค่าที่ใกล้เคียงกับผลที่

คำนวณได้จากสมการ โดยมีความคลาดเคลื่อนสูงสุดของเฟืองมีค่าไม่เกิน 5% ดังตารางที่ 5.2 ดังนั้น จึงยืนยันได้ว่าสมการที่สร้างขึ้นสามารถนำไปคำนวณกับชุดเฟืองที่มีอัตราทดอื่นๆ ได้ถูกต้อง



รูปที่ 5.11 ผลลัพธ์ความแข็งเกร็งของชุดเฟือง TR1

ตารางที่ 5.2 แสดงความคลาดเคลื่อนในหัวข้อการตรวจสอบผลการคำนวณด้วยสมการที่สร้างขึ้นกับผลที่คำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟืองที่มีพารามิเตอร์แตกต่างจากชุดเฟืองตั้งต้น โดยมีชุดเฟือง TE1 TE2 TE3 ที่มีค่ายังไม่ดุลสัตต่างจากชุดเฟืองตั้งต้น ชุดเฟือง TM1 TM2 TM3 ที่มีโมดูลต่างจากชุดเฟืองตั้งต้น ชุดเฟือง TW1 TW2 TW3 ที่มีความกว้างหน้าฟันต่างจากชุดเฟืองตั้งต้น และชุดเฟือง TR1 ที่มีอัตราทดต่างจากชุดเฟืองตั้งต้น ผลการคำนวณพบว่าความคลาดเคลื่อนสูงสุดของเฟืองทุกชุดมีค่าไม่เกิน 10% และมีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยไม่เกิน 5% ดังนั้น สมการที่สร้างขึ้นสามารถทำนายค่าความแข็งเกร็งของชุดเฟืองที่มีพารามิเตอร์แตกต่างจากชุดเฟืองที่ใช้สร้างสมการได้อย่างถูกต้อง

ตารางที่ 5.2 ความคลาดเคลื่อนของชุดเฟืองที่พารามิเตอร์ต่างจากชุดเฟืองที่ใช้สร้างสมการ

Model Test	Young's Modulus (GPa)	Module (mm)	Face Width (mm)	Gear Ratio	Maximum Error %	Average Error %
TE1	70	3	20	1 : 1	4.86	-4.59
TE2	70	2	20	1 : 1	5.35	-3.68
TE3	115	2	20	1 : 1	4.10	-3.51
TM1	200	1	20	1 : 1	3.11	2.07
TM2	200	2.5	20	1 : 1	2.85	2.47
TM3	200	6	20	1 : 1	5.04	3.76
TW1	200	3	20	1 : 1	8.01	-4.23
TW2	200	3	40	1 : 1	5.59	-2.55
TW3	200	3	60	1 : 1	4.02	-0.85
TR1	200	3	20	1 : 2	4.34	2.03

5.6 การตรวจสอบผลการคำนวณกับผลของงานวิจัยอื่น

การตรวจสอบในหัวข้อนี้ทำโดยการคำนวณหาค่าความแข็งแรงด้วยสมการที่สร้างขึ้น เปรียบเทียบกับผลความแข็งแรงของงานวิจัยอื่นที่มีการแสดงค่าพารามิเตอร์ของเฟืองที่ครบถ้วน โดยงานวิจัยที่ใช้ตรวจสอบผลลัพธ์ ได้แก่ งานวิจัยของ Hui Ma [12] และงานวิจัยของ A. Fernandez Del Rincon [22] ซึ่งรายละเอียดของการตรวจสอบกล่าวต่อไปนี้

5.6.1 เปรียบเทียบความแข็งแรงกับงานวิจัย Hui Ma [12]

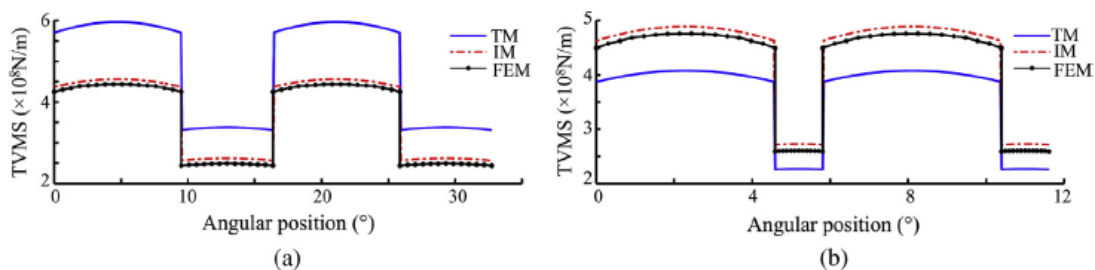
ในที่นี้ได้นำชุดเฟืองจากงานวิจัยของ Hui Ma ที่มีพารามิเตอร์ของเฟืองดังแสดงในตารางที่ 5.3 มาใช้ในการตรวจสอบผลจากการคำนวณด้วยสมการที่สร้างขึ้น โดยเปรียบเทียบผลการคำนวณกับชุดเฟือง 2 ชุดที่มีพารามิเตอร์แตกต่างกัน ซึ่งก็คือชุดเฟือง Gear Pair 1 และ Gear Pair 2

ตารางที่ 5.3 พารามิเตอร์ของชุดเฟืองจากงานวิจัยของ Hui Ma

Parameters of spur gear pairs parameters	Gear Pair 1		Gear Pair 2	
	Pinion	Gear	Pinion	Gear
Number of teeth N	22	22	62	62
Young's Modulus E (GPa)	206	206	206	206
Possion's ratio ν	0.3	0.3	0.3	0.3
Module m (mm)	3	3	3	3
Addendum coefficient h_a	1	1	1	1
Tip clearance coefficient C	0.25	0.25	0.25	0.25
Tooth width L (mm)	20	20	20	20
Pressure angle α (-)	20	20	20	20
Hub bore radius r_{int} (mm)	11.7	11.7	35.7	35.7

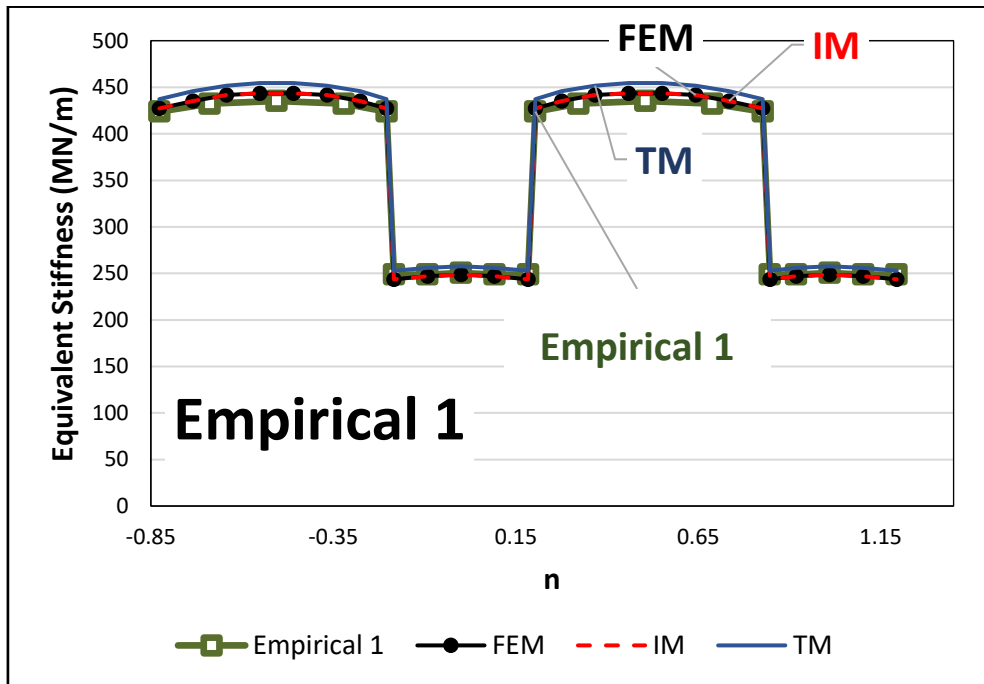
รูปที่ 5.12 แสดงผลความแข็งแรงของคู่เฟืองตรงจากงานวิจัยของ Hui Ma โดยในผลดังกล่าวแสดงค่าความแข็งแรงที่คำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) ผลจากวิธีวิเคราะห์เดิมของ Hui Ma (TM) และผลจากสมการที่ปรับปรุงขึ้นใหม่ของงานวิจัยดังกล่าว (IM) โดยในที่นี้จะพิจารณาผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ *FEM* (บริเวณเส้นสีดำมีจุด) และผลจากสมการที่

ปรับปรุงชิ้นใหม่ของงานวิจัยดังกล่าว *IM* เพื่อนำมาเปรียบเทียบกับผลที่คำนวณด้วยสมการที่สร้างขึ้น

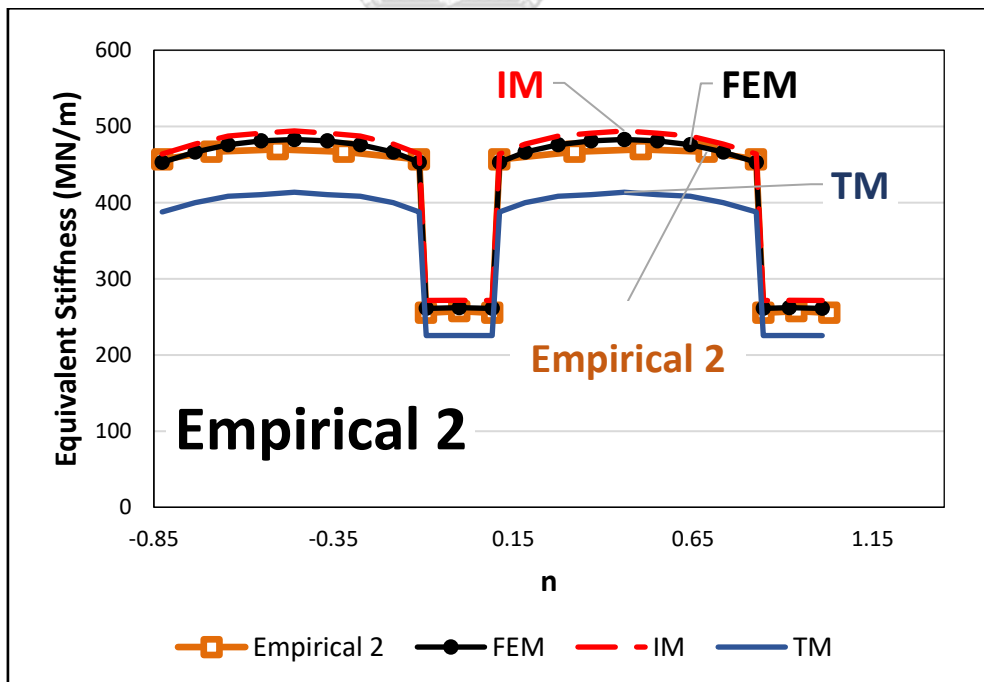


รูปที่ 5.12 ผลลัพธ์ความแข็งแรงจากงานวิจัยของ Hui Ma [12]

ผลการเปรียบเทียบระหว่างความแข็งแรงที่คำนวณด้วยสมการที่สร้างขึ้นกับผลลัพธ์จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของงานวิจัย Hui Ma แสดงในรูปที่ 5.13 สำหรับผลการเปรียบเทียบความแข็งแรงของชุดเฟือง Empirical 1 และรูปที่ 5.14 สำหรับผลการเปรียบเทียบความแข็งแรงของชุดเฟือง Empirical 2 จากตารางที่ 5.5 แสดงความคลาดเคลื่อนจากผลการเปรียบเทียบของเฟืองทั้ง 2 ชุด พบว่าความคลาดเคลื่อนจากผลการคำนวณด้วยสมการที่สร้างขึ้นของชุดเฟือง Empirical 1 มีค่าต่างจากผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของงานวิจัย Hui Ma ประมาณ 2% ต่างจากวิธีการวิเคราะห์ประมาณ 5% และมีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยประมาณ 2% ส่วนผลการคำนวณของชุดเฟือง Empirical 2 มีค่าต่างจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ประมาณ 3% ต่างจากวิธีการวิเคราะห์ประมาณ 7% และมีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยประมาณ 4% จึงสรุปได้ว่าสมการที่สร้างขึ้นสามารถทำนายค่าความแข็งแรงของเฟืองได้อย่างถูกต้อง



รูปที่ 5.13 ผลการเปรียบเทียบชุดเฟือง Empirical 1



รูปที่ 5.14 ผลการเปรียบเทียบชุดเฟือง Empirical 2

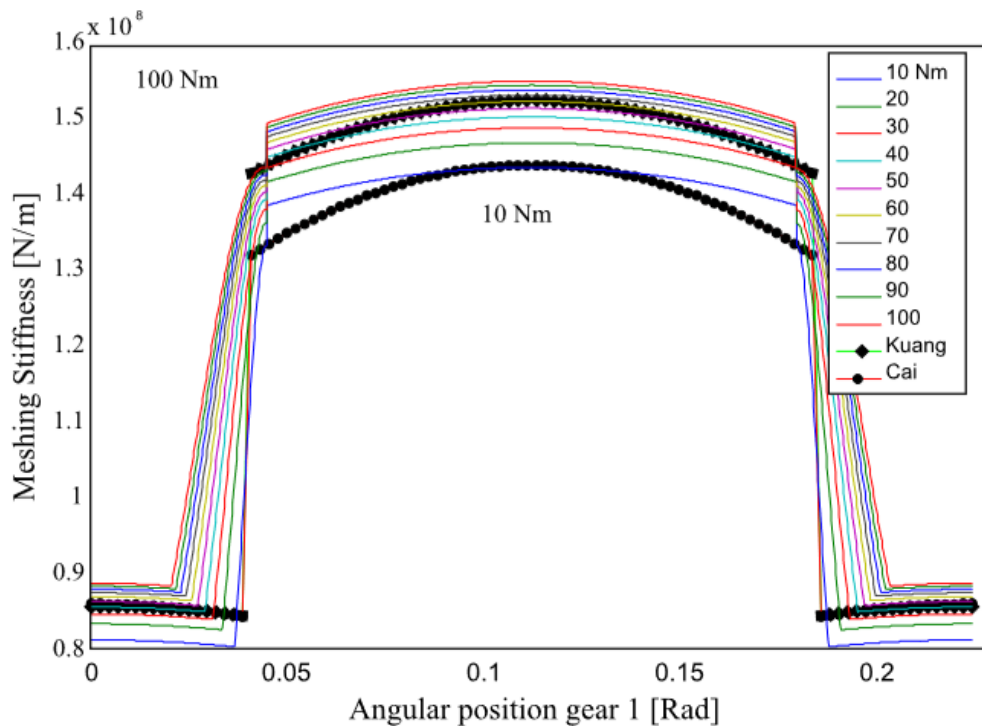
5.6.2 เปรียบเทียบความแข็งแรงกับงานวิจัย A. Fernandez Del Rincon [22]

การเปรียบเทียบความแข็งแรงในหัวข้อนี้ใช้พารามิเตอร์ของเฟืองดังแสดงในตารางที่ 5.4 และใช้ผลความแข็งแรงจากงานวิจัยของ A. Fernandez Del Rincon ดังแสดงในรูปที่ 5.15 โดยเส้นบางคือผลความแข็งแรงของ Fernandez จากรูปแสดงผลในกรณีที่ให้ภาระกระทำกับเฟืองต่างกัน จะเห็นได้ว่าความแข็งแรงจะมีค่าต่างกันด้วย อย่างไรก็ตามงานวิจัยนี้ให้แรงบิดกระทำกับชุดเฟืองมีค่าเท่ากับ 100 Nm – 300 Nm การเปรียบเทียบผลลัพธ์จึงพิจารณาเฉพาะผลจากงานวิจัยของ Fernandez เป็นที่มีแรงบิดกระทำเท่ากับ 100 Nm เท่านั้น สำหรับกรณีนี้จะใช้ชุดเฟือง Empirical 3 คำนวณความแข็งแรงจากสมการที่สร้างขึ้นเปรียบเทียบกับผลการคำนวณจากงานวิจัยดังกล่าว นอกจากนี้ในรูปยังแสดงผลเส้นดำคือความแข็งแรงของงานวิจัย Kuang กับ Cai ที่ไม่ขึ้นกับภาระกระทำ

ตารางที่ 5.4 พารามิเตอร์ของเฟืองตรงจากงานวิจัยของ A. Fernandez Del Rincon [22]

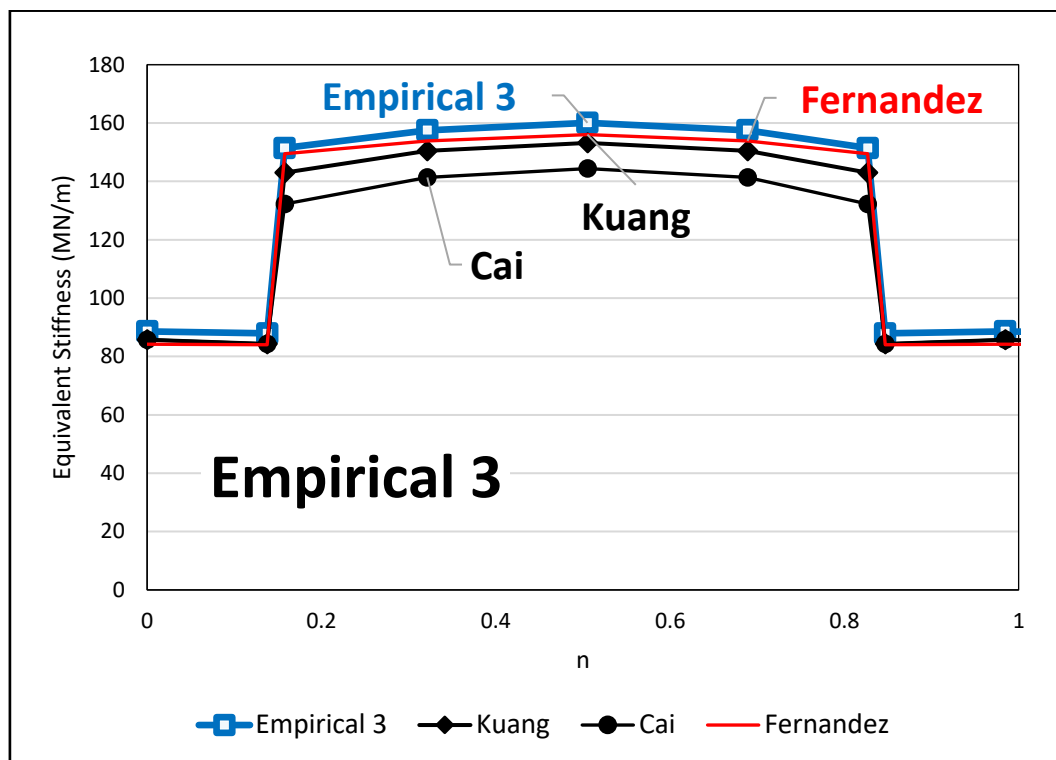
Spur gear set data

Parameters	Value	Parameters	Value
Number of teeth N	28	Rack tip rounding	0.25 m
Normal Module (m)	3.175 (mm)	Gear tip rounding	0.05 m
Elasticity modulus	210 (GPa)	Gear face width	6.35 {mm}
Poisson's Ratio	0.3	Gear shaft radius	20 {mm}
Pressure angle	20 (Degree)	Mass (m_{iR1})	0.7999 {kg}
Rack Addendum	1.25 m	Gear inertia (J_{iR1})	$4.0 \cdot 10^{-4}$ {Kgm ² }
Rack Dedendum	1 m		



รูปที่ 5.15 ผลลัพธ์ความแข็งเกร็งจากงานวิจัย A. Fernandez Del Rincon [22]

จากรูปที่ 5.16 เมื่อคำนวณหาความคลาดเคลื่อนจากผลการเปรียบเทียบระหว่างผลที่คำนวณได้จากสมการที่สร้างขึ้นกับผลจากงานวิจัยของ Fernandez (ANL) ของชุดเฟือง Empirical 3 จากตารางที่ 5.5 พบว่ามีความคลาดเคลื่อนสูงสุดไม่เกิน 5% และมีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยไม่เกิน 3% จึงสรุปได้ว่าสมการที่สร้างขึ้นสามารถใช้ทำนายค่าความแข็งเกร็งของคู่เฟืองตรงได้อย่างถูกต้อง



รูปที่ 5.16 การเปรียบเทียบผลลัพธ์กับงานวิจัยของ A. Fernandez Del Rincon

ตารางที่ 5.5 ความคลาดเคลื่อนจากงานวิจัยอื่น

Model Test	Maximum Absolute Error from FEM %	Maximum Absolute Error from ANL %	Average Error %
Empirical 1	2.05	4.44	-1.49
Empirical 2	2.78	6.35	-4.13
Empirical 3	-	4.96	2.57

5.7 สรุป

ในบทนี้ได้กล่าวถึงการตรวจสอบสมการที่สร้างขึ้นกับชุดเฟืองที่มีพารามิเตอร์แตกต่างจากชุดเฟืองที่ใช้สร้างสมการ โดยตรวจสอบกับผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟืองที่มีค่าโมดูลัส โมดูล ความกว้างหน้าฟัน และอัตราทดของเฟืองที่แตกต่างออกไป ผลการตรวจสอบพบว่าความคลาดเคลื่อนจากสมการที่สร้างขึ้นกับผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟืองที่มีพารามิเตอร์ต่างออกไปดังกล่าวมีความคลาดเคลื่อนสูงสุดไม่เกิน 10% และมีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยไม่เกิน 5% ดังนั้นสมการที่สร้างขึ้นสามารถใช้ทำนายค่าความแข็งแรงของคู่เฟืองที่มีค่าโมดูลัส โมดูล ความกว้างหน้าฟัน และอัตราทดที่แตกต่างจากชุดเฟืองที่ใช้สร้างสมการได้อย่างถูกต้อง สำหรับการเปรียบเทียบผลการคำนวณจากสมการที่สร้างขึ้นกับผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์ของงานวิจัย Hui Ma [12] และ A Fernandez Del Rincon [22] พบว่ามีความคลาดเคลื่อนสูงสุดไม่เกิน 10% ซึ่งผลการตรวจสอบที่ได้กล่าวมาทั้งหมดนั้นยืนยันได้ว่าสมการที่สร้างขึ้นสามารถใช้คำนวณความแข็งแรงของคู่เฟืองตรงที่มีมุมกดเท่ากับ 20° แต่มีพารามิเตอร์อื่นแตกต่างไปจากชุดเฟืองที่ใช้สร้างสมการได้อย่างถูกต้อง

บทที่ 6

บทสรุป

ในบทนี้เป็นการสรุปสาระสำคัญทั้งหมดของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ซึ่งเป็นการรวบรวมเนื้อหาสำคัญในแต่ละบท รวมถึงข้อเสนอแนะเพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาความแข็งแรงของคู้เฟืองตรงต่อไป

6.1 สาระสำคัญของวิทยานิพนธ์

ในบทที่ 1 กล่าวถึงความแข็งแรงของเฟืองตรง ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ที่มีคุณสมบัติด้านทานการเสียดรูปของเฟืองภายใต้แรงที่กระทำบนเส้นแนวแรงกระทำ และมีความจำเป็นในการนำไปใช้กับปัญหาการสันสะเทือนเพื่อสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์วิเคราะห์การสันสะเทือนของเฟือง โดยการศึกษาหาความแข็งแรงของเฟืองตรงในงานวิจัยก่อนหน้ามักใช้วิธีการวิเคราะห์หรือใช้การคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ แต่วิธีเหล่านี้ไม่สามารถคำนวณได้โดยง่าย จึงไม่สะดวกในการนำไปใช้งานจริง งานวิจัยนี้จึงมีเป้าหมายในการสร้างสมการคำนวณหาความแข็งแรงของเฟืองตรงโดยใช้ทฤษฎีพื้นฐานกลศาสตร์ของแข็งและผลการคำนวณพื้นฐานที่คำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยคำนวณหาการเสียดรูปของเฟืองตรงที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS และคำนวณหาค่าความแข็งแรงของเฟือง ผลการคำนวณที่ได้สามารถนำมาวิเคราะห์รูปร่างของเฟืองตรงที่มีพารามิเตอร์ต่างๆ ที่มีผลต่อค่าความแข็งแรงของเฟืองและใช้สร้างสมการอย่างง่ายเพื่อใช้ประมาณค่าความแข็งแรงของคู้เฟืองได้ โดยประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัยนี้ ได้แก่ ทราบวิธีการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการสันสะเทือนการสัมผัสพื้นฐาน สามารถอธิบายผลของพารามิเตอร์ต่างๆ ที่มีผลต่อค่าความแข็งแรงของเฟืองตรงและได้สมการอย่างง่ายเพื่อใช้คำนวณค่าความแข็งแรงของเฟืองตรง และสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับเฟืองที่มีพารามิเตอร์อื่นๆ ได้

ในบทที่ 2 ได้กล่าวถึงการพิจารณาความแข็งแรงในส่วนต่างๆ ของเฟืองตรงและการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อคำนวณหาการเสียดรูปของเฟือง โดยการแบ่งส่วนความแข็งแรงของเฟืองในงานวิจัยนี้ได้แบ่งออกเป็น ความแข็งแรงส่วนของทรงกระบอกเฟือง ความแข็งแรง

ของคู่เฟือง ซึ่งวิธีการหาความแข็งแรงของคู่เฟืองทำได้โดยการนำความแข็งแรงของเฟืองขับและเฟืองตามมาต่อสปริงแบบอนุกรมกัน และความแข็งแรงของคู่ฟันเฟือง นอกจากนี้ยังได้อธิบายถึงวิธีการคำนวณหาความแข็งแรงในกรณีที่เฟืองขับส่งกำลัง 2 คู่ฟันอีกด้วย สำหรับการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อคำนวณหาการเสียรูปส่วนทรงกระบอกเฟืองและของคู่เฟืองทำได้โดยการสร้างโมเดลเฟืองจากโปรแกรม GearTrax ประกอบเฟืองตามตำแหน่งการขบที่ต้องการด้วยโปรแกรมออกแบบ CATIA และนำเข้าวิเคราะห์ต่อในโปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS โดยขั้นตอนและวิธีการใช้โปรแกรมคำนวณจะเริ่มอธิบายตั้งแต่การตั้งสมมติฐานและการตั้งค่าต่างๆ ในโปรแกรม เช่น การกำหนดลักษณะของปัญหา การแบ่งเอลิเมนต์ การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา การให้ภาระกระทำ และการเรียกดูผลลัพธ์ ซึ่งการตั้งสมมติฐานและการตั้งค่าเหล่านี้จะสามารถช่วยลดความซับซ้อนของปัญหาและช่วยลดระยะเวลาในการคำนวณลง ค่าการเสียรูปที่คำนวณได้จากโปรแกรมใช้คำนวณหาความแข็งแรงได้ สำหรับความแข็งแรงของคู่ฟันเฟืองสามารถหาได้โดยใช้ค่าความแข็งแรงของคู่เฟืองโดยไม่พิจารณาค่าความแข็งแรงส่วนทรงกระบอกเฟือง

ในบทที่ 3 ได้กล่าวถึงผลการคำนวณความแข็งแรงในส่วนต่างๆ ของเฟืองตรงจากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับผลการคำนวณความแข็งแรงของทรงกระบอกเฟืองของชุดเฟืองตั้งต้น ผลการคำนวณพบว่าความแข็งแรงของทรงกระบอกเฟืองของชุดเฟืองที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางน้อยมีค่ามากกว่าความแข็งแรงของทรงกระบอกเฟืองของชุดเฟืองที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางมาก สำหรับความแข็งแรงของคู่เฟืองตรงที่มีพารามิเตอร์รูปร่างต่างๆ กัน ผลการคำนวณพบว่าเฟืองที่มีมุมกดน้อยจะมีความแข็งแรงน้อยกว่าเฟืองที่มีมุมกดมาก เฟืองที่มีจำนวนน้อยจะมีความแข็งแรงมากกว่าเฟืองที่มีจำนวนฟันมาก เฟืองที่มีโมดูลน้อยจะมีความแข็งแรงมากกว่าเฟืองที่มีโมดูลมาก และเฟืองที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางพิตซ์เท่ากันจะมีค่าความแข็งแรงใกล้เคียงกันแม้ว่าจะมีขนาดโมดูลต่างกันก็ตาม โดยชุดเฟืองที่ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางมากจะมีความแข็งแรงน้อยกว่า ผลของขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางพิตซ์มีผลอย่างมากต่อความแข็งแรงของคู่เฟือง และการศึกษาผลของพารามิเตอร์ต่อค่าความแข็งแรงของคู่ฟันเฟือง ซึ่งไม่พิจารณาความแข็งแรงในส่วนที่เป็นทรงกระบอกของเฟือง พบว่ามุมกดมีผลอย่างมากต่อความแข็งแรงของคู่ฟัน โมดูลมีผลเล็กน้อย ส่วนจำนวนฟันแทบไม่มีผลต่อความแข็งแรงของคู่ฟันเฟืองเลย นอกจากนี้ยังศึกษาผลของภาระที่กระทำในเส้นแนวแรงกระทำกับชุดเฟือง พบว่าเมื่อแรงมีค่าเปลี่ยนไปความแข็งแรงของคู่เฟืองเปลี่ยนไปน้อยมาก โดยมีค่าความคลาดเคลื่อนสูงสุดไม่เกิน 10% และมีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยไม่เกิน 5% สามารถสรุปได้ว่าภาระที่กระทำไม่มีผลกับชุดเฟือง

ในบทนี้ยังได้กล่าวถึงอุปสรรคและปัญหาในการคำนวณด้วยโปรแกรม โดยการคำนวณการเสีयरูปและหาค่าความแข็งแรงด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ถึงแม้ว่าจะประยุกต์ใช้ได้กับเฟืองที่มีพารามิเตอร์และรูปร่างต่างๆ อย่างไรก็ตามการหาค่าความแข็งแรงด้วยวิธีนี้ยังมีข้อด้อยที่สำคัญอยู่ เนื่องจากการคำนวณค่าการเสีयरูปด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS ต้องคำนวณที่ละตำแหน่งการขบของฟันเฟือง และเลือกเก็บค่าที่ละค่า จึงต้องใช้เวลาในการคำนวณมาก เมื่อพารามิเตอร์เปลี่ยนไป การคำนวณก็ต้องทำใหม่ การคำนวณในลักษณะนี้ไม่เหมาะสมที่จะนำมาคำนวณหาค่าความแข็งแรงในการใช้งานจริง ซึ่งอาจจะต้องคำนวณค่าของเฟืองหลายๆ ชุด ในงานวิจัยนี้จึงเสนอการสร้างสมการอย่างง่ายเพื่อใช้คำนวณค่าความแข็งแรงของคู่เฟืองตรง โดยใช้ผลการคำนวณพื้นฐานจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นข้อมูลเพื่อใช้สร้างสมการทำนายค่าความแข็งแรงของเฟืองตรง โดยสามารถคำนวณได้อย่างรวดเร็วและไม่ซับซ้อน

ในบทที่ 4 ได้กล่าวถึงกระบวนการสร้างสมการเพื่อใช้คำนวณความแข็งแรงของคู่เฟืองตรง โดยสมการคำนวณความแข็งแรงแบ่งออกเป็น 2 ส่วน ได้แก่ 1. สมการคำนวณความแข็งแรงส่วนทรงกระบอกเฟืองสร้างจากทฤษฎีกลศาสตร์ของแข็ง โดยประยุกต์ใช้สมการพื้นฐานของความเค้น (Stress) ความเครียด (Strain) กฎของฮุก (Hooke's Law) ในพิกัด $r-\theta$ คำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของทรงกระบอก u และ v และ 2. สมการคำนวณความแข็งแรงของคู่ฟันเฟืองสร้างโดยใช้ข้อมูลผลการคำนวณพื้นฐานที่คำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของคู่ฟันเฟืองที่มีโมดูลตั้งแต่ 2 - 5 mm สร้างด้วยวิธีการถอดรอยแบบพหุนาม โดยคุณการปรับแก้โมดูลเพิ่มเข้าไปเพื่อให้ค่าที่ได้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น ส่วนสมการคำนวณหาความแข็งแรงของคู่เฟืองได้จากการนำสมการคำนวณค่าความแข็งแรงส่วนทรงกระบอกเฟืองและสมการคำนวณค่าความแข็งแรงของคู่ฟันเฟืองมาต่อแบบอนุกรมกัน

สมการที่สร้างขึ้นเพื่อใช้คำนวณความแข็งแรงส่วนทรงกระบอกเฟือง คำนวณความแข็งแรงของคู่ฟันเฟือง และคำนวณความแข็งแรงของคู่เฟือง พบว่าสมการทั้งหมดที่สร้างขึ้นสามารถใช้คำนวณค่าความแข็งแรงของชุดเฟืองตั้งต้นที่ใช้ในการสร้างสมการได้อย่างถูกต้อง โดยมีความผิดพลาดสูงสุดน้อยกว่า 10% ซึ่งแสดงให้เห็นว่า สมการที่สร้างขึ้นยืนยันได้ว่าจะสามารถนำไปใช้ทำนายค่าความแข็งแรงของเฟืองตรงที่มีพารามิเตอร์เหมือนกับชุดเฟืองที่ใช้สร้างสมการได้

สมการคำนวณความแข็งแรงของคู่เฟืองตรงที่แสดงในบทนี้สร้างขึ้นเพื่อใช้กับเฟืองที่มีมุมกด 20° เท่านั้น สำหรับเฟืองที่มีมุมกด 14.5° หรือ 25° ก็สามารถสร้างขึ้นเพื่อทำนายค่าความแข็งแรงได้โดยใช้หลักการเดียวกัน

ในบทที่ 5 ได้กล่าวถึงการตรวจสอบสมการที่สร้างขึ้นกับชุดเฟืองที่มีพารามิเตอร์แตกต่างจากชุดเฟืองที่ใช้สร้างสมการ โดยตรวจสอบกับผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟืองที่มีค่าโมดูลัส โมดูล ความกว้างหน้าฟัน และอัตราทดของเฟืองที่แตกต่างออกไป ผลการตรวจสอบพบว่าความคลาดเคลื่อนจากสมการที่สร้างขึ้นกับผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟืองที่มีพารามิเตอร์ต่างออกไปดังกล่าวมีความคลาดเคลื่อนสูงสุดไม่เกิน 10% และมีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยไม่เกิน 5% ดังนั้นสมการที่สร้างขึ้นสามารถใช้ทำนายค่าความแข็งแรงของคู่เฟืองที่มีค่าโมดูลัส โมดูล ความกว้างหน้าฟัน และอัตราทดที่แตกต่างจากชุดเฟืองที่ใช้สร้างสมการได้อย่างถูกต้อง สำหรับการเปรียบเทียบผลการคำนวณจากสมการที่สร้างขึ้นกับผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์ของงานวิจัย Hui Ma [12] และ A Fernandez Del Rincon [22] พบว่ามีความคลาดเคลื่อนสูงสุดไม่เกิน 10% ซึ่งผลการตรวจสอบที่ได้กล่าวมาทั้งหมดนั้นยืนยันได้ว่าสมการที่สร้างขึ้นสามารถใช้คำนวณความแข็งแรงของคู่เฟืองตรงที่มีมุมกดเท่ากับ 20° แต่มีพารามิเตอร์อื่นแตกต่างไปจากชุดเฟืองที่ใช้สร้างสมการได้อย่างถูกต้อง

โดยสรุป สมการที่สร้างขึ้นสามารถนำไปใช้คำนวณความแข็งแรงของเฟืองตรงที่มีมุมกด 20° แต่มีพารามิเตอร์อื่นแตกต่างออกไปจากชุดเฟืองที่ใช้สร้างสมการได้อย่างถูกต้อง นอกจากนี้วิธีการศึกษาในงานวิจัยนี้ยังสามารถใช้เป็นแนวทางในการศึกษาความแข็งแรงของเฟืองตรงที่มีมุมกดอื่นได้

6.2 ข้อเสนอแนะ

ผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยที่จะทำต่อเนื่อง ดังนี้

1. สมการคำนวณความแข็งแรงของเฟืองตรงในการศึกษานี้พิจารณาเฉพาะเฟืองที่มีมุมกด 20° เท่านั้น เพื่อความครบถ้วน ควรสร้างสมการเพื่อใช้คำนวณความแข็งแรงของเฟืองตรงที่มีมุมกด 14.5° และ 25° เพิ่มเติม โดยใช้หลักการเดียวกันนี้
2. การตรวจสอบสมการคำนวณความแข็งแรงที่สร้างขึ้นในกรณีต่างๆ ของการศึกษานี้มีไม่มากนัก อาจตรวจสอบในกรณีอื่นๆ เพิ่มเติมเพื่อความถูกต้องของสมการได้ นอกจากนี้ยังควรพิจารณาเพิ่มข้อมูลพื้นฐานที่ใช้สร้างสมการเพื่อความแม่นยำให้มากขึ้น
3. การศึกษาความแข็งแรงของเฟืองตรงโดยส่วนใหญ่มักใช้วิธีการวิเคราะห์และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ หากสามารถตรวจสอบโดยใช้วิธีการทดลองได้ จะทำให้มั่นใจได้ว่าค่าที่หาได้มีความถูกต้อง
4. แนวคิดนี้อาจนำไปประยุกต์ใช้กับเฟืองเฉียง ซึ่งอาจพิจารณาได้เป็นเฟืองตรงบางวงซ้อนกันเอียงทำมุมกันเท่ากับมุมฮีลิคซ์

บรรณานุกรม

- [1] R. Cornell, "Compliance and stress sensitivity of spur gear teeth," *Journal of Mechanical Design, Transaction of ASME*, vol. 103, no. 2, pp. 447-459, 1981.
- [2] R. Muthukumar and M. Raghavan, "Estimation of gear tooth deflection by the finite element method," *Journal of Mechanical Machine Theory*, vol. 22, no. 2, pp. 177-181, 1987.
- [3] S. Sirichai, I. Howard, L. Morgan, and K. Teh, "Finite element analysis of gears in mesh," in *Fifth International Congress on Sound and Vibration*, 1997, pp. 869-876.
- [4] M. Arafa and M. Megahed, "Evaluation of spur gear mesh compliance using the finite element method," *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 213, no. 6, pp. 569-579, 1999.
- [5] I. Yesilyurt, F. Gu, and A. D. Ball, "Gear tooth stiffness reduction measurement using modal analysis and its use in wear fault severity assessment of spur gears," *NDT&E International*, vol. 36, no. 5, pp. 357-372, 2003.
- [6] Y. Afework and T. Tesfaye, "Variable Mesh Stiffness of spur gear teeth using finite element method," *Journal of EEA*, vol. 23, pp. 59-66, 2006.
- [7] J. D. Wang and I. M. Howard, "Error analysis on finite element modeling of involute spur gears," *Journal of Mechanical Design, Transaction of ASME*, vol. 128, no. 1, pp. 90-97, 2006.
- [8] T. Kiekbusch and I. Howard, "A common formula for the combined torsional mesh stiffness of spur gears," in *Proceedings of the 5th Australasian Congress on Applied Mechanics*, 2007, p. 710: Engineers Australia.
- [9] F. Chaari, T. Fakhfakh, and M. Haddar, "Analytical modelling of spur gear tooth crack and influence on gearmesh stiffness," *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 28, no. 3, pp. 461-468, 2009.
- [10] W. Zhifei, W. Tie, and Z. Ruiliang, "Study on the numerical calculation method of gear torsional mesh stiffness," in *Mechanic Automation and Control Engineering (MACE), 2010 International Conference on*, 2010, pp. 5245-5248:

IEEE.

- [11] R. Ramasamy, T. Kiekbusch, D. Sappok, B. Sauer, and I. Howard, "Calculation of the Combined Torsional Mesh Stiffness of Spur Gears with Two-and Three-Dimensional Parametrical FE Models," *International Journal of Scientific & Engineering Research*, vol. 57, no. 11, 2011.
- [12] H. Ma, R. Song, X. Pang, and B. Wen, "Time-varying mesh stiffness calculation of cracked spur gears," *Journal of Engineering Failure Analysis*, vol. 44, pp. 179-194, 2014.
- [13] ช. ฤทธิไกรเกรียง, "การกระจายความเค้นบนหน้าฟันเฟืองตรงโดยใช้ผลเฉลยการสัมผัสของเฮิร์ตซ์และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์," *วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย*, 2558.
- [14] S. Medvecka-Benova, "Deformation and stiffness of spur gear teeth and their influence on gear noise," *Scientific Journal of Silesian University of Technology*, 2015.
- [15] S. A. Badkas and N. Ajmera, "Static and dynamic analysis of spur gear," *International Journal of Mechanical Engineering and Technology (IJMET)*, vol. 7, no. 4, pp. 8-21, 2016.
- [16] A. D. Tsolakis, K. G. Raptis, and M. D. Margaritou, "Bending Stress and Deflection Analysis of Meshing Spur Gear Tooth during the Single Tooth Contact with Finite Element Method and Determination of the Bending Stiffness," *American Journal of Engineering and Applied Sciences*, 2017.
- [17] Y. Lei, D. Wang, Z. Liu, and X. Yang, "A new model for calculating time-varying gearmesh stiffness," *JVE International Ltd. Vibroengineering Procedia*, vol. 14, 2017.
- [18] N. K. Raghuwanshi and A. Parey, "Effect of back-side contact on mesh stiffness of spur gear pair by finite element method," *Procedia Engineering*, vol. 173, pp. 1538-1543, 2017.
- [19] X. Liang, H. Zhang, M. J. Zuo, and Y. Qin, "Three new models for evaluation of standard involute spur gear mesh stiffness," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 101, pp. 424-434, 2018.
- [20] H. Sachidananda, K. Raghunandana, B. Shivamurthy, World Academy of Science,

Engineering Technology, International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic, and M. Engineering, "Comparison of Meshing Stiffness of Altered Tooth Sum Spur Gear Tooth with Different Pressure Angles," vol. 10, no. 2, pp. 334-340, 2016.

- [21] M. H. Sadd, *Elasticity: theory, applications, and numerics*. Academic Press, 2009.
- [22] A. F. Del Rincon, F. Viadero, M. Iglesias, P. García, A. De-Juan, and R. Sancibrian, "A model for the study of meshing stiffness in spur gear transmissions," *Journal of Mechanism and Machine Theory*, vol. 61, pp. 30-58, 2013.





จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล	นายทิวา นันตะภักดิ์
วัน เดือน ปี เกิด	14 มกราคม 2537
สถานที่เกิด	จังหวัดนครพนม
วุฒิการศึกษา	สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมบัณฑิตสาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล จาก ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น
ที่อยู่ปัจจุบัน	ที่อยู่ 135/1 หมู่ที่ 17 ต.น้ำก่ำ อ.ธาตุพนม จ.นครพนม 48110
ผลงานตีพิมพ์	Determination of the Meshing Stiffness of a Spur Gear Pair by Finite Element Method
รางวัลที่ได้รับ	-

