บทที่ 2

ตัวแบบการระดมทุนของกองทุนบำนาญโดยกำหนดอัตราผลตอบแทนการลงทุนเป็นค่าคงที่

วิธีการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการกำหนดตัวแบบการระดมทุนของกองทุนบำนาญ มีการใช้หลักการเดียวกันกับ คณิตศาสตร์ประกันชีวิต กล่าวคือการสะสมเงินเข้ากองทุนของสมาชิกแต่ละคน ซึ่งอาจจะเป็นการสะสมเข้ากองทุนโดยตรง หรือ หักเป็นร้อยละของเงินเดือนวิธีการใดวิธีการหนึ่ง เงินสะสมดังกล่าวนี้เรียกว่า Normal Cost ซึ่งสามารถเปรียบเทียบได้กับเบี้ยประกันภัย (Premium) ในกรมธรรม์ประกันชีวิต แบบบำนาญ (Pension Plan) จะมีการคำนวณค่าหนี้สินคงค้าง (Accrued Liability) ซึ่งเปรียบเสมือนเงินสำรอง(Reserve)ในการประกันชีวิตและแบบบำนาญจะใช้อัตรามรณะจาก Service Table* ส่วนการประกันชีวิตจะใช้อัตรามรณะจากตารางมรณะ (Mortality Table) แบบบำนาญมีการคำนวณหาการระดมทุน($F(t)$) หรือสินทรัพย์(Asset)ของกองทุนบำนาญที่หลากหลายวิธี ซึ่งในแต่ละวิธีนั้นขึ้นอยู่กับรูปแบบของการคำนวณ Normal Cost และ หนี้สินคงค้าง ค่าเหล่านี้จะมีลักษณะในการคำนวณที่แตกต่างกัน และแปรเปลี่ยนไปตามความต้องการ รวมทั้งความเหมาะสมในการระดมทุนของกองทุนบำนาญนั้นๆ

Anderson(1985) ได้เสนอวิธีระดมทุน(Funding Method) ของกองทุนบำนาญสามารถแบ่งได้เป็น 2 รูปแบบ ซึ่งวิธีเหล่านี้จะเป็นระบบการเก็บเงินสมทบให้พอกับการจ่ายผลประโยชน์ทดแทนในแต่ละปี(Pay As You Go: PAYGO) คือ

1. วิธีระดมทุนโดยคิดเป็นรายสามัญ(Individual Funding Method)ซึ่งประกอบด้วย
   - 1.1 วิธีระดมทุนแบบ Unit Credit
   - 1.2 วิธีระดมทุนแบบ Entry Age Normal
   - 1.3 วิธีระดมทุนแบบ Individual Level Premium
2. วิธีระดมทุนโดยคิดรวมทั้งหมด (Aggregate Funding Method) ซึ่งประกอบด้วย
   - 2.1 วิธีระดมทุนแบบ Frozen Initial Liability
   - 2.2 วิธีระดมทุนโดยคิดรวมทั้งหมด

---

* Service table หรือ Multiple decrement table คือ ตารางที่แสดงถึงความน่าจะเป็นของการพ้นสภาพการทำงานของสมาชิกในกรณีต่างๆ โดยทั่วไปจะประกอบด้วย ความน่าจะเป็นในกรณี การลาออก ($q_x^{(w)}$), การตาย ($q_x^{(d)}$), ทุพพลภาพ ($q_x^{(i)}$) และการเกษียณ ($q_x^{(r)}$)

ในบทนี้จะสรุปเนื้อหาของวิธีระดมทุนของกองทุนบำนาญทั้ง 2 วิธี ดังต่อไปนี้

2.1 วิธีระดมทุนโดยคิดเป็นรายสามัญ

2.1.1 วิธีระดมทุนแบบ Unit Credit

เมื่อกำหนดให้สมาชิกทุกคนเกษียณที่อายุ y ตามแบบบำนาญแล้ว ควรจะมีเงินสะสมไว้เพียงพอที่จะจ่ายเงินบำนาญให้กับสมาชิกแต่ละคนที่จะเกษียณเป็นจำนวนที่เท่ากับ $B(y)$ ซึ่งจะมากหรือน้อย ขึ้นอยู่กับอายุการทำงาน และความสามารถในการทำงานของสมาชิกแต่ละคนก่อนที่จะเกษียณอายุ โดยที่อายุเริ่มจ้างงาน ซึ่งกำหนดให้เป็น w จะมีผลประโยชน์ค้างรับ(Accrued Benefit: $B(w)$) เท่ากับศูนย์ ที่อายุเกษียณ ซึ่งกำหนดให้เป็น y เมื่อสมาชิกเหล่านี้เกษียณอายุ เงินผลประโยชน์ค้างรับ($B(y)$) ดังกล่าว จะเป็นมูลค่าสุดท้ายที่จะได้รับเป็นบำนาญ และช่วงอายุระหว่างอายุเริ่มจ้างงาน กับอายุเกษียณ ซึ่งกำหนดให้เป็น x และจะมีผลประโยชน์ค้างรับเท่ากับ $B(x)$

ภายใต้วิธี Unit Credit นี้ Normal Cost จะโตเร็วกว่าเงินเดือน เมื่อผลประโยชน์ขึ้นอยู่กับเงินเดือน วิธีนี้จะกำหนดให้สินทรัพย์ที่ต้องมีอยู่ทั้งหมด ณ ปัจจุบัน ให้เพื่อเพียงพอที่จะจ่ายเงินบำนาญให้กับสมาชิกแต่ละคนที่อายุเกษียณที่เท่ากับ $B^j(y)\ddot{a}_y^{(12)}$ โดยกำหนดจากค่าปัจจุบันของผลประโยชน์ค้างรับ(Present Value of Accrued Benefit) ซึ่งเรียกว่า หนี้สินคงค้าง (Accrued Liability: AL) ดังนี้

$$AL(t) = \sum_{A_t} B^j(x)\,\ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_x} \tag{2.1.1.1}$$

เมื่อ $B^j(x)$ แทนผลประโยชน์ค้างรับของสมาชิกคนที่ j ที่มีอายุ x

A_t แทนเซตของจำนวนสมาชิกที่สามารถทำงานได้ ที่เวลา t

หมายเหตุ : $\dfrac{D_y}{D_x}$ คำนวณโดยใช้ q_x ที่แสดงค่าความน่าจะเป็นของการพ้นสภาพการทำงานของสมาชิก ในกรณีต่างๆ(การลาออก, การตาย, การทุพพลภาพ และการเกษียณ) จาก Service Table

ในช่วงเวลาปีต่อปี ไม่ใช่เฉพาะหนี้สินคงค้างที่เปลี่ยนไปเพียงอย่างเดียว เพราะว่าอายุของสมาชิกทุกคนเพิ่มขึ้น และจำนวนสมาชิกในกลุ่มก็มีการเปลี่ยนแปลงในตัวของมันเอง ซึ่ง

สามารถแสดงได้จากความสัมพันธ์ของเซตของจำนวนสมาชิกในกลุ่มระหว่างปีที่ t กับ $t + 1$ จะเป็นดังนี้

$$A_{t+1} = A_t - T - R + N$$

เมื่อ A_t แทนเซตของจำนวนสมาชิกที่สามารถทำงานได้ ที่เวลา t

T แทนเซตของจำนวนสมาชิกทั้งหมดที่พ้นสภาพการทำงานก่อนเกษียณอายุในช่วงเวลา t ถึง $t + 1$

R แทนเซตของจำนวนสมาชิกทั้งหมดที่เกษียณอายุ ในช่วงเวลา t ถึง $t + 1$

N แทนเซตของจำนวนสมาชิกใหม่ทั้งหมดในกองทุนบำนาญ ในช่วงเวลา t ถึง $t + 1$

จากความสัมพันธ์ของเซตของจำนวนสมาชิกที่สามารถทำงานได้ที่เวลา t กับ $t + 1$ ดังกล่าวแล้วเราสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างหนี้สินคงค้าง ระหว่างเวลา t กับ $t + 1$ ได้ดังนี้

$$AL(t+1) = \sum_{A_t} B^j(x+1)\,\ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_{x+1}} - \sum_{T+R} B^j(x+1)\,\ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_{x+1}} + \sum_{N} B^j(x+1)\,\ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_{x+1}}$$

จากความสัมพันธ์(Anderson, 1985: 11)

$$\frac{D_y}{D_{x+1}} = \frac{D_y}{D_x}(1+i) + q_x\frac{D_y}{D_{x+1}}$$

เมื่อนำไปแทนค่าในเทอมแรกของสมการข้างต้นจะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\begin{aligned} AL(t+1) = {} & [AL(t) + \sum_{A_t} \Delta B^j\ \ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_x}](1+i) \\ & - [\sum_{T} B^j(x+1)\,\ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_{x+1}} - \sum_{A_t} q_x\, B^j(x+1)\,\ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_{x+1}}] \\ & - \sum_{R} B^j(x+1)\,\ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_{x+1}} + \sum_{N} B^j(x+1)\,\ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_{x+1}} \end{aligned} \quad (2.1.1.2)$$

เมื่อ ΔB^j แทนผลผลประโยชน์ค้างรับที่เพิ่มขึ้นของสมาชิกคนที่ j ระหว่างปี

จากสมการ(2.1.1.2) เทอมที่ 2 จะเท่ากับศูนย์ ถ้าจำนวนสมาชิกที่พ้นสภาพการทำงานก่อนเกษียณอายุที่เกิดขึ้นจริง(เซต*T*) เท่ากับ จำนวนสมาชิกที่พ้นสภาพการทำงานก่อนเกษียณอายุตามสมมติฐาน ซึ่งถ้าเป็นไปตามนี้ แนวคิดในการสร้าง Fund Balance จะให้ $AL(t)$ เพิ่มขึ้นเป็นจำนวน $AL(t)(1+i)$ ลบด้วย $\sum_{R} B^j(x+1)\, \ddot{a}_y^{(12)} \dfrac{D_y}{D_{x+1}}$ ในปีต่อไป ด้วยเหตุนี้ จากเทอมแรกของสมการ(2.1.1.2)

$$NC(t) = \sum_{A_t} \Delta B^j \ \ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_x} = \sum_{A_t} NC^j(t) \qquad (2.1.13)$$

จะเป็นจำนวนเงินที่เพิ่มขึ้นตาม Fund Balance ที่ต้องการที่เวลา $t+1$ ซึ่งจะเรียกจำนวนเงินดังกล่าวว่า Normal Cost ของแบบบำนาญ เพราะว่า Normal Cost เป็นเงินที่สะสมเข้ากองทุนบำนาญในระดับที่ต้องการ ถ้าเป็นไปตามสมมติฐาน จะได้สินทรัพย์ในกองทุนบำนาญทั้งหมด เท่ากับ หนี้สินคงค้าง และ Normal Cost คือค่าปัจจุบันของผลประโยชน์ค้างรับที่เพิ่มขึ้นระหว่างเวลา t ถึง $t+1$ โดยสมมติให้มีการจ่าย ณ เวลา t

สมมติให้ เมื่อ Fund Balance ที่เวลา t มีค่าเท่ากับ $F(t)$ โดยไม่สนใจสมมติฐานข้างต้นที่กล่าวว่า สินทรัพย์ในกองทุนบำนาญทั้งหมด เท่ากับ $AL(t)$ จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างปีที่ t ถึง $t+1$ ดังนี้

$$F(t+1) = F(t) + I + C - P \qquad (2.1.1.4)$$

เมื่อ I แทนผลตอบแทนการลงทุน

C แทนจำนวนเงินที่สมทบในกองทุนบำนาญ

P แทนจำนวนเงินที่ใช้ในการจ่ายผลประโยชน์ให้กับสมาชิกที่เกษียณ

ผลต่างระหว่างหนี้สินคงค้าง(Accrued Liability) กับ Fund Balance ที่เวลา t ($AL(t) - F(t)$) เรียกว่า “Unfunded Accrued Liability” หรือ “Unfunded” ซึ่งค่านี้หากเป็นเครื่องหมายลบ ก็จะหมายถึง จำนวนเงินเกิน (Surplus) ซึ่งจะอ้างอิงทั้งเครื่องหมายบวกและลบ ได้ดังนี้

$$UAL(t+1) = UAL(t)(1+i) - [I - iF(t)] + [NC(t)(1+i) - C]$$

$$- [\sum_{T} B^{j}(x+1)\, \ddot{a}_{y}^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+1}} - \sum_{A_t} q_x\, B^{j}(x+1)\, \ddot{a}_{y}^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+1}}]$$

$$- [\sum_{R} B^{j}(x+1)\, \ddot{a}_{y}^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+1}} - P] + \sum_{N} B^{j}(x+1)\, \ddot{a}_{y}^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+1}}$$

เทอมแรกของสมการควรจะเท่ากับศูนย์ ถ้าเป็นไปตามสมมติฐานที่กล่าวไว้ข้างต้น และถ้าเงินสมทบที่แท้จริง เท่ากับ Normal Cost แต่ในที่นี้จะมีการปรับสมการเพื่อให้อยู่ในรูปที่เหมาะสมโดยกำหนดให้

I_C แทนดอกเบี้ยที่แท้จริงของการสะสม ที่สมมติให้เป็นอัตรา i ณ วันที่สะสมจนถึงสิ้นปี

I_P แทนดอกเบี้ยที่ใช้ในการจ่ายผลประโยชน์ให้กับสมาชิกที่เกษียณ

จากสมการ (2.1.1.4) จะได้ว่า

$$F(t+1) = (1+i)F(t) + I - iF(t) - I_c + I_P + C + I_c - P - I_P$$

ดังนั้น Unfunded Accrued Liability ที่เวลา $t+1$ ($UAL(t+1)$) จะเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} UAL(t+1) &= AL(t+1) - F(t+1) \\ &= UAL(t)(1+i) - [I - iF(t) - I_C + I_P] - [C + I_C - NC(t)(1+i)] \\ &\quad - [\sum_{T} B^{j}(x+1)\, \ddot{a}_{y}^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+1}} - \sum_{A_t} q_x\, B^{j}(x+1)\, \ddot{a}_{y}^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+1}}] \\ &\quad - [\sum_{R} B^{j}(x+1)\, \ddot{a}_{y}^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+1}} - P - I_P] \\ &\quad + \sum_{N} B^{j}(x+1)\, \ddot{a}_{y}^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+1}} \end{aligned} \qquad (2.1.1.5)$$

จากสมการ (2.1.1.5) ถ้าอัตราดอกเบี้ยที่แท้จริงที่หาได้ระหว่างปี เท่ากับ i แล้ว เทอมที่ 2, 4 , 5 และ 6 จะเท่ากับศูนย์ เพราะว่า เทอมที่ 2 : $iF(t) = I$ และ $I_C = I_P$ เทอมที่ 4 : จำนวนสมาชิกที่พ้นสภาพการทำงานก่อนเกษียณอายุ จะเท่ากับจำนวนสมาชิกที่พ้นสภาพการทำงานก่อนเกษียณอายุตามสมมติฐาน เทอมที่ 5 : ค่าปัจจุบันของเงินผลประโยชน์ที่จ่ายให้กับสมาชิกที่เกษียณอายุ จะเท่ากับจำนวนเงินที่จ่ายผลประโยชน์รวมกับดอกเบี้ยที่คาดหวังไว้ล่วงหน้า เทอมที่ 6 :สมาชิกใหม่ที่เข้าร่วมในกองทุนบำนาญยังไม่มีผลประโยชน์

จากสมการ(2.1.1.5) ถ้าไม่เป็นไปตามสมมติฐาน(เทอมที่ 2, 4, 5 และ 6 ไม่เท่ากับศูนย์) ผลรวมของค่าดังกล่าวจะได้ค่า Actuarial Gain สามารถกำหนดได้ดังนี้

$$Gain = (UAL(t) + NC(t))(1 + i) - C - I_C - UAL(t + 1) \qquad (2.1.1.6)$$

สังเกตที่เทอมที่ 3 ของสมการ(2.1.1.5) จะเห็นว่า Unfunded ไม่ได้คาดหวังว่าจะมีค่าลดลง นอกจากเงินสมทบของกองทุนมากเกินกว่า Normal Cost ด้วยจำนวนดอกเบี้ยจากการฝากเงินตอนต้น ซึ่งในส่วนที่เกินกว่า Normal Cost และดอกเบี้ย จะเป็น Amortize ของ Unfunded

2.1.2 วิธีระดมทุนแบบ Entry Age Normal (EAN)

ย้อนกลับไปที่วิธีระดมทุนแบบ Unit Credit จะมีหลักในการสร้าง Fund Balance จากหลักที่ว่า หนี้สินคงค้าง ควรจะเท่ากับ ค่าปัจจุบันของผลประโยชน์ค้างรับตลอดช่วงระยะเวลาที่เป็นสมาชิกอยู่ จนกระทั่งเกษียณ ส่วนค่า Normal Cost และ Actuarial Gain จะเป็นผลที่ตามมา ในความเป็นจริงแล้ว Normal Cost มักจะไม่เป็นดังกล่าว เพื่อป้องกันปัญหาที่จะเกิดขึ้น จึงกำหนด Normal Cost ขึ้นมาก่อน แล้วจึงให้หนี้สินคงค้างเป็นผลที่ตามมาทีหลัง ซึ่งเราเรียกวิธีนี้ว่า Entry Age Normal

วิธีการนี้ยังคงยึดหลักของ วิธีระดมทุนแบบ Unit Credit แต่มีความแตกต่างกันตรงที่ วิธีระดมทุนแบบ Entry Age Normal จะกำหนด Normal Cost ขึ้นมาก่อน และให้ หนี้สินคงค้างเป็นไปตามผลลัพธ์ที่ตามมา

ก. กรณีที่ Benefit ไม่ขึ้นอยู่กับเงินเดือน : ภายใต้วิธีระดมทุนแบบ Entry Age Normal จะกำหนดระดับเงินสมทบรายปี ให้เป็นค่าปัจจุบันของต้นทุนปกติทั้งหมดในอนาคตที่อายุเริ่มงาน เท่ากับ ค่าปัจจุบันของผลประโยชน์ทั้งหมดในอนาคตที่อายุเริ่มงาน

$$NC^j \frac{N_w - N_y}{D_w} = B^j(y)\, \ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_w} \qquad (2.1.2.1)$$

$$NC(t) = \sum_{A_t} NC^j = \sum_{A_t} B^j(y)\, \ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{N_w - N_y} \qquad (2.1.2.2)$$

เมื่อ NC^j แทน Normal Cost ของสมาชิกคนที่ j

$\dfrac{D_y}{N_w - N_y}$ แทนค่าที่คำนวณได้จาก Service Table

ดังนั้นภายใต้ วิธีระดมทุนแบบ Entry Age Normal และวิธีระดมทุนแบบ Unit Credit ค่ารวมของ Normal Cost ก็คือ ผลรวมของ Normal Cost ของสมาชิกทุกคนนั่นเอง

การกำหนด Normal Cost แบบนี้เป็นการแก้ปัญหาการเพิ่มขึ้นแบบ Exponential ของ Normal Cost ส่วนผลประโยชน์ในอนาคต(Project Benefit) จะเป็นค่าคงที่ เท่ากับ $B^j(y)$ ตลอดช่วงเวลาที่เป็นสมาชิกอยู่จนถึงเกษียณอายุ

เมื่อกำหนดเงินผลประโยชน์ให้เท่ากับ $B^j(y)$ จะทำให้ Normal Cost ของสมาชิกแต่ละคนคงที่ และสามารถกำหนดหนี้สินคงค้าง เป็นค่าปัจจุบันของ Normal Cost ในลำดับก่อนหน้า

$$AL(t) = \sum_{A_t} NC^j \frac{N_w - N_x}{D_x} = \sum_{A_t} B^j(y)\ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_x} \frac{N_w - N_x}{N_w - N_y}$$
$$= \sum_{A_t} B^j(y)\ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_x} - \sum_{A_t} NC^j \frac{N_x - N_y}{D_x} \qquad (2.1.2.3)$$

หรือกล่าวได้ว่า หนี้สินคงค้าง เท่ากับ ค่าปัจจุบันของผลประโยชน์ในอนาคต ลบด้วย ค่าปัจจุบันของ Normal Cost ในอนาคต

กำหนดให้ $AL^j(t)$ แทน หนี้สินคงค้างของสมาชิกคนที่ j ที่เวลา t (อายุ x) ดังนั้น $AL(t) = \sum_{A_t} AL^j(t)$ และ หนี้สินคงค้างของสมาชิกที่เข้ามาใหม่จะมีค่าเป็นศูนย์ ที่เวลา $t+1$ $(\sum_{N} AL^j(t+1) = 0)$ และ กำหนดให้เซต $A_{t+1} - N = A_t \cap A_{t+1}$

$$AL(t+1) = \sum_{A_t} AL^j(t+1) - \sum_{T+R} AL^j(t+1) + \sum_{N} AL^j(t+1)$$

และสามารถเขียนให้อยู่ในรูป(จากสมการ(2.1.2.3))

$$AL^j(t+1) = B^j(y, t+1)\ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+1}} \frac{N_w - N_{x+1}}{N_w - N_y}$$

เมื่อ $B^j(y,t)$ แทนผลประโยชน์ค้างรับของสมาชิกคนที่ j ที่อายุเกษียณซึ่งมีระยะเวลาในการเข้าร่วมกองทุนบำนาญเป็นเวลา t ปี (เพื่อความสะดวก เราจึงแทน $B^j(y,t)$ ด้วย $B^j(t)$ และใช้ในการกำหนดความสัมพันธ์ต่างๆ ต่อไป)

จาก $B^j(y, t+1)$ จะเห็นว่า ผลประโยชน์ในอนาคต อาจจะไม่เท่ากันทุกเวลา t เพราะว่าในแต่ละปีจะมีการประมาณผลประโยชน์ในอนาคตเมื่อเกษียณใหม่ ดังนั้น ΔB^j จะแทนผลประโยชน์ในอนาคตที่เปลี่ยนไปในช่วงเวลา t ถึง $t+1$ ($\Delta B^j = B^j(y, t+1) - B^j(y, t)$) ซึ่งในที่สุดแล้วจะได้

$$AL(t+1) = [AL(t) + NC(t)](1+i) + \sum_{A_t \cap A_{t+1}} \Delta B^j \, \ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+1}} \frac{N_w - N_{x+1}}{N_w - N_y} + \sum_{A_t} q_x \widetilde{AL}^j(t+1) - \sum_{T+R} \widetilde{AL}^j(t+1) \qquad (2.1.2.4)$$

เมื่อ $\widetilde{AL}^j(t+1)$ แทน หนี้สินคงค้างของสมาชิก j ที่เวลา $t+1$ ซึ่งคำนวณจาก ผลประโยชน์ในอนาคตที่เวลา t $(B^j(t))$

จากนั้นจะได้ Unfunded Accrued Liability ดังนี้

$$\begin{aligned} UAL(t+1) = {} & UAL(t)(1+i) - [I - iF(t) - I_C + I_P] \\ & - [C + I_C - NC(t)(1+i)] + \sum_{A_t \cap A_{t+1}} \Delta B^j \, \ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+1}} \frac{N_w - N_{x+1}}{N_w - N_y} \\ & - [\sum_{T} \widetilde{AL}^j(t+1) - \sum_{A_t} q_x \widetilde{AL}^j(t+1)] - [\sum_{R} \widetilde{AL}^j(t+1) - P - I_P] \end{aligned} \qquad (2.1.2.5)$$

จากสมการ (2.1.2.5) เทอมที่ 2, 4 , 5 และ 6 จะเท่ากับศูนย์ เพราะว่า เทอมที่ 4 :ผลประโยชน์ในอนาคตปีสุดท้ายควรจะเท่ากับผลประโยชน์ในปีนี้ ส่วนเทอมอื่นๆ เป็นไปตามที่กล่าวไว้แล้วในสมการ(2.1.1.5)

เช่นเดียวกัน

$$Gain = (UAL(t) + NC(t))(1+i) - C - I_C - UAL(t+1) \qquad (2.1.1.6)$$

เป็นที่น่าสังเกตว่าค่า Actuarial Gain โดยวิธีนี้นั้นมีค่าแตกต่างจากวิธี Unit Credit เพราะว่า Unfunded และ Normal Cost มีค่าแตกต่างกัน

นักคณิตศาสตร์ประกันภัยมักจะเรียกค่า $(UAL(t)+NC(t))(1+i)-(C+I_C)$ ว่า Expected Unfunded Accrued Liability ดังนั้นเราอาจกล่าวได้ว่า Actuarial Gain คือค่า Expected Unfunded หักออกด้วยค่า Unfunded ที่แท้จริงนั่นเอง

ข. กรณีที่ Benefit ขึ้นอยู่กับเงินเดือนของสมาชิก : ภายใต้วิธีระดมทุนแบบ Entry Age Normal และมีการสมมติให้อัตราการเพิ่มขึ้นของเงินเดือน เป็นอัตรา r ต่อปี

กำหนดให้ s_x แทนเซตของดัชนีเงินเดือนของสมาชิกที่อายุ x

$S^j(t)$ แทนเงินเดือนที่จ่ายให้กับสมาชิกคนที่ j ที่เวลา t (อายุ x)

$S^j(t)\dfrac{s_{x+g}}{s_x}$ แทนเงินเดือนของสมาชิกที่อายุ $x+g$ เมื่อ g จะเป็นค่าบวก หรือลบก็ได้ ซึ่งสามารถ เรียกเซตของดัชนีเงินเดือนนี้ได้ว่า ตารางเงินเดือน (Salary Scale)

เมื่อกำหนดให้เงินเดือนเพิ่มขึ้นในลักษณะปกติ(เพิ่มขึ้นตามตารางเงินเดือน) Normal Cost ภายใต้วิธีระดมทุนแบบ Entry Age Normal จะเป็นอัตราร้อยละของเงินเดือน ดังนี้ถ้า $S^j(t)$ คือเงินเดือนที่อายุ x (เวลา t) แล้ว เงินเดือนที่อายุ w คือ $S^j(t)\dfrac{s_{x+g}}{s_w}$ ซึ่งเราต้องการหาค่าสัมประสิทธิ์ของ Normal Cost ของเงินเดือนในแต่ละปีของอายุสมาชิกคนที่ j ($U^j(t)$) ได้จากการกำหนดค่าปัจจุบันของผลประโยชน์ในอนาคตที่อายุ w เท่ากับ ค่าปัจจุบันของ Normal Cost ในอนาคตที่อายุ w ดังนี้

$$
\begin{aligned}
B^j(t)\ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_w} &= U^j(t)S^j(t)\frac{s_w}{s_x}\sum_{z=w}^{y-1}\frac{s_z}{s_w}\frac{D_z}{D_w} \\
&= U^j(t)S^j(t)\frac{s_w}{s_x}\frac{{}^sN_w-{}^sN_y}{{}^sD_w} \qquad (2.1.2.6)
\end{aligned}
$$

เมื่อ ${}^sD_x \equiv s_xD_x$ และ ${}^sN_x \equiv \sum_{z=x}^{\infty}{}^sD_z$

ซึ่งจากสมการ(2.1.2.6) Normal Cost รายสามัญที่อายุ x จะเท่ากับเงินเดือนที่เวลา t คูณด้วย อัตราเงินสะสมใน Normal Cost ของเงินเดือน($U^j(t)$)

$$NC^{j}(t) = U^{j}(t)S^{j}(t)$$

$$= B^{j}(t)\ddot{a}_{y}^{(12)} \frac{D_y}{D_w} \frac{{}^{s}D_w}{{}^{s}N_w - {}^{s}N_y} \frac{s_x}{s_w} \tag{2.1.2.7}$$

โดยที่ Normal Cost รวมทั้งหมดจะเป็น $NC(t) = \sum_{A_t} NC^{j}(t)$ และในทำนองเดียวกันกับ วิธีระดมทุนแบบ Entry Age Normal เราจะได้ความสัมพันธ์จากสมการ(2.1.2.3)ดังนี้

$$AL(t) = \sum_{A_t} B^{j}(t)\,\ddot{a}_{y}^{(12)} \frac{D_y}{D_x} - \sum_{A_t} NC^{j}(t) \frac{{}^{s}N_x - {}^{s}N_y}{{}^{s}D_x}$$

$$= \sum_{A_t} B^{j}(t)\,\ddot{a}_{y}^{(12)} \frac{D_y}{D_x} \frac{{}^{s}N_w - {}^{s}N_x}{{}^{s}N_w - {}^{s}N_y} \tag{2.1.2.8}$$

จากสมการ(2.1.2.4) และความสัมพันธ์ของ(Anderson. 1985: 20)

$$\frac{s_{x+1}}{s_x} \frac{{}^{s}N_{x+1} - {}^{s}N_y}{{}^{s}D_{x+1}} = [\frac{{}^{s}N_x - {}^{s}N_y}{{}^{s}D_x} - 1](1+i) + q_x \frac{s_{x+1}}{s_x} \frac{{}^{s}N_{x+1} - {}^{s}N_y}{{}^{s}D_{x+1}}$$

ดังนั้น

$$AL(t+1) = [AL(t) + NC(t)](1+i) + \sum_{A_t} q_x \widetilde{AL}^{j}(t+1) + \sum_{A_t} \Delta B^{j}\ \ddot{a}_{y}^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+1}}$$

$$- \sum_{A_t} \Delta B^{j}\ (\ddot{a}_{y}^{(12)} \frac{D_y}{D_w} \frac{{}^{s}D_w}{{}^{s}N_w - {}^{s}N_y}) \frac{s_{x+1}}{s_w} \frac{{}^{s}N_{x+1} - {}^{s}N_y}{{}^{s}D_{x+1}}$$

$$- \sum_{T+R} \widetilde{AL}^{j}(t+1) \tag{2.1.2.9}$$

ดังนั้น

$$UAL(t+1) \equiv AL(t+1) - F(t+1)$$

$$= UAL(t)(1+i) - [C + I_C - NC_t(1+i)] - [I - iF_t - I_C + I_P]$$

$$+ \sum_{A_t \cap A_{t+1}} \Delta B^{j}\ \ddot{a}_{y}^{(12)} \left(\frac{D_y}{D_{x+1}} - \frac{D_y}{D_w} \frac{{}^{s}D_w}{{}^{s}N_w - {}^{s}N_y} \frac{s_{x+1}}{s_w} \frac{{}^{s}N_{x+1} - {}^{s}N_y}{{}^{s}D_{x+1}} \right)$$

$$-[\sum_{T} \overset{\sim j}{AL}(t+1) - \sum_{A_t} q_x \overset{\sim j}{AL}(t+1)]$$

$$-[\sum_{R} \overset{\sim j}{AL}(t+1) - P - I_P] \qquad (2.1.2.10)$$

จากสมการ (2.1.2.10) เทอมที่ 3, 4 . 5 และ 6 ควรจะเท่ากับศูนย์ ซึ่งเป็นเหตุผลเดียวกันกับสมการ (2.1.1.5) และ(2.1.2.5)

จากวิธีที่กล่าวมาทั้งสองวิธี (Unit Credit และ Entry Age Normal)เราจะได้ค่า Unfunded Accrued Liability ที่ใช้วัดความแปรปรวนของ Fund Balance ซึ่งเกิดจากค่า $AL(t)$ และผลรวมของเทอมที่ 2 , 4 , 5 , 6 (จากสมการ(2.1.1.5))

ผลรวมของเทอมที่ 2 , 4 , 5 , 6 (จากสมการ(2.1.2.5)) และ ผลรวมของเทอมที่ 3, 4, 5 , 6 (จากสมการ(2.1.1.10)) ในกรณีที่เทอมดังกล่าวไม่เท่ากับศูนย์ เทอมต่างๆ ที่กล่าวมาข้างต้นจะกลายเป็น Actuarial Gain ซึ่งในแต่ละวิธีจะมีความสัมพันธ์เหมือนกันเป็นดังนี้คือ

$$Gain = (UAL(t) + NC(t))(1+i) - C - I_C - UAL(t+1) \qquad (2.1.1.6)$$

ดังนั้นเราสามารถสรุปได้ว่า ภายใต้วิธีที่กล่าวมาทั้งสองวิธี มูลค่าสมทบในกองทุนบำนาญในปีที่ t ถึง $t+1$ เท่ากับ Normal Cost รวมกับ Amortization ของ Unfunded Accrued Liability ลบด้วย Amortization ของ Gain (ยกเว้นปีแรกของการดำเนินการ)

หมายเหตุ : ค่า Normal Cost ของแต่ละวิธีนั้นแตกต่างกันตามวิธีการที่ใช้ในการพิจารณา ส่วนเทอมอื่นจะแปรผันตาม Normal Cost ที่ได้ของแต่ละวิธี

2.1.3 วิธีระดมทุนแบบ Individual Level Premium (ILP)

แบบบำนาญโดยทั่วไป มักจะยินยอมให้สมาชิกที่มีสิทธิได้รับบำนาญ สามารถเปลี่ยนเป็นรับบำเหน็จแทนได้ และกองทุนอื่นๆ รวมถึงแบบประกันชีวิตก็สามารถทำได้เช่นเดียวกัน ซึ่งในกรณีนี้จะเป็นการเปลี่ยนจากเงินรายงวดที่จะได้รับ เป็นเงินก้อนเพียงจำนวนเดียวที่จะจ่ายให้กับผู้มีสิทธิรับผลประโยชน์ดังกล่าว ในกรณีนี้จะทำให้เกิดปัญหาไม่มีสภาพคล่องในการชำระหนี้สิน ในการดำเนินการระยะสั้น(Short run) โดยหนึ่งในวิธีที่จะแก้ปัญหาดังกล่าวคือ วิธีระดมทุนแบบ Individual Level Premium

การระดมทุนโดยวิธีนี้นั้น กำหนดให้ Normal Cost นั้นเกิดจากผลประโยชน์ค้างรับของสมาชิกแต่ละคน ซึ่งค่านี้คือ ค่า Level Premium ตลอดช่วงระยะเวลาที่สมาชิกอยู่ในแผน

บำนาญนั้น การดำเนินการของแผนบำนาญแบบนี้นั้นจะไม่มี Unfunded Accrued Liability เริ่มต้น และค่า Normal Cost ในปีแรกจะคำนวณโดยใช้วิธีการเดียวกับ วิธีระดมทุนแบบ Entry Age Normal แต่จะใช้อายุที่เข้าร่วมเป็นอายุที่แท้จริงของสมาชิกแต่ละคน คืออายุ x ปี แทนอายุที่เริ่มต้นเข้าทำงาน w ปี นั่นคือวิธีการที่จะควบคุมให้ Normal Cost เป็นจำนวนเงินในระดับที่จ่ายในอายุ x ปี จนเกษียณอายุ

ก. กรณีที่ **Benefit ไม่ขึ้นอยู่กับเงินเดือน** : Normal Cost จะเป็นระดับของจำนวนเงินที่จะต้องจ่ายตั้งแต่อายุปัจจุบัน จนถึงอายุเกษียณ ซึ่งจะจัดเตรียมสินทรัพย์เพื่อนำไปซื้อผลประโยชน์

$$NC^j(t)\frac{N_x - N_y}{D_x} = B^j(y,t)\,\ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_x}$$

หรือ

$$NC^j(t) = B^j(y,t)\,\ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{N_x - N_y} \qquad (2.1.3.1)$$

จะให้ Normal Cost เท่ากับ Normal Cost ที่คำนวณในปีแรก($t = 0$) บวกกับจำนวนที่เพิ่มขึ้นจากการกลับไปคำนวณระดับการจ่ายเงินสมทบในกองทุนใหม่ ที่เพียงพอกับผลประโยชน์ที่เพิ่มขึ้น

$$NC^j(1) = NC^j(0) + \Delta B^j(1)\,\ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{N_{x+1} - N_y}$$

$$= NC^j(0) + \Delta NC^j(1) \qquad (2.1.3.2)$$

เมื่อ $\Delta B^j(1) = B^j(1) - B^j(0)$ (จากสมาชิกใหม่ที่อายุปัจจุบัน)

และ $AL^j(0) = 0$

ในวันที่มีผลบังคับในแผนบำนาญ($t = 0$) หนี้สินคงค้าง เท่ากับศูนย์ แต่ในปีถัดไป($t = 1$) หนี้สินคงค้าง ต้องเท่ากับ ค่าปัจจุบันของผลประโยชน์ในอนาคต ลบด้วย ค่าปัจจุบันของ Normal Cost ในอนาคต

$$AL^j(1) = [B^j(0) + \Delta B^j(1)]\,\ddot{a}_y^{(12)}\,\frac{D_y}{D_{x+1}}$$

$$-\,[B^j(0)\,\ddot{a}_y^{(12)}\,\frac{D_y}{N_x - N_y} + \Delta B^j(1)\,\ddot{a}_y^{(12)}\,\frac{D_y}{N_{x+1} - N_y}]\,\frac{N_{x+1} - N_y}{D_{x+1}}$$

$$= [\,B^j(0) + \Delta B^j(1)]\,\ddot{a}_y^{(12)}\,\frac{D_y}{D_{x+1}} - [NC^j(0) + \Delta NC^j(1)]\,\frac{N_{x+1} - N_y}{D_{x+1}}$$

$$= [AL^j(0) + NC^j(0)]\,\frac{D_x}{D_{x+1}} \qquad (2.1.3.3)$$

ดังนั้นจึงสามารถกำหนดความสัมพันธ์ในรูปทั่วไปของ หนี้สินคงค้างที่เวลา t กับ $t + 1$ เมื่อ $t > 0$ ได้ดังนี้

$$AL^j(t + 1) = [AL^j(t) + NC^j(t)]\,\frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} \qquad (2.1.3.4)$$

เมื่อ $NC^j(t) = NC^j(0) + \Delta NC^j(1) + \ldots + \Delta NC^j(t)$

และ $\Delta NC^j(t) = \Delta B^j(t)\,\ddot{a}_y^{(12)}\,\frac{D_y}{N_{x+t} - N_y}$

จาก $AL(t) = \sum_{A_t} AL^j(t)$ ดังนั้น $AL(t + 1)$ จะเป็นดังนี้ (ภายใต้วิธี ILP กลุ่มสมาชิกที่เข้าใหม่ (N) จะไม่มีผลกระทบกับค่า Actuarial Gain เพราะว่าจากวิธี Entry Age Normal ซึ่งเราได้อ้างอิงถึงนั้น หนี้สินคงค้างของกลุ่มสมาชิกที่เข้าใหม่จะเป็นศูนย์เสมอ แต่กลุ่มสมาชิกที่เข้าใหม่จะทำให้ Normal Cost เพิ่มขึ้นที่เวลา $t + 1$)

$$AL(t + 1) = \sum_{A_{t+1}} AL^j(t+1)$$

$$= \sum_{A_t} [AL^j(t) + NC^j(t)]\,\frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} - \sum_{T+R} AL^j(t+1)$$

$$= [AL(t) + NC(t)](1 + i) - [\sum_{T} AL^j(t+1) - \sum_{A_t} q_{x+t} AL^j(t+1)]$$

$$- \sum_{R} AL^j(t+1) \qquad (2.1.3.5)$$

เช่นเดียวกันจากสมการ(2.1.2.5) ดังนั้น

$$UAL(t+1) = UAL(t)(1+i) - [I - iF(t) - I_C + I_P] - [C + I_C - NC(t)(1+i)]$$
$$- [\sum_{T} AL^j(t+1) - \sum_{A_t} q_{x+t} AL^j(t+1)]$$
$$- [\sum_{R} AL^j(t+1) - P - I_P] \qquad (2.1.3.6)$$

จากสมการ (2.1.3.6) เทอมที่ 2 , 4 และ 5 ควรจะเป็นศูนย์ ซึ่งใช้เหตุผลเดียวกันกับสมการ (2.1.1.5) และ(2.1.2.5) และในลักษณะเดียวกับวิธีระดมทุนแบบ Entry Age Normal จะได้ Actuarial Gain เช่นเดียวกับสมการ(2.1.1.6)

ข. กรณีที่ Benefit ขึ้นอยู่กับเงินเดือนของสมาชิก : การดำเนินการเป็นไปในลักษณะเดียวกันกับกรณีที่เงินผลประโยชน์ ไม่ขึ้นอยู่กับเงินเดือนสมาชิก ภายใต้สมมติฐานการเพิ่มขึ้นของเงินเดือน(จากวิธีการระดมทุนแบบ Entry Age Normal ข.) จะกำหนด Normal Cost ในปีแรก ($t = 0$) ได้ดังนี้ (จากสมการ(2.1.2.7))

$$NC^j(0) = B^j(0)\ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_x} \frac{{}^sD_x}{{}^sN_x - {}^sN_y} \frac{s_x}{s_x} \qquad (2.1.3.7)$$

สมการนี้จะอ้างอิงไปถึงผลต่างของเงินเดือนสมาชิกในแต่ละปี โดยใช้แฟคเตอร์ $\frac{s_{x+1}}{s_x}$ หมายถึง Normal Cost จะคำนวณตามปีนั้นๆ และ Normal Cost เพิ่มขึ้นอย่างเป็นธรรมชาติ(Natural Increase) ตามตารางเงินเดือน(Salary Scale)

$$\Delta NC^j(1) = \Delta B^j(1)\ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+1}} \frac{{}^sD_{x+1}}{{}^sN_{x+1} - {}^sN_y} \qquad (2.1.3.8)$$

$$NC^j(1) = NC^j(0)\frac{s_{x+1}}{s_x} + \Delta NC^j(1) \qquad (2.1.3.9)$$

และ

$$AL^{j}(1) = [B^{j}(0)+\Delta B^{j}(1)]\,\ddot{a}_{y}^{(12)}\frac{D_{y}}{D_{x+1}} - [NC^{j}(0)\frac{s_{x+1}}{s_{x}} + \Delta NC^{j}(1)]\frac{{}^{s}N_{x+1} - {}^{s}N_{y}}{{}^{s}D_{x+1}}$$

$$= [AL^{j}(0) + NC^{j}(0)]\frac{D_{x}}{D_{x+1}} \qquad (2.1.3.10)$$

จากความสัมพันธ์ที่ได้จะนำไปสู่ความสัมพันธ์ในรูปทั่วไปที่แสดงไว้แล้วในสมการ (2.1.3.4)

ดังนั้นเราสามารถสรุปได้ว่า วิธี ILP นั้นคล้ายคลึงกับวิธีระดมทุนแบบ Entry Age Normal ซึ่งใช้อายุที่เข้าร่วมเป็นสมาชิก(Entry Age) เป็นอายุที่เริ่มงาน หรือ อายุ ณ วันที่มีผลบังคับในแผนบำนาญ(Age at the Effective Date) ขึ้นอยู่กับว่าค่าใดมากกว่ากัน ส่วนความแตกต่างกันก็คือ ภายใต้วิธี ILP นั้น เราจะดึงเอาส่วนที่ใหญ่ของ Actuarial Gain ออกมาจากหนี้สินคงค้าง และกระจายมันลงไปยัง Normal Cost ในอนาคต ส่วนวิธีระดมทุนแบบ Entry Age Normal นั้น ค่าบางส่วนของ Gain นั้นจะถูก Amortized ลงไปใน Gain ส่วนอื่นๆ

หมายเหตุ : จะเห็นว่าไม่มี Unfunded Accrued Liability ในการคำนวณมูลค่าของบำนาญในกรณีนี้

2.2 วิธีระดมทุนโดยคิดรวมทั้งหมด

2.2.1 วิธีระดมทุนแบบ Frozen Initial Liability (Attained Age Normal หรือ Frozen Entry Age)

สำหรับวิธีการระดมทุนโดยวิธีนี้คำนวณได้โดยต้นทุนนั้นเกิดจากผลรวมของ Normal Cost และAmortization ของ Initial Unfunded แต่ในที่นี้จะกำจัดค่า Actuarial Gain ออกไปจากสมการ(2.1.1.6) จะเห็นว่าเทอมของ Gain หมายถึง ค่าที่ไม่คาดหวังที่ลดลงใน Unfunded Accrued Liability

ก. กรณีที่ Benefit ไม่ขึ้นอยู่กับเงินเดือน : ทั้งวิธีระดมทุนแบบ Entry Age Normal และ Unit Credit จะได้หนี้สินคงค้าง เท่ากับ ค่าปัจจุบันของผลประโยชน์ในอนาคต หักออกด้วย ค่าปัจจุบันของ Normal Cost ในอนาคต ภายใต้วิธีระดมทุนแบบ Frozen Initial Liability(FIL) ก็เช่นเดียวกัน

$$AL(t) = \sum_{A_t} AL^{j}(t) = \sum_{A_t} PVFB^{j}(t) - PVFNC(t) \qquad (2.2.1.1)$$

เมื่อ $PVFB^j(t)$ แทนค่าปัจจุบันของผลประโยชน์ในอนาคต ที่เวลา t ของสมาชิกคนที่ j (Present Value of Future Benefit)

$PVFNC(t)$ แทนค่าปัจจุบันของ Normal Cost ในอนาคตที่เวลา t (Present Value of Future Normal Cost)

ซึ่ง $PVFB^j(t)$ จะใช้วิธีใดในการคำนวณก็ได้ (จากวิธีทั้งสามที่ได้กล่าวมาแล้ว) และภายใต้วิธี FIL นี้ จะไม่คำนวณค่าหนี้สินคงค้าง แยกเป็นรายบุคคลโดยตรง ดังนั้นจากสมการ (2.2.1.1) จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$PVFNC(t) = \sum_{A_t} PVFB^j(t) - AL(t) \qquad (2.2.1.2)$$

หากกำหนดการหาค่า *PVFNC* ตามวิธีที่กล่าวมาก่อนหน้านั้น การคำนวณ *PVFNC* แยกเป็นรายบุคคล โดยอ้างถึง ค่าปัจจุบันของ Normal Cost ในอนาคตแยกเป็นรายบุคคลได้ดังนี้

$$PVFNC^j(t) = NC^j(t)\frac{N_x - N_y}{D_x}$$

ดังนั้น

$$PVFNC(t) = \sum_{A_t} NC^j(t)\frac{N_x - N_y}{D_x} \qquad (2.2.1.3)$$

กำหนดให้ $NC^j(t) = \dfrac{1}{n_t} NC(t)$ (ค่า Normal Cost ของสมาชิกแต่ละคนมีค่าเท่ากัน)

เมื่อ n_t แทนจำนวนสมาชิกที่อยู่ในเซต A_t

ดังนั้น ค่าปัจจุบันของ Normal Cost ในอนาคต ที่เวลา t มีค่าเท่ากับ

$$PVFNC(t) = NC(t)\frac{1}{n_t}\sum_{A_t}\frac{N_x - N_y}{D_x} \qquad (2.2.1.4)$$

จากสมการ(2.2.1.2) และ(2.2.1.4) จะได้ว่า

$$NC(t) = \frac{PVFNC(t)}{\frac{1}{n_t}\sum_{A_t}\frac{N_x - N_y}{D_x}} = \left(\frac{\sum_{A_t} PVFB^j(t) - AL(t)}{\sum_{A_t}\frac{N_x - N_y}{D_x}}\right) n_t \qquad (2.2.1.5)$$

เนื่องจากสมการ(2.2.1.5) เป็นเทอมขนาดใหญ่จึงกำหนดให้

$$U(t) = \frac{1}{n_t} NC(t) \qquad (2.2.1.6)$$

เมื่อ $U(t) = \dfrac{\sum_{A_t} PVFB^j(t) - AL(t)}{\sum_{A_t}\frac{N_x - N_y}{D_x}}$ (ค่าดังกล่าวนี้ คือค่า หน่วยของ Normal Cost)

ขั้นตอนที่กล่าวมาแล้วข้างต้นยังไม่สมบูรณ์ เนื่องจากยังไม่ได้กำหนดค่า $AL(t)$ ดังนั้นจึงกำหนดให้ $AL(t)$ นั้น คำนวณจากความสัมพันธ์ของ Unfunded Accrued Liability (จากสมการ(2.1.2.11))

$$AL(t+1) - F(t+1) = [AL(t) - F(t) + NC(t)](1+i) - C - I_C - Gain$$

เมื่อค่า Gain ของวิธีนี้ยังไม่ได้กำหนดขึ้นมา และเมื่อกำหนดให้ $PVFB^j(t) = B^j(t)\, \ddot{a}_y^{(12)} \dfrac{D_y}{D_x}$ และ $PVFB(t) = \sum_{A_t} PVFB^j(t)$ ความสัมพันธ์ของ $PVFNC$ ที่เวลา t กับ $t+1$ มีความสัมพันธ์ดังสมการต่อไปนี้

$$PVFNC(t+1) = \sum_{A_{t+1}} PVFB^j(t+1) - AL(t+1)$$

$$= PVFB(t)(1+i) - [\sum_{T} \widetilde{PVFB}^{j}(t+1) - \sum_{A_t} q_x \widetilde{PVFB}^{j}(t+1)]$$

$$- \sum_{R} \widetilde{PVFB}^{j}(t+1) + \sum_{A_t \cap A_{t+1}} \Delta B^{j}\, \ddot{a}_{y}^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+1}}$$

$$+ \sum_{N} B^{j}\, \ddot{a}_{y}^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+1}} - AL(t+1) \qquad (2.2.1.7)$$

เมื่อ ΔB^{j} แทนผลประโยชน์ในอนาคตของพนักงาน j ระหว่างเวลา t ถึง $t+1$ มีค่าเท่ากับศูนย์ และจากความสัมพันธ์

$$\sum_{A_{t+1}} \frac{N_{x+1} - N_y}{D_{x+1}} = \sum_{A_t} \left(\frac{N_x - N_y}{D_x} - 1 \right)(1+i)$$

$$- [\sum_{T} \frac{N_{x+1} - N_y}{D_{x+1}} - \sum_{A_t} q_x \frac{N_{x+1} - N_y}{D_{x+1}}] \qquad (2.2.1.8)$$

ถ้าเราแก้สมการ(2.2.1.7) ด้วยสมการ(2.2.1.8) จะสามารถแสดงได้ในรูป

$$U(t+1) = \frac{N(t) + \Delta N}{D(t) + \Delta D} \qquad (2.2.1.9)$$

เมื่อ $N(t)$ แทน Numerator ที่เวลา t

$D(t)$ แทน Denominator ที่เวลา t

ΔN แทนผลต่างของ Numerator

ΔD แทนผลต่างของ Denominator

และจะได้ความสัมพันธ์

$$\frac{N + \Delta N}{D + \Delta D} = \frac{N}{D} + \frac{1}{D + \Delta D}\left(\Delta N - \frac{N}{D} \Delta D \right) \qquad (2.2.1.10)$$

จากการรวมสมการ(2.2.1.7), (2.2.1.8) และ(2.2.1.10) จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง $U(t)$ กับ $U(t+1)$ มีความสัมพันธ์ดังสมการต่อไปนี้

$$U(t+1) = U(t) - \frac{1}{\sum_{A_t+1} \frac{N_{x+1} - N_y}{D_{x+1}}} \{[I - iF(t) - I_C + I_P]$$

$$+ [\sum_T \left(\widetilde{PVFB}^j (t+1) - U(t) \frac{N_{x+1} - N_y}{D_{x+1}} \right)$$

$$- \sum_{A_t} q_x \left(\widetilde{PVFB}^j (t+1) - U(t) \frac{N_{x+1} - N_y}{D_{x+1}} \right)]$$

$$- [\sum_{A_t \cap A_{t+1}} \Delta B^j \, \ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+1}}] + [\sum_R \widetilde{PVFB}^j (t+1) - P - I_P]$$

$$- \sum_N \left(B^j \ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+1}} - U(t) \frac{N_{x+1} - N_y}{D_{x+1}} \right) - Gain \} \qquad (2.2.1.11)$$

จากสมการ (2.2.1.11) ทุกเทอมในวงเล็บปีกกาจะต้องเป็นศูนย์ ซึ่งใช้เหตุผลเดียวกันกับสมการ (2.1.1.5) และ(2.1.2.5) และเรากำหนดให้ $U(t)$ เป็น Level Normal Cost จากสมการ (2.2.1.6) ดังนั้น ค่า Gain จึงต้องถูกกำหนดให้เป็นศูนย์ ดังนั้น

$$UAL(t+1) = [UAL(t) + NC(t)](1+i) - C - I_C \qquad (2.2.1.12)$$

ซึ่งจะเห็นว่าสมการนี้แสดงถึงความสัมพันธ์ของ *UAL* ที่เวลา *t* กับ *t+1* ซึ่งถ้าทราบ *UAL(0)* ก็จะสามารถคำนวณ *UAL* ที่เวลาต่างๆได้จากความสัมพันธ์นี้ แต่สำหรับวิธี *FIL* นี้จะคำนวณ *UAL(0)* ภายใต้วิธีระดมทุนแบบ Entry Age Normal

การคำนวณ Normal Cost ในปีต่างๆ ยกเว้นในปีแรก สามารถคำนวณได้ตามขั้นตอนทั้ง 4 ดังต่อไปนี้

1) คำนวณค่า $UAL(t)$ จากสมการ (2.2.1.9)

2) คำนวณค่า $F(t)$ จาก $UAL(t)$ ในข้อ (1)

3) คำนวณค่า $PVFB(t) = \sum_{A_t} B^j(t) \ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_x}$ และ $PVFY(t) = \sum_{A_t} \frac{N_x - N_y}{D_x}$

แทน Present Value of Future Work's Year

4) คำนวณค่า Normal Cost ตามสูตรนี้

$$NC(t) = \frac{PVFB(t) - F(t) - UAL(t)}{PVFY(t)} \cdot n_t \qquad (2.2.1.13)$$

หมายเหตุ : การกำหนดค่า Initial Unfunded ($UAL(0)$) อาจใช้วิธี Unit Credit แทนวิธีระดมทุนแบบ Entry Age Normal ก็ได้ วิธีหาต้นทุนแบบนี้จะถูกเรียกว่า Attained Age Normal

ข. กรณีที่ Benefit ขึ้นอยู่กับเงินเดือนของสมาชิก : ภายใต้สมมติฐานการเพิ่มขึ้นของเงินเดือน ในวิธีนี้ $U(t)$ สามารถแสดงอยู่ในรูปร้อยละของเงินเดือนและสามารถกำหนด Normal Cost ของสมาชิกแต่ละคนมีค่าดังนี้ (จากสมการ(2.1.2.7))

$$NC^j(t) = U^j(t)S^j(t)$$

$$NC(t) = U(t)\sum_{A_t} S^j(t)$$

$$PVFNC(t) = U(t)\sum_{A_t} S^j(t)\,\frac{{}^sN_x - {}^sN_y}{{}^sD_x} \qquad (2.2.1.14)$$

นั่นคือ

$$NC_t = \left(\frac{PVFNC(t)}{\sum_{A_t} S^j(t)\frac{{}^sN_x - {}^sN_y}{{}^sD_x}}\right)\sum_{A_t} S^j(t)$$

$$= \frac{PVFB(t) - F(t) - UAL(t)}{PVFS(t)}\sum_{A_t} S^j(t) \qquad (2.2.1.15)$$

เมื่อ $PVFS(t)$ แทนค่าปัจจุบันของเงินเดือนในอนาคตเมื่อเวลา t (Present Value of Future Salary at Time t) และความสัมพันธ์ระหว่าง $U(t)$ กับ $U(t+1)$ เป็นดังนี้

$$U(t+1) = U(t) - \frac{1}{PVFS(t+1)}\{[I - iF(t) - I_C + I_P]$$
$$+ [\sum_{T}\left(\widetilde{PVFB}^{\,j}(t+1) - U(t)\widetilde{PVFS}^{\,j}(t+1)\right)$$
$$-\sum_{A_t} q_x\left(\widetilde{PVFB}^{\,j}(t+1) - U(t)\widetilde{PVFS}^{\,j}(t+1)\right)]$$

$$+[\sum_{R}\widetilde{PVFB}^{j}(t+1)-P-I_P]$$
$$+[\sum_{A_t \cap A_{t+1}}\left(\widetilde{PVFB}^{j}(t+1)-U(t)\widetilde{PVFS}^{j}(t+1)\right)$$
$$-\sum_{A_t \cap A_{t+1}}\left(PVFB^{j}(t+1)-U(t)PVFS^{j}(t+1)\right]$$
$$+[-\sum_{N}\left(PVFB^{j}(t+1)-U(t)PVFS^{j}(t+1)\right)]\} \qquad (2.2.1.16)$$

เมื่อ $\widetilde{PVFB}^{j}(t+1)$ แทนค่าปัจจุบันของผลประโยชน์คำนวณที่เวลา $t+1$ และ $\Delta B = 0$

$$\widetilde{PVFS}^{j}(t+1) = S^{j}(t)\frac{s_{x+1}}{s_x}\frac{{}^{s}N_{x+1}-{}^{s}N_{y}}{{}^{s}D_{x+1}}$$

และ $PVFS^{j}(t+1) = S^{j}(t+1)\dfrac{{}^{s}N_{x+1}-{}^{s}N_{y}}{{}^{s}D_{x+1}}$

Normal Cost ในปีแรก ($t = 0$) ซึ่งคำนวณโดย วิธี Entry Age Normal เมื่อให้อายุเริ่มต้นการเป็นสมาชิกในกองทุนบำนาญเป็น w ปี จากสมการ(2.1.3.7) จะได้ความสัมพันธ์ตามสมการต่อไปนี้

$$NC(0) = \sum_{A_0} B^{j}(0)\,\ddot{a}_{y}^{(12)}\frac{D_y}{D_w}\frac{{}^{s}D_w}{{}^{s}N_w-{}^{s}N_y}\frac{s_x}{s_w}$$
$$= \sum_{A_0}\frac{PVFBW^{j}(0)}{PVFSW^{j}(0)}S^{j}(0) \qquad (2.2.1.17)$$

เมื่อ $PVFBW^{j}(t) = B^{j}(t)\,\ddot{a}_{y}^{(12)}\dfrac{D_y}{D_w}$

และ $PVFSW^{j}(t) = S^{j}(t)\dfrac{s_w}{s_x}\dfrac{{}^{s}N_w-{}^{s}N_y}{{}^{s}D_w}$

ภายใต้วิธีระดมทุนแบบ Aggregate Entry Age Normal เราจะได้ว่า

$$NC(0) = \frac{\sum_{A_0} PVFBW^j(0)}{\sum_{A_0} PVFSW^j(0)} \sum_{A_0} S^j(0) = U(0) \sum_{A_0} S^j(0) \qquad (2.2.1.18)$$

เมื่อ $U(0) = \frac{\sum_{A_0} PVFBW^j(0)}{\sum_{A_0} PVFSW^j(0)}$ ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์ของหนี้สินคงค้างดังนี้

$$AL(0) = \sum_{A_0} PVFB^j(0) - NC(0)\frac{{}^sN_x - {}^sN_r}{{}^sD_x}$$

$$= \sum_{A_0} PVFB^j(0) - U(0)\sum_{A_0} PVFS^j(0) \qquad (2.2.1.19)$$

แก้สมการ(2.2.1.16) เพื่อหาค่า $U(0)$ จะได้ว่า

$$U(0) = \frac{\sum_{A_0} PVFB^j(0) - AL(0)}{\sum_{A_0} PVFS^j(0)} \qquad (2.2.1.20)$$

และเราจะได้ว่า

$$NC(0) = U(0)\sum_{A_0} S^j(0)$$

$$= \frac{\sum_{A_0} PVFB^j(0) - UAL(0) - F(0)}{\sum_{A_0} PVFS^j(0)} \sum_{A_0} S^j(0) \qquad (2.2.1.21)$$

จากความสัมพันธ์ที่ได้นี้ จะมีลักษณะเดียวกันกับวิธี ILP ที่ได้กล่าวมาแล้วในตอนต้น เมื่อเราใช้ Aggregate Entry Age Normal สมการ(2.2.1.18) ดังนั้นเราสามารถนำไปหาความสัมพันธ์ต่างๆ ณ เวลา t ได้ตามต้องการ

ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่า ภายใต้วิธี FIL หรือ AAN มูลค่าของบำนาญจะเท่ากับ Normal Cost รวมกับ Amortization ของ Initial Unfunded Accrued Liability

หมายเหตุ : วิธีนี้จะไม่มีค่า Actuarial Gain ในการคำนวณมูลค่าของบำนาญ

2.2.2 วิธีระดมทุนโดยคิดรวมทั้งหมด

ภายใต้วิธีระดมทุนโดยคิดรวมทั้งหมด ต้นทุนของแบบบำนาญในปีต่างๆ จะเท่ากับ Normal Cost เพียงอย่างเดียว โดยไม่รวมค่า Amortization ของ Gain หรือ Initial Unfunded แต่อย่างในกรณีของวิธีระดมทุนแบบ Frozen Initial Liability นั้น เรากำหนดให้ Unfunded accrued liability มีค่าเท่ากับ Expected unfunded ซึ่งหมายถึงการกำหนดให้ Gain มีค่าเป็นศูนย์ สำหรับกรณีวิธีระดมทุนโดยคิดรวมทั้งหมดนี้ เรากำหนด Unfunded มีค่าเป็นศูนย์ตลอดเวลา ซึ่งก็หมายถึง เรากล่าวว่าหนี้สินคงค้างนั้น มีค่าเท่ากับ สินทรัพย์ที่มีอยู่ตลอดเวลา

ก. กรณีที่ Benefit ไม่ขึ้นอยู่กับเงินเดือน :

กำหนดให้ $UAL(t) = 0$ ทุกช่วงเวลา ดังนั้น

$$AL(t) = F(t) \tag{2.2.2.1}$$

เช่นเดียวกับภายใต้วิธี FIL หรือ AAN (สมการ(2.2.1.6)) ในที่นี้เรากำหนดให้ Normal cost มีค่าเท่ากันทุกคน ($U(t)$) จะได้ว่า

$$NC(t) = \sum_{A_t} U(t) = U(t)\, n_t$$

เมื่อ n_t แทนจำนวนสมาชิกที่อยู่ในเซต A_t

จากหลักการโดยทั่วไปเราสามารถหาค่า $AL(t)$ ได้ดังนี้

$$AL(t) = F(t) = \sum_{A_t} PVFB^j(t) - U(t) \sum_{A_t} \frac{N_x - N_y}{D_x} \tag{2.2.2.2}$$

ซึ่งหมายความว่า

$$U(t) = \frac{PVFB(t) - F(t)}{PVFY(t)} \qquad (2.2.2.3)$$

เมื่อ $PVFY(t) = \sum_{A_t} \frac{N_x - N_y}{D_x}$

ข. กรณีที่ Benefit ขึ้นอยู่กับเงินเดือนของสมาชิก :

เมื่อค่าต่างๆ ขึ้นอยู่กับการเพิ่มขึ้นของเงินเดือนสมาชิก เราสามารถหาความสัมพันธ์ต่างๆ ได้โดยใช้ ตารางเงินเดือน ดังนี้

$$U(t) = \frac{PVFB(t) - F(t)}{PVFS(t)} \text{ และ } NC(t) = U(t)\sum_{A_t} S^j(t) \qquad (2.2.2.4)$$

เมื่อ $PVFS(t) = \sum_{A_t} S^j(t)\,\frac{{}^sN_x - {}^sN_y}{{}^sD_x}$

โดยทั่วไปจากสมการที่ได้นี้ค่า $U(t)$ คือ ค่าอัตราร้อยละของเงินเดือนที่กระจายเท่ากันตลอด สำหรับสมาชิกที่สามารถทำงานได้ทั้งหมด

จากสมการ(2.2.1.7)เราสามารถที่จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $PVFNC(t+1)$ กับ $PVFNC(t)$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} PVFNC(t+1) &= PVFB(t+1) - F(t+1) = PVFNC(t)(1+i) - [C + I_C] \\ &- [I - iF(t) - I_C + I_P] - [\sum_R \widetilde{PVFB}^j(t+1) - P - I_P] \\ &+ \sum_{A_t \cap A_{t+1}} \Delta B^j\, \ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+1}} + \sum_N PVFB^j(t+1) \\ &- [\sum_T \widetilde{PVFB}^j(t+1) - \sum_{A_t} q_x \widetilde{PVFB}^j(t+1)] \end{aligned} \qquad (2.2.2.5)$$

ในทำนองเดียวกันเราจะได้ว่า

$$PVFS(t+1) = \sum_{A_{t+1}} S^{j}(t+1)\,\frac{{}^{s}N_{x+1} - {}^{s}N_{y}}{{}^{s}D_{x+1}}$$

$$= [PVFS(t) - \sum_{A_t} S^{j}(t)](1+i) + \sum_{A_t} q_x \,\widetilde{PVFS}^{\,j}(t+1) - \sum_{T+R} \widetilde{PVFS}^{\,j}(t+1)$$

$$+ \sum_{A_t \cap A_{t+1}} \left(PVFS(t) - \widetilde{PVFS}^{\,j}(t+1) \right) + \sum_{N} PVFS^{j}(t+1) \qquad (2.2.2.6)$$

นักคณิตศาสตร์ประกันภัย มักจะเรียกค่า $\sum_{A_t} S^{j}(t)$ ว่า "Covered Payroll" ณ เวลา t จากนั้นเราสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่าง $U(t)$ กับ $U(t+1)$ ได้ดังต่อไปนี้

$$U(t+1) = \frac{PVFB(t+1) - F(t+1)}{PVFS(t+1)}$$

$$= U(t) - \frac{1}{PVFS(t+1)} \{[I - iF(t) - I_C + I_P]$$

$$+ [C + I_C - NC(t)(1+i)] + [\sum_{T} \left(\widetilde{PVFB}^{\,j}(t+1) - U(t)\,\widetilde{PVFS}^{\,j}(t+1) \right)$$

$$- \sum_{A_t} q_x \left(\widetilde{PVFB}^{\,j}(t+1) - U(t)\,\widetilde{PVFS}^{\,j}(t+1) \right)]$$

$$+ [\sum_{R} \widetilde{PVFB}^{\,j}(t+1) - P - I_P]$$

$$+ [- \sum_{A_t \cap A_{t+1}} \left(\Delta PVFB^{j} - U(t)\Delta PVFS^{j} \right)]$$

$$+ [- \sum_{N} \left(PVFB^{j}(t+1) - U(t) PVFS^{j}(t+1) \right)] \} \qquad (2.2.2.7)$$

เมื่อ $\Delta PVFB^{j} = \Delta B\, \ddot{a}_{y}^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+1}}$

และ $\Delta PVFS^{j} = PVFS^{j}(t+1) - \widetilde{PVFS}^{\,j}(t+1)$

และเทอมที่อยู่ในวงเล็บปีกกา จะเป็น Gain ดังนั้นเราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง Normal Cost กับ Gain ดังต่อไปนี้

$$NC(t+1) = U(t)\sum_{A_{t+1}} S^j(t+1) - \frac{\sum_{A_{t+1}} S^j(t+1)}{PVFS(t+1)}\left[\text{“Gain”}\right] \qquad (2.2.2.8)$$

ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่า ภายใต้วิธีระดมทุนโดยคิดรวมทั้งหมด มูลค่าของบำนาญจะเท่ากับ Normal Cost เพียงอย่างเดียวเท่านั้น

จากวิธีการคำนวณเงินสะสมในกองทุนบำนาญที่ได้กล่าวมาแล้วทั้งหมด จะเห็นว่าการกำหนดค่าต่างๆ ไม่ว่าจะเป็น Normal Cost หรือ หนี้สินคงค้าง(Accrued Liability) เราจะกำหนดให้อัตราผลตอบแทนการลงทุนนั้นมีค่าเท่ากันในแต่ละปี (i) ซึ่งจะส่งผลให้ มูลค่าเงินสมทบของกองทุนบำนาญของสมาชิกแต่ละคนนั้น แปรตามผลต่างของผลประโยชน์ในแต่ละปี (ΔB) แล้วนำค่านี้มากำหนดค่า Normal Cost การคำนวณหาค่า Normal Cost โดยวิธีนี้ จะไม่ได้พิจารณาถึงความผันแปรของอัตราผลตอบแทนการลงทุนแต่อย่างใด แต่ในความเป็นจริง กองทุนบำนาญจะต้องใช้ระยะเวลาในการสะสมเงินเข้ากองทุนเป็นเวลานาน อัตราผลตอบแทนการลงทุนย่อมมีการแปรเปลี่ยนไปตามภาวะเศรษฐกิจในช่วงปีนั้นๆ ดังนั้น อัตราผลตอบแทนการลงทุนที่ใช้ในการกำหนดมูลค่าสะสมของกองทุนบำนาญ ควรจะมีรูปแบบในการดำเนินการแบบใดแบบหนึ่ง เพื่อให้สอดคล้องกับภาวะเศรษฐกิจที่มีผลต่อการกำหนดอัตราผลตอบแทนการลงทุนในช่วงเวลานั้นๆ ในบทต่อไปจะกล่าวถึงวิธีการคำนวณเงินสมทบของกองทุนบำนาญ โดยกำหนดให้อัตราผลตอบแทนการลงทุนมีลักษณะเป็นแบบ Stochastic Process