

## บทที่ 4

### การจำลองเชิงเลขแขนหุ่นยนต์

การจำลองเชิงเลข (digital simulation) คือการนำสมการคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมมาอธิบายพฤติกรรมของระบบกายภาพที่ต้องการศึกษา แทนการทดสอบจากการทำงานจริงของระบบ เพื่อนำผลลัพธ์ที่ได้ไปศึกษาวิเคราะห์ หรือเพื่อนำไปออกแบบก่อนการสร้างจริง การจำลองเชิงเลขด้วยคอมพิวเตอร์ มีข้อได้เปรียบกว่าการทดลองกับระบบกายภาพหลายประการ เป็นต้นว่า อาจแยกศึกษาพฤติกรรมของส่วนประกอบย่อยแต่ละส่วนของระบบที่ต้องการทราบ หรืออาจศึกษาผลลัพธ์รวมของระบบทั้งระบบก็ได้ ซึ่งในการทดลองกับระบบกายภาพจริงนั้น ในบางครั้งไม่สามารถตรวจวัดผลของส่วนประกอบย่อย ทุกๆ ส่วนของระบบได้ทั้งหมด หรืออาจทำได้แต่เป็นเรื่องที่ยุ่งยาก นอกจากนี้เมื่อใช้แบบจำลองเชิงเลข ทำให้สามารถ ศึกษาผลกระทบจากภายนอกที่มากกระทำต่อระบบ ภายได้เงื่อนไขต่างกันไปได้หลายลักษณะ โดยไม่ต้องคำนึงถึงความเสียหายที่อาจเกิดขึ้นได้ ถ้าทดสอบกับระบบกายภาพจริง แต่อย่างไรก็ตาม การศึกษาหรือออกแบบระบบโดยใช้แบบจำลองเชิงเลข มีข้อควรคำนึงถึงในเรื่อง ความถูกต้องของสมการคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้เพื่ออธิบายพฤติกรรมของระบบ จะต้องมีความถูกต้องและให้ผลลัพธ์แม่นยำ เช่นเดียวกับผลที่ควรได้จากการทำงานจริงของระบบมากที่สุด

การศึกษาระบบแขนหุ่นยนต์ด้วยการจำลองเชิงเลข ทำได้โดยการจัดรูปสมการการเคลื่อนที่ให้อยู่ในรูปสมการสถานะ ซึ่งเป็นชุดของสมการอนุพันธ์ไม่เป็นเชิงเส้นอันดับหนึ่ง โดยมีเวลาเป็นตัวแปรอิสระ สมการสถานะแบบไม่เป็นเชิงเส้นมีรูปทั่วไปคือ

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t)] \quad \text{---(4.1)}$$

เมื่อ

$\mathbf{U}(t)$  คือ อินพุทของระบบ

$\mathbf{X}(t)$  คือ เวกเตอร์ของตัวแปรสถานะ ซึ่งมีมิติ  $2N$

สำหรับแขนหุ่นยนต์ในงานวิจัยเป็นแขนหุ่นยนต์ 2 ข้อ เมื่อพิจารณาสมการ Lagrange-Euler จากสมการ (2.8) เวกเตอร์ตัวแปรสถานะ  $\mathbf{X}(t)$  จะมีมิติเท่ากับ 4 ดังสมการ (4.2) โดยมีองค์ประกอบ 2 ตัวแรก คือ  $q_1(t)$  และ  $q_2(t)$  เป็นตำแหน่งของแขน องค์ประกอบ 2 ตัวหลัง คือ  $\dot{q}_1(t)$  และ  $\dot{q}_2(t)$

เป็นความเร็วของแขน ดังสมการ (4.3)

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T \\ &\triangleq [\mathbf{X}_1^T \ ; \ \mathbf{X}_2^T] \end{aligned} \quad \text{---(4.2)}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= [q_1(t) \ q_2(t) \ ; \ \dot{q}_1(t) \ \dot{q}_2(t)]^T \\ &\triangleq [\mathbf{q}^T \ ; \ \dot{\mathbf{q}}^T] \end{aligned} \quad \text{---(4.3)}$$

จากสมการ (2.8) สมการ Lagrange-Euler ในรูปเมตริกซ์คือ

$$D(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + G(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}(t) \quad \text{---(4.4)}$$

ในกรณีที่ การเคลื่อนที่ของแขนหุ่นยนต์มีความเสียดทาน พจน์ของความเสียดทานจะปรากฏอยู่ทางซ้ายมือของสมการ (4.4) ดังนี้

$$D(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + G(\mathbf{q}) + B(\dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau}(t) \quad \text{---(4.5)}$$

เมื่อ  $B(\dot{\mathbf{q}})$  คือ เวกเตอร์แรงเสียดทาน ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับความเร็วของข้อสมการ (4.5) จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = D^{-1}(\mathbf{q})[\boldsymbol{\tau}(t) - H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - G(\mathbf{q}) - B(\dot{\mathbf{q}})] \quad \text{---(4.6)}$$

จากการกำหนดเวกเตอร์สถานะตามสมการ (4.3) และจากสมการ Lagrange-Euler ในรูปสมการ (4.6) ทำให้ได้สมการสถานะคือ

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}_1(t) &= \mathbf{X}_2(t) \\ \dot{\mathbf{X}}_2(t) &= D^{-1}(\mathbf{q})[\boldsymbol{\tau}(t) - H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - G(\mathbf{q}) - B(\dot{\mathbf{q}})] \end{aligned} \quad \text{---(4.7)}$$

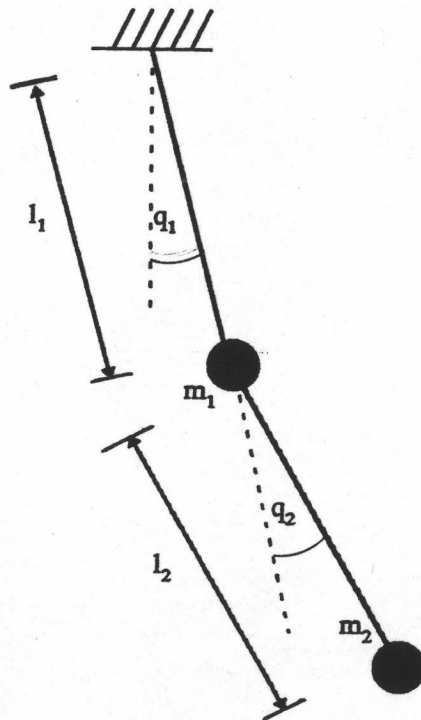
การหาคำตอบของสมการ (4.7) ทำได้โดยใช้วิธีอินทิเกรตขั้นเชิงเลข เช่น วิธี Runge-Kutta อันดับที่ 4 (RK4) เป็นต้น เพื่อหาค่าของตำแหน่งและความเร็วขณะที่แขนหุ่นยนต์เคลื่อนที่ การจำลอง

เชิงเลขในงานวิจัย แบ่งออกเป็น 3 ส่วนใหญ่ๆ ได้แก่

1. การจำลองแบบการเคลื่อนที่ของแขนหุ่นยนต์
2. การจำลองแบบระบบควบคุม
3. การกำหนดเส้นทางอ้างอิง (reference trajectory)

### 1. การจำลองแบบการเคลื่อนที่ของแขนหุ่นยนต์

การจำลองแบบการเคลื่อนที่ของแขนหุ่นยนต์ในงานวิจัย พิจารณาแขนหุ่นยนต์แบบ 2 ข้อ ดังรูปที่ 4.1 (Goldenberg et al., 1989) แขนหุ่นยนต์ประกอบด้วยลิงค์ที่ 1 มีมวล  $m_1$  ความยาว  $l_1$  และลิงค์ที่ 2 มีมวล  $m_2$  ความยาว  $l_2$  เนื่องจากแต่ละลิงค์มีมวลสม่ำเสมอ จึงถือได้ว่ามวลของลิงค์เป็นมวลจุด (point mass) กำหนดให้  $q_1(t)$  และ  $q_2(t)$  เป็นการเคลื่อนที่เชิงมุมของลิงค์ที่ 1 และ ลิงค์ที่ 2 ตามลำดับ



รูปที่ 4.1 แขนหุ่นยนต์ในงานวิจัย

1.1 สมการการเคลื่อนที่ สมการ Lagrange-Euler ของแขนหุ่นยนต์ ตามรูปที่ 4.1 มีรูปสมการ ดังสมการ (4.8) ซึ่งแสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดของข้อทั้งสอง กับตำแหน่ง ความเร็ว และความเร่ง เชิงมุมของข้อ การเคลื่อนที่ของแขนหุ่นยนต์ดังรูปอยู่ภายใต้สนามความโน้มถ่วงของโลก ซึ่งมีค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงคือ  $|g| = 9.8062 \text{ m/s}^2$

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \left[ (m_1 + m_2)l_1^2 + m_2l_2^2 + 2m_2l_1l_2 \cos(q_2) \right] \ddot{q}_1 + \left[ m_2l_2^2 + m_2l_1l_2 \cos(q_2) \right] \ddot{q}_2 \\
&\quad - 2m_2l_1l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2l_1l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2^2 \\
&\quad + (m_1 + m_2)gl_1 \cos(q_1) + m_2gl_2 \cos(q_1 + q_2) \\
\tau_2 &= \left[ m_2l_2^2 + m_2l_1l_2 \cos(q_2) \right] \ddot{q}_1 + m_2l_2^2 \ddot{q}_2 \\
&\quad + m_2l_1l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + m_2gl_2 \cos(q_1 + q_2)
\end{aligned}
\tag{4.8}$$

1.2 การรบกวนและแรงเสียดทาน การทดสอบการทำงานของแบบจำลองแขนหุ่นยนต์ มีการจำลองสภาพที่ใกล้เคียงการทำงานจริง กล่าวคือ กำหนดให้การเคลื่อนที่ของข้อแต่ละข้อมีการรบกวนและแรงเสียดทานเกิดขึ้น

การรบกวน การจำลองแบบการเคลื่อนที่ของแขนหุ่นยนต์ กำหนดให้มีการรบกวนเนื่องจากโหลดเปลี่ยนแปลงแบบทันทีทันใด ซึ่งอาจเกิดขึ้นเพราะแขนหุ่นยนต์หยิบวัตถุ ในระหว่างเส้นทางการเคลื่อนที่ ทำให้พารามิเตอร์ของแขนหุ่นยนต์เกิดการเปลี่ยนแปลงทันที ระบบควบคุมแขนหุ่นยนต์ที่มีประสิทธิภาพ ควรมีการทำงานที่ครอบคลุมถึงการเปลี่ยนแปลงของโหลด ที่อาจเกิดขึ้นได้ สำหรับแขนหุ่นยนต์ในการวิจัย กำหนดให้มีการรบกวนเพื่อพิจารณา เปรียบเทียบประสิทธิภาพของระบบควบคุมชนิดต่างๆ โดยกำหนดให้มีการเปลี่ยนแปลงมวลของลิงค์ที่สองแบบทันทีทันใด

ความเสียดทาน ผลของความเสียดทานมีลักษณะเป็น แรงซึ่งกระทำในทิศทางตรงกันข้ามกับการเคลื่อนที่ของข้อ ฟังก์ชันของแรงเสียดทานมักเป็น ฟังก์ชันแบบไม่เป็นเชิงเส้น ที่มีความซับซ้อน จึงเป็นเรื่องยากในการหาแบบจำลองของความเสียดทานที่แม่นยำ แต่อาจหาฟังก์ชันที่มีลักษณะใกล้เคียงกับแรงเสียดทานจริง ในการเคลื่อนที่ของข้อแต่ละข้อได้ดังนี้

กำหนดให้  $b_i(k)$  เป็นแรงเสียดทานของข้อที่  $i$  ซึ่งมีแบบจำลองคือ

$$b_i(\dot{q}_i) = b_i^v \dot{q}_i + \text{sgn}(\dot{q}_i) \left[ b_i^d + (b_i^s - b_i^d) \exp\left(-\frac{|\dot{q}_i|}{\varepsilon}\right) \right]
\tag{4.9}$$

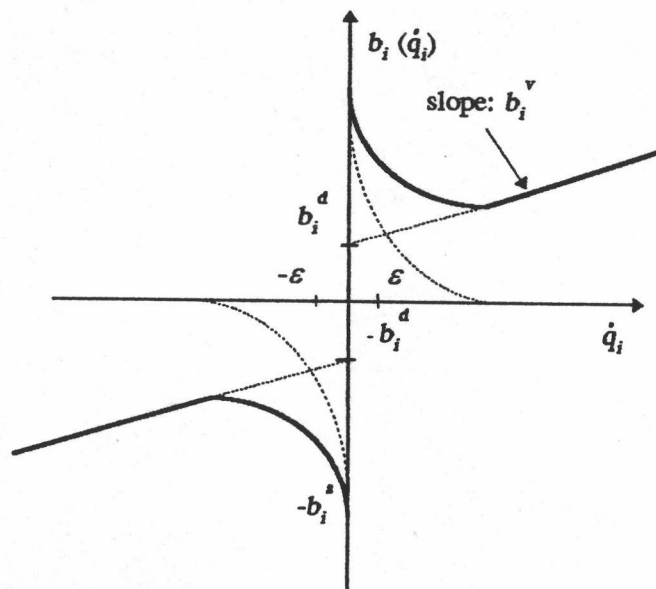
เมื่อ

- $b_i^v$  คือ สัมประสิทธิ์ของความหนืด (viscous friction)
- $b_i^d$  คือ สัมประสิทธิ์ของความเสียดทานพลวัต (dynamic friction)
- $b_i^s$  คือ สัมประสิทธิ์ของความเสียดทานสถิตย์ (static friction)

$\text{sgn}(\cdot)$  คือ ฟังก์ชันเครื่องหมาย (sign or signum function)

จากสมการที่ (4.9) พจน์แรกทางขวามือคือ ความหนืด พจน์ที่สองคือ แรงเสียดทานพลวัต และพจน์ที่สามคือ แรงเสียดทานสถิตย์ ซึ่งจะเห็นได้ว่าความหนืด เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของความเร็ว ในขณะที่ แรงเสียดทานสถิตย์และแรงเสียดทานพลวัต เป็นฟังก์ชันแบบไม่เป็นเชิงเส้นที่ไม่ต่อเนื่อง แรงเสียดทานที่เกิดกับข้อแต่ละข้อ ทำให้แขนหุ่นยนต์ต้องการแรงหรือแรงบิดในการขับเคลื่อนเพิ่มขึ้น โดยเฉพาะอย่างยิ่ง แขนหุ่นยนต์แบบใช้ระบบเฟืองทกจะมีความเสียดทานมากกว่า แขนหุ่นยนต์แบบขับเคลื่อนโดยตรง (direct-drive arm)

ฟังก์ชันแรงเสียดทานตามสมการ (4.9) แสดงให้เห็นดังรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 แบบจำลองแรงเสียดทาน

## 2. การจำลองแบบระบบควบคุม

2.1 ระบบควบคุมที่ออกแบบในงานวิจัย ระบบควบคุมที่ออกแบบ เพื่อทดสอบการทำงานกับแบบจำลองแขนหุ่นยนต์ ประกอบด้วย ตัวควบคุมป้อนภูมิ และ ตัวควบคุมทุติยภูมิ ดังนี้

ตัวควบคุมป้อนภูมิ สามารถจัดพารามิเตอร์จากสมการ (4.8) ให้อยู่ในรูป  $\tau = A(q, \dot{q}) z$  ดังสมการ (3.3.2) คือ

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 & \vdots & B\dot{q}_2 & B\dot{q}_1 + B\dot{q}_2 & \vdots & E_1 + E_2 c q_2 & E_2 s q_2 & 0 & 0 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 & \vdots & B\dot{q}_1 + B\dot{q}_2 & B\dot{q}_1 & \vdots & 0 & 0 & E_2 c q_1 & E_2 s q_1 \end{bmatrix} \mathbf{Z}$$

(4.10)

โดยที่

$$\mathbf{Z}^T = [\ddot{q}_1 \quad \ddot{q}_2 \quad \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \sin(q_1) \quad \cos(q_1) \quad \sin(q_2) \quad \cos(q_2)] \quad (4.11)$$

กำหนดได้จากการวัดค่า ตำแหน่ง ความเร็ว และความเร่งของข้อ

และ

$$\begin{aligned} A_{11}^1 &= (m_1 + m_2)l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos(q_2) \\ A_{12}^1 &= m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(q_2) = A_{21}^1 \\ A_{22}^1 &= m_2 l_2^2 \\ B &= -m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \\ E_1 &= (m_1 + m_2)gl_1 \\ E_2 &= m_2 gl_2 \end{aligned}$$

การคำนวณแรงบิดที่ระบุ  $\tau_u$  ของตัวควบคุมปรนภูมิ ไม่จำเป็นต้องคำนวณค่าเมตริกซ์  $A(q, \dot{q})$  จากทราจิกอรีของแขนหุ่นยนต์ แต่จะใช้การประมาณค่าตามวิธีดังกล่าวมาแล้ว

ตัวควบคุมทุติยภูมิ มีการกำหนดค่าต่างๆ ในสมการ (3.2.2) ดังนี้

$$\begin{aligned} N_{ux} &= 2, & d_x &= 1, \\ N_{uy} &= 2, & d_y &= 2, \\ N_{xy} &= 0, & i &= 1, 2; i \neq j \end{aligned}$$

ทำให้ได้สมการอินพุท-เอาต์พุทของระบบเชิงเส้น คือ

$$\begin{aligned} \delta y_i(k) + a_i^1 \delta y_i(k-1) + a_i^2 \delta y_i(k-2) \\ = b_i^0 \delta u_i(k-1) + b_i^1 \delta u_i(k-2) + b_i^2 \delta u_i(k-3) \\ + \sum_{i=1}^2 b_{ij}^0 \delta u_j(k-2) + \xi_i(k) \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$i, j = 1, 2$$

2.2 การเปรียบเทียบผลกับระบบควบคุมอื่นๆ ได้แก่ ระบบควบคุมที่ออกแบบโดย Liu และ Lin และ ระบบควบคุมที่ออกแบบโดย Goldenberg et al.



### 3. การจำลองแบบเส้นทางอ้างอิง

ในการวิจัยใช้ฟังก์ชัน cycloid (Seraji, 1989) เป็นเส้นทางอ้างอิงของแขนหุ่นยนต์แต่ละข้อ ดังรูปที่ 4.3 เส้นทางอ้างอิงดังกล่าว มีการเปลี่ยนตำแหน่ง ความเร็ว และความเร่ง อย่างต่อเนื่อง นอกจากนั้นการเปลี่ยนแปลงของความเร่ง (jerk) ก็มีความต่อเนื่องด้วย

ลักษณะของตำแหน่งอ้างอิง ดังรูปที่ 4.3 เริ่มจากตำแหน่งเริ่มต้น  $\theta_i(t_i)$  ซึ่งมีความเร็วและความเร่งเป็นศูนย์ ต่อจากนั้นเร่งความเร็วเพิ่มขึ้นจนถึงตำแหน่งครึ่งหนึ่งของเส้นทางเคลื่อนที่ ความเร่งจะมีทิศทางตรงข้ามกับช่วงแรก ทำให้ความเร็วลดลงจนกระทั่งเป็นศูนย์ เมื่อเคลื่อนที่ถึงตำแหน่งสุดท้าย  $\theta_f(t_f)$  กราฟระหว่างความเร็วและระยะทางมีลักษณะเป็นรูป ระฆังคว่ำ (bell-shape) ดังรูปที่ 4.4 โดยมีความเร่งเปลี่ยนแปลงเป็นลักษณะคลื่นรูปไซน์

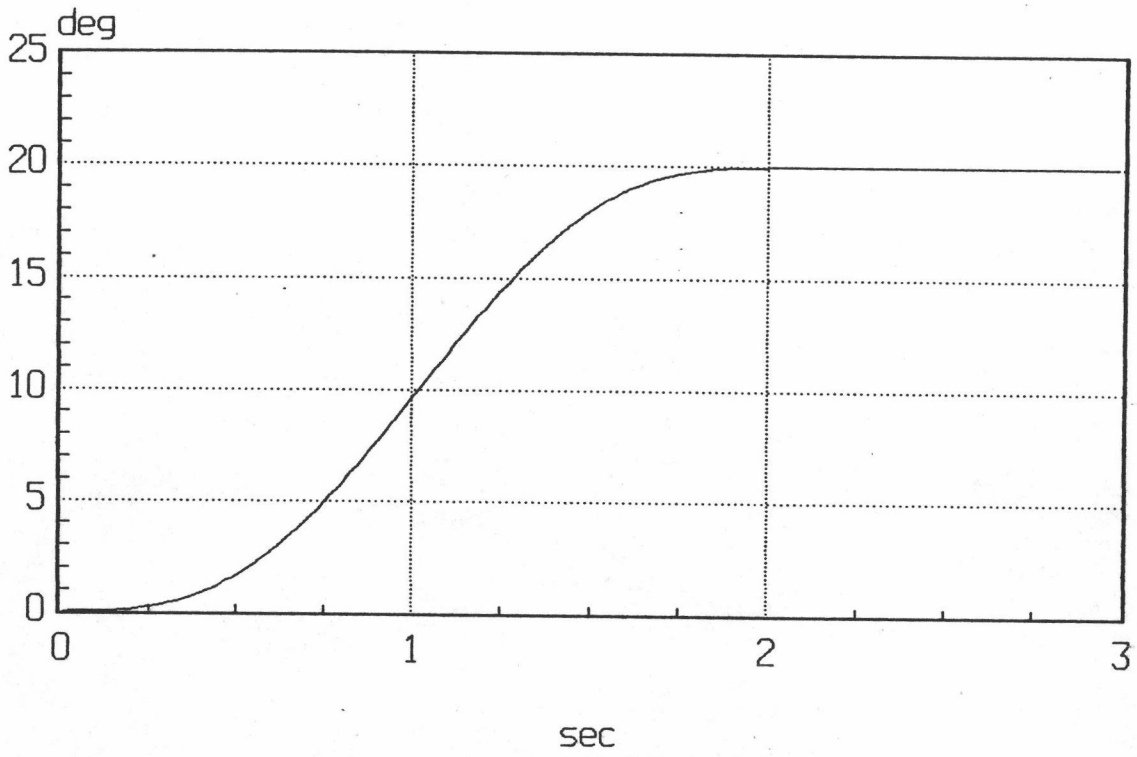
ตำแหน่ง ความเร็ว และความเร่ง ของเส้นทางอ้างอิง มีสมการดังนี้

$$\begin{aligned}\theta_n(t) &= \theta_n(t_i) + \frac{\Delta}{2\pi}[\omega t - \sin\omega t] & 0 \leq t \leq T_i \\ &= \theta_n(T_i) & T_i < t\end{aligned}\quad \text{---(4.14)}$$

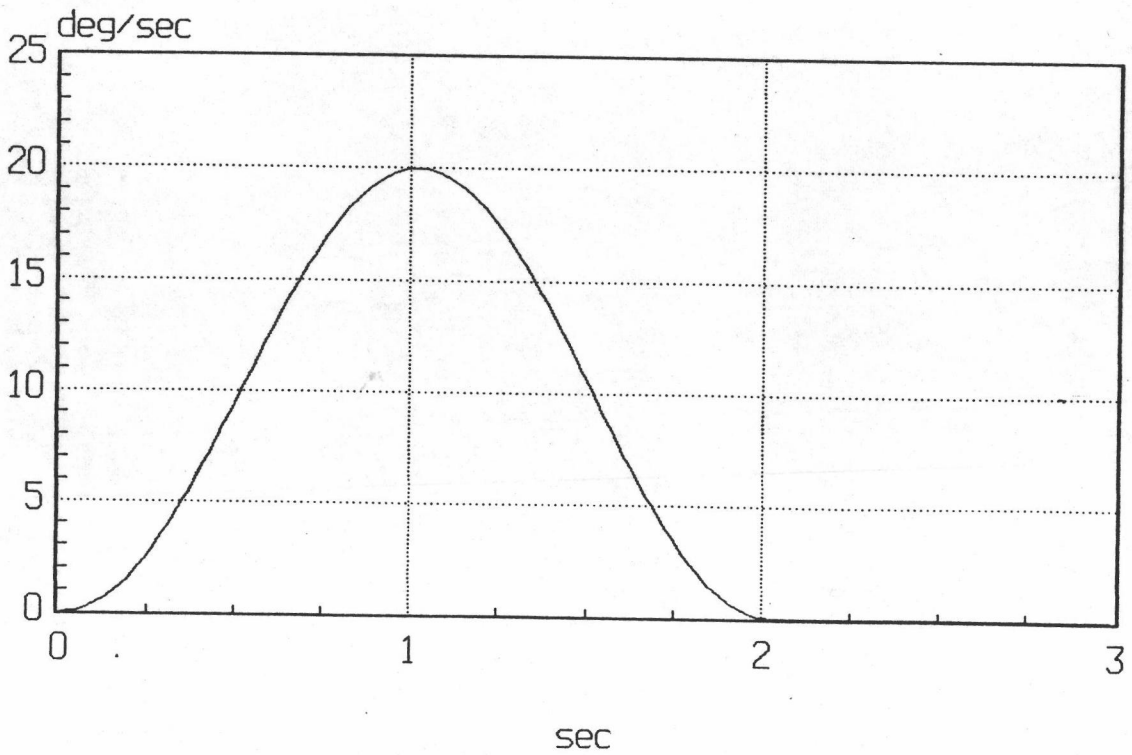
$$\begin{aligned}\dot{\theta}_n(t) &= \frac{\Delta}{T_i}[1 - \cos(\omega t)] & 0 \leq t \leq T_i \\ &= 0 & T_i < t\end{aligned}\quad \text{---(4.15)}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_n(t) &= \frac{2\pi\Delta}{T_i^2}\sin\omega t & 0 \leq t \leq T_i \\ &= 0 & T_i < t\end{aligned}\quad \text{---(4.16)}$$

เมื่อ  $\Delta$  คือ  $\theta_f(t_f) - \theta_i(t_i)$  และ  $T_i$  คือ  $t_f - t_i$



รูปที่ 4.3 ตำแหน่งอ้างอิงรูป cycloid



รูปที่ 4.4 ความเร็วอ้างอิงรูป bell-shape