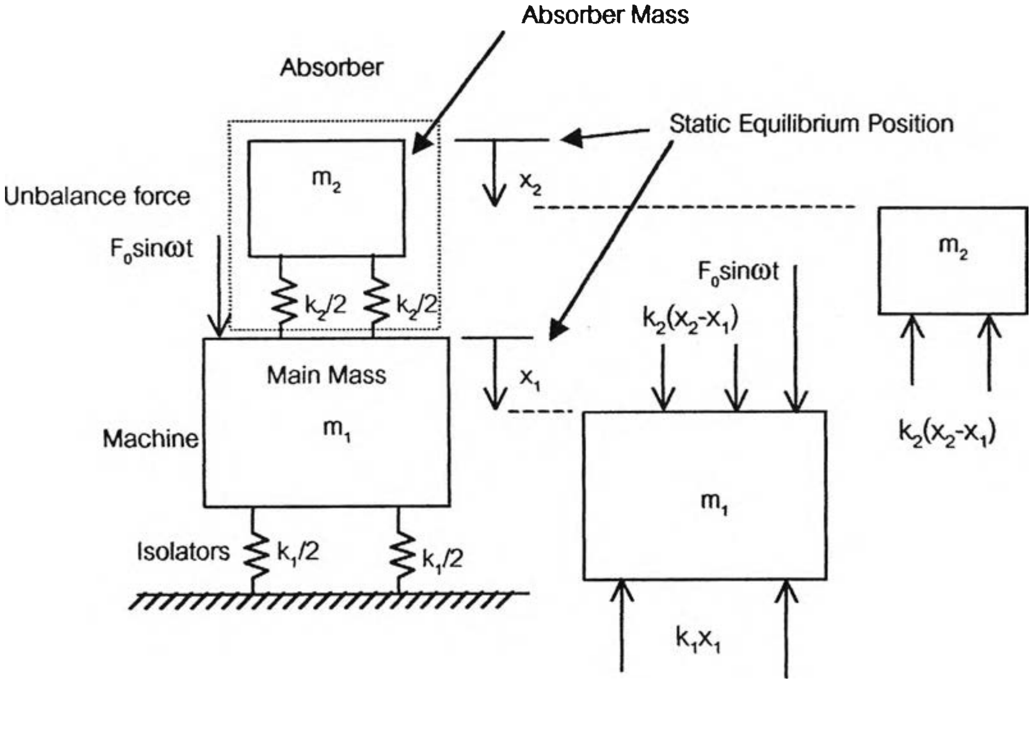
บทที่ 3

ทฤษฎีพื้นฐานเกี่ยวกับตัวดูดซับการสั่นสะเทือน (Vibration Absorber)

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เมื่อวัตถุมีการสั่นสะเทือนภายใต้แรงกระตุ้นแบบฮาร์โมนิก (Harmonic Excitation) สามารถลดหรือกำจัดการสั่นสะเทือนนี้ออกไปได้ โดยเพิ่มน้ำหนักอีกก้อนหนึ่ง เรียกว่า ก้อนมวลดูดซับ (Absorber Mass) และยึดติดด้วยวัสดุที่ยืดหยุ่นได้ เช่น สปริง เข้ากับระบบเดิม ทำให้ระบบมีลักษณะเป็นระบบ 2 ลำดับชั้นความเสรี (2 Degrees of Freedom) และมีค่าความถี่ธรรมชาติเพิ่มขึ้นเป็น 2 ค่า หากเราเลือกค่าความแข็งสปริงและน้ำหนักของก้อนมวลดูดซับที่เหมาะสม น้ำหนักที่เพิ่มเข้าไปนี้จะมีการสั่นสะเทือนแทนวัตถุเดิม และวัตถุเดิมจะหยุดนิ่ง หรือมีการสั่นสะเทือนที่ลดลงมาก

3-1 ตัวดูดซับการสั่นสะเทือนสำหรับระบบที่ไม่มีตัวหน่วง



รูปที่ 3-1 แสดงระบบของตัวดูดซับการสั่นสะเทือนและผังแรงอิสระ

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จากรูปที่ 3-1 จะได้สมการการเคลื่อนที่เป็น

$$m_1\ddot{x}_1 = k_2(x_2 - x_1) - k_1x_1 + F_0 \sin \omega t$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) \qquad (3\text{-}1)$$

เมื่อ m_1 คือ น้ำหนักของก้อนมวลหลัก (Main Mass) (kg)

m_2 คือ นักหนักของก้อนมวลดูดซับ (Absorber Mass) (kg)

x_1 คือ การกระจัดจากตำแหน่งสมดุลทางสถิต (Static Equilibrium Position) ของเครื่องจักรของก้อนมวลหลัก (m) ในแนวตั้ง

x_2 คือ การกระจัดจากตำแหน่งสมดุลทางสถิต (Static Equilibrium Position) ของเครื่องจักรของก้อนมวลดูดซับ (m) ในแนวตั้ง

c_1 คือ ค่าความหน่วง (Damping) ของตัวกันการสั่นสะเทือน (Ns/m)

c_2 คือ ค่าความหน่วง (Damping) ที่แฝงอยู่ในสปริงของตัวดูดซับ (Ns/m)

k_1 คือ ค่าความแข็งสปริง (Spring Siffness) ของตัวกันการสั่นสะเทือน (N/m)

k_2 คือ ค่าความแข็งสปริง (Spring Siffness) ของสปริงของตัวดูดซับ (N/m)

F_0 คือ ขนาดของแรงไม่สมดุล (Unbalance Force)

ω คือ ความเร็วรอบของเครื่องจักร (rpm)

แทนค่าต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

$$\omega_{11} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$$
$$\omega_{22} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$$
$$X_0 = \frac{F_0}{k_1}$$

สมมติให้คำตอบของระบบนี้เป็น

$$x_1 = X_1 \sin \omega t$$
$$x_2 = X_2 \sin \omega t \qquad (3\text{-}2)$$

สมการการเคลื่อนที่ในรูปของขนาดการสั่นสะเทือนสัมพันธ์กับตัวแปรอื่น ๆ ของระบบจะเขียนได้ดังสมการ

$$\left[1+\frac{k_2}{k_1}-\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right]X_1-\left(\frac{k_2}{k_1}\right)X_2=X_0$$

$$-X_1+\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)^2\right]X_2 = 0$$

ดังนั้น จะได้ขนาดการสั่นสะเทือนของก้อนมวลทั้งสองเป็น

$$\frac{X_1}{X_0} = \frac{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)^2\right]}{\left[1+\frac{k_2}{k_1}-\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)^2\right]-\frac{k_2}{k_1}}$$

$$\frac{X_2}{X_0} = \frac{1}{\left[1+\frac{k_2}{k_1}-\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)^2\right]-\frac{k_2}{k_1}} \qquad (3\text{-}3)$$

พิจารณาสมการ 3-3 ขนาดการสั่นสะเทือน X_1 จะเป็นศูนย์ เมื่อ $\omega = \omega_{22}$ หรือ

$$k_2 = m_2\omega^2$$

โดย k_2 นี้เป็นค่าความแข็งสปริงของตัวดูดซับการสั่นสะเทือนที่เหมาะสมสำหรับความเร็วรอบเครื่องจักร ω เพื่อให้ไม่เกิดการสั่นสะเทือนของก้อนมวลหลัก โดยก้อนมวลดูดซับจะเกิดการสั่นสะเทือนขนาด $\frac{X_2}{X_0}=-\frac{k_1}{k_2}$ หรือ $X_2=-\frac{F_0}{m_2\omega^2}$ (โดยแทนค่า $\omega = \omega_{22}$ ในสมการ 3-3)

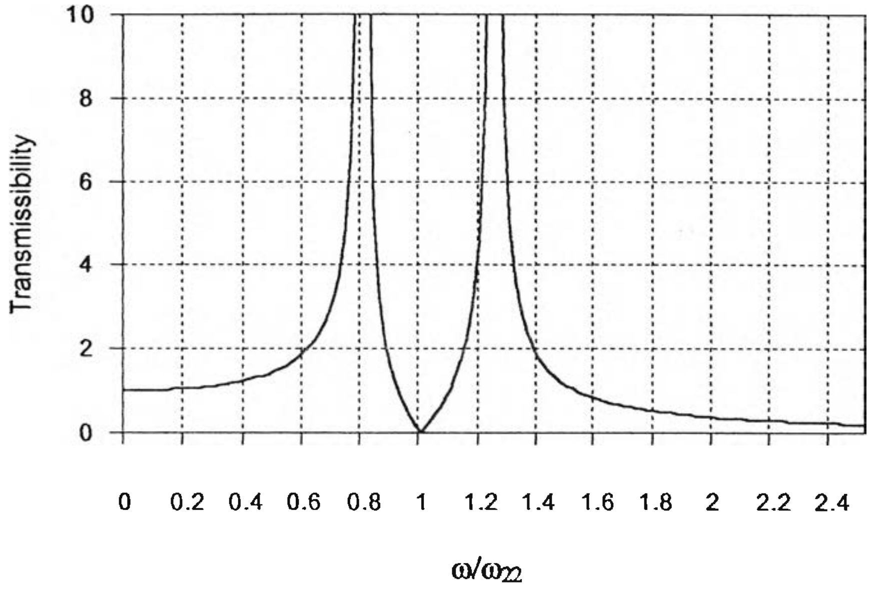
ข้อสังเกต ดังนั้น การเลือกขนาดของก้อนมวลดูดซับ m_2 จะขึ้นกับขนาดของแรงกระตุ้น F_0 ขนาดการสั่นสะเทือนของก้อนมวลดูดซับ X_2 ที่ต้องการ และความเร็วรอบของเครื่องจักร ω

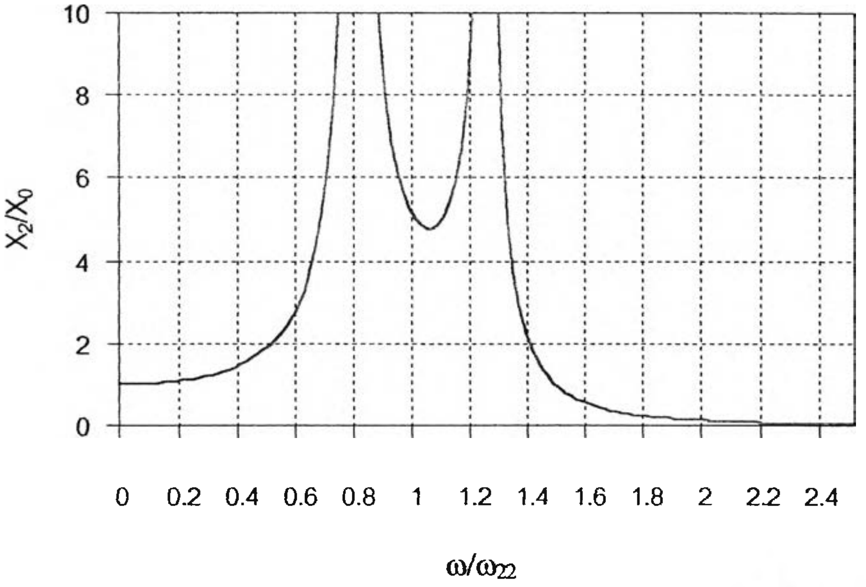
เนื่องจากการสั่นสะเทือนของก้อนมวลหลักจะส่งผ่านตัวกันการสั่นสะเทือนไปยังพื้นโดยไม่มีตัวหน่วง ดังนั้น แรงที่ส่งผ่านไปยังพื้น (Transmitted Force, F_T) จะมีขนาดเท่ากับ k_1X_1

เนื่องจากค่าการส่งผ่าน $TR = \left|\frac{F_T}{F_0}\right|$ และ $X_0 = \frac{F_0}{k_1}$

ดังนั้น $TR = \left|\frac{X_1}{X_0}\right|$ ด้วย

เพื่อแสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างค่าการส่งผ่านและ $\frac{X_2}{X_0}$ กับ $\frac{\omega}{\omega_{22}}$ จึงพล็อตกราฟ โดยกำหนดให้ $\omega_{11} = \omega_{22}$ เพื่อให้สมการอยู่ในรูปแบบง่ายขึ้น และอัตราส่วนมวล (Mass Ratio) $\mu = \frac{m_2}{m_1} = 0.2$ ซึ่งเป็นค่าที่นิยมใช้ในทางทฤษฎีเพื่อให้รูปร่างของกราฟเหมาะสมต่อการวิเคราะห์ตำแหน่งความถี่ธรรมชาติทั้ง 2 ตำแหน่งไม่ใกล้หรือห่างจนเกินไป





รูปที่ 3-2 รูปแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าการส่งผ่านกับ $\frac{\omega}{\omega_{22}}$ และ $\frac{X_2}{X_0}$ กับ $\frac{\omega}{\omega_{22}}$ สำหรับระบบ 2 ลำดับขั้นความเสรีในแนวตั้ง โดย $\omega_{11} = \omega_{22}$ และอัตราส่วนมวลเป็น 0.2

จากรูปที่ 3-2 สังเกตว่า

1. ค่าการส่งผ่านมีค่าเท่ากับ 1 เมื่อ $\frac{\omega}{\omega_{22}}$ เป็น 0

2. ขนาดการสั่นสะเทือนมีค่ามากที่ตำแหน่งความถี่ธรรมชาติทั้ง 2 ตำแหน่ง คือ $\frac{\omega}{\omega_{22}}$ เท่ากับ 0.8 และ 1.25 โดยตำแหน่งความถี่ธรรมชาติ ω_n นี้ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ ω_{11} และ ω_{22}

3. ตำแหน่งที่ค่าการส่งผ่านมีค่าเท่ากับ 0 อยู่ระหว่างค่าความถี่ธรรมชาติทั้ง 2 ค่าของระบบ

4. ขนาดการสั่นสะเทือนของก้อนมวลดูดซับมีค่ามากกว่า 0 เสมอ

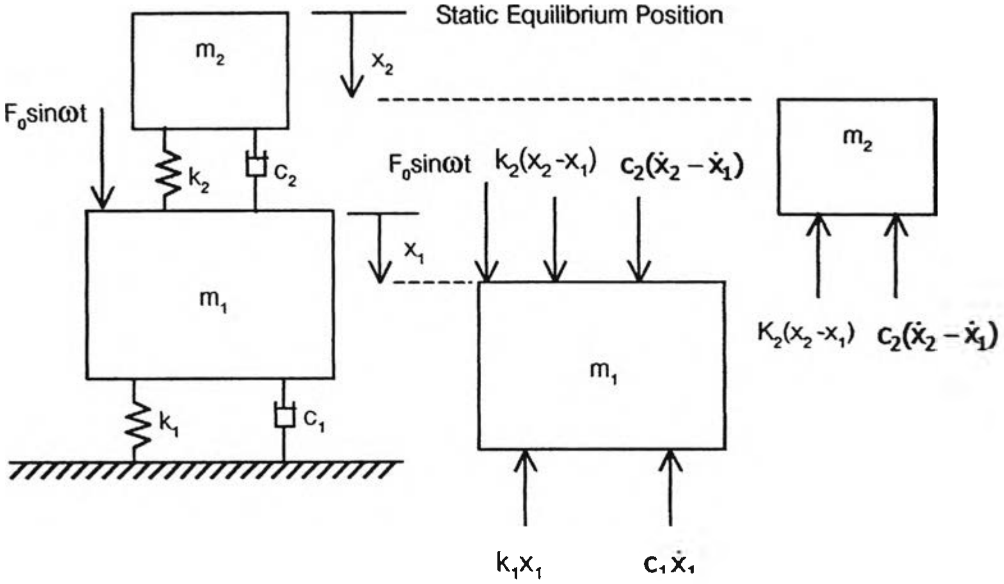
5. ขนาดการสั่นสะเทือนของก้อนมวลหลักเป็น 0 เมื่อ $\omega = \omega_{22}$ และขนาดการกระจัดของก้อนมวลดูดซับจะเป็น $X_2 = -\frac{k_1}{k_2}X_0 = -\frac{F_0}{k_2}$ เครื่องหมายที่เป็นลบแสดงให้เห็นว่า การกระจัดของก้อนมวลดูดซับมีเฟส (Phase) ตรงข้ามกับแรงที่มากระตุ้นระบบ สังเกตว่าแรง k_2X_2 จะหักล้างกับแรง F_0 ทำให้ขนาดการสั่นสะเทือนของก้อนมวลหลักเป็น 0

มีข้อสังเกต คือ เกณฑ์สำคัญในการติดตั้งตัวดูดซับการสั่นสะเทือนเพื่อให้แรงที่ส่งผ่านไปยังพื้นเป็น 0 ต้องเลือกค่าความแข็งสปริง $k_2 = m_2\omega^2$

โดยทั่วไป ตัวดูดซับการสั่นสะเทือนใช้ได้กับเครื่องจักรที่ทำงานที่ความเร็วรอบคงที่ เพราะค่าความแข็งสปริงของสปริงของตัวดูดซับมีค่าคงที่ ในงานวิจัยนี้ จะพัฒนาสปริงของตัวดูดซับโดยใช้สปริงที่ปรับค่าความแข็งสปริงได้ เพื่อให้ใช้ตัวดูดซับการสั่นสะเทือนกับเครื่องจักรที่มีการเปลี่ยนแปลงความเร็วรอบได้

3-2 ตัวดูดซับการสั่นสะเทือนสำหรับระบบที่มีตัวหน่วง

ในระบบเครื่องจักรจริง ถึงแม้จะไม่มีการติดตั้งตัวหน่วง แต่ระบบจะมีค่าความหน่วงแฝงอยู่ในโครงสร้างของเครื่องจักรเสมอ การวิเคราะห์ระบบตัวดูดซับการสั่นสะเทือนแบบมีตัวหน่วงจึงให้ผลการวิเคราะห์ที่ใกล้เคียงเครื่องจักรจริงมากกว่าระบบที่ไม่มีตัวหน่วง



รูปที่ 3-3 แสดงระบบของตัวดูดซับการสั่นสะเทือนที่มีตัวหน่วง

จากรูป ได้สมการการเคลื่อนที่เป็น

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= k_2(x_2 - x_1) - k_1x_1 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - c_1\dot{x}_1 + F_0 \sin \varpi t \\ m_2\ddot{x}_2 &= -k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{aligned} \qquad (3\text{-}4)$$

สมมติให้คำตอบของระบบนี้เป็น

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 e^{j\varpi t} \\ x_2 &= X_2 e^{j\varpi t} \end{aligned} \qquad (3\text{-}5)$$

จะได้สมการในรูปของขนาดการสั่นสะเทือนเป็น

$$\begin{aligned} [-m_1\omega^2 + k_1 + k_2 + j\omega c_1 + j\omega c_2]X_1 - [k_2 + j\omega c_2]X_2 &= F_0 \\ -[k_2 + j\omega c_2]X_1 + [-m_2\omega^2 + k_2 + j\omega c_2]X_2 &= 0 \end{aligned}$$

จะได้ขนาดของการสั่นสะเทือนเป็น

$$X_1 = F_0\sqrt{\frac{(-m_2\omega^2 + k_2)^2 + \omega^2 c_2^2}{[(-m_1\omega^2 + k_1)(-m_2\omega^2 + k_2) - m_2\omega^2 k_2 - \omega^2 c_1^2]^2 + [\omega c_1(-m_2\omega^2 + k_2) + \omega c_2(-m_1\omega^2 - m_2\omega^2 + k_1)]^2}}$$

$$X_2 = F_0\sqrt{\frac{k_2^2 + \omega^2 c_2^2}{[(-m_1\omega^2 + k_1)(-m_2\omega^2 + k_2) - m_2\omega^2 k_2 - \omega^2 c_1^2]^2 + [\omega c_1(-m_2\omega^2 + k_2) + \omega c_2(-m_1\omega^2 - m_2\omega^2 + k_1)]^2}}$$

(3-6)

ขนาดของแรงที่ส่งผ่านตัวสปริงและตัวหน่วงไปยังพื้น (ซึ่งเวกเตอร์แรงจากสปริงและตัวหน่วงจะมีทิศทางต่างกัน 90 องศา) แสดงได้ดังสมการ

$$F_T = \sqrt{(k_1 X_1)^2 + (c_1\omega X_1)^2} = k_1 X_1\sqrt{1 + \left(\frac{c_1\omega}{k_1}\right)^2} \tag{3-7}$$

และสำหรับระบบที่ค่าความหน่วง $c_1 = c_2 = c$ จะได้ขนาดการสั่นสะเทือนเป็น

$$X_1 = F_0\sqrt{\frac{(k_2 - m_2\omega^2)^2 + \omega^2 c^2}{[(-m_1\omega^2 + k_1)(-m_2\omega^2 + k_2) - m_2\omega^2 k_2 - \omega^2 c^2]^2 + \omega^2 c^2(-m_1\omega^2 + k_1 + k_2 - 2m_2\omega^2)^2}}$$

$$X_2 = F_0\sqrt{\frac{k_2^2 + \omega^2 c^2}{[(-m_1\omega^2 + k_1)(-m_2\omega^2 + k_2) - m_2\omega^2 k_2 - \omega^2 c^2]^2 + \omega^2 c^2(-m_1\omega^2 + k_1 + k_2 - 2m_2\omega^2)^2}}$$

(3-8)

แทนค่าต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

อัตราส่วนมวล $\mu = \frac{m_2}{m_1}$

$$\omega_{11} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$$

$$\omega_{22} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$$

$$X_0 = \frac{F_0}{k_1}$$

$$c_c = 2m_2\omega_{11}$$

โดย c_c ไม่ใช่ค่าความหน่วงวิกฤต (Critical Damp) กำหนดขึ้นมาเพื่อให้มีพจน์ c/c_c ซึ่งอยู่ในรูปแบบไม่มีหน่วย (Dimensionless)

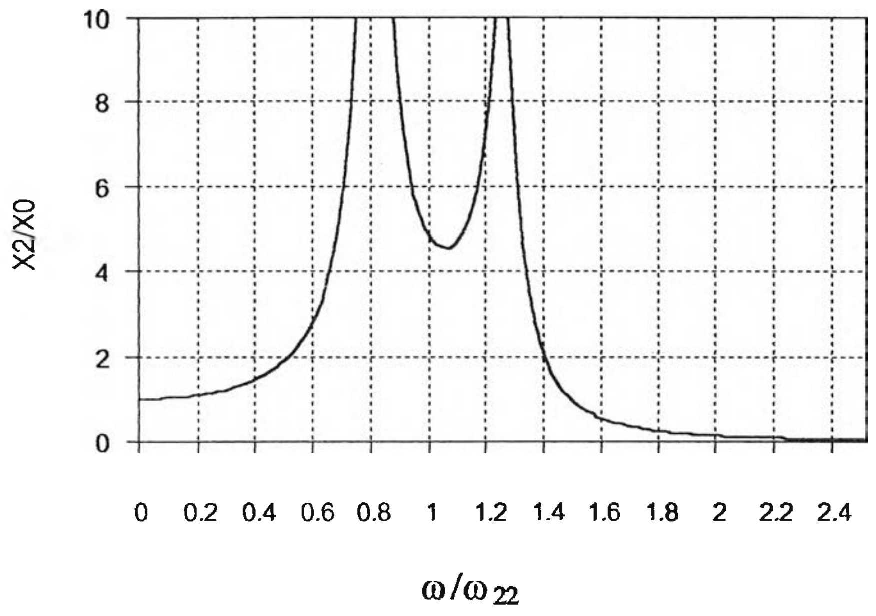
จะได้

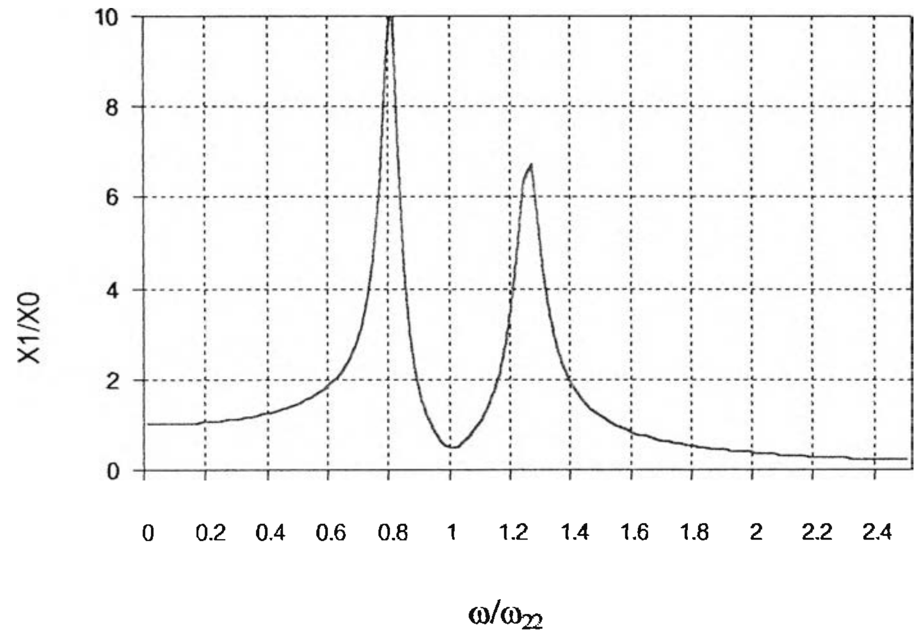
$$\frac{X_1}{X_0}=\sqrt{\frac{\left(2\frac{c}{c_c}\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2+\left[\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2-\left(\frac{\omega_{22}}{\omega_{11}}\right)^2\right]^2}{\left(2\frac{c}{c_c}\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\left[\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2-1+\mu\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2-\mu\left(\frac{\omega_{22}}{\omega_{11}}\right)^2\right]^2+\left[\mu\left(\frac{\omega_{22}}{\omega_{11}}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2+\left(2\frac{c}{c_c}\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2-\left(\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2-1\right)\left(\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2-\left(\frac{\omega_{22}}{\omega_{11}}\right)^2\right)\right]^2}}$$

$$\frac{X_2}{X_0}=\sqrt{\frac{\left(2\frac{c}{c_c}\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2+\left[\left(\frac{\omega_{22}}{\omega_{11}}\right)^2\right]^2}{\left(2\frac{c}{c_c}\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\left[\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2-1+\mu\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2-\mu\left(\frac{\omega_{22}}{\omega_{11}}\right)^2\right]^2+\left[\mu\left(\frac{\omega_{22}}{\omega_{11}}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2+\left(2\frac{c}{c_c}\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2-\left(\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2-1\right)\left(\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2-\left(\frac{\omega_{22}}{\omega_{11}}\right)^2\right)\right]^2}}$$

(3-9)

เพื่อแสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{X_1}{X_0}$ กับ $\frac{\omega}{\omega_{22}}$ และ $\frac{X_2}{X_0}$ กับ $\frac{\omega}{\omega_{22}}$ กำหนดให้ $\omega_{11}=\omega_{22}$, $c_1 = c_2 = c$ เพื่อให้รูปแบบสมการง่ายขึ้น, อัตราส่วนมวล $\mu=\frac{m_2}{m_1}=0.2$ และตัวหน่วง $c/c_c=0.05$ ซึ่งเป็นค่าที่นิยมใช้ในทางทฤษฎีเพื่อให้รูปร่างของกราฟเหมาะสมต่อการวิเคราะห์ ตำแหน่งความถี่ธรรมชาติทั้ง 2 ตำแหน่งไม่ใกล้หรือห่างจนเกินไป





รูปที่ 3-4 รูปแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{X_1}{X_0}$ และ $\frac{X_2}{X_0}$ กับ $\frac{\omega}{\omega_{22}}$ สำหรับระบบ 2 ลำดับขั้นความเสรีในแนวตั้ง โดย $\omega_{11} = \omega_{22}$, μ = 0.2, $c_1 = c_2 = c$ และ $c/c_c = 0.05$

จากรูปที่ 3-4 สังเกตว่า

1. ขนาดการสั่นสะเทือนมีค่ามากที่ตำแหน่งความถี่ธรรมชาติทั้ง 2 ตำแหน่ง
2. ตำแหน่งที่การสั่นสะเทือนของก้อนมวลหลักมีค่าน้อยที่สุดอยู่ระหว่างค่าความถี่ธรรมชาติทั้ง 2 ค่าของระบบ
3. ขนาดการสั่นสะเทือนของก้อนมวลหลัก และก้อนมวลดูดซับมีค่ามากกว่า 0 เสมอ ดังนั้นจึงไม่สามารถลดแรงที่ส่งผ่านไปยังพื้นให้เป็น 0 ได้
4. ขนาดการสั่นสะเทือนของก้อนมวลหลัก X_1 มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ $\omega = \omega_{22}$

มีข้อสังเกต คือ เกณฑ์สำคัญในการติดตั้งตัวดูดซับการสั่นสะเทือนเพื่อให้แรงที่ส่งผ่านไปยังพื้นน้อยที่สุด คือ ต้องเลือกค่าความแข็งสปริง $k_2 = m_2\omega^2$