บทที่ 2

สถิติทดสอบและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ในการทดสอบว่าข้อมูลที่มีอยู่มาจากการแจกแจงปกติหลายตัวแปรหรือไม่นั้น ได้มีการพัฒนาตัวสถิติที่ใช้ทดสอบขึ้นมาอย่างต่อเนื่องหลายวิธี สำหรับการวิจัยครั้งนี้ตัวสถิติทดสอบที่นำมาศึกษาเป็นสถิติทดสอบแบบที่ใช้พารามิเตอร์ (Parametric statistics) ได้แก่ ตัวสถิติทดสอบ MK ตัวสถิติทดสอบ N และตัวสถิติทดสอบ KTT โดยทำการเปรียบเทียบว่าสถิติทดสอบที่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้วิธีใดให้อำนาจการทดสอบสูงที่สุด ซึ่งในบทนี้จะกล่าวถึงรายละเอียดและตัวอย่างการคำนวณของสถิติทดสอบแต่ละตัว การสร้างตารางค่าวิกฤตของตัวสถิติทดสอบ N และตัวสถิติทดสอบ KTT พร้อมทั้งกล่าวถึงการแจกแจงที่นำมาศึกษาด้วย รายละเอียดต่าง ๆ มีดังนี้

2.1 ตัวสถิติทดสอบที่ใช้ในการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้มีสมมติฐานของการทดสอบ คือ

H_0 : ข้อมูลมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติหลายตัวแปร

H_1 : ข้อมูลไม่ได้มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติหลายตัวแปร

ตัวสถิติทดสอบต่าง ๆ ที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐานข้างต้นมีรายละเอียด ดังนี้

2.1.1 ตัวสถิติทดสอบ MK (T)

ตัวสถิติทดสอบ MK เป็นสถิติทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่พัฒนาขึ้นในปี ค.ศ. 1991 โดย K.V.Mardia และ J.T.Kent เป็นสถิติทดสอบที่พัฒนามาจากสถิติเราว์สคอร์ (Rao's score statistics) ซึ่งขึ้นอยู่กับโมเมนต์ที่ 3 และโมเมนต์ที่ 4 มีข้อสมมติเบื้องต้น คือ ให้ $\underset{\sim}{X}_1, \underset{\sim}{X}_2, \ldots, \underset{\sim}{X}_n$ เป็น p x 1 เวกเตอร์ของตัวอย่างขนาด n ที่เป็นอิสระต่อกัน

ตัวสถิติทดสอบ MK อยู่ในรูป

$$T = T_3 + T_4$$

โดยที่

$$T_3 = \frac{1}{6} n b_{1,p}$$

$$T_4 = \frac{1}{24} n \left[b^{*}_{2,p} - 6 b_{2,p} + 3p(p+2) \right]$$

$$b_{1,p} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_{ij}^3$$

$$b_{2,p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_{ii}^2$$

$$b_{2,p}^{*} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_{ij}^4$$

และ

$$D_{ii} = (\underset{\sim}{X}_i - \overline{\underset{\sim}{X}})S^{-1}(\underset{\sim}{X}_i - \overline{\underset{\sim}{X}})$$

$$D_{ij} = (\underset{\sim}{X}_i - \overline{\underset{\sim}{X}})S^{-1}(\underset{\sim}{X}_j - \overline{\underset{\sim}{X}})$$

เมื่อ p แทน จำนวนตัวแปร

$\overline{\underset{\sim}{X}}$ แทน เวกเตอร์ค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง

$$\overline{\underset{\sim}{X}} = \begin{bmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \vdots \\ \overline{X}_p \end{bmatrix}$$

S แทน เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวอย่าง

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ S_{p1} & S_{p2} & \cdots & S_{pp} \end{bmatrix}$$

$$S_{ii} = \sum_{t=1}^{n}\left(X_{it} - \overline{X}_i\right)^2 \ , \ S_{ij} = \sum_{t=1}^{n}(X_{it} - \overline{X}_i)(X_{jt} - \overline{X}_j)$$

$b_{1,p}$ แทน สัมประสิทธิ์ความเบ้ของตัวแปรพหุ

$b_{2,p}$ แทน สัมประสิทธิ์ความโด่งของตัวแปรพหุ

D_{ii} แทน Mahalanobis distance ของ $\underset{\sim}{X}_i$

D_{ij} แทน Mahalanobis angle ระหว่าง $\underset{\sim}{X}_i - \overline{\underset{\sim}{X}}$ และ $\underset{\sim}{X}_j - \overline{\underset{\sim}{X}}$

ภายใต้ H_0 เป็นจริง ได้ว่า $T_3 \sim \chi^2_{df=\frac{p(p+1)}{6}}$ และ $T_4 \sim \chi^2_{df=\frac{p(p+1)(p+2)(p+3)}{24}}$ เป็นอิสระกัน ดังนั้น $T \sim \chi^2_{df=\frac{p(p+1)(p+2)(p+7)}{24}}$

เกณฑ์การตัดสินใจ

ปฏิเสธสมมติฐานว่างที่ระดับนัยสำคัญ α เมื่อค่า T ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าค่าวิกฤต

สรุปขั้นตอนการทดสอบ

1. คำนวณค่าประมาณพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\mu}$ และ Σ ด้วย $\underset{\sim}{\overline{X}}$ และ S ตามลำดับ
2. คำนวณค่า D_{ii} และ D_{ij}
3. คำนวณค่า $b_{1,p}$ และ T_3
4. คำนวณค่า $b_{2,p}$, $b^*_{2,p}$ และ T_4
5. คำนวณค่าสถิติ T
6. ปฏิเสธสมมติฐานว่างที่ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ T ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าค่าวิกฤตในตาราง ข.1 (หน้า 236 ภาคผนวก ข)

2.1.2 ตัวสถิติทดสอบ N (T_w)

ในปี ค.ศ. 1996 Kata Naito ได้คิดค้นตัวสถิติทดสอบ N ซึ่งเป็นตัวสถิติทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่พัฒนามาจากสถิติของซอร์โก (Csorgo) โดยการใช้อินทิกรัลถ่วงน้ำหนักของกำลังสองของค่าสัมบูรณ์ของฟังก์ชันแคแรคเตอริสติค (Characteristic function) เมื่อฟังก์ชันน้ำหนักอยู่ในรูปของฟังก์ชันดับเบิลเอกซ์โพเนนเชียล (double exponential function) ข้อสมมติเบื้องต้น คือ $\underset{\sim}{X}_1, \underset{\sim}{X}_2, \ldots, \underset{\sim}{X}_n$ เป็นเวกเตอร์ของตัวอย่างสุ่มขนาด $px1$ ที่เป็นอิสระต่อกัน

ตัวสถิติทดสอบ N อยู่ในรูป

$$T_w = \int_{-U}^{U}\int_{-U}^{U}\cdots\int_{-U}^{U} a_n(\underset{\sim}{t})\, w(\underset{\sim}{t})\, d\underset{\sim}{t} \quad ; \quad U \geq 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

โดยที่ $$a_n(\underset{\sim}{t}) = \left| C_n(S^{-\frac{1}{2}}\underset{\sim}{t}) \right|^2 \quad ; \quad \underset{\sim}{t}' = (t_1, t_2, \ldots, t_p)$$

$$C_n(S^{-\frac{1}{2}}\underset{\sim}{t}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\exp(i\sum_{i=1}^{p} t' S^{-\frac{1}{2}} \underset{\sim}{X}_{(j)}) \quad ; \quad \underset{\sim}{X}'_{(j)} = (X_{1(j)}, X_{2(j)}, \ldots, X_{p(j)})$$

ฟังก์ชันน้ำหนักที่ใช้ คือ

$$w(\underset{\sim}{t}) = w(t_1, t_2, \ldots, t_p)$$
$$= w_a(t_1) w_a(t_2) \ldots w_a(t_p)$$

และ $$w_a(t_i) = \frac{1}{2}\exp(-|t_i - 1|) + \frac{1}{2}\exp(-|t_i + 1|) \quad ; \quad i = 1,2,\ldots,p$$

เมื่อ p แทน จำนวนตัวแปร

S แทน เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม

ในกรณีที่จำนวนตัวแปรมากกว่า 1 ตัวแปร จะกำหนดให้ U มีค่าเท่ากับ 1 และสามารถจัดรูปสถิติทดสอบ T_w กรณีที่ $p = 2$ และ $p = 3$ ได้ใหม่โดยการอินทิเกรตสมการที่ (1) ดังนี้ จาก

$$C_n(S^{-\frac{1}{2}} \underset{\sim}{t}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \exp(i\sum_{i=1}^{p} t' S^{-\frac{1}{2}} \underset{\sim}{X}_{(j)})$$
$$= \frac{1}{n}\left[e^{i\left\{\frac{t_1 X_{11}}{\sqrt{S_{11}}} + \frac{t_2 X_{21}}{\sqrt{S_{22}}} + \ldots + \frac{t_p X_{p1}}{\sqrt{S_{pp}}}\right\}} + e^{i\left\{\frac{t_1 X_{12}}{\sqrt{S_{11}}} + \frac{t_2 X_{22}}{\sqrt{S_{22}}} + \ldots + \frac{t_p X_{p2}}{\sqrt{S_{pp}}}\right\}} + \ldots + e^{i\left\{\frac{t_1 X_{1n}}{\sqrt{S_{11}}} + \frac{t_2 X_{2n}}{\sqrt{S_{22}}} + \ldots + \frac{t_p X_{pn}}{\sqrt{S_{pp}}}\right\}} \right]$$

พิจารณาที่ $p = 2$, $n = 2$

$$a_2(\underset{\sim}{t}) = \left| C_2(S^{-\frac{1}{2}} \underset{\sim}{t}) \right|^2$$
$$= \left| \frac{1}{2}\left[e^{i\left\{\frac{t_1 X_{11}}{\sqrt{S_{11}}} + \frac{t_2 X_{21}}{\sqrt{S_{22}}}\right\}} + e^{i\left\{\frac{t_1 X_{12}}{\sqrt{S_{11}}} + \frac{t_2 X_{22}}{\sqrt{S_{22}}}\right\}} \right] \right|^2$$

จาก $e^{iX} = \cos X + i \sin X$ จะได้ว่า

$$a_2(\underset{\sim}{t}) = \frac{1}{2^2}\left| \left\{ \cos\left(\frac{t_1 X_{11}}{\sqrt{S_{11}}} + \frac{t_2 X_{21}}{\sqrt{S_{22}}}\right) + \cos\left(\frac{t_1 X_{12}}{\sqrt{S_{11}}} + \frac{t_2 X_{22}}{\sqrt{S_{22}}}\right) \right\} + i\left\{ \sin\left(\frac{t_1 X_{11}}{\sqrt{S_{11}}} + \frac{t_2 X_{21}}{\sqrt{S_{22}}}\right) + \sin\left(\frac{t_1 X_{12}}{\sqrt{S_{11}}} + \frac{t_2 X_{22}}{\sqrt{S_{22}}}\right) \right\} \right|^2$$

จาก $|Z| = \sqrt{X^2+Y^2}$ จะได้ว่า

$$c_2(t) = \frac{1}{2^2}\left[\left(\left\{\cos\left(\frac{t_1X_{11}}{\sqrt{S_{11}}}+\frac{t_2X_{21}}{\sqrt{S_{22}}}\right)+\cos\left(\frac{t_1X_{12}}{\sqrt{S_{11}}}+\frac{t_2X_{22}}{\sqrt{S_{22}}}\right)\right\}^2+\left\{\sin\left(\frac{t_1X_{11}}{\sqrt{S_{11}}}+\frac{t_2X_{21}}{\sqrt{S_{22}}}\right)+\sin\left(\frac{t_1X_{12}}{\sqrt{S_{11}}}+\frac{t_2X_{22}}{\sqrt{S_{22}}}\right)\right\}^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2^2}\left[\cos^2\left(\frac{t_1X_{11}}{\sqrt{S_{11}}}+\frac{t_2X_{21}}{\sqrt{S_{22}}}\right)+\cos^2\left(\frac{t_1X_{12}}{\sqrt{S_{11}}}+\frac{t_2X_{22}}{\sqrt{S_{22}}}\right)+2\cos\left(\frac{t_1X_{11}}{\sqrt{S_{11}}}+\frac{t_2X_{21}}{\sqrt{S_{22}}}\right)\cos\left(\frac{t_1X_{12}}{\sqrt{S_{11}}}+\frac{t_2X_{22}}{\sqrt{S_{22}}}\right)\right.$$

$$\left.+\sin^2\left(\frac{t_1X_{11}}{\sqrt{S_{11}}}+\frac{t_2X_{21}}{\sqrt{S_{22}}}\right)+\sin^2\left(\frac{t_1X_{12}}{\sqrt{S_{11}}}+\frac{t_2X_{22}}{\sqrt{S_{22}}}\right)+2\sin\left(\frac{t_1X_{11}}{\sqrt{S_{11}}}+\frac{t_2X_{21}}{\sqrt{S_{22}}}\right)\sin\left(\frac{t_1X_{12}}{\sqrt{S_{11}}}+\frac{t_2X_{22}}{\sqrt{S_{22}}}\right)\right]$$

จาก $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

และ $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$

จะได้ $a_2(t) = \frac{1}{2^2}\left[1+1+2\cos\left\{\frac{t_1(X_{11}-X_{12})}{\sqrt{S_{11}}}+\frac{t_2(X_{21}-X_{22})}{\sqrt{S_{22}}}\right\}\right]$

นำ $\overline{X}_i$ บวกเข้าและลบออก

$$a_2(t) = \frac{1}{2^2}\left[2+2\cos\left\{\frac{t_1(X_{11}-\overline{X}_1-(X_{12}-\overline{X}_1)}{\sqrt{S_{11}}}+\frac{t_2(X_{21}-\overline{X}_2-(X_{22}-\overline{X}_2)}{\sqrt{S_{22}}}\right\}\right]$$

ให้ $Y_{ij} = \frac{(X_{ij}-\overline{X}_i)}{\sqrt{S_{ii}}}$

$$a_2(t) = \frac{1}{2^2}[2+2\cos\{t_1(Y_{11}-Y_{12})+t_2(Y_{21}-Y_{22})\}]$$

ในทำนองเดียวกัน

$$a_n(t) = \frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\sum_{j<k}^{n}\cos\{t_1(Y_{1j}-Y_k)+t_2(Y_{2j}-Y_{2k})\}$$

ฟังก์ชันน้ำหนักที่ใช้ คือ

$$w(t) = w_a(t_1)\,w_a(t_2)$$

ดังนั้น สถิติทดสอบเมื่อ $p=2$ คือ

$$T_w = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} a_n(\underset{\sim}{t})\, w(\underset{\sim}{t})\, d(\underset{\sim}{t})$$

$$= \frac{1}{n}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} w(\underset{\sim}{t}) d(\underset{\sim}{t}) + \frac{2}{n^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sum_{j<k}^{n}\cos\{t_1(Y_{1j}-Y_{1k})+t_2(Y_{2j}-Y_{2k})\}\, w(\underset{\sim}{t})\, d(\underset{\sim}{t}) \quad .....(2)$$

จาก (2) พิจารณาเทอมที่ 1

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} w(\underset{\sim}{t})\, d(\underset{\sim}{t}) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} w(t_1)w(t_2)\, d(\underset{\sim}{t})$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} w(t_2)\int_{-1}^{1}(e^{-|t_1-1|}+e^{-|t_1+1|})\, dt_1\, dt_2$$

พิจารณาช่วง

$$-|t_1-1| = t_1-1 \quad ; \quad -1 \le t_1 \le 1$$

$$-|t_1+1| = -(t_1+1) \quad ; \quad -1 \le t_1 \le 1$$

$$\therefore \int_{-1}^{1}(e^{-|t_1-1|}+e^{-|t_1+1|})\, dt_1 = \int_{-1}^{1} e^{t_1-1}\, dt_1 + \int_{-1}^{1} e^{-t_1-1}\, dt_1$$

$$= e^{t_1-1}\Big|_{-1}^{1} + (-e)^{-t_1-1}\Big|_{-1}^{1}$$

$$= (e^0-e^{-2}) + (-e^{-2}+e^0)$$

$$= 2-2e^{-2}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} w(\underset{\sim}{t})\, d(\underset{\sim}{t}) = \frac{1}{2}(2-2e^{-2})\cdot\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(e^{-|t_2-1|}+e^{-|t_2+1|})\, dt_2$$

$$= \frac{1}{4}(2-2e^{-2})(2-2e^{-2})$$

$$= (1-e^{-2})^2$$

$$= 0.7476451 \quad ....(3.1)$$

จากสมการที่ (2) พิจารณาเทอมที่ 2 เมื่อ $n=2$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sum_{j<k}^{n}\cos\{t_1(Y_{1j}-Y_k)+t_2(Y_{2j}-Y_{2k})\}\,w(\underset{\sim}{t})\,d(\underset{\sim}{t}) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\cos\{t_1(Y_{11}-Y_{12})+t_2(Y_{21}-Y_{22})\}\,w(\underset{\sim}{t})\,d(\underset{\sim}{t})$$

กำหนดให้ $A = Y_{11} - Y_{12}$, $B = Y_{21} - Y_{22}$

พิจารณาฟังก์ชัน

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

$$\therefore \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\cos\{t_1(Y_{11}-Y_{12})+t_2(Y_{21}-Y_{22})\}w(\underset{\sim}{t})\,d(\underset{\sim}{t}) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\cos A\cos B\, w(\underset{\sim}{t})\,d(\underset{\sim}{t}) - \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sin A\sin B\, w(\underset{\sim}{t})\,d(\underset{\sim}{t})$$

พิจารณาการอินทิเกรตฟังก์ชัน sin โดยใช้สูตร

$$\int e^{ax}\sin bX\,dX = \frac{e^{aX}}{a^2+b^2}(a\sin bX - b\cos bX) + c$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\sin t_1 A\, w_a(t_1)\,dt_1 &= \int_{-1}^{1}\sin t_1 A\left[\frac{1}{2}e^{-|t_1-1|} + \frac{1}{2}e^{-|t_1+1|}\right]dt_1 \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sin t_1 A e^{t_1-1}\,dt_1 + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sin t_1 A e^{-(t_1+1)}\,dt_1 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{t_1-1}}{1+A^2}(\sin t_1 A - A\cos t_1 A)\right)\Bigg|_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-(t_1+1)}}{1+A^2}(-\sin t_1 A - A\cos t_1 A)\right)\Bigg|_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1+A^2}(\sin A - A\cos A) - \frac{e^{-2}}{1+A^2}(-\sin A - A\cos A)\right\} \\
&\quad + \frac{1}{2}\left\{\frac{e^{-2}}{1+A^2}(-\sin A - A\cos A) - \frac{1}{1+A^2}(\sin A - A\cos A)\right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\therefore$ เทอมใดที่มีฟังก์ชัน sin จะอินทิเกรตกับฟังก์ชันน้ำหนักได้ค่าเท่ากับ 0

ดังนั้น

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\cos\{t_1A+t_2B\}w(\underset{\sim}{t})\,d(\underset{\sim}{t}) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\cos t_1 A\, w(t_1)\cos t_2 B\, w(t_2)\,d(t_1)\,d(t_2)$$

พิจารณาการอินทิเกรตฟังก์ชัน cos โดยใช้สูตร

$$\int e^{ax}\cos bX\,dX = \frac{e^{aX}}{a^2+b^2}(a\cos bX + b\sin bX) + c$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\cos t_1 A\,w(t_1)\,dt_1 &= \int_{-1}^{1}\cos t_1 A\left[\frac{1}{2}e^{-|t_1-1|} + \frac{1}{2}e^{-|t_1+1|}\right]dt_1 \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cos t_1 A e^{t_1-1}\,dt_1 + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cos t_1 A e^{-(t_1+1)}\,dt_1 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{t_1-1}}{1+A^2}(\cos t_1 A + A\sin t_1 A)\right)\Bigg|_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-(t_1+1)}}{1+A^2}(-\cos t_1 A - A\sin t_1 A)\right)\Bigg|_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1+A^2}(\cos A + A\sin A) - \frac{1}{1+A^2}(-\cos A - A\sin A)\right\} \\
&= \left\{\frac{1}{1+A^2}\cos A + \frac{1}{1+A^2}A\sin A) - \frac{e^{-2}}{1+A^2}\cos A + \frac{e^{-2}}{1+A^2}A\sin A\right\} \\
&= \frac{1}{1+A^2}\{(1-e^{-2})\cos A + (1-e^{-2})A\sin A\} \\
&= \frac{1}{e^2(1+A^2)}\left\{\left(\frac{e^2-1}{e^2}\right)\cos A + \left(\frac{e^2+1}{e^2}\right)A\sin A\right\} \qquad \text{..................(4)}
\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน การอินทิเกรต t_2 จะได้

$$\int_{-1}^{1}\cos t_2 B\,w(t_2)\,dt_2 = \frac{1}{e^2(1+B^2)}\{e^2-1)\cos B + (e^2+1)B\sin B\} \qquad \text{..................(5)}$$

แทนค่า (4) และ (5) ใน (3.2) จะได้

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\cos\{t_1A+t_2B\}w(\underset{\sim}{t})\,d(\underset{\sim}{t}) = \frac{\{e^2-1)\cos A + (e^2+1)A\sin A\}\{e^2-1)\cos B + (e^2+1)B\sin B\}}{e^4(1+A^2)(1+B^2)} \qquad \text{......(6)}$$

ดังนั้น เมื่อ $p = 2$, $n = 2$ จะได้

$$\begin{aligned}
T_w &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}w(\underset{\sim}{t})\,d(\underset{\sim}{t}) + \frac{2}{2^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sum_{j<k}^{2}\cos\{t_1(Y_{1j}-Y_{1k})+t_2(Y_{2j}-Y_{2k})\}w(\underset{\sim}{t})\,d(\underset{\sim}{t}) \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}w(\underset{\sim}{t})\,d(\underset{\sim}{t}) + \frac{2}{2^2}\left[\frac{\{e^2-1)\cos A + (e^2+1)A\sin A\}\{e^2-1)\cos B + (e^2+1)B\sin B\}}{e^4(1+A^2)(1+B^2)}\right]
\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน $n = n$ จะได้

$$T_w \quad = \quad \frac{1}{n}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} w(\underset{\sim}{t})\,d(\underset{\sim}{t}) + \frac{2}{n^2}\sum_{j<k}^{n} M\left\{Y_{1j} - Y_{1k}\,,\, Y_{2j} - Y_{2k}\right\}$$

กำหนดให้ $a \;=\; Y_{1j} - Y_{1k}$, $b \;=\; Y_{2j} - Y_{2k}$

$$M\,(a,\,b) \quad = \quad \frac{\left\{(e^2 - 1)\cos a + (e^2 + 1)\,a\sin a\right\}\left\{(e^2 - 1)\cos b + (e^2 + 1)\,b\sin b\right\}}{e^4 (1 + a^2)\,(1 + b^2)}$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อ $p = 3$ จะได้

$$T_w \quad = \quad \frac{1}{n}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} w(\underset{\sim}{t})\,d(\underset{\sim}{t}) + \frac{2}{n^2}\sum_{j<k}^{n} M\left\{Y_{1j} - Y_{1k}\,,\, Y_{2j} - Y_{2k}\,,\, Y_{3j} - Y_{3k}\right\}$$

โดยที่

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} w(\underset{\sim}{t})\,d(\underset{\sim}{t}) \quad = \quad (1 - e^{-2})^3 \quad = \quad 0.6464623$$

และ $a \;=\; Y_{1j} - Y_{1k}$, $b \;=\; Y_{2j} - Y_{2k}$, $c \;=\; Y_{3j} - Y_{3k}$

$$M\,(a,b,c) = \frac{\left\{(e^2 - 1)\cos a + (e^2 + 1)\,a\sin a\right\}\left\{(e^2 - 1)\cos b + (e^2 + 1)\,b\sin b\right\}\left\{(e^2 - 1)\cos c + (e^2 + 1)\,c\sin c\right\}}{e^6 (1 + a^2)\,(1 + b^2)(1 + c^2)}$$

<u>หมายเหตุ</u> ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับ Complex trigonometric function

$$e^{iX} \quad = \quad \cos X \;+\; i\,\sin X$$

$$e^{-iX} \quad = \quad \cos X \;-\; i\,\sin X$$

$$\cos\,(A \pm B) \quad = \quad \cos A \cos B \;\mp\; \sin A \sin B$$

$$\sin\,(A \pm B) \quad = \quad \sin A \cos B \;\pm\; \cos A \sin B$$

$$\cos^2 A + \sin^2 A \quad = \quad 1$$

ให้ $Z = X + Yi$ ซึ่ง X และ Y เป็นจำนวนจริง และ $i = \sqrt{-1}$

จะได้ $|Z| \quad = \quad \sqrt{X^2 + Y^2}$

ที่มา : Erwin Kreyszig. Advance engineering mathematic ; sixth edition (p.750 - 751)

<u>หมายเหตุ</u> สูตรการอินทิเกรต

$$\int e^{ax} \sin bX \, dX = \frac{e^{aX}}{a^2+b^2}(a\sin bX - b\cos bX) + c$$

$$\int e^{ax} \cos bX \, dX = \frac{e^{aX}}{a^2+b^2}(a\cos bX + b\sin bX) + c$$

ที่มา : วิชัย ทิพณีย์และรัชเมธี รัชนิพนธ์. 1234แบบฝึกหัดและเทคนิคการแก้ปัญหาโจทย์แคลคูลัส : พิมพ์ครั้งที่ 1 (หน้า 236 – 237)

ดังนั้น จากที่ได้แสดงข้างต้น สามารถสรุปได้ว่า

<u>กรณีจำนวนตัวแปรเท่ากับ 2</u> ($p = 2$)

$$T_w = \frac{1}{n}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} w(t_1,t_2)d(t_1)d(t_2) + \frac{2}{n^2}\sum_{j<k}^{n} M\{Y_{1j}-Y_{1k}, Y_{2j}-Y_{2k}\}$$

โดยที่ $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} w(t_1,t_2)d(t_1)d(t_2) = 0.7476451$

$$M(a,b) = \frac{\{(e^2-1)\cos a + (e^2+1)a\sin a\}\{(e^2-1)\cos b + (e^2+1)\,b\sin b\}}{e^4(1+a^2)(1+b^2)}$$

เมื่อ $a = Y_{1j} - Y_{1k}$, $b = Y_{2j} - Y_{2k}$

$$Y_{ij} = \frac{(X_{ij} - \overline{X}_i)}{\sqrt{S_{ii}}}$$; S_{ii} แทน ความแปรปรวนของตัวแปรที่ i ในตัวอย่าง

<u>กรณีจำนวนตัวแปรเท่ากับ 3</u> ($p = 3$)

$$T_w = \frac{1}{n}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} w(t_1,t_2,t_3)d(t_1)d(t_2)d(t_{31}) + \frac{2}{n^2}\sum_{j<k}^{n} M\{Y_{1j}-Y_{1k}, Y_{2j}-Y_{2k}, Y_{3j}-Y_{3k}\}$$

โดยที่ $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} w(t_1,t_2,t_3)d(t_1)d(t_2)d(t_3) = 0.6464623$

$$M(a,b,c) = \frac{\{(e^2-1)\cos a+(e^2+1)a\sin a\}\{(e^2-1)\cos b+(e^2+1)b\sin b\}\{(e^2-1)\cos c+(e^2+1)c\sin c\}}{e^6(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}$$

และ $a = Y_{1j}-Y_{1k}$, $b = Y_{2j}-Y_{2k}$, $c = Y_{3j}-Y_{3k}$

$Y_{ij} = \dfrac{(X_{ij}-\overline{X}_i)}{\sqrt{S_{ii}}}$; S_{ii} แทน ความแปรปรวนของตัวแปรที่ i ในตัวอย่าง

<u>เกณฑ์การตัดสินใจ</u>

ปฏิเสธสมมติฐานว่างที่ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ T_w ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าค่าวิกฤต

<u>สรุปขั้นตอนการทดสอบ</u>

1. คำนวณค่าประมาณพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\mu}$ และ Σ ด้วย $\underset{\sim}{\overline{X}}$ และ S ตามลำดับ
2. คำนวณค่า $Y_{ij} = \dfrac{(X_{ij}-\overline{X}_i)}{\sqrt{S_{ii}}}$ เมื่อ $i = 1,2,\ldots,p$; $j = 1,2,\ldots,n$
3. คำนวณค่าของฟังก์ชัน M
4. คำนวณค่า $\underset{\sim}{w}(t)$
5. คำนวณค่าสถิติ T_w
6. ปฏิเสธสมมติฐานว่างที่ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ T_w ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าค่าวิกฤตในตาราง ข.2-ข.3 (หน้า 237-242 ภาคผนวก ข)

2.1.3 ตัวสถิติทดสอบ KTT (W_0)

ตัวสถิติทดสอบ KTT เป็นสถิติทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่พัฒนาขึ้นในปี ค.ศ.1999 โดย Takeaki Kariya, Ruey S. Tsay and Nobuhiko Terui เป็นการใช้คุณลักษณะ Hermitian Polynomial ของความเป็นปกติหลายตัวแปร และเปรียบเทียบ marginal and cross moment ของ multinormality มีข้อสมมติเบื้องต้น คือ ให้ $\underset{\sim}{X}_1,\underset{\sim}{X}_2,\ldots,\underset{\sim}{X}_n$ เป็น $px1$ เวกเตอร์ของตัวอย่างขนาด n ที่เป็นอิสระต่อกัน

ตัวสถิติทดสอบ KTT อยู่ในรูป

$$W_0 = nC'_p(\hat{J}\hat{\Lambda}\hat{J}')^{-1}C_p$$

<u>กรณีจำนวนตัวแปรเท่ากับ 2</u> $(p = 2)$

$$r_p = (r_{11}^{(1,1)}, r_{12}^{(1,1)}, r_{22}^{(1,1)}, r_{11}^{(2,2)}, r_{12}^{(2,2)}, r_{22}^{(2,2)} \;;\; r_{11}^{(1,2)}, r_{12}^{(1,2)}, r_{21}^{(1,2)}, r_{22}^{(1,2)})'$$

$$C_p = (r_{11}^{(2,2)} - (r_{11}^{(1,1)})^2, r_{12}^{(2,2)} - (r_{12}^{(1,1)})^2, r_{22}^{(2,2)} - (r_{22}^{(1,1)})^2 \;;\; r_{11}^{(1,2)}, r_{12}^{(1,2)}, r_{21}^{(1,2)}, r_{22}^{(1,2)})'$$

$$\hat{J} = \frac{\partial C_p}{\partial r_p} = \begin{bmatrix} \hat{J}_{11} & 0 \\ 0 & I_4 \end{bmatrix}$$

โดยที่ I_4 แทน เมทริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix) ขนาด 4 x 4

$$\hat{J}_{11} = \begin{bmatrix} -2r_{11}^{(1,1)} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2r_{12}^{(1,1)} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2r_{22}^{(1,1)} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{7x10}$$

$$\hat{\Lambda} = \begin{bmatrix}
\hat\lambda_{11,11}^{(11,11)} & \hat\lambda_{11,12}^{(11,11)} & \hat\lambda_{11,22}^{(11,11)} & \hat\lambda_{12,11}^{(11,22)} & \hat\lambda_{11,12}^{(11,22)} & \hat\lambda_{11,22}^{(11,22)} & \hat\lambda_{11,11}^{(11,12)} & \hat\lambda_{11,12}^{(11,12)} & \hat\lambda_{11,21}^{(11,12)} & \hat\lambda_{11,22}^{(11,12)} \\
\hat\lambda_{12,11}^{(11,11)} & \hat\lambda_{12,12}^{(11,11)} & \hat\lambda_{12,22}^{(11,11)} & \hat\lambda_{12,11}^{(11,22)} & \hat\lambda_{12,12}^{(11,22)} & \hat\lambda_{12,22}^{(11,22)} & \hat\lambda_{12,11}^{(11,12)} & \hat\lambda_{12,12}^{(11,12)} & \hat\lambda_{12,21}^{(11,12)} & \hat\lambda_{12,22}^{(11,12)} \\
\hat\lambda_{22,11}^{(11,11)} & \hat\lambda_{22,12}^{(11,11)} & \hat\lambda_{22,22}^{(11,11)} & \hat\lambda_{22,11}^{(11,22)} & \hat\lambda_{22,12}^{(11,22)} & \hat\lambda_{22,22}^{(11,22)} & \hat\lambda_{22,11}^{(11,12)} & \hat\lambda_{22,12}^{(11,12)} & \hat\lambda_{22,21}^{(11,12)} & \hat\lambda_{22,22}^{(11,12)} \\
\hat\lambda_{11,11}^{(22,11)} & \hat\lambda_{11,12}^{(22,11)} & \hat\lambda_{11,22}^{(22,11)} & \hat\lambda_{11,11}^{(22,22)} & \hat\lambda_{11,12}^{(22,22)} & \hat\lambda_{11,22}^{(22,22)} & \hat\lambda_{11,11}^{(22,12)} & \hat\lambda_{11,12}^{(22,12)} & \hat\lambda_{11,21}^{(22,12)} & \hat\lambda_{11,22}^{(22,12)} \\
\hat\lambda_{12,11}^{(22,11)} & \hat\lambda_{12,12}^{(22,11)} & \hat\lambda_{12,22}^{(22,11)} & \hat\lambda_{12,11}^{(22,22)} & \hat\lambda_{12,12}^{(22,22)} & \hat\lambda_{12,22}^{(22,22)} & \hat\lambda_{12,11}^{(22,12)} & \hat\lambda_{12,12}^{(22,12)} & \hat\lambda_{12,21}^{(22,12)} & \hat\lambda_{12,22}^{(22,12)} \\
\hat\lambda_{22,11}^{(22,11)} & \hat\lambda_{22,12}^{(22,11)} & \hat\lambda_{22,22}^{(22,11)} & \hat\lambda_{22,11}^{(22,22)} & \hat\lambda_{22,12}^{(22,22)} & \hat\lambda_{22,22}^{(22,22)} & \hat\lambda_{22,11}^{(22,12)} & \hat\lambda_{22,12}^{(22,12)} & \hat\lambda_{22,21}^{(22,12)} & \hat\lambda_{22,22}^{(22,12)} \\
\hat\lambda_{11,11}^{(12,11)} & \hat\lambda_{11,12}^{(12,11)} & \hat\lambda_{11,22}^{(12,11)} & \hat\lambda_{11,11}^{(12,22)} & \hat\lambda_{11,12}^{(12,22)} & \hat\lambda_{11,22}^{(12,22)} & \hat\lambda_{11,11}^{(12,12)} & \hat\lambda_{11,12}^{(12,12)} & \hat\lambda_{11,21}^{(12,12)} & \hat\lambda_{11,22}^{(12,12)} \\
\hat\lambda_{12,11}^{(12,11)} & \hat\lambda_{12,12}^{(12,11)} & \hat\lambda_{12,22}^{(12,11)} & \hat\lambda_{12,11}^{(12,22)} & \hat\lambda_{12,12}^{(12,22)} & \hat\lambda_{12,12}^{(12,22)} & \hat\lambda_{12,11}^{(12,12)} & \hat\lambda_{12,12}^{(12,12)} & \hat\lambda_{12,21}^{(12,12)} & \hat\lambda_{12,22}^{(12,12)} \\
\hat\lambda_{21,11}^{(12,11)} & \hat\lambda_{21,12}^{(12,11)} & \hat\lambda_{21,22}^{(12,11)} & \hat\lambda_{21,11}^{(12,22)} & \hat\lambda_{21,12}^{(12,22)} & \hat\lambda_{21,22}^{(12,22)} & \hat\lambda_{11,21}^{(12,12)} & \hat\lambda_{12,21}^{(12,12)} & \hat\lambda_{21,21}^{(12,12)} & \hat\lambda_{21,22}^{(12,12)} \\
\hat\lambda_{22,11}^{(12,11)} & \hat\lambda_{22,12}^{(12,11)} & \hat\lambda_{22,22}^{(12,11)} & \hat\lambda_{22,11}^{(12,22)} & \hat\lambda_{22,12}^{(12,22)} & \hat\lambda_{22,22}^{(12,22)} & \hat\lambda_{22,11}^{(12,12)} & \hat\lambda_{22,12}^{(12,12)} & \hat\lambda_{22,21}^{(12,12)} & \hat\lambda_{22,22}^{(12,12)}
\end{bmatrix}_{10x10}$$

เมื่อ $\hat{\lambda}_{ij,kl}^{(ab,cd)} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(V_{it}^{(a)}V_{jt}^{(b)} - r_{ij}^{(a,b)})(V_{kt}^{(c)}V_{lt}^{(d)} - r_{kl}^{(c,d)})$

กำหนดให้ $Y_{it} = \frac{(X_{it} - \overline{X}_i)}{\sqrt{S_{ii}}}$; S_{ii} แทน ความแปรปรวนของตัวแปรที่ i ในตัวอย่าง

และ $V_{it}^{(a)} = h^{(a)}(Y_{it})$ เป็น Hermitian polynomial อันดับที่ a ของตัวแปร Y_i

ในที่นี้ให้ $a = 2$

จะได้ $V_{it}^{(1)} = Y_{it}$

$$V_{it}^{(2)} = \frac{Y_{it}^2 - 1}{\sqrt{2}}$$

และ $r_{ij}^{(a,b)} = \hat{\text{cov}}(V_i^{(a)}, V_j^{(b)}) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} V_{it}^{(a)} V_{jt}^{(b)}$

<u>กรณีจำนวนตัวแปรเท่ากับ 3</u> $p = 3$

$$r_p = (r_{11}^{(1,1)}, r_{12}^{(1,1)}, r_{13}^{(1,1)}, r_{22}^{(1,1)}, r_{23}^{(1,1)}, r_{33}^{(1,1)}, r_{11}^{(2,2)}, r_{12}^{(2,2)}, r_{13}^{(2,2)}, r_{22}^{(2,2)}, r_{23}^{(2,2)}, r_{33}^{(2,2)};\; r_{11}^{(1,2)}, r_{12}^{(1,2)}, r_{13}^{(1,2)}, r_{21}^{(1,2)}, r_{31}^{(1,2)}, r_{22}^{(1,2)}, r_{23}^{(1,2)}, r_{32}^{(1,2)}, r_{33}^{(1,2)})'$$

$$C_p = (r_{11}^{(2,2)} - (r_{11}^{(1,1)})^2, r_{12}^{(2,2)} - (r_{12}^{(1,1)})^2, r_{13}^{(2,2)} - (r_{13}^{(1,1)})^2, r_{22}^{(2,2)} - (r_{22}^{(1,1)})^2, r_{23}^{(2,2)} - (r_{23}^{(1,1)})^2, r_{33}^{(2,2)} - (r_{33}^{(1,1)})^2;\; r_{11}^{(1,2)}, r_{12}^{(1,2)}, r_{13}^{(1,2)}, r_{21}^{(1,2)}, r_{31}^{(1,2)}, r_{22}^{(1,2)}, r_{23}^{(1,2)}, r_{32}^{(1,2)}, r_{33}^{(1,2)})'$$

$$\hat{J} = \frac{\partial C_p}{\partial r_p} = \begin{bmatrix} \hat{J}_{11} & 0 \\ 0 & I_9 \end{bmatrix}$$

โดยที่ I_9 แทน เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix) ขนาด 9 x 9

$$\hat{J}_{11} = \begin{bmatrix} -2r_{11}^{(1,1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2r_{12}^{(1,1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2r_{13}^{(1,1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2r_{22}^{(1,1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2r_{23}^{(1,1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2r_{33}^{(1,1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ทำนองเดียวกันกับกรณีจำนวนตัวแปรเท่ากับ 2 จะได้ $\hat{\Lambda}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 21 x 21 ประกอบด้วยสมาชิก $\hat{\lambda}_{ij,kl}^{(ab,cd)}$

เมื่อ $$\hat{\lambda}_{ij,kl}^{(ab,cd)} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} (V_{it}^{(a)} V_{jt}^{(b)} - r_{ij}^{(a,b)})(V_{kt}^{(c)} V_{lt}^{(d)} - r_{kl}^{(c,d)})$$

กำหนดให้ $Y_{it} = \frac{(X_{it} - \overline{X}_i)}{\sqrt{S_{ii}}}$; S_{ii} แทน ความแปรปรวนของตัวแปรที่ i ในตัวอย่าง

จะได้ $V_{it}^{(1)} = Y_{it}$

$$V_{it}^{(2)} = \frac{Y_{it}^2 - 1}{\sqrt{2}}$$

และ $r_{ij}^{(a,b)} = \hat{\text{cov}}(V_i^{(a)}, V_j^{(b)}) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} V_{it}^{(a)} V_{jt}^{(b)}$

<u>เกณฑ์การตัดสินใจ</u>

ปฏิเสธสมมติฐานว่างที่ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ W_0 ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าค่าวิกฤต

<u>สรุปขั้นตอนการทดสอบ</u>

1. คำนวณค่าประมาณพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\mu}$ และ Σ ด้วย $\underset{\sim}{\overline{X}}$ และ S ตามลำดับ
2. คำนวณค่า $Y_{it} = \frac{(X_{it} - \overline{X}_i)}{\sqrt{S_{ii}}}$ เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, p$; $t = 1, 2, \ldots, n$
3. แปลงข้อมูลให้อยู่ในรูป Hermitian polynomial โดยกำหนด $p = 2$
4. คำนวณค่า $V_{it}^{(a)} V_{jt}^{(b)}$
5. คำนวณค่า $r_{ij}^{(a,b)}$ เพื่อใช้คำนวณหาค่า C_p และ $\hat{J}$
6. คำนวณค่า $\hat{\lambda}_{ij,kl}^{(ab,cd)}$ เพื่อใช้คำนวณหาค่า $\hat{\Lambda}$
7. คำนวณค่าสถิติ W_0
8. ปฏิเสธสมมติฐานว่างที่ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ W_0 ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าค่าวิกฤตในตาราง ข.4-ข.5 (หน้า 243-248 ภาคผนวก ข)

2.2 ตัวอย่างการใช้ตัวสถิติทดสอบทั้งสามในการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์

ในหัวข้อนี้เป็นการแสดงตัวอย่างการคำนวณค่าสถิติของตัวสถิติทดสอบ MK ตัวสถิติทดสอบ N และตัวสถิติทดสอบ KTT โดยจำลองข้อมูลให้มีการแจกแจงปกติสองตัวแปร ที่มีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 1.8 \\ 1.8 & 9 \end{bmatrix}$ โดยมีสหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่ 1 และ 2 เป็น 0.3 ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 ทำการตรวจสอบที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 และ 0.10 มีข้อมูลดังต่อไปนี้

n	X_1	X_2
1	4.32	6.56
2	7.06	8.82
3	10.02	14.85
4	3.19	15.54
5	4.11	14.30
6	6.40	12.93
7	1.92	10.31
8	1.66	10.48
9	1.04	6.77
10	7.71	9.33
11	3.63	8.45
12	5.98	15.51
13	2.43	11.02
14	6.27	12.63
15	3.73	7.20
16	7.15	11.42
17	9.54	11.06
18	3.43	11.02
19	6.11	4.13
20	1.69	7.90

<u>ตัวสถิติทดสอบ MK</u> (T)

ขั้นตอนการทดสอบมีดังนี้

1. สมมติฐานของการทดสอบคือ

H_0 : ข้อมูลมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติสองตัวแปร

H_1 : ข้อมูลไม่ได้มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติสองตัวแปร

2. คำนวณค่าประมาณพารามิเตอร์ ดังนี้

2.1 คำนวณเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง

$$\underset{\sim}{\overline{X}} = \begin{bmatrix} 4.87 \\ 10.51 \end{bmatrix}$$

2.2 คำนวณเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวอย่าง

$$S = \begin{bmatrix} 6.94 & 2.25 \\ 2.25 & 10.11 \end{bmatrix}$$

2.3 คำนวณอินเวอร์สเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวอย่าง

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0.155 & -0.035 \\ -0.035 & 0.1066 \end{bmatrix}$$

3. การคำนวณค่าสถิติทดสอบ T มีวิธีการดังนี้

3.1 คำนวณค่า $D_{ij} = (\underset{\sim}{X}_i - \underset{\sim}{\overline{X}})' S^{-1} (\underset{\sim}{X}_j - \underset{\sim}{\overline{X}})$

$$= \begin{bmatrix} D_{(1,1)} & D_{(1,2)} & \cdots & D_{(1,20)} \\ D_{(2,1)} & D_{(2,2)} & \cdots & D_{(2,20)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{(20,1)} & D_{(20,2)} & \cdots & D_{(20,20)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.56 & 0.79 & \cdots & 0.89 \\ 0.79 & 1.30 & \cdots & -0.599 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0.89 & -0.599 & \cdots & 1.714 \end{bmatrix}$$

3.2 คำนวณค่า $b_{1,3} = \dfrac{1}{20^2}\sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{20} D_{ij}^3$

$$= \frac{1}{400}\left\{(1.56)^3 + (1.79)^3 + \ldots + (1.714)^3\right\}$$

$$= \frac{1}{100}(53.29) \quad = \quad 0.1332$$

3.3 คำนวณค่า $b_{2,3} = \dfrac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} D_{ii}^2$

$$= \frac{1}{20}\left\{(1.56)^2 + (1.79)^2 + \ldots + (1.714)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{20}(107.02) \quad = \quad 5.3511$$

3.4 คำนวณค่า $b_{2,3}^* = \dfrac{1}{20^2}\sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{20} D_{ij}^4$

$$= \frac{1}{400}\left\{(1.56)^4 + (1.79)^4 + \ldots + (1.714)^4\right\}$$

$$= \frac{1}{400}(4685.496) \quad = \quad 11.7137$$

3.5 คำนวณค่า $T_3 = nb_{1,3}$

$$= \frac{1}{6}(20)(0.1332)$$

$$= 0.4441$$

3.6 คำนวณค่า $T_4 = \dfrac{1}{24}n\left\{b_{2,3}^* - 6b_{2,3} + 3p(p+2)\right\}$

$$= \frac{1}{20}(20)\left\{11.7137 - 6(5.3511) + 3(2)(4)\right\}$$

$$= 3.0057$$

ดังนั้น จะได้ค่าสถิติทดสอบ $T = T_3 + T_4$

$$= 0.4441 + 3.0057$$

$$= 3.4498$$

4. เกณฑ์การตัดสินใจ

เปรียบเทียบค่าสถิติทดสอบ T ที่คำนวณได้กับค่าวิกฤตในตาราง ข.1 (หน้า 236 ภาคผนวก ข)

4.1 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

$$T = 3.4498 < 16.92$$

ดังนั้นจึงยอมรับสมมติฐาน H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

4.2 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10

$$T = 3.4498 < 14.68$$

ดังนั้นจึงยอมรับสมมติฐาน H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10

แสดงว่าข้อมูลมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติสองตัวแปร

<u>ตัวสถิติทดสอบ N</u> (T_w)

ขั้นตอนการทดสอบมีดังนี้

1. คำนวณค่าประมาณพารามิเตอร์

1.1 คำนวณค่าเฉลี่ยของข้อมูลตัวอย่าง

$$\overline{X}_1 = 5.87 \quad , \quad \overline{X}_2 = 10.51$$

1.2 คำนวณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลตัวอย่าง

$$\sqrt{S_{11}} = 2.633 \quad , \quad \sqrt{S_{22}} = 3.179$$

2. คำนวณค่าสถิติทดสอบ มีวิธีการดังนี้

$$Y_{1j} = \frac{(X_{1j} - \overline{X}_1)}{\sqrt{S_{11}}} \quad , \quad Y_{2j} = \frac{(X_{2j} - \overline{X}_2)}{\sqrt{S_{22}}} \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, 20$$

จะได้ค่าดังต่อไปนี้

n	Y_{1j}	Y_{2j}
1	-0.208	-1.243
2	0.831	-0.531
3	1.955	1.367
.	.	.
.	.	.
.	.	.
19	0.472	-2.007
20	-1.209	-0.823

คำนวณค่า $M_{(a,b)}$ โดยที่ $a = Y_{ij} - Y_{1k}$, $b = Y_{2j} - Y_{2k}$

n	$Y_{1(1)} - Y_{1(k)}$	$Y_{2(1)} - Y_{2(k)}$	$Y_{1(2)} - Y_{1(k)}$	$Y_{2(2)} - Y_{2(k)}$	...	$Y_{1(19)} - Y_{1(k)}$	$Y_{2(19)} - Y_{2(k)}$
1	0	0	0	0	...	0	0
2	-1.039	-0.712	0	0	...	0	0
3	-2.163	-2.610	-1.124	-1.898	...	0	0
4	0.430	-2.830	1.469	-2.118	...	0	0
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
20	1.001	-0.419	2.040	0.292		1.681	-1.184
	$M_1(a,b) = 4.0278$		$M_2(a,b) = 3.9373$			$M_{19}(a,b) = 0.0894$	

โดยที่

$$M\,(a,b) \quad = \quad \frac{\{(e^2-1)\cos a+(e^2+1)a\sin a\}\{(e^2-1)\cos b+(e^2+1)\,b\sin b\}}{e^4(1+a^2)\,(1+b^2)}$$

$\therefore$ ผลรวมของ $M(a,b) \;=\; M_1(a,b) \;+\; M_2(a,b) \;+\ldots+\; M_{19}(a,b)$

$= \;39.757$

3. เกณฑ์การตัดสินใจ

เปรียบเทียบค่าสถิติทดสอบ T_w ที่คำนวณได้กับค่าวิกฤตในตาราง ข.2 (หน้า 237 ภาคผนวก ข)

3.1 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

$$T_w \;=\; 0.2362 \;<\; 0.2751$$

ดังนั้นจึงยอมรับสมมติฐาน H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

3.2 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10

$$T_w \;=\; 0.2362 \;<\; 0.2685$$

ดังนั้นจึงยอมรับสมมติฐาน H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10

แสดงว่าข้อมูลมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติสองตัวแปร

<u>ตัวสถิติทดสอบ KTT</u> (W_0)

ขั้นตอนการทดสอบมีดังนี้

1. คำนวณค่าประมาณพารามิเตอร์

1.1 คำนวณค่าเฉลี่ยของข้อมูลตัวอย่าง

$$\overline{X}_1 = 5.87 \quad , \quad \overline{X}_2 = 10.51$$

1.2 คำนวณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลตัวอย่าง

$$\sqrt{S_{11}} = 2.633 \quad , \quad \sqrt{S_{22}} = 3.179$$

2. คำนวณค่าสถิติทดสอบ W_0 มีวิธีการดังนี้

$$Y_{1t} = \frac{(X_{1t} - \overline{X}_1)}{\sqrt{S_{11}}} \quad , \quad Y_{2t} = \frac{(X_{2t} - \overline{X}_2)}{\sqrt{S_{22}}}$$

และ $V_{1t}^{(1)} = Y_{1t}$

$$V_{1t}^{(2)} = \frac{Y_{1t}^2 - 1}{\sqrt{2}} \quad , \quad V_{2t}^{(2)} = \frac{Y_{2t}^2 - 1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad t = 1, 2, \ldots, 20$$

จะได้ค่าดังต่อไปนี้

n	$V_{1t}^{(1)}$	$V_{2t}^{(1)}$	$V_{1t}^{(2)}$	$V_{2t}^{(2)}$
1	-0.208	-1.243	-0.677	0.385
2	0.831	-0.531	-0.219	-0.508
3	1.955	1.367	1.996	0.614
4	-0.638	1.580	-0.419	1.058
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
19	0.472	-2.007	-0.550	2.141
20	-1.209	-0.823	0.327	-0.228

คำนวณค่า r_p โดยที่

$$r_{ij}^{(a,b)} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} V_{it}^{(a)} V_{jt}^{(b)} \quad ; \quad i, j = 1,2,\ldots,p \quad ; \quad a,b = 1,2$$

$$r_p = (0.95 \;\; 0.255 \;\; 0.95 \;\; 0.515 \;\; -0.081 \;\; 0.571 \;\; 0.232 \;\; 0.064 \;\; 0.079 \;\; -0.034)'$$

$$C_p = (-0.387\ -0.147\ -0.332\ 0.232\ 0.064\ 0.079\ -0.034)'$$

$$\hat{J} = \begin{bmatrix} \hat{J}_{11} & 0 \\ 0 & I_4 \end{bmatrix}_{7X10}$$

$$\hat{J}_{11} = \begin{bmatrix} -1.90 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.511 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1.90 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

คำนวณค่า $\hat{\Lambda}$ โดยที่ $\hat{\lambda}_{ij,kl}^{(ab,cd)} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(V_{it}^{(a)}V_{jt}^{(b)} - r_{ij}^{(a,b)})(V_{kt}^{(c)}V_{lt}^{(d)} - r_{kl}^{(c,d)})$

$$\hat{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1.028 & 0.531 & -0.165 & \cdots & 0.162 \\ 0.531 & 0.672 & -0.037 & \cdots & 0.244 \\ -0.165 & -0.037 & 1.139 & \cdots & -0.380 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0.162 & 0.244 & -0.380 & \cdots & 1.276 \end{bmatrix}_{10x10}$$

คำนวณค่าสถิติทดสอบ W_0

$$\begin{aligned} W_0 &= nC_p'(\hat{J}\hat{\Lambda}\hat{J}')^{-1}C_p \\ &= 20(0.2574) \\ &= 5.194 \end{aligned}$$

3. เกณฑ์การตัดสินใจ

เปรียบเทียบค่าสถิติทดสอบ W_0 ที่คำนวณได้กับค่าวิกฤตในตาราง ข.4 (หน้า 243 ภาคผนวก ข)

3.1 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

$$W_0 = 5.149 < 28.88$$

ดังนั้นจึงยอมรับสมมติฐาน H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

3.2 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10

$$W_0 = 5.149 < 21.41$$

ดังนั้นจึงยอมรับสมมติฐาน H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10

แสดงว่าข้อมูลมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติสองตัวแปร

2.3 การสร้างตารางค่าวิกฤตของตัวสถิติทดสอบ N และตัวสถิติทดสอบ KTT

ในการวิจัยครั้งนี้เป็นการศึกษาเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร โดยจะเปรียบเทียบเฉพาะตัวสถิติที่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ ซึ่งจะทำการทดลองที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 และ 0.10 ดังนั้นการประมาณค่าวิกฤตของตัวสถิติทดสอบจึงพิจารณาจากค่าควอนไทล์ที่ 0.95 และ 0.90 ของตัวสถิติทดสอบตามลำดับ มีขั้นตอนการประมาณค่าวิกฤต ดังนี้

1. สร้างเลขสุ่มให้มีการแจกแจงปกติสองตัวแปรและสามตัวแปร ให้มีขนาดเท่ากับ 20, 30, 40, ...,100
2. คำนวณค่าตัวสถิติทดสอบ
3. ดำเนินการข้อ1 และ 2 จนครบ 15,000 ครั้ง
4. นำค่าสถิติทดสอบจำนวน 15,000 ค่า มาเรียงลำดับจากน้อยไปหามาก และคำนวณหาค่าควอนไทล์ที่ 0.90 และ 0.95

วิธีการหาค่าควอนไทล์ เป็นดังนี้

กำหนดให้ $Y_{(1)} \le Y_{(2)} \le \ldots \le Y_{(k)}$ และ j เป็นจำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุดซึ่งน้อยกว่าหรือเท่ากับ $(K+1)\alpha$ จะได้

$$\tau_\alpha = \begin{cases} Y_{(j)} + ((K+1)\alpha - j)(Y_{(j+1)} - Y_{(j)}) & ; \quad 1 < j < K \\ Y_{(1)} & ; \quad j \le 1 \\ Y_{(K)} & ; \quad j \ge K \end{cases}$$

โดยที่ α แทน ตำแหน่งของควอนไทล์ที่ต้องการหา (ในที่นี้ $\alpha = 0.90, 0.95$)

τ_α แทน ค่าของควอนไทล์ที่ α

K แทน จำนวนครั้งที่ทำซ้ำ (ในที่นี้ $K = 15{,}000$)

ดังนั้น ค่าควอนไทล์ที่ 0.90 และ 0.95 ของตัวสถิติทดสอบทั้งสองเป็นดังนี้

$$\tau_{0.90} = 0.1Y_{13500} + 0.9Y_{13501}$$

$$\tau_{0.95} = 0.05Y_{14250} + 0.95Y_{14251}$$

การประมาณค่าวิกฤตของตัวสถิติ N และตัวสถิติทดสอบ KTT มีขั้นตอนการประมาณค่าเช่นเดียวกันแต่จำนวนครั้งในการทำซ้ำของตัวสถิติทดสอบ N จะทำซ้ำจนกระทั่งค่าควอนไทล์ที่ 0.90 และ 0.95 ของตัวสถิติทดสอบลู่เข้าสู่ค่าคงที่ในตำแหน่งทศนิยมที่ 4 ส่วนจำนวนครั้งในการทำซ้ำของตัวสถิติทดสอบ KTT จะทำซ้ำจนกระทั่งค่าควอนไทล์ที่ 0.90 และ 0.95 ของตัวสถิติทดสอบลู่เข้าสู่ค่าคงที่ในตำแหน่งทศนิยมที่ 2

2.4 การแจกแจงที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยนี้ศึกษาภายใต้การแจกแจงของประชากร 4 การแจกแจง ได้แก่ การแจกแจงปกติหลายตัวแปร การแจกแจงล็อกนอร์มอลหลายตัวแปร การแจกแจงสติวเดนท์-ทีหลายตัวแปร และการแจกแจงไคสแควร์หลายตัวแปร ซึ่งแต่ละการแจกแจงมีรายละเอียดดังนี้

2.4.1 การแจกแจงปกติหลายตัวแปร (Multivariate Normal Distribution)

กำหนดให้ $\underset{\sim}{X}$ เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่มีการแจกแจงปกติหลายตัวแปรด้วยพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\mu}$ และ Σ จะได้ฟังก์ชันความหนาแน่น $\underset{\sim}{X}$ เป็นดังนี้

$$f(\underset{\sim}{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})'\Sigma^{-1}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})\right] \quad ; -\infty<\underset{\sim}{x}<\infty \ , \ \underset{\sim}{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_p)'$$

$$; -\infty<\underset{\sim}{\mu}<\infty \ , \ \Sigma>\underset{\sim}{0}$$

โดยที่ $\underset{\sim}{\mu}$ แทน เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย

Σ แทน เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม

จากตัวแปรสุ่ม $\underset{\sim}{X}$ ซึ่งมีการแจกแจงปกติหลายตัวแปรด้วยค่าเฉลี่ย $\underset{\sim}{\mu}$ ความแปรปรวนร่วม Σ สามารถแปลงตัวแปรสุ่ม $\underset{\sim}{X}$ ให้เป็นตัวแปรสุ่มใหม่ที่เป็นมาตรฐาน คือ $\underset{\sim}{Z}$ โดย $\underset{\sim}{Z}=(\Sigma^{\frac{1}{2}})^{-1}(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})$ จะได้ว่า $\underset{\sim}{Z}$ เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่มีการแจกแจงปกติหลายตัวแปรด้วยค่าเฉลี่ย $\underset{\sim}{0}$ ความแปรปรวน $\underset{\sim}{1}$ และมีฟังก์ชันความหนาแน่นอยู่ในรูป

$$f(\underset{\sim}{z}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}}\exp(-\frac{1}{2}\underset{\sim}{z}'\underset{\sim}{z})$$

และเรียกการแจกแจงของ $\underset{\sim}{Z}$ ว่าการแจกแจงปกติมาตรฐานหลายตัวแปร (Multivariate standard normal Distribution)

2.4.2 การแจกแจงล็อกนอร์มอลหลายตัวแปร(Multivariate Lognormal Distribution)*

กำหนดให้ $\underset{\sim}{X}$ เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่มีการแจกแจงปกติหลายตัวแปรด้วยพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\mu}$ และ Σ จะได้ฟังก์ชันความหนาแน่น $\underset{\sim}{X}$ เป็นดังนี้

$$f(\underset{\sim}{x}) = \frac{1}{\underset{\sim}{x}(2\pi)^{\frac{p}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\ln\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})'\Sigma^{-1}(\ln\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})\right] \quad ; \; 0<\underset{\sim}{x}<\infty \; , \; \underset{\sim}{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_p)'$$

$$; \; -\infty<\underset{\sim}{\mu}<\infty \; , \; \Sigma>\underset{\sim}{0}$$

เมื่อ $\underset{\sim}{\mu}$ และ Σ แทน เวกเตอร์ค่าเฉลี่ยและเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมตามลำดับ

2.4.3 การแจกแจงสติวเดนท์-ทีหลายตัวแปร (Multivariate Student-t Distribution) *

กำหนดให้ $\underset{\sim}{Z}$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติหลายตัวแปรด้วยพารามิเตอร์ $(\underset{\sim}{0}, \Sigma)$ และ S เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงไคสแควร์ด้วยองศาความเป็นอิสระ υ โดยที่ $\underset{\sim}{Z}$ และ S เป็นอิสระซึ่งกันและกัน จะได้ว่า $\underset{\sim}{X} = (\sqrt{S/\upsilon})^{-1}\underset{\sim}{Z}$ เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่มีการแจกแจงสติวเด้นท์-ทีหลายตัวแปรด้วยองศาความเป็นอิสระเท่ากับ υ ดังนั้นฟังก์ชันความหนาแน่นของ $\underset{\sim}{X}$ อยู่ในรูป

$$f(\underset{\sim}{x}) = \frac{\Gamma\left(\frac{\upsilon+p}{2}\right)}{(\upsilon\pi)^{\frac{p}{2}}\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}\left(1+\frac{1}{\upsilon}\underset{\sim}{x}'\Sigma^{-1}\underset{\sim}{x}\right)^{-\frac{(\upsilon+p)}{2}} \quad ; \; -\infty<\underset{\sim}{x}<\infty \; , \; \underset{\sim}{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_p)'$$

เมื่อ υ และ p แทน องศาความเป็นอิสระและจำนวนตัวแปรตามลำดับ

---

* Govind S. Mudholkar .'Shapiro-wilk test of normality',Communication Statistics-Theory and Methods.,Vol 24 (1995) : 967-968

2.4.4 การแจกแจงไคสแควร์หลายตัวแปร (Multivariate Chi-square Distribution) *

กำหนดให้ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติด้วยค่าเฉลี่ย μ ความแปรปรวน σ^2 และให้ $Z = \frac{Y-\mu}{\sigma}$ จะได้ว่า Z เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน และ $Z^2 = \frac{(Y-\mu)^2}{\sigma^2}$ จะมีการแจกแจงไคสแควร์ด้วยองศาความเป็นอิสระเท่ากับ 1

ถ้า $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ เป็นตัวแปรสุ่มขนาด n จากการแจกแจงปกติด้วยค่าเฉลี่ย μ และ ความแปรปรวน σ^2 จะได้ว่า $\sum_{i=1}^{n} \frac{(Y_i-\mu)^2}{\sigma^2}$ จะมีการแจกแจงไคสแควร์ด้วยองศาความเป็นอิสระเท่ากับ n

ถ้า $V_1, V_2, \ldots, V_p$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงไคสแควร์และมีความเป็นอิสระซึ่งกันและกันด้วยองศาความเป็นอิสระเท่ากับ $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_p$ และถ้า V เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงไคสแควร์ด้วยองศาความเป็นอิสระเท่ากับ ω ซึ่งเป็นอิสระจาก V_i กำหนดให้ $X_i = V_i + V$ เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, p$ จะได้ว่า X_i เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงไคสแควร์ p ตัวแปร ด้วยองศาความเป็นอิสระเท่ากับ $\upsilon_i + \omega$ นั่นคือ $X_1, X_2, \ldots, X_p \sim \chi^2_p(\upsilon_i + \omega)$

ดังนั้นถ้า $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2)'$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงไคสแควร์ 2 ตัวแปร ด้วยองศา ความเป็นอิสระ υ โดยที่ $\upsilon = \upsilon_1 + \omega$ (กำหนดให้ $\upsilon_1 = \upsilon_2$) จะได้ฟังก์ชันความหนาแน่นของ $\underset{\sim}{X}$ เป็น ดังนี้

$$f(\underset{\sim}{X}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}+j\right)}{\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right) j!} \rho^{2j} (1-\rho^2)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{2} \left\{ \left(\frac{X_i}{1-\rho^2}\right)^{\frac{\upsilon}{2}+j-1} \exp\left(-\frac{X_i}{1-\rho^2}\right) \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}+j\right) 2^{\frac{\upsilon}{2}+j} (1-\rho^2)} \right\} \quad ; \quad \underset{\sim}{X} > 0$$

เมื่อ υ และ ρ แทน องศาความเป็นอิสระและสหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร ตามลำดับ

---

* Govind S. Mudholkar .'Shapiro-wilk test of normality'.Communication Statistics-Theory and Methods.,Vol 24 (1995) : 967-968