บทที่ 2

เทคนิคการออปติไมซ์ที่เกี่ยวข้องกับการกำหนดการผลิตระยะสั้น

2.1 คำนำ

การออปติไมซ์ คือ การหาค่าที่ดีที่สุด (ค่าต่ำสุดหรือสูงสุด) ของฟังค์ชั่นของตัวแปรตัดสินจำนวนหนึ่งโดยที่ตัวแปรและฟังค์ชั่นเหล่านี้ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขหรือข้อบังคับที่กำหนด เทคนิคของการออปติไมซ์ได้เป็นที่รู้จักกันมานาน และในปัจจุบันได้นำไปประยุกต์ใช้อย่างแพร่หลายในการแก้ปัญหาต่าง ๆทางวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ และอื่นๆ โดยได้ผลเป็นที่น่าพอใจ เนื่องจากปัญหาต่าง ๆในทางปฏิบัติมีอยู่อย่างมากมาย และเพื่อให้การแก้ปัญหาต่าง ๆเหล่านี้มีประสิทธิผลยิ่งขึ้น ปัจจุบันจึงมีการพัฒนาเทคนิคการออปติไมซ์ใหม่ ๆขึ้นมาหลายวิธี ซึ่งโดยรวมแล้วสามารถแบ่งออกเป็นสามกลุ่มดังนี้ [20]

1. เทคนิคการโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ (Mathematical programming techniques)
2. เทคนิคกระบวนการสทอแคสทิค (Stochastic process techniques)
3. วิธีการทางสถิติ (Statistical methods)

ในบทนี้จะกล่าวถึงเทคนิคของการออปติไมซ์ที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาการกำหนดการผลิตในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เท่านั้น ซึ่งเป็นเทคนิคที่อยู่ในกลุ่มของเทคนิคการโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ นั่นคือ การโปรแกรมเชิงเส้น (Linear programming) ไดนามิกโปรแกรมมิ่ง (Dynamic programming) ปัญหาควบคู่ (Dual problems) การแยกปัญหา (Separable problems) และเทคนิคการดีคอมโพสและโคออดิเนท (Decomposition-coordination technique) โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

2.2 การโปรแกรมเชิงเส้น [17,20]

การโปรแกรมเชิงเส้น เป็นเทคนิคการโปรแกรมทางคณิตศาสตร์วิธีหนึ่งที่นำไปใช้ในการจัดสรรทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัดให้แก่กิจกรรมต่าง ๆเพื่อให้บรรลุเป้าหมายที่ก่อให้เกิดประโยชน์สูงสุด การโปรแกรมเชิงเส้นมีรูปแบบคณิตศาสตร์แทนปัญหาและขั้นตอนการแก้ปัญหาดังนี้

2.2.1 รูปแบบคณิตศาสตร์แทนปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น

รูปแบบคณิตศาสตร์แทนปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นมีโครงสร้างดังนี้

1. ฟังค์ชั่นหรือสมการเป้าหมาย f(X) (Objective function) คือ การแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรเป็นสมการหรือฟังค์ชั่นคณิตศาสตร์ที่จะทำการออปติไมซ์ เพื่อให้ได้เป้าหมายที่ดีที่สุด ซึ่งอาจเป็นการหาค่าต่ำสุด (Minimize) หรือ การหาค่าสูงสุด (Maximize)

2. ตัวแปรตัดสิน X (Decision variables) คือ ตัวแปรคณิตศาสตร์ที่ใช้แทนระดับกิจกรรมต่าง ๆ โดยตัวแปรทุกตัวต้องมีค่าไม่น้อยกว่าศูนย์ (All positive value)

3. สมการเงื่อนไขหรือข้อจำกัด (Constraints equations) คือ สมการที่แสดงเงื่อนไขหรือข้อจำกัดในการออปติไมซ์ ซึ่งแบ่งออกได้เป็น 2 ชนิด คือ เงื่อนไขหรือข้อจำกัดแบบสมการ (Equality constraints) และแบบอสมการ (Inequality constraints)

4. ฟังค์ชั่นเป้าหมายและสมการเงื่อนไขต้องมีคุณสมบัติเป็นฟังค์ชั่นเชิงเส้นของตัวแปรตัดสิน

จากโครงสร้างของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น จะเห็นได้ว่า ตัววัดผลของการออปติไมซ์จะได้จากฟังค์ชั่นเป้าหมาย ซึ่งเราจะต้องพยายามหาค่าที่ดีที่สุดตามเงื่อนไขที่กำหนด และผลของการออปติไมซ์จะได้เป็นค่าของตัวแปรตัดสิน

รูปแบบคณิตศาสตร์แทนปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นสามารถเขียนเป็นรูปแบบมาตรฐาน (Standard form) ได้ดังนี้

ก. แบบสกาลา (Scalar form)

$$\text{Minimize } f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \tag{2.1}$$

โดยมีเงื่อนไขเกี่ยวกับ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{2.2}$$

และ $x_j \geq 0$, $j= 1,2,\ldots,n$ (2.3)

เมื่อ
- n คือ จำนวนตัวแปรตัดสิน
- m คือ จำนวนสมการเงื่อนไข
- $f(x_j)$ คือ ฟังค์ชั่นเป้าหมาย และ $j= 1,2,\ldots,n$
- x_j คือ ตัวแปรตัดสินที่แทนค่าของระดับกิจกรรมที่ j
- a_{ij} , b_i , c_j คือ ค่าคงที่ $i= 1,2,\ldots,n$

ข. แบบเมทริกซ์ (Matrix form)

Minimize $C^T X$ (2.4)

โดยมีเงื่อนไขเกี่ยวกับ

$aX = b$ (2.5)

และ $X \geq 0$ (2.6)

เมื่อ

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix}$$

C^T คือ transpose ของเมทริกซ์ C

ในรูปแบบมาตรฐานของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น จะเห็นว่า ปัญหาของการโปรแกรมเชิงเส้น ก็คือ การหาค่าฟังค์ชั่นเป้าหมายให้อยู่ในรูปแบบของการหาค่าต่ำสุด (Minimization type) และสมการเงื่อนไขเป็นแบบสมการเท่ากัน (Equatity type) ส่วนตัวแปรตัดสินทุกตัวมีค่าไม่น้อยกว่าศูนย์ และสังเกตเห็นว่า ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจะมีสมการจำนวน m สมการ และตัวแปรตัดสินจำนวน n ตัว เราจะสมมติให้ m<n เพราะว่าในกรณีให้ m>n จะทำให้มีสมการที่ไม่จำเป็นจำนวน(m-n)สมการ ซึ่งสมการดังกล่าวจะสามารถกำจัดออกจากระบบได้ และในกรณี n=m การออปติไมซ์ก็จะไม่มีความหมายแต่ประการใดเพราะผลลัพธ์จะมีเพียงค่าเดียว (Unique Solution)ถ้าสอดคล้องกับสมการข้อจำกัดของตัวแปร และจะไม่มีผลลัพธ์เลยถ้าไม่สอดคล้องกับสมการข้อจำกัดของตัวแปร ส่วนในกรณี m<n ผลลัพธ์ที่เกิดผลตามเป้าหมายเดียวกันอาจมีค่าเดียวหรือหลายๆค่าได้ ปัญหาของการโปรแกรมเชิงเส้นโดยสรุปก็คือการหาค่าผลลัพธ์ที่สอดคล้องกับสมการเงื่อนไขของตัวแปรตัดสิน (สมการ 2.2 และ 2.3) และก่อให้เกิดค่าต่ำสุดของฟังค์ชั่นเป้าหมายในสมการ(2.1)

ในกรณีที่รูปแบบของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นไม่ได้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน เราสามารถดัดแปลงรูปแบบของปัญหาเหล่านั้นให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานได้ โดยใช้หลักการดังนี้

1. เมื่อมีการหาค่าสูงสุดของฟังค์ชั่น f(X) จะหาค่าต่ำสุดของฟังค์ชั่นดังกล่าวแทน ดังนี้

$$\text{Maximize } f = c_1x_1+c_2x_2+ \dots +c_nx_n$$

จะเท่ากับ

$$\text{Minimize } f' = -f = -c_1x_1-c_2x_2- \dots -c_nx_n$$

2. เมื่อตัวแปรตัดสินเป็นตัวแปรที่ไม่จำกัดเครื่องหมาย (Unrestricted variables) หมายความว่า ตัวแปรสามารถมีทั้งค่าบวกหรือลบหรือเท่ากับศูนย์ได้ จะแทนตัวแปรดังกล่าวด้วยค่าดังนี้

$x_j = x_j' - x_j''$ โดย $x_j' \geq 0$ และ $x_j'' \geq 0$

x_j คือ ตัวแปรที่ไม่จำกัดเครื่องหมาย

3. เมื่อสมการเงื่อนไขเป็นแบบอสมการชนิดน้อยกว่า จะสามารถดัดแปลงให้เป็นสมการชนิดเท่ากับได้ ด้วยการเพิ่มตัวแปรสแลคที่มีค่าไม่น้อยกว่าศูนย์ (Nonnegative slack variables) ดังนี้

$$a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+ \ldots +a_{kn}x_n \leq b_k$$

ดัดแปลงเป็น

$$a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+ \ldots +a_{kn}x_n +x_{n+1} = b_k$$

โดยที่ x_{n+1} คือ ตัวแปรสแลคที่มีค่าไม่น้อยกว่าศูนย์

4. เมื่อสมการเงื่อนไขเป็นแบบอสมการชนิดมากกว่า จะสามารถดัดแปลงให้เป็นสมการชนิดเท่ากับได้ ด้วยการเพิ่มตัวแปรเซอร์พลัสที่มีค่าไม่น้อยกว่าศูนย์ (Nonnegative surplus variables) ดังนี้

$$a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+ \ldots +a_{kn}x_n \geq b_k$$

ดัดแปลงเป็น

$$a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+ \ldots +a_{kn}x_n -x_{n+1} = b_k$$

โดยที่ x_{n+1} คือ ตัวแปรเซอร์พลัสที่มีค่าไม่น้อยกว่าศูนย์

2.2.2 ขั้นตอนการดำเนินงานของการโปรแกรมเชิงเส้น

ในการแก้ปัญหาต่าง ๆด้วยการโปรแกรมเชิงเส้น มีขั้นตอนการดำเนินงานดังนี้

1. การจัดรูปแบบแทนปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น (Problem formulation)

ก. กำหนดฟังค์ชั่นเป้าหมาย

ข. กำหนดตัวแปรตัดสิน

ค.กำหนดสมการเงื่อนไขที่แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรภายใต้เงื่อนไขหรือข้อจำกัดต่าง ๆ

ง.ตรวจสอบว่าสมการต่าง ๆที่ตั้งขึ้นแล้วเป็นไปในลักษณะของสมการเชิงเส้นและตัวแปรทุกตัวมีค่าไม่น้อยกว่าศูนย์

จ. จัดรูปแบบมาตรฐานของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น

2. การหาผลลัพธ์ของปัญหา (Problem solution)

เมื่อสามารถจัดปัญหาเข้ารูปแบบมาตรฐานของการโปรแกรมเชิงเส้นแล้ว จะสามารถหาผลลัพธ์ด้วยวิธีต่าง ๆดังนี้

ก. ในกรณีที่ปัญหามีตัวแปรเพียง 2 ตัว เราอาจใช้

. วิธีกำจัดขอบข่ายของคำตอบ (Direct elimination method)

. วิธีอนุมานทางคณิตศาสตร์ (Mathematical deduction method)

. วิธีกราฟ (Graphical method)

ข. ในกรณีที่ปัญหามีตัวแปรมากกว่า 2 ตัว เราอาจใช้

. วิธีทางพีชคณิตทั่วไป (General algebraic method)

. วิธีซิมเพลกซ์ (Simplex method)

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะกล่าวเพียงวิธีซิมเพลกซ์เท่านั้น ดังต่อไปนี้

2.2.3 วิธีซิมเพลกซ์ (Simplex method) [20]

วิธีซิมเพลกซ์เป็นวิธีทางพีชคณิตที่อาศัยทฤษฎีของเมทริกซ์เข้าร่วมจัดรูปแบบปัญหาให้มีระบบยิ่งขึ้น ช่วยให้สังเกตเห็นความเปลี่ยนแปลงของตัวแปรได้ง่าย และสามารถเข้าใจในแนวทางที่ตัวแปรแต่ละตัวจะเปลี่ยนไปอย่างมีเหตุมีผลเพื่อให้ฟังชั่นเป้าหมายมีแนวโน้มสู่เป้าหมายที่ดีที่สุด

เพื่อช่วยให้เข้าใจถึงวิธีการแก้ปัญหาด้วยวิธีซิมเพรกซ์ ควรทราบถึงนิยามบางประการดังนี้

. **ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ (Feasible Solutions)** ผลลัพธ์ใด ๆอันเกิดจากค่าตัวแปรที่สอดคล้องกับสมการเงื่อนไง (สมการ 2.2 และ 2.3) เป็นผลลัพธ์ที่เป็นไปได้

. **ผลลัพธ์พื้นฐาน (Basic Solutions)** ผลลัพธ์ที่เกิดจากการกำหนดให้ตัวแปรจำนวน n-m ตัวมีค่าเท่ากับศูนย์ เรียกว่า ผลลัพธ์พื้นฐาน

. **ตัวแปรพื้นฐาน (Basic variables)** ตัวแปรใด ๆที่ไม่ได้กำหนดให้มีค่าเท่ากับศูนย์ในการหาผลลัพธ์พื้นฐาน เรียกว่า ตัวแปรพื้นฐาน

. **ตัวแปรเปลี่ยน (Nonbasic variables)** ตัวแปรใด ๆที่ได้กำหนดให้มีค่าเท่ากับศูนย์ ในการหาผลลัพธ์พื้นฐาน เรียกว่า ตัวแปรเปลี่ยน

. **ผลลัพธ์พื้นฐานที่เป็นไปได้ (Feasible basic solutions)** ผลลัพธ์พื้นฐานที่สอดคล้องกับสมการเงื่อนไขชนิดไม่น้อยกว่าศูนย์ (สมการ 2.3) เรียกว่า ผลลัพธ์พื้นฐานที่เป็นไปได้

. **ผลลัพธ์ที่เหมาะสม (Optimal solutions)** ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ที่ส่งผลให้ฟังค์ชั่นเป้าหมายมีค่าที่ดีที่สุด เรียกว่า ผลลัพธ์ที่ดีที่สุด

. **ผลลัพธ์พื้นฐานที่เหมาะสม (Optimal basic solutions)** ผลลัพธ์พื้นฐานที่เป็นไปได้ที่ส่งผลให้ฟังค์ชั่นเป้าหมายมีค่าที่ดีที่สุด เรียกว่า ผลลัพธ์พื้นฐานที่ดีที่สุด

วิธีซิมเพลกซ์มีขั้นตอนการคำนวณ ซึ่งสรุปเป็นอัลกอลิทึมได้ดังนี้

2.2.3.1 อัลกอลิทึมของวิธีซิมเพลกซ์ (Simplex Algorithm)

ขั้นตอนที่ 1 กำหนดผลลัพธ์พื้นฐานที่เป็นไปได้เบื้องต้น (Initial feasible basic solutions)

จากรูปแบบมาตรฐานของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น จัดสมการต่าง ๆให้อยู่ใน canonical form ของระบบสมการเชิงเส้น (Linear equation system) โดยอาศัยวิธีการลดตัวแปร (Pivotal reduction) ที่เกี่ยวข้องกับตัวแปร $x_1,x_2,\ldots,x_m$ ดังนี้

$$1.x_1+0.x_2+\ldots+0.x_m+a''_{1,m+1}x_{m+1}+\ \ldots\ +a''_{1n}x_n = b''_1 \tag{2.7}$$

$$0.x_1+1.x_2+\ldots+0.x_m+a''_{2,m+1}x_{m+1}+\ \ldots\ +a''_{2n}x_n = b''_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0.x_1+0.x_2+\ldots+1.x_m+a''_{m,m+1}x_{m+1}+\ \ldots\ +a''_{mn}x_n= b''_m$$

$$0.x_1+0.x_2+\ldots+0.x_m-f$$

$$+c''_{m+1}x_{m+1}+\ \ldots\ +c''_nx_n\ = -f''_0$$

โดยที่ a''_{ij} , b''_i , c''_j และ f''_0 คือค่าคงที่ $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$ และ $(-f)$ ก็ถือว่า เป็นตัวแปรพื้นฐานในสมการ (2.7)

จากสมการ(2.7) สามารถกำหนดผลลัพธ์พื้นฐานที่เป็นไปได้ ดังนี้

$$x_i = b_i''\ , i=1,2,\ldots,m \tag{2.8}$$

$$f= f''_0$$

$$x_j = 0\quad , j=m+1,m+2,\ldots,n$$

โดยที่ x_i คือ ตัวแปรพื้นฐาน สำหรับ $i=1,2,\ldots,m$

x_j คือ ตัวแปรเปลี่ยน สำหรับ $j= m+1,m+2,\ldots,n$

ขั้นตอนที่ 2 การทดสอบผลลัพธ์ที่ดีที่สุด (Optimality test)

จากผลลัพธ์พื้นฐานที่เป็นไปได้ พิจารณาทดสอบผลลัพธ์ว่าได้ดีที่สุดแล้วหรือยัง จะเห็นได้ว่าในบางครั้ง แม้แต่ผลลัพธ์เบื้องต้นก็อาจเป็นผลลัพธ์ที่ดีที่สุดได้ แต่โดยทั่วไปแล้ว เรามักจะหาผลลัพธ์ที่ดีกว่าได้โดยใช้หลักการทดสอบผลลัพธ์ที่ดีที่สุด ดังนี้

พิจารณาสัมประสิทธิ์ของฟังค์ชั่นเป้าหมายว่า สามารถจะแนะนำตัวแปรเปลี่ยนตัวใดตัวหนึ่งให้กลายเป็นตัวแปรพื้นฐานและทำให้ฟังค์ชั่นเป้าหมายมีค่าดีขึ้นกว่าเดิมหรือไม่ ถ้าไม่สามารถทำให้ผลลัพธ์ดีขึ้นกว่าเดิม คำตอบที่ได้ก็คือผลลัพธ์ที่ดีที่สุด แต่ถ้าสามารถแนะนำตัวแปรเปลี่ยนตัวใดตัวหนึ่งเข้าเป็นตัวแปรพื้นฐานได้อีก ต้องไปทำขั้นตอนต่อไป

ในการหาค่าต่ำสุด (Minimization) ของปัญหา จะสามารถพิจารณาด้วยสัมประสิทธิ์ของฟังค์ชั่นเป้าหมายว่า ถ้าสัมประสิทธิ์อย่างน้อยหนึ่งตัวมีค่าเป็นลบ ก็แสดงว่า ผลลัพธ์ยังไม่ดีที่สุด ต้องทำขั้นตอนต่อไป ถ้าสัมประสิทธิ์ทุกตัวมีค่าเป็นบวก แสดงว่า ผลลัพธ์ดีที่สุด สามารถยุติการคำนวณ นั่นคือ

ตรวจสอบว่า $c''_j \geq 0$, j=1,2,...,n หรือไม่

ถ้าใช่ ได้ผลลัพธ์ที่ดีที่สุด ให้ยุติการคำนวณ

ถ้าไม่ใช่ ให้ทำขั้นตอนที่ 3 ต่อไป

ขั้นตอนที่ 3 เลือกตัวแปรเปลี่ยนเป็นตัวแปรพื้นฐานเข้า (Entering basic variable)

พิจารณาสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเปลี่ยนจากฟังค์ชั่นเป้าหมายว่า สัมประสิทธิ์ตัวใดที่สามารถทำให้ฟังค์ชั่นเป้าหมายมีค่าต่ำลงได้ จึงเลือกตัวแปรเปลี่ยนนั้นเป็นตัวแปรพื้นฐานเข้า โดยอาศัยสมการดังนี้

$$c''_s = \min c''_j < 0 \qquad (2.9)$$

โดยที่ c''_s คือ สัมประสิทธิ์ของตัวแปรเปลี่ยน x_s ที่จะทำให้ฟังค์ชั่นเป้าหมายมีค่าต่ำลง

s คือ ค่าดรรชนีที่ชี้บอกว่า ตัวแปรเปลี่ยน x_s จะเป็นตัวแปรพื้นฐานเข้า

c''_j คือ สัมประสิทธิ์ของตัวแปรเปลี่ยนจากฟังค์ชั่นเป้าหมายที่มีค่าน้อยกว่าศูนย์

ขั้นตอนที่ 4 เลือกตัวแปรพื้นฐานออก (Leaving basic variable)

ตรวจสอบว่า ค่าของสัมประสิทธ์ $a''_{is} \leq 0$, i=1,2,...,m หรือไม่

ถ้าใช่ จะได้ผลลัพธ์ไม่มีขอบเขต(Unbounded solution) ต้องยุติการคำนวณ

ถ้าไม่ใช่ ให้หาค่าดรรชนี r ด้วยสมการดังนี้

$$x^*_s = (b''_r / a''_{rs}) = \min (b''_i / a''_{is}) \text{ โดยที่ } a''_{is} > 0 \qquad (2.10)$$

เมื่อ r คือ ค่าดรรชนีที่ชี้บอกว่า ตัวแปรพื้นฐาน x_r จะเป็นตัวแปรพื้นฐานออก

จากนั้นก็ทำขั้นตอนที่ 5 ต่อไป

ขั้นตอนที่ 5 จัดรูปแบบ Canonical และหาผลลัพธ์พื้นฐานที่เป็นไปได้ใหม่

จากรูปแบบ Canonical ของระบบสมการเก่า(สมการ 2.7) จัดรูปแบบ Canonical ใหม่โดยอาศัยวิธีการลดตัวแปร (Pivot reduction) ของระบบสมการที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรพื้นฐานออก x_r และสัมประสิทธิ์ a''_{rs} ทำให้ตัวแปรพื้นฐานเข้า x_s กลายเป็นตัวแปรพื้นฐานใหม่(New basic variable) เพื่อเข้าไปแทนที่ของตัวแปรพื้นฐานออก x_r ให้เป็นตัวแปรเปลี่ยนใหม่

จากรูปแบบCanonical ใหม่ สามารถหาผลลัพธ์พื้นฐานที่เป็นไปได้ใหม่ดังนี้

$$x_s = x_s^* \qquad (2.11)$$

$$x_i = b_i - a''_{is}.x_s^* \geq 0 \text{ , } i=1,2,\ldots,m \text{ และ } i \neq r$$

$$x_r = 0$$

$$x_j = 0 \text{ , } j = m+1,m+2,\ldots,n \qquad \text{และ } j \neq s$$

และ $$f= f_0'' + c_s''.x_s^* \qquad (2.12)$$

สังเกตได้ว่า ค่าของ f ในสมการ (2.12) จะน้อยกว่า หรือ เท่ากับ ค่าของ f ในสมการ(2.8)

เมื่อได้ผลลัพธ์พืนฐานใหม่แล้ว ก็กลับไปทำขั้นตอนที่ 2

ในทางปฏิบัติ โดยทั่วไปแล้วปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นบางครั้งอาจไม่สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบ Canonical ของระบบสมการเพื่อหาค่าผลลัพธ์พื้นฐานที่เป็นไปได้เบื้องต้นได้ดังสมการ(2.7) เช่น ในกรณีสัมประสิทธิ์เป็นลบและในกรณีที่ปัญหาประสบความไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข เป็นต้น

ดังนั้น ในการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น โดยทั่วไปมักจะใช้วิธีซิมเพลกซ์สองขั้นตอน (Two-phase Simplex method) ซึ่งมีดังต่อไปนี้

2.2.3.2 วิธีซิมเพลกซ์สองขั้นตอน (Two-phase Simplex method)

ในการแก้ปัญหาด้วยวิธีซิมเพลกซ์สองขั้นตอน จะเริ่มการคำนวณที่ขั้นตอนแรก (Phase I) โดยจะใช้ซิมเพลกซ์อัลกอริทึมคำนวณหาผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ของปัญหาก่อน จากนั้นก็นำเอาผลลัพธ์ที่เป็นไปได้และรูปแบบ Canonical ในช่วงท้ายของขั้นตอนแรกไปใช้เป็นผลลัพธ์พื้นฐานที่เป็นไปได้เบื้องต้นและรูปแบบ Canonical ของระบบสมการในขั้นตอนที่สอง (Phase II) เพื่อหาค่าผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของปัญหา

รายละเอียดของขั้นตอนการแก้ปัญหาด้วยวิธีซิมเพลกซ์สองขั้นตอนมีดังนี้

1. จัดรูปแบบมาตรฐานของการโปรแกรมเชิงเส้น

2. เพิ่มตัวแปรเทียม (Artificial variables) เพื่อใช้เป็นตัวแปรพื้นฐานและจัดรูปแบบมาตรฐานใหม่ดังนี้

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n+y_1 = b_1 \quad (2.13)$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \quad +y_2 = b_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \quad +y_m = b_m$$

$$c_1x_1 +c_2x_2 + \dots +c_nx_n \quad +(-f) = 0 \quad (2.14)$$

โดยที่ $x_i \geq 0$, $i= 1,2,\dots,n$

$y_i \geq 0$, $i= 1,2,\dots,m$ y_i คือ ตัวแปรเทียม

$b_i \geq 0$, $i= 1,2,\dots,m$

3. เริ่มขั้นตอนแรก (Phase I) ของวิธี

. กำหนดให้ผลรวมของตัวแปรเทียมเท่ากับ w

$$w = y_1+y_2+\dots+y_m \quad (2.15)$$

. จัดรูปแบบระบบสมการใหม่ดังนี้

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n+y_1 = b_1 \quad (2.16)$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \quad +y_2 = b_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \quad +y_m = b_m$$

$$c_1x_1 +c_2x_2 + \dots +c_nx_n \quad +(-f) = 0$$

$$+ y_1+y_2+\dots+y_m \quad +(-w) = 0$$

. จัดระบบสมการ(2.16)ให้อยู่ในรูปแบบ Canonical ของระบบสมการ โดยให้ตัวแปร $y_1,y_2,\dots,y_m$, (-f) และ (-w) เป็นตัวแปรพื้นฐานดังนี้

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n+y_1 = b_1 \quad (2.17)$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \quad +y_2 = b_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \quad +y_m = b_m$$

$$c_1x_1 +c_2x_2 + \dots +c_nx_n \quad +(-f) = 0$$

$$d_1x_1 +d_2x_2 + \dots +d_nx_n \quad +(-w) = -w_0$$

โดยที่ $d_i = -(a_{1i}+a_{2i}+ \dots +a_{mi})$, $i= 1,2,\dots,n$ (2.18)

$-w_0 = -(b_1+b_2+ \dots +b_m)$ (2.19)

จากระบบสมการ(2.17) สามารถกำหนดผลลัพธ์พื้นฐานที่เป็นไปได้เบื้องต้น (Initial feasible basic solution) ซึ่งจำเป็นต่อการแก้ปัญหาในขั้นตอนแรกนี้

. หาค่าตัวแปร $x_i \geq 0$, i= 1,2,...,n และ $y_i \geq 0$, i= 1,2,...,m ที่ทำให้ค่าของผลรวมตัวแปรเทียม w น้อยที่สุด (เท่ากับศูนย์) และสอดคล้องกับสมการเงื่อนไข (2.13)-(2.14) โดยใช้ซิมเพลกซ์อัลกออริทึมช่วยคำนวณ แต่ต้องใช้สมการ(2.17)แทนสมการ(2.7)

4. ด้วยผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณในขั้นตอนแรก พิจารณาค่าของผลรวมตัวแปรเทียม w ดังนี้

ถ้าหากค่าต่ำสุดของผลรวมตัวแปรเทียม w มากกว่าศูนย์ (min(w) > 0) แสดงว่าจะไม่มีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ในการแก้ปัญหา และต้องยุติการคำนวณ

ถ้าหากค่าต่ำสุดของผลรวมตัวแปรเทียม w เท่ากับศูนย์ (min(w) = 0) แสดงว่าจะมีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ในการแก้ปัญหา และไปปฏิบัติขั้นตอนที่สอง (Phase II)

5. เริ่มปฏิบัติขั้นตอนที่สอง (Phase II) ของวิธี

จากผลลัพธ์และรูปแบบระบบสมการที่ได้ในช่วงท้ายของขั้นตอนแรก ขจัดสมการของผลรวมตัวแปรเทียม w และคอลัมน์ (Columns) ที่มีตัวแปรเทียมทิ้ง แล้วกำหนดผลลัพธ์และรูปแบบ Canonical ของระบบสมการที่เหลือเป็นผลลัพธ์พื้นฐานที่เป็นไปได้และรูปแบบ Canonical เบื้องต้นของระบบสมการในขั้นตอนที่สอง จากนั้นก็ใช้ซิมเพลกซ์อัลกอริทึมแก้ปัญหาที่เหลือต่อไป สุดท้ายก็จะได้ผลลัพธ์ที่ดีที่สุด ที่ทำให้ฟังค์ชั่นเป้าหมาย f มีค่าต่ำสุด

2.3 ไดนามิกโปรแกรมมิ่ง (Dynamic programming) [20]

ไดนามิกโปรแกรมมิ่ง เป็นเทคนิคการโปรแกรมทางคณิตศาสตร์วิธีหนึ่งที่ใช้ในการออปติไมซ์ปัญหาการตัดสินใจหลายขั้นตอน (Multistage decision problems) ปัญหาจะถูกแบ่งพิจารณาเป็นช่วง ๆต่อเนื่องกัน โดยผลลัพธ์ของช่วงหนึ่งจะนำไปเป็นข้อมูลของช่วงถัดไป จึงเป็นเทคนิคที่เหมาะสมสำหรับการออปติไมซ์ปัญหาที่มีตัวแปรไม่ต่อเนื่อง (Discrete variable) และฟังค์ชั่นที่ไม่เว้าเข้า ไม่เชิงเส้น ไม่ต่อเนื่องและไม่มีอนุพันธ์ (Nondifferentiable)

ไดนามิกโปรแกรมมิ่งมีรูปแบบและวิธีการแก้ปัญหา ดังต่อไปนี้

2.3.1 แบบจำลองของไดนามิกโปรแกรมมิ่ง

โดยทั่วไป แบบจำลองของไดนามิกโปรแกรมมิ่งมีส่วนประกอบดังนี้

1. ช่วง (Stages) หมายถึง ช่วงต่าง ๆที่ปัญหาได้แบ่งออกมาพิจารณา อาจเป็นช่วงของระยะต่าง ๆ (Space) หรือของเวลา (Time) เป็นต้น

2. สถานะ (States) หมายถึง สถานะ (Situations) ต่าง ๆทั้งหมดที่สามารถเกิดขึ้นได้ในช่วงใดช่วงหนึ่ง สถานะของช่วงหนึ่งมีความสัมพันธ์กับสถานะของช่วงถัดไป เนื่องจากในช่วงหนึ่งมีหลายสถานะ จึงมักกำหนดสถานะเหล่านั้นในรูปของเวกเตอร์สถานะ (States vector) ของช่วงนั้น

3. ฟังค์ชั่นเป้าหมาย (Objective function) หมายถึง ฟังค์ชั่นที่ใช้วัดผล (Effectiveness) ของการออปติไมซ์ปัญหา และสำหรับการวัดผลการตัดสินใจในช่วงใดหนึ่งจะเรียกว่า ฟังค์ชั่นผลตอบแทน (Return function) ของช่วงนั้น

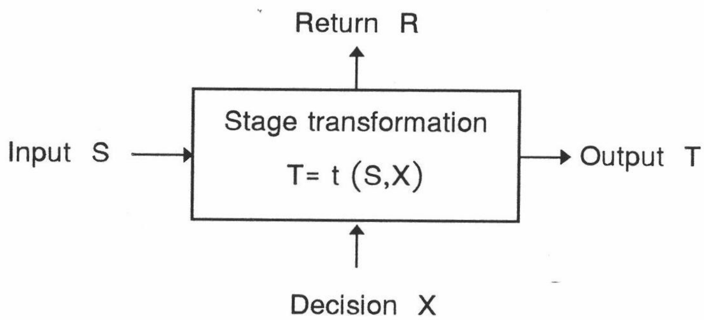
4. ตัวแปรตัดสิน (Decision variables) หรือ เวกเตอร์ตัวแปรตัดสิน หมายถึง ตัวแปรตัดสินที่เปลี่ยนแปลงค่าฟังค์ชั่นเป้าหมายจากสถานะของช่วงหนึ่งไปหาสถานะของช่วงถัดไป

5. เส้นทาง (Path) หมายถึง เส้นทางการเปลี่ยนแปลงที่เป็นไปได้จากสถานะของช่วงใดหนึ่งถึงสถานะของช่วงสุดท้าย

6. เส้นทางที่ดีที่สุด (Optimal path) หมายถึง เส้นทางที่มีฟังค์ชั่นเป้าหมายรวมมีค่าที่ดีที่สุด

ปัญหาการตัดสินใจหลายขั้นตอนของไดนามิกโปรแกรมมิ่งประกอบด้วยปัญหาการตัดสินใจของแต่ละช่วง สามารถแสดงด้วยรูปดังนี้

สำหรับปัญหาการตัดสินใจเฉพาะหนึ่งช่วง (Individual stage decision problem)



รูปที่ 2.1 แสดงแบบจำลองของปัญหาการตัดสินใจเฉพาะหนึ่งช่วง

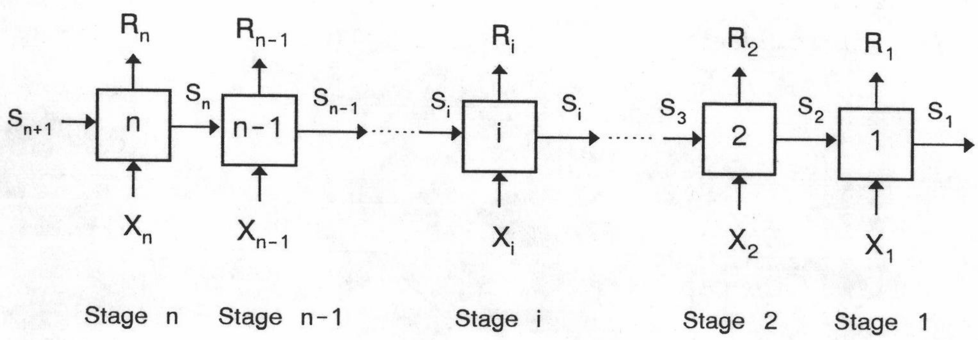
เมื่อ $R = r(S,X)$ คือ ฟังก์ชั่นผลตอบแทน

$T = t(S,X)$ คือ ฟังก์ชั่นการเปลี่ยนสภาพของเวกเตอร์สถานะ (Stage transformation)

S คือ เวกเตอร์สถานะ

X คือ เวกเตอร์ตัวแปรตัดสิน

สำหรับปัญหาการตัดสินใจหลายขั้นตอน



รูปที่ 2.2 แสดงแบบจำลองของปัญหาการตัดสินใจหลายขั้นตอน

จากรูปที่ 2.2 สังเกตเห็นได้ว่า เอ้าพุต(Output)จากช่วง i+1 จะเท่ากับอินพุต (Input) ของช่วง i ทั้งนี้เนื่องจากแต่ละช่วงมีความสัมพันธ์กันกับช่วงถัดไป

ดังนั้น $S_i = t_i(S_{i+1} , x_i)$ (2.20)

$R_i = r_i(S_{i+1} , x_i)$ (2.21)

แบบจำลองของไดนามิกโปรแกรมมิ่ง สามารถแสดงด้วยสมมการดังนี้

$$\text{Optimize } f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} r_i(S_{i+1},x_i) \qquad (2.22)$$

โดยให้สอดคล้องกับ $S_i = t_i(S_{i+1}, x_i)$

$i = 1,2,\ldots,n$

เมื่อ n คือ จำนวนช่วง

i คือ เลขที่ของช่วงใดหนึ่ง

x_i คือ เวกเตอร์ตัวแปรตัดสินของช่วงที่ i

S_i คือ เวกเตอร์สถานะของช่วงที่ i

S_{i+1} คือ เวกเตอร์สถานะของช่วงที่ $i+1$

$r_i(S_{i+1}, x_i)$ คือ ฟังค์ชั่นผลตอบแทนของการตัดสินใจในช่วงที่ i

$t_i(S_{i+1}, x_i)$ คือ ฟังค์ชั่นการเปลี่ยนแปลงสภาพของเวกเตอร์สถานะในช่วงที่ $i+1$ ไปหาช่วง i

แบบจำลองของไดนามิกโปรแกรมมิ่งมี 2 ประเภทสำคัญดังนี้

1.ไดนามิกโปรแกรมมิ่งแบบไปข้างหน้า (Forward dynamic programming FDP) คือ การคำนวณจะเริ่มจากช่วงแรกไปหาช่วงสุดท้าย

2.ไดนามิกโปรแกรมมิ่งแบบไปข้างหลัง(Backward dynamic programming BDP) คือ การคำนวณจะเริ่มจากช่วงสุดท้ายย้อนกลับไปหาช่วงแรก

2.3.2 วิธีแก้ปัญหาของไดนามิกโปรแกรมมิ่ง

ในการแก้ปัญหาของไดนามิกโปรแกรมมิ่ง(สมการ 2.22) จะแยกฟังค์ชั่นเป้าหมายออกมาออปติไมซ์ทีละช่วงต่อเนื่องกันตามลำดับ ผลลัพธ์ของการออปติไมซ์ในช่วงหนึ่งจะสัมพันธ์กับการออปติไมซ์ของช่วงถัดไป เมื่อได้ค่าที่ดีที่สุดของฟังค์ชั่นเป้าหมายรวมในช่วงสุดท้าย ก็ทำกระบวนการย้อนกลับ โดยย้อนกลับไปหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดจากช่วงสุดท้ายถึงช่วงเริ่มต้นตามเส้นทางที่ดีที่สุด(Optimal path)

การคำนวณของไดนามิกโปรแกรมมิ่งมีขั้นตอนปฏิบัติ 2 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอน 1 หาผลลัพธ์จากช่วงเริ่มต้นถึงช่วงสุดท้าย

ในช่วงที่ 1 ทำการออปติไมซ์ฟังค์ชั่นผลตอบแทน(Return function)เฉพาะช่วงแรกด้วยสมการดังนี้

$$f_1^*(S_2) = \underset{x_1}{\text{Opt}}\left[r_1(S_2, x_1)\right] \qquad (2.23)$$

จะได้ตัวแปรตัดสินที่ดีที่สุดของช่วง (x_1^*) ซึ่งเป็นค่าของตัวแปรตัดสิน x_1 ที่ส่งผลให้ฟังค์ชั่นผลตอบแทน r_1 มีค่าที่ดีที่สุด(f_1^*) โดย x_1^* และ f_1^* จะขึ้นกับสถานะอินพุต S_2

ในช่วงที่ 2 ทำการออปติไมซ์ฟังค์ชั่นผลตอบแทนในช่วงที่สองด้วยสมการดังนี้

$$f_2^*(S_3) = \underset{x_1,x_2}{\mathrm{Opt}}\left[r_2(S_3,x_2)+r_1(S_2,x_1)\right] \tag{2.24}$$

ในหลักการของการออปติไมซ์ ด้วยค่า S_2 ที่กำหนดให้แต่ต้น เราต้องการหาค่าของ x_1 ที่เป็นคำตอบของการออปติไมซ์ r_1 ดังนั้นจึงสามารถแทนค่าสมการ(2.23)ในสมการ(2.24) จะได้

$$f_2^*(S_3) = \underset{x_2}{\mathrm{Opt}}\left[r_2(S_3,x_2)+f_1^*(S_2)\right] \tag{2.25}$$

ในช่วงที่ 3 ทำการออปติไมซ์ฟังค์ชั่นผลตอบแทนในช่วงที่ 3 ด้วยสมการดังนี้

$$f_3^*(S_4) = \underset{x_1,x_2,x_3}{\mathrm{Opt}}\left[r_3(S_4,x_3)+r_2(S_3,x_2)+r_1(S_2,x_1)\right] \tag{2.26}$$

เมื่อแทนค่าสมการ(2.24)ในสมการ(2.26) จะได้

$$f_3^*(S_4) = \underset{x_3}{\mathrm{Opt}}\left[r_3(S_4,x_3)+f_2^*(S_3)\right] \tag{2.27}$$

ทำการออปติไมซ์ในทำนองเดียวกันจนถึงช่วงสุดท้าย ก็จะได้ค่าที่ดีที่สุดของฟังค์ชั่นเป้าหมายรวมและเส้นทางที่ดีที่สุด(Optimal path)

การคำนวณทั้งหมดสามารถสรุปเป็นสมการรีเคอร์ซีพ(Recursive equation)ได้ดังนี้

$$f_i^*(S_{i+1}) = \underset{x_i}{\mathrm{Opt}}\left[r_i(S_{i+1},x_i)+f_{i-1}^*(S_i)\right] \quad , \quad i=1,2,\ldots,n \tag{2.28}$$

โดยที่ f^*_{i-1} คือ ค่าที่ดีที่สุด(optimal value) ของฟังค์ชั่นเป้าหมาย ซึ่งคิดจากช่วงเริ่มต้นถึงช่วง (i-1)

S_i คือ เวกเตอร์สถานะอินพุตของช่วง i-1

S_{i+1} คือ เวกเตอร์สถานะอินพุตของช่วง i

ขั้นตอนที่ 2 ปฏิบัติกระบวนการย้อนกลับ (Retrace optimal schedule)

เมื่อได้ค่าที่ดีที่สุดของฟังค์ชั่นเป้าหมายในช่วงสุดท้าย ก็ทำกระบวนการย้อนกลับโดยย้อนกลับไปหาตัวแปรตัดสินที่ดีที่สุดของแต่ละช่วงเริ่มจากช่วงสุดท้ายหาช่วงเริ่มต้นตามเส้นทางที่ดีที่สุด(Optimal path)

2.4 ปัญหาควบคู่ (Dual problem) [5,17]

ปัญหาการโปรแกรมไม่เชิงเส้น (Nonlinear programming problem) ในบางกรณีอาจไม่สามารถหรือไม่สะดวกที่จะแก้ไขได้ด้วยวิธีการต่างๆโดยทางตรง การแก้ปัญหาด้วยวิธีปัญหาควบคู่โดยทางอ้อมอาจทำได้ง่ายกว่า

ปัญหาควบคู่มีทฤษฎีและหลักการสำคัญดังนี้

1. รูปแบบแทนปัญหาควบคู่

โดยทั่วไปปัญหาควบคู่มีรูปแบบดังนี้

ปัญหาเดิม (Primal problem P) คือ ปัญหาเดิมของการโปรแกรมเชิงเส้นที่ต้องการออปติไมซ์ มีรูปแบบดังสมการดังนี้

$$\text{Minimize } f(x) \tag{2.29a}$$

โดยมีเงื่อนไขเกี่ยวกับ $g_i(x) \leq 0 \quad , i=1,2,...,m$ (2.30a)

$$h_i(x) = 0 \quad , i=1,2,...,l \tag{2.31a}$$

ปัญหาควบคู่ (Dual problem D) คือ ปัญหาที่กำหนดขึ้นแทนปัญหาเดิมเพื่อสะดวกในการออปติไมซ์โดยใช้ตัวคูณลากรังซ์จ (Lagrangian multiplier)กับสมการเงื่อนไขต่างๆ มีรูปแบบดังสมการดังนี้

$$\text{Maximize } \phi(\lambda,\mu) \tag{2.32a}$$

โดยมีเงื่อนไขเกี่ยวกับ $\mu \geq 0$ (2.33a)

เมื่อ $\phi(\lambda,\mu) = \min\left\{ f(x) + \sum_{i=1}^{m}\mu_i g_i(x) + \sum_{i=1}^{l}\lambda_i h_i(x) : x \in X \right\}$ (2.34a)

λ_i , μ_i คือ ตัวคูณลากรังซ์จ

ปัญหาเดิมและควบคู่สามารถเขียนในรูปของเวกเตอร์ดังนี้

กำหนด $f : E_n \rightarrow E_1$

$g : E_n \rightarrow E_m$ คือ ฟังค์ชั่นเวกเตอร์ที่มีสมาชิกเป็น g_i ,i=1,2,...,m

$h : E_n \rightarrow E_l$ คือ ฟังค์ชั่นเวกเตอร์ที่มีสมาชิกเป็น h_i ,i=1,2,...,l

ปัญหาเดิม (Primal problem P)

Minimize $f(\mathbf{x})$ (2.29b)

โดยมีเงื่อนไขเกี่ยวกับ $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$ (2.30b)

$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (2.31b)

$\mathbf{x} \in X$

ปัญหาควบคู่ (Dual problem D)

Maximize $\phi(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$ (2.32b)

โดยมีเงื่อนไขเกี่ยวกับ $\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$ (2.33b)

เมื่อ $\phi(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) = \min\{ f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^t\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^t\mathbf{h}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X \}$ (2.34b)

$\boldsymbol{\lambda}^t, \boldsymbol{\mu}^t$ คือ transpose ของเวกเตอร์ตัวคูณลากรังซ์จ $\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}$ ตามลำดับ

การควบคู่บางส่วน (Partial Duality) [17]

ในการกำหนดปัญหาควบคู่ บางครั้งอาจไม่จำเป็นต้องใช้ตัวคูณลากรังซ์จ กับทุกสมการเงื่อนไข อาจใช้ตัวคูณลากรังซ์จกับบางสมการเงื่อนไขเท่านั้น ดังเช่น

จากปัญหาเดิมในสมการ(2.29)-(2.31) สามารถกำหนดปัญหาควบคู่บางส่วน โดยใช้ตัวคูณลากรังซ์จกับสมการเงื่อนไขชนิดเท่ากับศูนย์ (สมการ 2.31)เท่านั้น ส่วนสมการชนิดน้อยกว่าศูนย์(สมการ2.30)ยังคงรักษาไว้เหมือนเดิม จะได้รูปแบบแทนปัญหาดังนี้

Maximize $\phi(\boldsymbol{\lambda})$ (2.35)

โดยมีเงื่อนไขเกี่ยวกับ $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$ (2.36)

เมื่อ $\phi(\boldsymbol{\lambda}) = \min\{ f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^t\mathbf{h}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X \}$ (2.37)

เมื่อออปติไมซ์ปัญหาดังกล่าว จะได้จุดต่ำสุด(minimum)ปรากฏใกล้ผลลัพธ์ $\mathbf{x}^*$ และฟังค์ชั่นควบคู่ ϕ มีค่าสูงสุด(maximum) ณ ที่ตัวคูณลากรังซ์จที่ดีที่สุด $\boldsymbol{\lambda}^*$

2. หลักเกณฑ์ (Weak duality theorem) [5]

ให้ $\mathbf{x}$ เป็นผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ (Feasible solution)ของปัญหาเดิม P โดย $\mathbf{x} \in X$ $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$ และ $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ และให้ λ , μ เป็นผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ของปัญหาควบคู่ D โดย $\mu \geq \mathbf{0}$ จะได้ $f(\mathbf{x}) \geq \phi(\lambda,\mu)$

<u>พิสูจน์</u>

ด้วยการกำหนดฟังค์ชั่นควบคู่ ϕ และ $\mathbf{x} \in X$

เราได้ $\phi(\lambda,\mu) = \min\{ f(\mathbf{y}) + \mu^t\mathbf{g}(\mathbf{y}) + \lambda^t\mathbf{h}(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in X \}$

$$\leq f(\mathbf{x}) + \mu^t\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \lambda^t\mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$$

เนื่องจาก $\mu \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$ และ $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

จากหลักเกณฑ์ ได้ผลตามมา(Corollary) ดังนี้

Corollary 1 :

$$\min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x}\in X,\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \text{ และ } \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \geq \max\{\phi(\lambda,\mu) : \mu \geq \mathbf{0}\}$$

Corollary 2 :

ถ้า $f(\mathbf{x}^*) = \phi(\lambda^*,\mu^*)$ โดย $\mu^* \geq \mathbf{0}$ และ $\mathbf{x}^* \in \{ \mathbf{x}\in X : \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \}$ จะได้ $\mathbf{x}^*$ และ (λ^*,μ^*) เป็นคำตอบของปัญหาเดิมและควบคู่ตามลำดับ

Corollary 3 :

ถ้า $\min\{f(\mathbf{x}):\mathbf{x}\in X,\ \mathbf{g}(\mathbf{x})\leq \mathbf{0},\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} = -\infty$ จะได้ $\phi(\lambda,\mu) = -\infty$, $\mu \geq \mathbf{0}$

Corollary 4 :

ถ้า $\max\{ \phi(\lambda,\mu) : \mu \geq \mathbf{0} \} = \infty$ ปัญหาเดิมจะไม่มีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้

แสดงให้เห็นว่า ผลลัพธ์ที่เป็นคำตอบต้องส่งผลให้ฟังค์ชั่นเป้าหมายเดิมมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับค่าของฟังค์ชั่นเป้าหมายควบคู่เสมอ

3. การหาค่าฟังก์ชั่นควบคู่ (Dual function evaluation)

เนื่องจาก $\phi(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) \leq f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^t\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^t\mathbf{h}(\mathbf{x})$ สำหรับ $\mathbf{x} \in X$ ในการหาค่าฟังก์ชั่นควบคู่ ϕ ณ จุด$(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$ที่กำหนด จึงมักกระทำด้วยการแก้ปัญหาดังต่อไปนี้

Minimize $f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^t\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^t\mathbf{h}(\mathbf{x})$ (2.38a)

โดยที่ $\mathbf{x} \in X$

หรือ ถ้าเป็นปัญหาควบคู่บางส่วน จะใช้สมการ

Minimize $f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^t\mathbf{h}(\mathbf{x})$ (2.38b)

โดยมีเงื่อนไข $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$

และ $(\boldsymbol{\lambda})$ คือ ค่าที่กำหนด

เมื่อสามารถหาผลลัพธ์ของปัญหาในสมการ(2.38) ก็จะสามารถหาผลลัพธ์ของปัญหาเดิม P และปัญหาควบคู่ D ได้

ในการแก้ปัญหาควบคู่ เนื่องจากความต้องการหลักของเราคือการหาค่าผลลัพธ์ที่ดีที่สุด(Optimal solution)ของปัญหาเดิม P ดังนั้นจึงสามารถพิจารณาผลลัพธ์ด้วยหลักเกณฑ์ดังนี้

<u>หลักเกณฑ์สำหรับหาคำตอบของปัญหาเดิม (Theorem for getting the primal solution)</u>

กำหนดค่าให้ $(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$ โดย $\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$

ถ้า $\mathbf{x}^*$ เป็นผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของปัญหาในสมการ(2.38) $\mathbf{x}^*$ ก็จะเป็นผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของปัญหาดังต่อไปนี้

Minimize $f(x)$ (2.39)

โดยมีเงื่อนไข $g_i(x) \leq g_i(x^*)$ สำหรับ $i \in I$ (2.40)

$h_i(x) = h_i(x^*)$ สำหรับ $i = 1,2,\ldots,l$ (2.41)

$x \in X$

เมื่อ $I = \{i : \mu_i \geq 0\}$

จากหลักเกณฑ์ดังกล่าว ได้ผลตามมาดังนี้

Corollary :

ถ้าให้ $\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \le \mathbf{0}$, $\mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ และ $\boldsymbol{\mu}^t\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ $\mathbf{x}^*$ จะเป็นผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของปัญหาดังต่อไปนี้

Minimize $f(x)$ (2.42)

โดยมีเงื่อนไข $g_i(x) \le 0$ สำหรับ $i \in I$ (2.43)

$h_i(x) = 0$ สำหรับ $i = 1,2,\ldots,l$ (2.44)

$x \in X$

2.5 การแยกปัญหาที่แยกได้ (Separable problem) [5,17,20]

ปัญหาต่างๆในการโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ ในบางกรณีอาจมีลักษณะเฉพาะตัวที่สามารถแยกออกพิจารณาเป็นส่วนๆได้ ปัญหาที่แยกได้มีรูปแบบดังนี้

รูปแบบ ก

ในกรณีที่ทุกกลุ่มมีความสัมพันธ์กันในสมการเงื่อนไข จะมีรูปแบบดังนี้

Minimize $\sum_{i=1}^{q} f_i(x_i)$ (2.45a)

โดยมีเงื่อนไข $\sum_{i=1}^{q} h_i(x_i) = 0$ (2.46a)

$\sum_{i=1}^{q} g_i(x_i) \le 0$ (2.47a)

เมื่อ x คือ เวกเตอร์ที่มีสมาชิกจำนวน n ตัว และสามารถแบ่งออกเป็น q ส่วนได้ นั่นคือ $x = (x_1,x_2,\ldots,x_q)$ โดยเวกเตอร์ของแต่ละส่วน (x_i) อาจมีสมาชิก (Components)จำนวนเท่ากันหรือไม่เท่ากันก็ได้

q คือ จำนวนส่วนหรือกลุ่มที่ทั้งเวกเตอร์ตัวแปร x และสมการเงื่อนไขและฟังค์ชั่นเป้าหมายสามารถแยกออกได้

รูปแบบ ข

ในกรณีที่มีบางกลุ่มเท่านั้นที่มีความสัมพันธ์กันในสมการเงื่อนไข เช่น สมการชนิดเท่ากับศูนย์ จะมีรูปแบบดังนี้

Minimize $\sum_{i=1}^{q} f_i(x_i)$ (2.45b)

โดยมีเงื่อนไข $\sum_{i=1}^{q} h_i(x_i) = 0$ (2.46b)

$g_i(x_i) \le 0$, $i=1,2,\ldots,q$ (2.47b)

รูปแบบ ค

ในกรณีที่แต่ละกลุ่มไม่มีความสัมพันธ์กันในสมการเงื่อนไข จะมีรูปแบบดังนี้

$$\text{Minimize } \sum_{i=1}^{q} f_i(x_i) \tag{2.45c}$$

โดยมีเงื่อนไข $h_i(x_i) = 0 \quad , \; i=1,2,\ldots,q$ (2.46c)

$g_i(x_i) \leq 0 \quad , \; i=1,2,\ldots,q$ (2.47c)

ในบางกรณี ปัญหาการโปรแกรมไม่เชิงเส้นอาจไม่อยู่ในรูปแบบของปัญหาที่แยกได้ จำเป็นต้องมีการเปลี่ยนรูปของปัญหาเหล่านั้นให้อยู่ในรูปแบบที่ต้องการ[20] ในที่นี่จะไม่กล่าวถึงวิธีการเปลี่ยนรูปนั้น

การแยกปัญหา (Problem decomposition)

การแยกปัญหารูปแบบ ก ทำได้ดังนี้

โดยอาศัยเวกเตอร์ตัวคูณลากรังซ์จ (λ,μ)กับสมการเงื่อนไข และ $\mu \geq 0$ จะได้ปัญหาดังนี้

$$\text{Minimize } \sum_{i=1}^{q} f_i(x_i) + \mu^t g_i(x_i) + \lambda^t h_i(x_i) \tag{2.48a}$$

และสามารถแยกออกเป็นปัญหาย่อยได้จำนวน q ปัญหาดังนี้

$$\text{Minimize } f_i(x_i) + \mu^t g_i(x_i) + \lambda^t h_i(x_i) \tag{2.49a}$$

$i=1,2,\ldots,q$

การแยกปัญหารูปแบบ ข ทำได้ดังนี้

โดยอาศัยเวกเตอร์ตัวคูณลากรังซ์จ λ กับสมการเงื่อนไขชนิดเท่ากับศูนย์ จะได้ปัญหาดังนี้

$$\text{Minimize } \sum_{i=1}^{q} f_i(x_i) + \lambda^t h_i(x_i) \tag{2.48b}$$

โดยมีเงื่อนไข $g_i(x_i) \leq 0 \quad , \; i=1,2,\ldots,q$

และสามารถแยกออกเป็นปัญหาย่อยได้จำนวน q ปัญหาดังนี้

$$\text{Minimize } f_i(x_i) + \lambda^t h_i(x_i) \tag{2.49b}$$

โดยมีเงื่อนไข $g_i(x_i) \leq 0$

$i=1,2,\ldots,q$

การแยกปัญหารูปแบบ ข ทำได้ดังนี้

เนื่องจากแต่ละกลุ่มไม่มีความสัมพันธ์กัน จึงสามารถแยกปัญหาออกเป็นปัญหาย่อยได้เลยจำนวน q ปัญหาดังนี้

$$\text{Minimize} \quad f_i(x_i) \tag{2.49c}$$

โดยมีเงื่อนไข $h_i\,(x_i) = 0$

$g_i\,(x_i) \leq 0$

$i=1,2,\ldots,q$

2.6 เทคนิคการดีคอมโพสและโคออดิเนท (Decomposition-coordination technique)

เทคนิคการดีคอมโพสและโคออดิเนท คือ เทคนิคการออปติไมซ์ทางคณิตศาสตร์วิธีหนึ่ง ซึ่งได้นำเอาวิธีการของปัญหาควบคู่และวิธีการแยกปัญหามาประสมประสานกันเพื่อใช้ในการแก้ปัญหาการโปรแกรมไม่เชิงเส้นตามความเหมาะสมของปัญหา โดยมีวิธีการดังนี้

1.กำหนดปัญหาที่ต้องการหาคำตอบให้เป็นปัญหาเดิมดังในสมการ(2.29)-(2.31)

2.กำหนดปัญหาควบคู่ให้อยู่ในรูปแบบของสมการ(2.32)-(2.34) หรือ สมการ (2.35)-(2.37)

3.จัดรูปแบบฟังค์ชั่นควบคู่ให้อยู่ในรูปแบบปัญหาที่แยกได้ดังสมการ(2.45)-(2.47) เช่น

$$\phi\,(\lambda,\mu) = \text{Min} \sum_{i=1}^{q} f_i(x_i) + \mu^t g_i(x_i) + \lambda^t h_i(x_i) \tag{2.50a}$$

หรือถ้าเป็นปัญหาควบคู่บางส่วน จะได้

$$\phi\,(\lambda) = \text{Min} \sum_{i=1}^{q} f_i(x_i) + \lambda^t h_i(x_i) \tag{2.50b}$$

โดยมีเงื่อนไข $g_i\,(x_i) \leq 0 \quad , \; i=1,2,\ldots,q$

4. หาผลลัพธ์ของปัญหาในสมการ(2.50) ดังนี้

. แยกปัญหาในสมการ(2.50)ออกเป็นปัญหาย่อย โดยอาศัยหลักการของการแยกปัญหาดังได้กล่าวแล้วในหัวข้อผ่านมา เรียกว่า การดีคอมโพสปัญหา (Problem decomposition)

. กำหนดค่าให้ (λ,μ) และแก้ปัญหาย่อยที่แยกออกนั้นด้วยวิธีการออปติไมซ์ต่าง ๆที่ง่ายและเหมาะสมกับลักษณะของปัญหานั้นๆ เช่น วิธีการโปรแกรมเชิงเส้น การไดนามิกโปรแกรมมิ่ง เป็นต้น

ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นผลลัพธ์ของปัญหาในสมการ(2.50)

5.นำเอาผลลัพธ์ที่ได้จากการแก้ปัญหาย่อยมาพิจารณาในปัญหาควบคู่หลัก(สมการ 2.32-2.33) เพื่อหาผลลัพธ์สุดท้าย โดยอาศัยทฤษฎีและหลักการต่าง ๆของปัญหาควบคู่ ดังได้กล่าวแล้วในหัวข้อผ่านมา เรียกว่า การโคออดิเนทปัญหา (Problem coordination) และตัวคูณลากรังซ์จ λ และ μ เรียกว่า โคออดิเนเตอร์

เทคนิคการดีคอมโพสและโคออดิเนทยังจะกล่าวถึงในเชิงปฏิบัติต่อการออปติไมซ์ปัญหาการกำหนดการผลิตระยะสั้นในระบบพลังน้ำ-พลังความร้อนที่พิจารณาถึงการส่งออกกำลังไฟฟ้าในบทที่ 5