

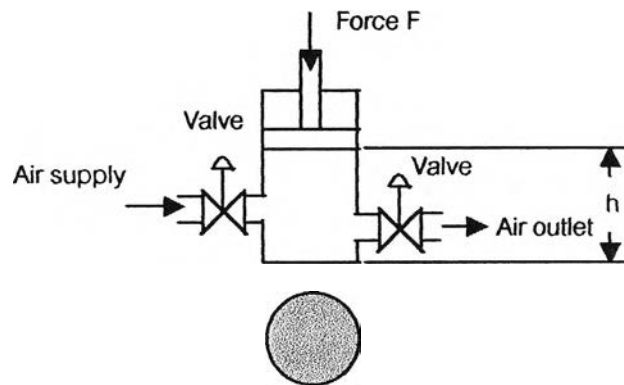
บทที่ 4

สปริงที่สามารถปรับค่าความแข็งสปริง

ในงานวิจัยนี้ ศึกษา และเปรียบเทียบคุณสมบัติของสปริงที่สามารถปรับค่าความแข็งสปริง 2 ประเภท คือ สปริงอากาศ (Air Spring) และคานที่สามารถเลื่อนตำแหน่งรองรับ เพื่อเลือกประเภทที่เหมาะสมทำหน้าที่เป็นสปริงของตัวดูดซับการสั่นสะเทือนที่ใช้ในการทดลอง

4-1 สปริงอากาศ

สปริงอากาศเป็นอีกทางเลือกหนึ่งสำหรับสปริงที่สามารถปรับค่าความแข็งสปริงได้ ซึ่งมีหลายประเภท ในงานวิจัยนี้ศึกษาสปริงอากาศที่มีพื้นที่หน้าตัดคงที่ เนื่องจากสามารถวิเคราะห์และสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ง่าย สปริงอากาศแบบนี้มีลักษณะคล้ายกระบอกสูบ ดังรูปที่ 4-1



รูปที่ 4-1 สปริงอากาศ

4-1-1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสปริงอากาศ

พิจารณาสมการสมดุล (Equilibrium equation)

$$F = P_g A \quad (4-1)$$

เมื่อ F คือ แรงที่กดลงบนสปริงอากาศ (N)

P_g คือ ความดันเกจ (Gauge pressure) ของอากาศภายในสปริงอากาศ (N/m^2)

A คือ พื้นที่หน้าตัดภายในสปริงอากาศที่ตั้งฉากกับแรงสถิตย์ F (m^2)

เมื่อแรงสถิตย F มีค่าเปลี่ยนแปลง ความดันเกจจะมีค่าเปลี่ยนแปลงตามสมการ

$$dF = A dP_g \quad (4-2)$$

ค่าความแข็งสปริงหาได้จาก

$$k = -\frac{dF}{dh} = -A \frac{dP_g}{dh} \quad (4-3)$$

เมื่อ k คือ ความแข็งสปริง (N/m)

h คือ ความสูงของช่องว่างภายในสปริงอากาศ (m)

พิจารณาการทำงานของระบบเป็นกระบวนการพอลิทรอปิก (Polytropic process) จะได้ความสัมพันธ์เป็น

$$PV^n = \text{const.} \quad (4-4)$$

เมื่อ P คือ ความดันสัมบูรณ์ (Absolute pressure) ของอากาศภายในสปริงอากาศ (N/m²)

V คือ ปริมาตรอากาศภายในสปริงอากาศ (m³)

n คือ เลขชี้กำลังของกระบวนการพอลิทรอปิกของระบบ

จากการดิฟเฟอเรนเชียล (Differentiate) จะได้

$$nPV^{n-1}dV + V^n dP = 0 \quad (4-5)$$

และ

$$dP = dP_g = -\frac{nP}{V} dV \quad (4-6)$$

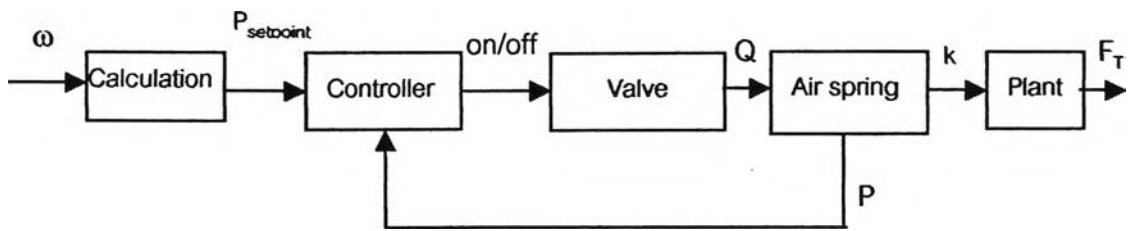
ดังนั้นจะได้

$$k = \frac{nPA}{V} \frac{dV}{dh} = \frac{nPA^2}{V} \quad (4-7)$$

$$k = \frac{nPA}{h} \quad (4-8)$$

เป็นสมการที่ใช้กำหนดค่าความแข็งสปริง สังเกตว่าค่าความแข็งสปริงเปลี่ยนไปตามความดันสัมบูรณ์ของอากาศภายในสปริงอากาศ P และความสูงของช่องว่างอากาศภายในสปริงอากาศ h

พิจารณา Block diagram ของระบบ



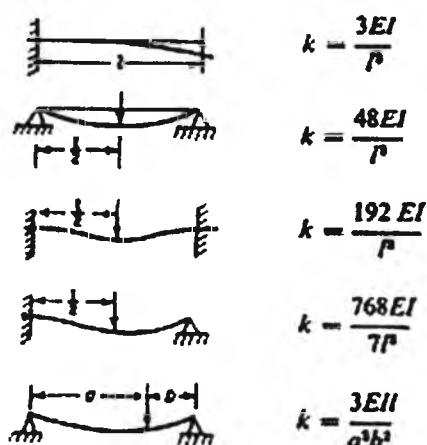
รูปที่ 4-2 แผนภาพแสดงการควบคุมระบบของสปริงอากาศ

4-1-2 วิธีการควบคุมความแข็งสปริงของสปริงอากาศ

สปริงอากาศจะมีช่องสำหรับรับอากาศจากถังพักอากาศ และมีช่องสำหรับปล่อยอากาศออก โดยทั้ง 2 ช่องจะมีวาล์วควบคุม (Control Valve) ซึ่งควบคุมโดยตัวควบคุม (Controller) ทำหน้าที่ปิดและเปิดช่องรับอากาศจากถังพักอากาศ และช่องปล่อยอากาศออก เพื่อให้ความดันอากาศภายในสปริงอากาศมีค่าเหมาะสม ทำให้ความแข็งสปริงเปลี่ยนไปตามต้องการ เมื่อความดันภายในสปริงอากาศต่ำกว่าที่ต้องการ ตัวควบคุมจะสั่งเปิดช่องรับอากาศจากเครื่องอัดอากาศ และปิดช่องปล่อยอากาศออกเพื่อให้ความดันภายในสปริงอากาศสูงขึ้น เมื่อความดันภายในสปริงอากาศสูงกว่าที่ต้องการ ตัวควบคุมจะสั่งปิดช่องรับอากาศจากเครื่องอัดอากาศและเปิดช่องปล่อยอากาศออกเพื่อให้ความดันภายในสปริงอากาศต่ำลง และเมื่อความดันภายในสปริงอากาศเหมาะสมก็ปิดช่องรับอากาศทั้ง 2 จุด เพื่อให้ความดันภายในสปริงอากาศเป็นไปตามที่ต้องการ ซึ่งความดันที่เหมาะสมจะเปลี่ยนไปตามความเร็วรอบของเครื่องจักร

4-2 คานที่สามารถเลื่อนตำแหน่งรองรับ

สำหรับคานที่มีพื้นที่หน้าตัดคงที่ ค่าความแข็งสปริงของคานเปลี่ยนไปตามลักษณะและตำแหน่งของการรองรับคาน ความยาวคาน และตำแหน่งที่แรงกดลงบนคาน ความแข็งสปริงของคานที่มีการรองรับบางประเภทสามารถหาได้จากรูปที่ 4-3



รูปที่ 4-3 ค่าความแข็งสปริงของคาน

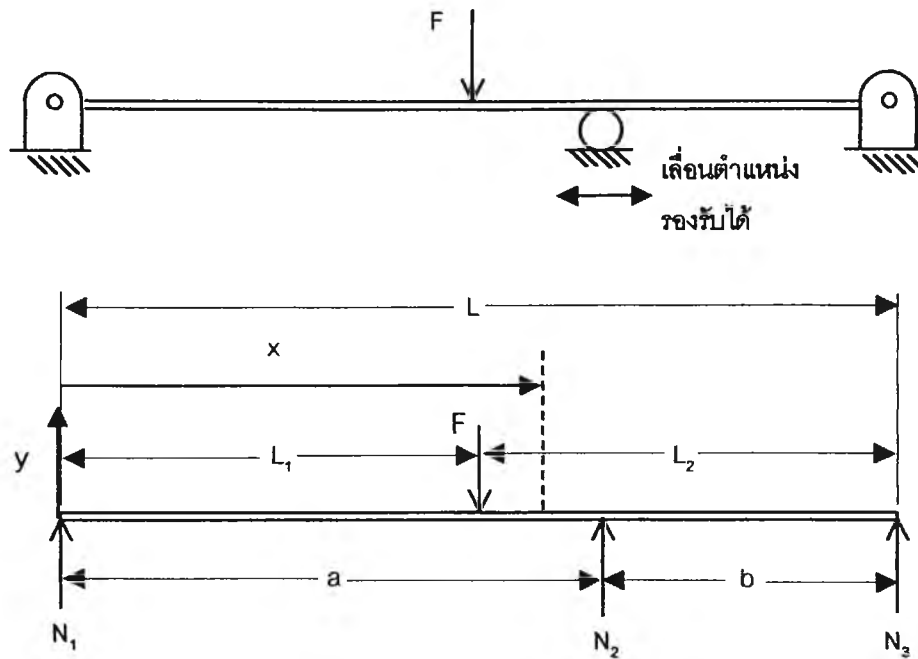
โดย I คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่หน้าตัด (Moment of Inertia of Cross-sectional area) ของคาน

l คือ ความยาวรวมของคาน

A คือ พื้นที่หน้าตัดของคาน

E คือ ยังโมดูลัส (Young's Modulus)

เนื่องจากคานในรูปที่ 4-3 ไม่เหมาะสมที่จะใช้ในงานวิจัย จึงออกแบบคานที่มีลักษณะดังรูปที่ 4-4 ซึ่งเป็นคานแบบต่อเนื่อง (Continuous Beam) ที่มีการรองรับเป็นแบบปกติ (Simple Support) 3 ตำแหน่ง เนื่องจากมีความเสถียร และสามารถเปลี่ยนค่าความแข็งสปริงได้ โดยเลื่อนตำแหน่งรองรับตำแหน่งกลาง และตำแหน่งรองรับที่ปลายทั้ง 2 ด้านของคานเป็นจุดเชื่อมต่อบนหมุด (Pin Joint)



รูปที่ 4-4 คานที่สามารถเลื่อนตำแหน่งรองรับที่ใช้ในการทดลอง

คานที่มีแรงปฏิกิริยามากกว่า 2 แรงเป็นคานไม่แน่นอนทางสถิต (Statically Indeterminate Beam) ต้องใช้สมการสมดุล (Equilibrium Equations) และข้อจำกัด (Constraint) ของการเปลี่ยนรูปร่างทางเรขาคณิตของคานที่มีภาวะ มาใช้ในการแก้ปัญหาเพื่อหาแรงปฏิกิริยาทั้ง 3 แรง และหาระยะโก่ง (Deflection) ของคาน สำหรับคานแต่ละเส้นความแข็งสปริงของคานในแต่ละตำแหน่งจะไม่เท่ากัน การหาความแข็งสปริงของคานที่ตำแหน่งใด ให้สร้างแรงกดที่จุดนั้น ค่าความแข็งสปริงของคานตำแหน่งที่ถูกแรงกดคำนวณได้จากอัตราส่วนระหว่างแรงกดและระยะโก่งของคานตำแหน่งที่ถูกแรงกด

4-2-1 การหาระยะโก่งของคานโดยวิธีซิงกูลาริตีฟังก์ชัน (Singularity Function)

การหาระยะโก่งของคานสามารถทำได้หลายวิธี ในงานวิจัยนี้ใช้วิธีซิงกูลาริตีฟังก์ชัน โดยซิงกูลาริตีฟังก์ชันของ x เขียนได้เป็น $\langle x - x_0 \rangle^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มรวมทั้ง 0 ด้วย และ x_0 เป็นค่าคงที่มีค่าเท่ากับค่าของ x ที่เป็นจุดเริ่มต้นของขอบเขตที่ต้องการอธิบายด้วยซิงกูลาริตีฟังก์ชัน มีคุณสมบัติดังนี้

$$\langle x - x_0 \rangle^n = \begin{cases} (x - x_0)^n & \text{when } n > 0 \text{ and } x \geq x_0 \\ 0 & \text{when } n > 0 \text{ and } x < x_0 \end{cases}$$

$$\langle x - x_0 \rangle^0 = \begin{cases} 1 & \text{when } x \geq x_0 \\ 0 & \text{when } x < x_0 \end{cases}$$

$$\int \langle x - x_0 \rangle^n dx = \frac{1}{n+1} \langle x - x_0 \rangle^{n+1} + c \quad \text{when } n \geq 0$$

$$\frac{d}{dx} \langle x - x_0 \rangle^n = n \langle x - x_0 \rangle^{n-1} \quad \text{when } n \geq 1$$

4-2-2 การหาค่าความแข็งสปริงของคานที่ใช้ในการทดลอง

เริ่มต้นจากการหาระยะโก่งของคาน โดยไม่คิดภาระจากน้ำหนักของคาน จากสมการ

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M_x \quad (4-9)$$

โดย I คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่หน้าตัด (Moment of Inertia of Cross-sectional area) ของคาน

E คือ ยิงโมดูลัส (Young's Modulus)

x คือ ระยะในแนวนอนจากตำแหน่งซ้ายสุดของคาน

y คือ ระยะโก่งที่ตำแหน่ง x บนคาน

M_x คือ โมเมนต์ภายในคานที่ตำแหน่ง x

หา M_x โดยวิธีเชิงอนุพันธ์ที่ฟังก์ชันจากรูปที่ 4-4 จะได้

$$M_x = N_1 x - F \langle x - L_1 \rangle^1 + N_2 \langle x - a \rangle^1 \quad (4-10)$$

ดังนั้น

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = N_1 x - F \langle x - L_1 \rangle^1 + N_2 \langle x - a \rangle^1$$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{N_1 x^2}{2} - \frac{F \langle x - L_1 \rangle^2}{2} + \frac{N_2 \langle x - a \rangle^2}{2} + c_1 \quad (4-11)$$

$$EI y = \frac{N_1 x^3}{6} - \frac{F \langle x - L_1 \rangle^3}{6} + \frac{N_2 \langle x - a \rangle^3}{6} + c_1 x + c_2$$

ค่าคงที่จากการอินทิเกรต c_1 และ c_2 หาได้จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions)

ต่อไปนี

$$\text{ที่ } x=0, y=0 \text{ ดังนั้น } c_2 = 0$$

$$\text{ที่ } x=a, y=0 \text{ ดังนั้น } c_1 = \frac{F(a-L_1)^3}{6a} - \frac{N_1 a^2}{6}$$

ดังนั้น

$$EI y = \frac{N_1 x^3}{6} - \frac{F(x-L_1)^3}{6} + \frac{N_2(x-a)^3}{6} + \frac{F(a-L_1)^3 x}{6a} - \frac{N_1 a^2 x}{6} \quad (4-12)$$

เงื่อนไขขอบเขตสุดท้าย ที่ $x=L, y=0$ จะได้

$$0 = \frac{N_1 L^3}{6} - \frac{F(L-L_1)^3}{6} + \frac{N_2(L-a)^3}{6} + \frac{F(a-L_1)^3 L}{6a} - \frac{N_1 a^2 L}{6} \quad (4-13)$$

พิจารณารูปที่ 4-4 สมการสมดุลแรง $\sum F_y = 0$ จะได้

$$F = N_1 + N_2 + N_3 \quad (4-14)$$

และสมการสมดุลโมเมนต์รอบจุดขวาสุดของคาน $\sum M = 0$ จะได้

$$F(L-L_1) = N_1 L + N_2(L-a) \quad (4-15)$$

จากสมการ 4-13, 4-14 และ 4-15 แก้สมการได้แรงปฏิกิริยา 3 แรง ดังนี้

$$N_1 = \frac{FL(a-L_1)^3 + ab^2 FL_2 - aFL_2^3}{2a^2 bL}$$

$$N_2 = \frac{FL(a-L_1)^3 - a^3 FL_2 + aFL^2 L_2 - aFL_2^3}{2a^2 b^2}$$

$$N_3 = \frac{-a^3 bFL - ab^3 FL + abFL^3 + bFL(a-L_1)^3 - FL^2(a-L_1)^3 + ab^3 FL_2 - a^3 FLL_2 - aFL^3 L_2 - abFL_2^3 + aFLL_2^3}{-abL(a^2 + b^2 - L^2)}$$

แทนค่าแรงปฏิกิริยา 3 แรงในสมการ 4-12 จะได้ระยะโค้งเป็น

$$y = \frac{-FL(a-L_1)^3 x^3 - ab^2 FL_2 x^3 + aFL_2^3 x^3 + FL(a-L_1)^3 a^2 x + a^3 b^2 FL_2 x}{12a^2 bLEI} + \frac{-a^3 FL_2^3 x - 2a^2 bLF(x-L_1)^3 + 2abLxF(a-L_1)^3}{12a^2 bLEI} \quad (4-16)$$

จะได้ระยะโก่งของคานตำแหน่งที่มีแรงกด ($x = L_1$) คือ

$$y = \frac{FL_1^2(a^4 - 4a^3L + 8a^2LL_1 - 2a^2L_1^2 - 4aLL_1^2 + L_1^4)}{12a^2LEI} \quad (4-17)$$

ค่าความแข็งสปริง k คำนวณได้จากอัตราส่วนระหว่างแรงกด F กับระยะโก่ง y ดังนั้น

$$k = \frac{12a^2LEI}{L_1^2(a^4 - 4a^3L + 8a^2LL_1 - 2a^2L_1^2 - 4aLL_1^2 + L_1^4)} \quad (4-18)$$

เมื่อเราเลื่อนตำแหน่งรองรับ ค่าพารามิเตอร์ a จะเปลี่ยนไปทำให้ค่าความแข็งสปริงเปลี่ยน

4-3 เปรียบเทียบความแตกต่างของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับสปริงอากาศและคาน

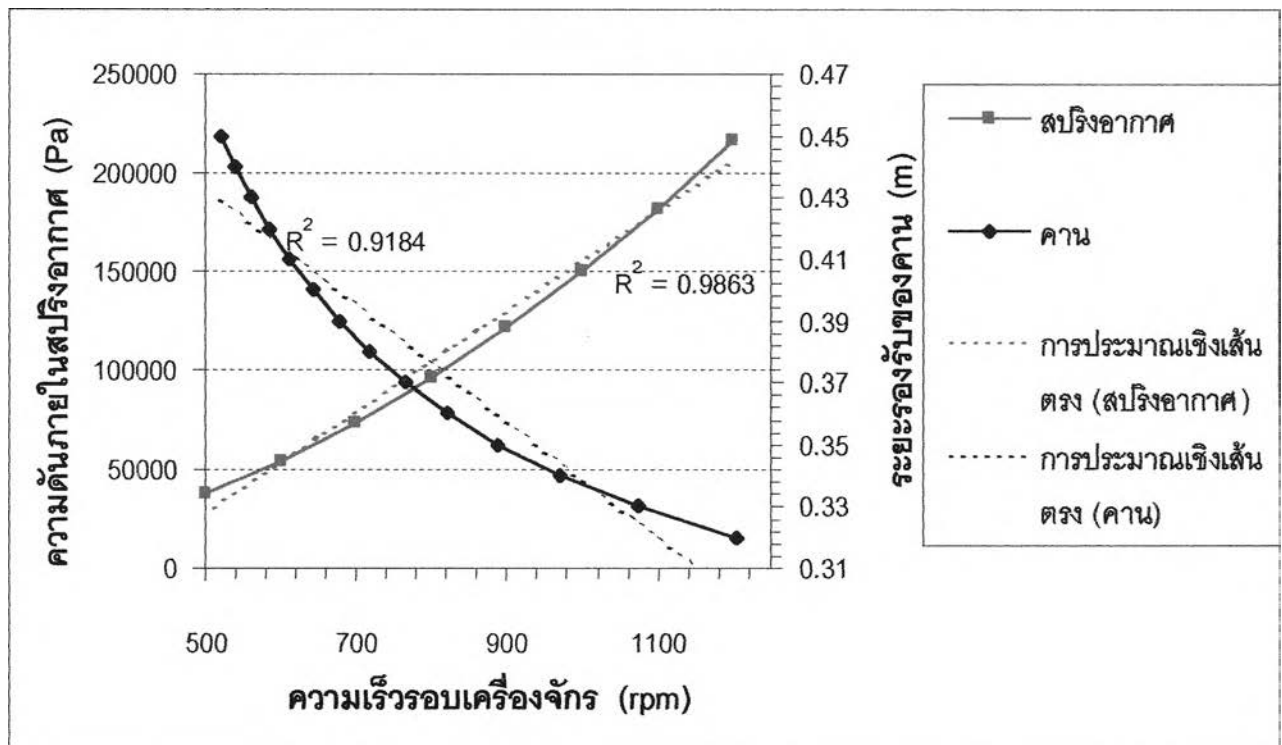
กำหนดค่าพารามิเตอร์ของคานเป็น

$L = 0.5$ m, $L_1 = 0.25$ m, $L_2 = 0.25$ m, คานกว้าง 9 cm หนา 2.8 mm และ $E = 200$ GPa

และกำหนดพารามิเตอร์ของสปริงอากาศเป็น

$n = 1.3$, $h = 10$ cm และเส้นผ่านศูนย์กลางของสปริงอากาศ = 30 cm

จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสปริงอากาศในสมการ 4-8, แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของคานในสมการ 4-18 และค่าความแข็งสปริงของตัวดูดซับ $k_2 = m_2\omega^2$ เพื่อเปรียบเทียบแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสปริงทั้ง 2 ประเภท จึงพล็อตกราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะรองรับของคาน a และความดันภายในสปริงอากาศ P กับความเร็วรอบของเครื่องจักรได้ดังรูปที่ 4-7 จากการวิเคราะห์ทางสถิติ ค่า R^2 หรือ สัมประสิทธิ์การตัดสินใจ (Coefficient of determination) ของการประมาณเชิงเส้นตรงของสปริงอากาศและคานมีค่าใกล้เคียงกัน โดยค่า R^2 ของสปริงอากาศจะเข้าใกล้ 1 มากกว่าคานเล็กน้อย นั่นคือ สำหรับพารามิเตอร์ที่กำหนดขึ้นนี้ สปริงอากาศมีแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่มีความเป็นเส้นตรงมากกว่าคานเล็กน้อย



รูปที่ 4-5 ความสัมพันธ์ระหว่างระยะรองรับของคาน a และความดันภายในสปริงอากาศ P กับความเร็วรอบของเครื่องจักร (โดยคานยาว 50 cm. กว้าง 9 cm.หนา 2.8 mm. สปริงอากาศสูง 10 cm. เส้นผ่านศูนย์กลาง 30 cm.)

สำหรับสาเหตุสำคัญที่เลือกใช้คานในงานวิจัย คือ สปริงอากาศมีค่าอัตราส่วนความหน่วงสูงถึงประมาณ 0.33 (จากภาคผนวก ค โดยพิจารณาสปริงอากาศเป็น Friction-damped springs) เนื่องจากสปริงอากาศจะเกิดแรงเสียดทานระหว่างกระบอกสูบและลูกสูบ ซึ่งขึ้นกับการสร้างสปริงอากาศ แต่สำหรับคานควรจะมีค่าอัตราส่วนความหน่วงที่น้อยกว่า (จากการหาอัตราส่วนความหน่วงของคานในงานวิจัยในหัวข้อ 7-1-4 มีค่าประมาณ 0.0047 เท่านั้น) ค่าอัตราส่วนความหน่วงที่สูงมากจะทำให้ประสิทธิภาพของตัวดูดซับการสั่นสะเทือนลดลง หากไม่มีค่าความหน่วงเลยการสั่นสะเทือนที่จุดต่ำสุด (จุดทำงานของตัวดูดซับการสั่นสะเทือน) จะมีค่าต่ำมากจนเท่ากับศูนย์และค่าอัตราส่วนความหน่วงที่สูงขึ้นจะทำให้การสั่นสะเทือนที่จุดต่ำสุดนี้มีค่ามากขึ้น ดังรูปที่ 3-2 ($\zeta=0$) และ 3-4 ($\zeta=0.05$)