# บทที่ 3

# การควบคุมแบบเจนเนริกโมเดลและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

## 3.1 การควบคุมแบบเจนเนริกโมเดล (Generic Model Control)

จีเอ็มซีถูกนำเสนอครั้งแรกโดย Lee และ Sullivan (1988) เป็นการควบคุมที่ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของกระบวนการในการคำนวณค่าตัวแปรปรับโดยตรง ซึ่งแบบจำลองที่ใช้จะเป็นแบบจำลองเชิงเส้นหรือไม่เป็นเชิงเส้นก็ได้ ในกรณีที่แบบจำลองไม่เป็นเชิงเส้นก็สามารถนำมาใช้ได้เลยมิต้องผ่านการทำให้เป็นเชิงเส้นเสียก่อน นอกจากนี้แล้วจีเอ็มซีสามารถกำหนดลักษณะผลตอบสนองของตัวแปรควบคุมได้ตามต้องการโดยการปรับจูนค่าพารามิเตอร์ในการควบคุมเพียงสองตัวด้วยวิธีการที่ง่ายไม่ซับซ้อน ดังนั้นจีเอ็มซีจึงถูกนำไปประยุกต์ใช้ในกระบวนการทางเคมีมากมาย เช่นประยุกต์ใช้สำหรับการควบคุมเครื่องทำให้กลายเป็นไอ โดย Newell และคณะ (1989), การควบคุมหอกลั่นโดย Rani และ Gangiah (1991) และการควบคุมอุณหภูมิภายในเครื่องปฏิกรณ์โดย Cott และ Macchietto (1989)

พิจารณาถ้าให้แบบจำลองของกระบวนการโดยทั่วไปอยู่ในรูปต่อไปนี้

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x)u \tag{3.1}$$

$$y = h(x) \tag{3.2}$$

โดยที่ $x$ คือตัวแปรสเตท

$u$ คือตัวแปรปรับ

$y$ คือตัวแปรควบคุม

กำหนดอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรควบคุมที่ต้องการผ่านสมการต่อไปนี้

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^d = k_1(y^{sp} - y) + k_2 \int (y^{sp} - y)dt \tag{3.3}$$

โดย $\left(\frac{dy}{dt}\right)^d$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรควบคุมที่ต้องการ

$k_1$ และ $k_2$ คือค่าคงที่ของ GMC

$y^{sp}$ คือค่าเป้าหมายของตัวแปรควบคุม

ค่าตัวแปรปรับจะสามารถคำนวณได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

จาก (3.2) ได้

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial h(x)}{\partial x}\frac{dx}{dt} \tag{3.4}$$

โดยทั่วไปแล้ว $h(x) = x$

ทำให้ $\frac{\partial h(x)}{\partial x} = 1$

ดังนั้นสมการที่ (3.4) จะลดรูปลงเป็นสมการต่อไปนี้

$$\frac{dy}{dt} = f(x) + g(x)u \tag{3.5}$$

เมื่อต้องการให้อัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรควบคุมเป็นไปตามที่กำหนด สิ่งที่ต้องการคือ

ให้

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{dy}{dt}\right)^d \tag{3.6}$$

จะได้

$$k_1(y^{sp} - y) + k_2 \int (y^{sp} - y)dt = f(x) + g(x)u \tag{3.7}$$

ในที่สุดจะได้สมการสำหรับคำนวณค่าตัวแปรปรับคือ

$$u = \frac{[k_1(y^{sp} - y) + k_2 \int (y^{sp} - y)dt - f(x)]}{g(x)} \tag{3.8}$$

โดยปกติแล้วในการที่จะนำจีเอ็มซีไปประยุกต์ใช้กับระบบใดก็ตาม ไพศาล (2542) อ้างว่ามีสิ่งที่ต้องตรวจสอบอยู่ ดังนี้

- ตรวจสอบว่าระบบดังกล่าวมีค่าระดับสัมพัทธ์เป็นหนึ่งหรือไม่ : ดังที่ได้กล่าวถึงในตอนต้นแล้วว่าจีเอ็มซีเป็นการควบคุมสำหรับระบบที่มีค่าระดับสัมพัทธ์เป็นหนึ่งเท่านั้น ถ้ามีระดับสัมพัทธ์มากกว่าหนึ่งแล้วจะไม่สามารถประยุกต์ใช้จีเอ็มซีได้ อย่างไรก็ตามในงานวิจัยนี้จะแสดงให้เห็นในหัวข้อต่อไปว่าจะมีวิธีการอย่างไรในการทำให้สามารถประยุกต์ใช้จีเอ็มซีกับระบบที่มีค่าระดับสัมพัทธ์มากกว่าหนึ่งได้

- ตรวจสอบซีโรส์ไดนามิกส์ (Zeros Dynamics) : ซีโรส์ไดนามิกส์หมายถึง อินเทอร์นัลไดนามิกส์(Internal Dynamics)หรือไดนามิกส์ของตัวแปรสเตทอื่นที่นอกเหนือจากตัวแปรควบคุมในสภาวะที่ตัวแปรควบคุมถูกควบคุมให้อยู่ในค่าเป้าหมายที่ต้องการ นั่นคือตัวแปรควบคุมจะมีค่าเท่ากับศูนย์ (ในรูปของค่าเบี่ยงเบน) ซึ่งจะเป็นการบอกได้ว่ากระบวนการที่ถูกควบคุมนั้นมีเสถียรภาพหรือไม่เมื่อตัวแปรควบคุมถูกควบคุมให้อยู่ในค่าเป้าหมายที่ต้องการ

## 3.2 การคำนวณค่าคงที่ของตัวควบคุมแบบเจนเนริกโมเดล

การคำนวณค่าคงที่ของจีเอ็มซีนั้นสามารถทำได้ง่ายโดยการคำนวณค่าคงที่เพียงสองตัวคือ $k_1$ และ $k_2$ เพื่อให้ได้ลักษณะผลตอบสนองของตัวแปรควบคุมตามต้องการ ซึ่งจากสมการที่ (3.3) ซึ่งเป็นสมการที่กำหนดอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรควบคุมที่ต้องการ ดังนี้

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^d = k_1(y^{sp} - y) + k_2 \int (y^{sp} - y)dt \tag{3.3}$$

ทรานส์ฟอร์มสมการ (3.3) ให้อยู่ในรูปลาปลาซโดเมนได้

$$sy = k_1(y^{sp}(s) - y(s)) + k_2 \frac{1}{s}(y^{sp}(s) - y(s)) \tag{3.9}$$

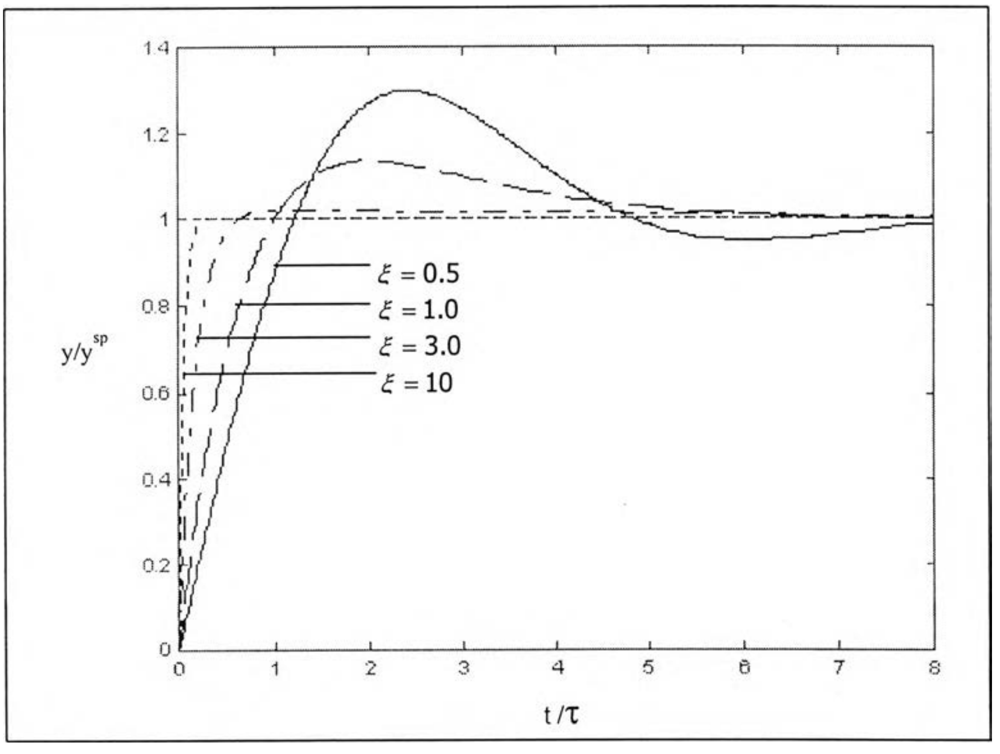
$$(s + k_1 + k_2 \frac{1}{s})y(s) = (k_1 + k_2 \frac{1}{s})y^{sp}(s) \tag{3.10}$$

$$\frac{y(s)}{y^{sp}(s)} = \frac{k_1 s + k_2}{s^2 + k_1 s + k_2} \tag{3.11}$$

กำหนดให้ $k_1 = \frac{2\xi}{\tau}$ และ $k_2 = \frac{1}{\tau^2}$ จากนั้นแทนค่าดังกล่าวลงในสมการที่ (3.11) ได้

$$\frac{y(s)}{y^{sp}(s)} = \frac{2\xi\tau s + 1}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \tag{3.12}$$

สมการที่ (3.12) มีลักษณะคล้ายกับระบบอันดับที่ 2 ที่กล่าวถึงโดย Stephanopoulos (1984) ที่มี $\tau$ แสดงถึงช่วงเวลาการแกว่งตามธรรมชาติของระบบ (Natural Period of Oscillation of the System ) และ $\xi$ แสดงถึงสัมประสิทธิ์แดมปิง (Damping Factor) ซึ่ง Lee และ Sullivan (1988)ได้ให้ลักษณะของผลตอบสนองของระบบซึ่งเป็นความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{y}{y^{sp}}$ และ $\frac{t}{\tau}$ ตามสมการที่ (3.12) ไว้ในรูปที่ 3.1




**รูปที่ 3.1** รูปแสดงลักษณะผลตอบสนองของตัวควบคุมจีเอ็มซีที่ค่า $\xi$ ต่างๆกัน

**ขั้นตอนในการคำนวณค่าคงที่เพื่อให้ได้ผลตอบสนองที่ต้องการมีดังนี้**

1. เลือก $\xi$ จากรูปข้างบนเพื่อให้ได้ลักษณะผลตอบสนองที่ต้องการ
2. กำหนด $\tau$ เพื่อให้ได้จังหวะเวลาที่เหมาะสมที่สอดคล้องกับความเร็วของผลตอบสนองของกระบวนการ
3. คำนวณค่า $k_1$ และ $k_2$ จากสมการต่อไปนี้

$$k_1 = \frac{2\xi}{\tau} \qquad k_2 = \frac{1}{\tau^2} \tag{3.13}$$

## 3.3 ระดับสัมพัทธ์ (Relative Degree)

ระดับสัมพัทธ์ที่กล่าวถึงโดย Kravaris และ Kantor (1990) นั้นแยกเป็นสองกรณีคือในกรณีของระบบเชิงเส้นและระบบไม่เชิงเส้น พิจารณาระบบที่มีหนึ่งตัวแปรเข้าและหนึ่งตัวแปรออกที่ไม่เป็นเชิงเส้นโดยทั่วไปต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)u \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) + g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)u \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) + g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)u \\
y &= h(x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

ซึ่งเป็นระบบที่มีตัวแปรสเตทอยู่ n ตัว ระบบในสมการที่ (3.14) นี้เมื่อเขียนใหม่จะมีลักษณะเหมือนกับในสมการที่ (3.1) และ (3.2) นั่นเอง

### 3.3.1 ระดับสัมพัทธ์ของระบบเชิงเส้น

ในกรณีของระบบเชิงเส้นโดยแทน $f(x) = Ax$ , $g(x) = b$ และ $h(x) = cx$ ในสมการที่ (3.1) และ (3.2) แล้วจะได้

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu \tag{3.15}$$

$$y = cx \tag{3.16}$$

เมื่อ $A$ , $b$ และ $c$ คือเมตริกซ์ขนาด n x n , n x1 และ 1x n ตามลำดับ ซึ่งเมื่อเขียนให้อยู่ในรูปของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชั่นจะได้คือ

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{c\,Adj(sI - A)\,b}{\det(sI - A)} = c\,(sI - A)^{-1}\,b \tag{3.17}$$

ซึ่งเมื่อเขียนกระจายพจน์ในรูปอนุกรมแล้วจะได้

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{cb}{s} + \frac{cAb}{s^2} + \frac{cA^2b}{s^3} + \cdots \tag{3.18}$$

ปริมาณ $cb, cAb, cA^2b, \ldots, cA^{k-1}b, \ldots$, เรียกว่า พารามิเตอร์มาร์คอฝ (Markov parameter) ของระบบ จากสมการที่ (3.14) นั้นอันดับของตัวหาร $\det(sI - A)$ จะมีค่าเป็น n เสมอ ในขณะที่อันดับของตัวเศษ $c\,Adj(sI - A)b$ จะมีค่าได้ตั้งแต่ศูนย์ถึง n-1 ซึ่งค่าระดับสัมพัทธ์ของระบบเชิงเส้นนี้ก็คือผลต่างของอันดับของตัวหารกับอันดับของตัวเศษในทรานส์เฟอร์ฟังก์ชั่นของระบบนั้นเอง นอกจากนี้แล้วถ้าจะพิจารณาในแง่ของพารามิเตอร์มาร์คอฝแล้วจะได้ว่า

*ระดับสัมพัทธ์ของระบบเชิงเส้นในสมการที่ (3.15) และ (3.16) ก็คือจำนวนเต็ม r ที่น้อยที่สุดที่ทำให้* $cA^{r-1}b \neq 0$

จากข้อความข้างบนนี้ระบบจะมีระดับสัมพัทธ์เป็นหนึ่งเมื่อ $cb \neq 0$ , มีระดับสัมพัทธ์เป็นสองเมื่อ $cb = 0$ และ $cAb \neq 0$ , มีระดับสัมพัทธ์เป็นสามเมื่อ $cb = cAb = 0$ และ $cA^2b \neq 0$

เหล่านี้เป็นต้น นอกจากนี้ถ้าพิจาณาระดับสัมพัทธ์จากผลต่างของอันดับของตัวหารกับอันดับของตัวเศษในทรานส์เฟอร์ฟังก์ชั่นของระบบแล้วจะพบว่า $1 \le r \le n$ เท่านั้น

ในกรณีที่จะพิจารณาถึงค่าระดับสัมพัทธ์ของระบบเชิงเส้นในอีกลักษณะหนึ่งนั้น สามารถแสดงให้เห็นในรูปอนุพันธ์ของตัวแปรออก (ตัวแปรควบคุม) โดยถ้าระบบในสมการที่ (3.15) และ (3.16) มีค่าระดับสัมพัทธ์เป็น $r$ แล้วจะได้

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= cAx \\ &\vdots \\ \frac{d^{r-1}y}{dt^{r-1}} &= cA^{r-1}x \\ \frac{d^{r}y}{dt^{r}} &= cA^{r}x + cA^{r-1}bu \end{aligned} \tag{3.19}$$

*จากสมการที่ (3.19) จะได้ว่า $r$ ก็คืออันดับที่น้อยที่สุดของอนุพันธ์ของตัวแปรออกหรือตัวแปรควบคุมที่แสดงให้เห็นถึงการมีค่าขึ้นอยู่กับตัวแปรเข้าหรือตัวแปรปรับอย่างเด่นชัด*

จากข้อความข้างบนนี้ถ้าจะกล่าวให้ง่ายขึ้นก็คือ ค่าของระดับสัมพัทธ์ของระบบเชิงเส้นก็คืออันดับของอนุพันธ์ของตัวแปรออกหรือตัวแปรควบคุมที่ทำให้ปรากฏพจน์ของตัวเข้าหรือตัวแปรปรับขึ้นมานั่นเอง

**ตัวอย่างที่ 3.1 แสดงการหาค่าระดับสัมพัทธ์ของระบบเชิงเส้น**

ระบบเชิงเส้นหนึ่งสามารถเขียนแทนได้ด้วย

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - x_2 \end{aligned} \tag{3.20}$$

โดยที่ $x_1$ และ $x_2$ เป็นตัวแปรสเตทของระบบ
$u$ เป็นตัวแปรปรับของระบบ

เมื่อเทียบกับระบบในสมการที่ (3.15) จะได้

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad b=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

<u>กรณีแรก</u> ให้ตัวแปรควบคุม $y = x_1$ ดังนั้นจะได้ $c = [1 \quad 0]$

พิจารณาระดับสัมพัทธ์จากผลต่างของอันดับของตัวหารกับอันดับของตัวเศษในทรานส์เฟอร์ฟังก์ชั่นตามสมการที่ (3.17) จะได้

$$c(sI-A)^{-1}b=\frac{s+1}{s^2+s-2} \tag{3.21}$$

พิจารณาระดับสัมพัทธ์จากพารามิเตอร์มาร์คอฝจะได้

$$cb=1 \tag{3.22}$$

จากสมการที่ (3.21) และ(3.22) ทำให้สรุปได้ว่าระบบในสมการที่ (3.17) ที่มีตัวแปรควบคุมคือ $x_1$ นั้นมีค่าระดับสัมพัทธ์เท่ากับหนึ่ง

<u>กรณีที่สอง</u> ให้ตัวแปรควบคุม $y = x_2$ ดังนั้นจะได้ $c = [0 \quad 1]$

พิจารณาระดับสัมพัทธ์จากผลต่างของอันดับของตัวหารกับอันดับของตัวเศษในทรานส์เฟอร์ฟังก์ชั่นตามสมการที่ (3.17) จะได้

$$c(sI-A)^{-1}b=\frac{2}{s^2+s-2} \tag{3.23}$$

พิจารณาระดับสัมพัทธ์จากพารามิเตอร์มาร์คอฝจะได้

$$cb=0 \quad \text{และ} \quad cAb=2 \tag{3.24}$$

จากสมการที่ (3.23) และ(3.24) ทำให้สรุปได้ว่าระบบในสมการที่ (3.20) ที่มีตัวแปรควบคุมคือ $x_2$ นั้นมีค่าระดับสัมพัทธ์เท่ากับสอง

### 3.3.2 ระดับสัมพัทธ์ของระบบไม่เชิงเส้น

ระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นตามสมการที่ (3.1) และ (3.2)

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x)u \tag{3.1}$$

$$y = h(x) \tag{3.2}$$

เนื่องจาก $f(x)$ และ $g(x)$ มีลักษณะเป็นฟังก์ชั่นเวกเตอร์ดังนั้นการทำความเข้าใจเกี่ยวกับค่าระดับสัมพัทธ์ของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นนี้จึงจำเป็นต้องอาศัยความรู้เกี่ยวกับพีชคณิตทางเรขาคณิตมาใช้ โดย Kravaris และ Kantor (1990) ได้แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างไลแอลจีบรา (Lie Algebra)ในระบบไม่เชิงเส้น และ เมตริกซ์แอลจีบราในระบบเชิงเส้น โดยไลแอลจีบราที่ใช้ในที่นี้ก็คือไลเดอริวาทีฟ (Lie Derivative)

**ไลเดอริวาทีฟ** ตัวดำเนินการไลเดอริวาทีฟเป็นอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งเชิงเส้นที่นิยามไว้ดังนี้

$$L_f = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{3.25}$$

โดยไลเดอริวาทีฟของฟังก์ชั่น $h(x)$ ซึ่งเป็นสเกลล่าร์ที่เทียบกับเวกเตอร์ $f(x)$ จะเขียนได้คือ

$$L_f h(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} \tag{3.26}$$

นั่นคือ

$$L_f h(x_1,\ldots,x_n) = (\frac{\partial h}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial h}{\partial x_n}) \begin{pmatrix} f_1(x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1,\ldots,x_n) \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

ซึ่งจะกล่าวได้ว่าไลเดอริวาทีฟในสมการที่ (3.26) และ (3.27) ก็คือการอนุพันธ์ไปตามทิศทางของฟังก์ชั่น $h(x)$ ในทิศทางของเวกเตอร์ $f(x)$ นั่นเอง

สมบัติบางประการของตัวดำเนินการไลเดอริวาทีฟ เมื่อ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นเวกเตอร์ $h(x)$ และ $t(x)$ เป็นสเกลล่าร์ มีดังนี้

$$L_f(h+t) = L_f h + L_f t \tag{3.28}$$

$$L_f(ht) = h L_f t + t L_f h \tag{3.29}$$

$$L_{f+g} = L_f + L_g \tag{3.30}$$

$$L_{hf} = h L_f \tag{3.31}$$

นอกจากนี้แล้ว ตัวดำเนินการไลเดอริวาทีฟยังสามารถทำการประสมกันได้ระหว่างไลเดอริวาทีฟที่ต่างกันสองตัว เช่น $L_g$ และ $L_f$ ซึ่งจะทำให้ได้อนุพันธ์ย่อยเชิงเส้นอันดับที่สองดังนี้

$$L_g L_f = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left[ g_j(x) f_i(x) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} + g_j(x) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \tag{3.32}$$

ซึ่ง $L_g L_f$ ของฟังก์ชั่น $h(x)$ ก็คือการอนุพันธ์ตามทิศทางของฟังก์ชั่น $h(x)$ ในทิศทางของเวกเตอร์ $f(x)$ จากนั้นทำต่อในทิศทางของเวกเตอร์ $g(x)$ จะได้

$$L_g L_f h(x) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x) \frac{\partial (L_f h)}{\partial x_j}(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left[ g_j(x) f_i(x) \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i} + g_j(x) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) \right] \tag{3.33}$$

ในขณะที่การประสมกันของตัวดำเนินการไลเดอริวาทีฟที่เทียบกับเวกเตอร์ที่เหมือนกันจะได้ดังนี้

$$\begin{aligned} L_f^{\,2} &= L_f L_f \\ L_f^{\,3} &= L_f L_f^{\,2} \\ &\vdots \\ L_f^{\,k} &= L_f L_f^{\,k-1} \end{aligned} \tag{3.34}$$

เมื่อพิจารณาถึงระดับสัมพัทธ์ของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นแล้ว จะได้ว่า

*ระดับสัมพัทธ์ของระบบที่มีความไม่เป็นเชิงเส้นโดยทั่วไปตามสมการ (3.1) และ (3.2) นั้นก็คือจำนวนเต็ม $r$ ที่น้อยที่สุดที่ทำให้* $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$

ตามข้อความข้างบน ระบบที่ไม่เชิงเส้นตามสมการที่ (3.1) และ (3.2) นั้นจะมีระดับสัมพัทธ์เป็นหนึ่งเมื่อ $L_g h(x) \neq 0$, มีระดับสัมพัทธ์เป็นสองเมื่อ $L_g h(x) = 0$ แต่ $L_g L_f h(x) \neq 0$, และมีระดับสัมพัทธ์เป็นสามเมื่อ $L_g h(x) = 0$ และ $L_g L_f h(x) = 0$ แต่ $L_g L_f^2 h(x) \neq 0$ เหล่านี้เป็นต้นส่วนในกรณีที่จะพิจารณาถึงค่าระดับสัมพัทธ์ของระบบไม่เชิงเส้นในอีกลักษณะหนึ่งนั้นสามารถแสดงให้เห็นในรูปอนุพันธ์ของตัวแปรออก (ตัวแปรควบคุม) เช่นเดียวกับในกรณีของระบบเชิงเส้น โดยถ้าระบบในสมการที่ (3.1) และ (3.2) มีค่าระดับสัมพัทธ์เป็น $r$ แล้วจะได้

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= L_f h(x) \\
\frac{d^2 y}{dt^2} &= L_f^2 h(x) \\
&\vdots \\
\frac{d^{r-1} y}{dt^{r-1}} &= L_f^{r-1} h(x) \\
\frac{d^r y}{dt^r} &= L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x) u
\end{aligned} \tag{3.35}$$

*จากสมการที่ (3.35) จะได้ว่า $r$ ก็คืออันดับที่น้อยที่สุดของอนุพันธ์ของตัวแปรออกหรือตัวแปรควบคุมที่แสดงให้เห็นถึงการมีค่าขึ้นอยู่กับตัวแปรเข้าหรือตัวแปรปรับอย่างเด่นชัด*

จากข้อความข้างบนนี้ถ้าจะกล่าวให้ง่ายขึ้นก็คือ ค่าของระดับสัมพัทธ์ของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นก็คืออันดับของอนุพันธ์ของตัวแปรออกหรือตัวแปรควบคุมที่ทำให้ปรากฏพจน์ของตัวเข้าหรือตัวแปรปรับขึ้นมานั่นเอง และนอกจากนี้แล้วช่วงของค่าระดับสัมพัทธ์ในระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นนี้ก็มีลักษณะเช่นเดียวกับระบบเชิงเส้น นั่นคือ $1 \leq r \leq n$ เมื่อ $n$ คือจำนวนสเตทในระบบนั้น

**ตัวอย่างที่ 3.2 แสดงการหาค่าระดับสัมพัทธ์ของระบบไม่เชิงเส้น**

ระบบไม่เชิงเส้นหนึ่งสามารถเขียนแทนได้ด้วย

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u \qquad (3.36)$$

โดยที่ $x_1$ และ $x_2$ เป็นตัวแปรสเตทของระบบ

$u$ เป็นตัวแปรปรับของระบบ

ซึ่ง $f_1$, $f_2$ และ $g_2$ ต่างก็มีค่าไม่เท่ากับศูนย์

<u>กรณีแรก</u> ให้ตัวแปรควบคุม $y = x_2$ ดังนั้นจะได้ $h(x) = x_2$

ได้
$$L_g h(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial h(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g_2 \end{bmatrix}$$
$$= g_2 \qquad (3.37)$$

จากสมการที่ (3.37) ทำให้สรุปได้ว่าระบบในสมการที่ (3.36) ที่มีตัวแปรควบคุมคือ $x_2$ นั้นมีค่าระดับสัมพัทธ์เท่ากับหนึ่ง

<u>กรณีที่สอง</u> ให้ตัวแปรควบคุม $y = x_1$ ดังนั้นจะได้ $h(x) = x_1$

ได้
$$L_g h(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial h(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g_2 \end{bmatrix}$$
$$= 0 \qquad (3.38)$$

$$L_f h(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial h(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$
$$= f_1 \qquad (3.39)$$

และ
$$L_g L_f h(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g_2 \end{bmatrix}$$
$$= g_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \qquad (3.40)$$

จากสมการที่ (3.38), (3.39) และ(3.40) ทำให้สรุปได้ว่าระบบในสมการที่ (3.36) ที่มีตัวแปรควบคุมคือ $x_1$ นั้นมีค่าระดับสัมพัทธ์เท่ากับสอง

## 3.4 การประยุกต์ใช้ตัวควบคุมแบบจีเอ็มซีกับระบบที่มีระดับสัมพัทธ์มากกว่าหนึ่ง

ระบบที่มีระดับสัมพัทธ์มากกว่าหนึ่งคือระบบที่สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งของตัวแปรควบคุมไม่ปรากฏพจน์ของตัวแปรปรับอยู่ ดังนั้นการนำตัวควบคุมแบบจีเอ็มซีซึ่งใช้ได้เฉพาะกับระบบที่มีระดับสัมพัทธ์เท่ากับหนึ่งนั้นมาใช้ควบคุมระบบดังกล่าวจึงไม่สามารถทำได้ อย่างไรก็ตามเพื่อเป็นการเพิ่มขอบเขตการใช้งานของตัวควบคุมแบบจีเอ็มซีให้สามารถใช้กับระบบที่มีระดับสัมพัทธ์มากกว่าหนึ่งได้ด้วย ในงานวิจัยนี้ใช้เทคนิคในการควบคุมตัวแปรสเตทซึ่งมีผลต่อการเปลี่ยนแปลงค่าตัวแปรควบคุม (ตัวแปรควบคุมภายใน) เพื่อใช้กับการควบคุมแบบจีเอ็มซี พิจารณาระบบที่มีค่าระดับสัมพัทธ์เป็นสองตามตัวอย่างข้างล่าง

**ตัวอย่างที่ 3.3 ตัวอย่างการใช้จีเอ็มซีควบคุมระบบที่มีค่าระดับสัมพัทธ์สอง**

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{3.41}$$

โดยที่ $x_1$ และ $x_2$ แทนตัวแปรสเตทของระบบ

$u$ แทนตัวแปรเข้าหรือตัวแปรปรับของระบบ

$y$ แทนตัวแปรควบคุมของระบบ

จากตัวอย่างของระบบข้างต้นจะเห็นว่าไม่สามารถใช้หลักการของการควบคุมแบบจีเอ็มซีมาควบคุมได้เพราะสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งของตัวแปรควบคุมไม่ปรากฏพจน์ของตัวแปรปรับอยู่ อย่างไรก็ตามในกรณีของระบบที่มีระดับสัมพัทธ์มากกว่าหนึ่งนั้นย่อมจะต้องมีตัวแปรสเตทมากกว่าหนึ่งตัวด้วยเช่นกัน โดยตัวแปรสเตทเหล่านั้นจะมีผลกระทบซึ่งกันและกัน ยกตัวอย่างเช่นถ้าค่าของตัวแปรหนึ่งสูงขึ้นอีกตัวก็จะมีค่าสูงตาม หรือถ้าค่าของตัวแปรหนึ่งสูงขึ้นจะทำให้ค่าของอีกตัวต่ำลง เมื่อเป็นดังนี้แล้วการที่จะปรับเปลี่ยนค่าตัวแปรสเตทหนึ่งก็อาจทำได้โดยการทำให้ค่าตัวแปรสเตทอีกตัวสูงขึ้นหรือต่ำลง ซึ่งลักษณะเช่นนี้เองจึงใช้วิธีควบคุมตัวแปรสเตทอื่นที่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงค่าของตัวแปรควบคุม

ซึ่งในที่นี้จะให้ $x_2 \rightarrow y'$ เมื่อ $y'$ คือตัวแปรควบคุมภายใน

จากนั้นแทนค่าตัวแปรควบคุมภายในที่ปรากฏในสมการอนุพันธ์ของตัวแปรควบคุมด้วยค่าเป้าหมายของตัวแปรควบคุมภายใน $y'^{sp}$ จะได้

$$\frac{dy}{dt} = f_1(x_1, y'^{sp}) = \left(\frac{dy}{dt}\right)^d \tag{3.42}$$

เมื่อ

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^d = k_{11}(y^{sp} - y) + k_{12}\int(y^{sp} - y)dt \tag{3.43}$$

ซึ่งจะแก้สมการหาค่าเป้าหมายของตัวแปรควบคุมภายในนี้ออกมาได้โดยที่ค่าเป้าหมายนี้ก็คือ ค่าเป้าหมายของ $x_2$ นั่นเอง จะได้ $y'^{sp} \rightarrow x_2^{sp}$

จากนั้นทำการควบคุมตัวแปรควบคุมภายใน $x_2$ นั่นคือ

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u = \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^d \tag{3.44}$$

เมื่อ

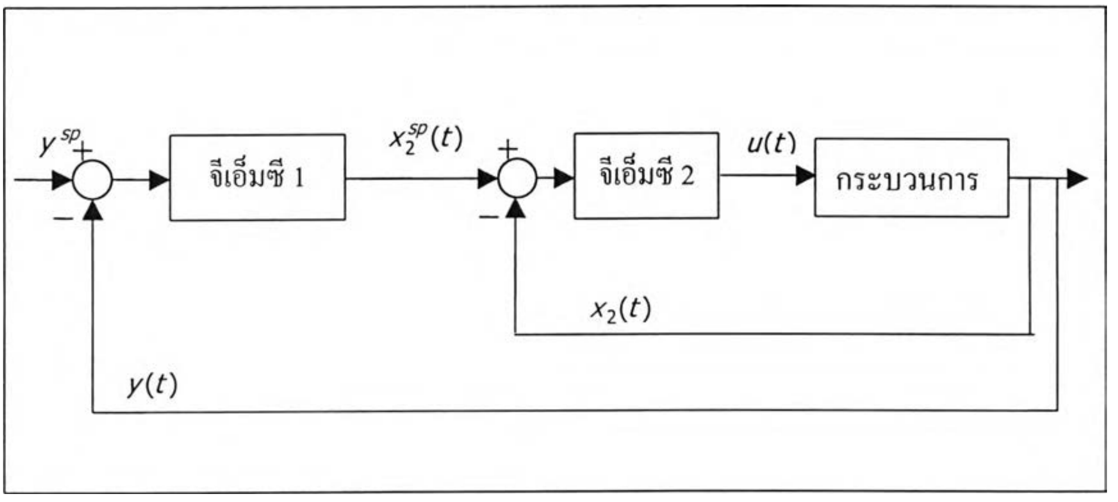
$$\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^d = k_{21}(x_2^{sp} - x_2) + k_{22}\int(x_2^{sp} - x_2)dt \tag{3.45}$$

จะได้

$$u = \frac{\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^d - f_2(x_1, x_2)}{g_2(x_1, x_2)} \tag{3.46}$$

ซึ่งจะแก้สมการหาค่าตัวแปรปรับที่เหมาะสมออกมาได้ ดังนั้นในกรณีที่ระบบที่ต้องการควบคุมมีค่าระดับสัมพัทธ์มากกว่าหนึ่ง สิ่งที่ต้องพิจารณาก็คือ สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งของตัว

แปรควบคุมภายในนั้นมีระดับสัมพัทธ์เป็นหนึ่งเมื่อเทียบกับตัวแปรปรับหรือเปล่า ถ้าใช่ก็สามารถใช้หลักการของการควบคุมแบบจีเอ็มซีมาคำนวณหาค่าตัวแปรปรับที่เหมาะสมนั้นได้โดยตรงเลย มิฉะนั้นแล้วก็ต้องหาตัวแปรควบคุมภายในอีกตัวมาทำหน้าที่เป็นตัวแปรควบคุมภายในให้กับตัวแปรควบคุมภายในตัวแรกอีกที ทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆจนกว่าสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งของตัวแปรควบคุมภายในนั้นจะปรากฏพจน์ของตัวแปรปรับขึ้น หรือจนกว่าตัวแปรควบคุมภายในนั้นจะมีระดับสัมพัทธ์เป็นหนึ่งเมื่อเทียบกับตัวแปรปรับ




**รูปที่ 3.2** แผนรูปภาพสำหรับการใช้จีเอ็มซีควบคุมระบบตามตัวอย่างที่ 3.3

จากตัวอย่างที่ผ่านมาพอจะสรุปการใช้จีเอ็มซีกับระบบที่มีค่าระดับสัมพัทธ์ต่างๆกันได้ดังนี้

## ระบบที่มีค่าระดับสัมพัทธ์หนึ่ง

กำหนดให้ $y$ เป็นตัวแปรควบคุมของระบบ

จำนวนตัวแปรสเตทในระบบเท่ากับหนึ่ง

จะได้ตัวอย่างระบบที่มีค่าระดับสัมพัทธ์หนึ่งคือ

$$\dot{y} = f(y) + g(y)u \tag{3.47}$$

## ระบบที่มีค่าระดับสัมพัทธ์สอง

กำหนดให้ $y$ เป็นตัวแปรควบคุมของระบบ

$y'$ เป็นตัวแปรควบคุมภายในของระบบ

จำนวนตัวแปรสเตทในระบบเท่ากับสอง

จะได้ตัวอย่างระบบที่มีค่าระดับสัมพัทธ์สองคือ

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f_1(y, y') \\ \dot{y}' &= f_2(y, y') + g(y, y')u \end{aligned} \tag{3.48}$$

## ระบบที่มีค่าระดับสัมพัทธ์สาม

กำหนดให้ $y$ เป็นตัวแปรควบคุมของระบบ

$y'$ เป็นตัวแปรควบคุมภายในอันดับหนึ่งของระบบ

$y''$ เป็นตัวแปรควบคุมภายในอันดับสองของระบบ

จำนวนตัวแปรสเตทในระบบเท่ากับสาม

จะได้ตัวอย่างระบบที่มีค่าระดับสัมพัทธ์สามคือ

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f_1(y, y', y'') \\ \dot{y}' &= f_2(y, y', y'') \\ \dot{y}'' &= f_3(y, y', y'') + g(y, y', y'')u \end{aligned} \tag{3.49}$$

**ระบบที่มีค่าระดับสัมพัทธ์ n**

กำหนดให้ $y$ เป็นตัวแปรควบคุมของระบบ

$y'$ เป็นตัวแปรควบคุมภายในอันดับหนึ่งของระบบ

$y''$ เป็นตัวแปรควบคุมภายในอันดับสองของระบบ

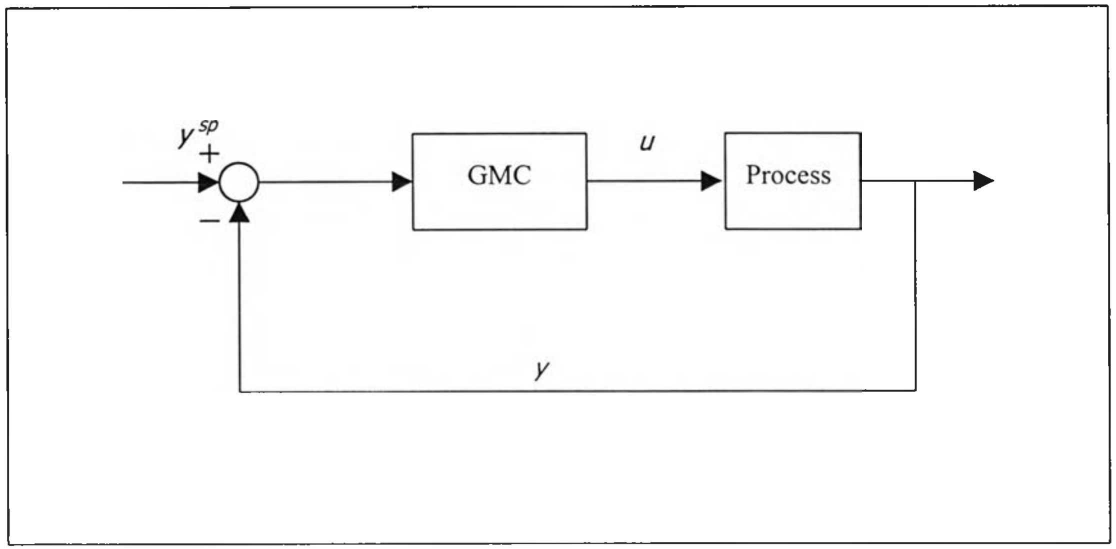
$\vdots$

$y^{n-1}$ เป็นตัวแปรควบคุมภายในอันดับ n-1 ของระบบ

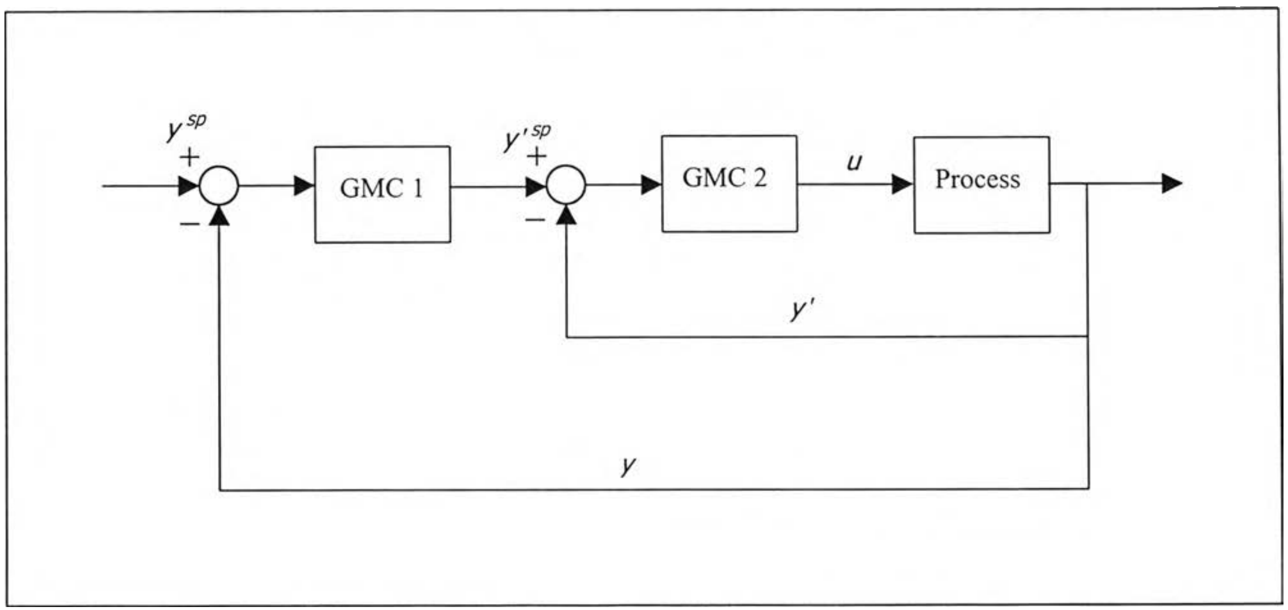
จำนวนตัวแปรสเตทในระบบเท่ากับ n

จะได้ตัวอย่างระบบที่มีค่าระดับสัมพัทธ์ n คือ

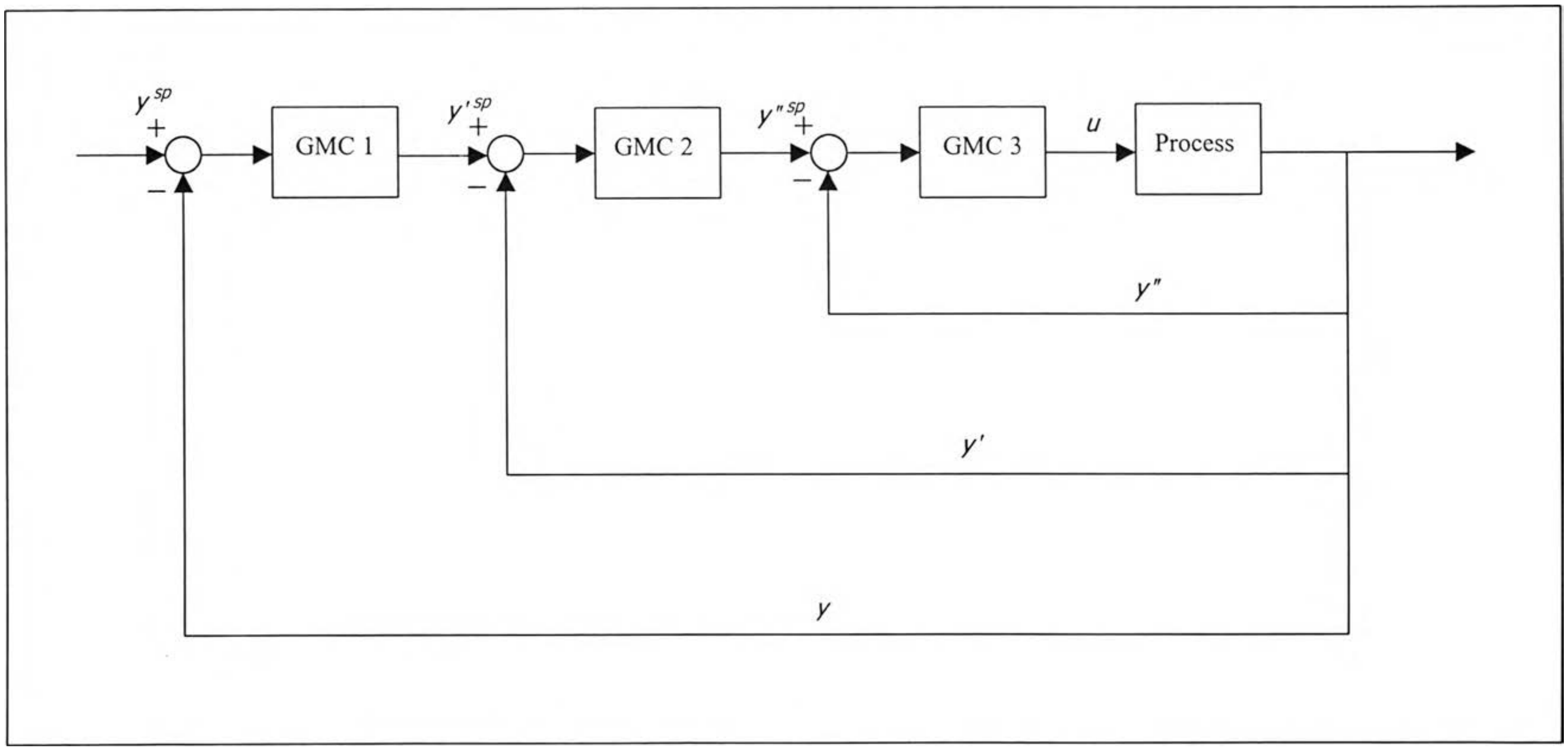
$$
\begin{aligned}
\dot{y} &= f_1(y, y', y'', \dots, y^{n-1}) \\
\dot{y}' &= f_2(y, y', y'', \dots, y^{n-1}) \\
\dot{y}'' &= f_3(y, y', y'', \dots, y^{n-1}) \\
&\vdots \\
\dot{y}^{n-1} &= f_n(y, y', y'', \dots, y^{n-1}) + g(y, y', y'', \dots, y^{n-1})u
\end{aligned} \tag{3.50}
$$



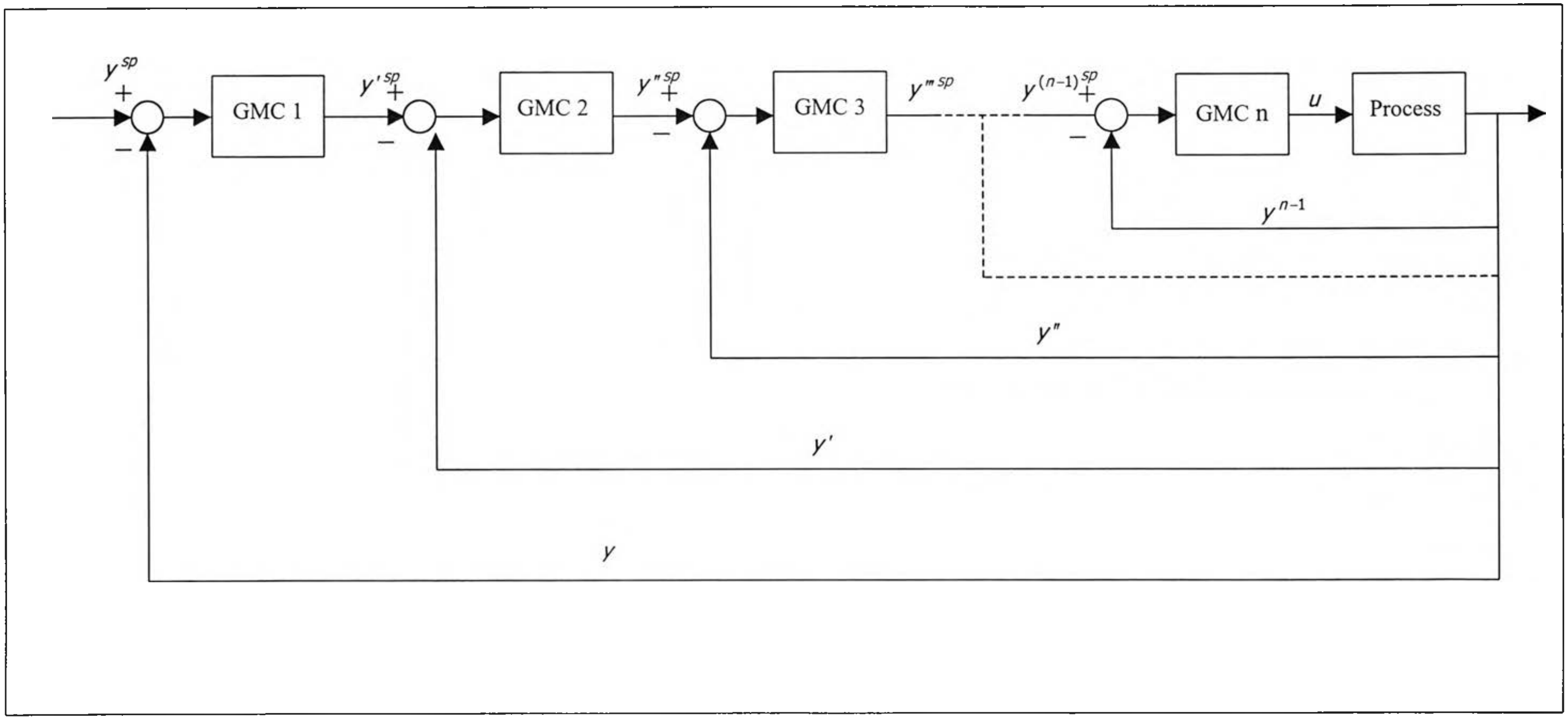

**รูปที่ 3.3** การใช้จีเอ็มซีกับระบบที่มีค่าระดับสัมพัทธ์หนึ่ง




**รูปที่ 3.4** การใช้จีเอ็มซีกับระบบที่มีค่าระดับสัมพัทธ์สอง




**รูปที่ 3.5** การใช้จีเอ็มซีกับระบบที่มีค่าระดับสัมพัทธ์สาม




**รูปที่ 3.6** การใช้จีเอ็มซีกับระบบที่มีค่าระดับสัมพัทธ์ n

## 3.5 การควบคุมแบบโกลบอลลีลิเนียไรซิ่ง(Globally Linearzing Control)

การควบคุมแบบโกลบอลลี่ลิเนียไรซิ่งหรือการควบคุมแบบจีแอลซีนี้ถูกนำเสนอโดย Kravaris และ Chung (1987) เป็นเทคนิคการควบคุมแบบไม่เชิงเส้นที่อาศัยการทรานสฟอร์มระบบไม่เชิงเส้นให้มีความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรปรับและตัวแปรควบคุมในรูปที่ง่ายขึ้นซึ่งจะทำให้สามารถคำนวณค่าการควบคุมได้ง่าย ซึ่งลักษณะโครงสร้างการควบคุมของจีแอลซีมีดังนี้

$$u = \frac{v - \sum_{k=0}^{r} \beta_k L_f^{\,k} h(x)}{\beta_r L_g L_f^{\,r-1} h(x)} \tag{3.51}$$

เมื่อ $r$ คือค่าระดับสัมพัทธ์ของระบบที่ทำการควบคุม

$\beta_k$ คือค่าพารามิเตอร์ในการปรับจูนตัวควบคุม โดย $k$ มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง $r$

$v$ คือตัวแปรเข้าจากภายนอก

โดยที่

$$v = v_0 + k_c\left[(y^{sp} - y) + \frac{1}{\tau_I}\int_0^t (y^{sp} - y)dt\right] \tag{3.52}$$

มี $k_c$ และ $\tau_I$ เป็นพารามิเตอร์ในการปรับจูนตัวควบคุม

โดยหลักการที่ทำให้ตัวแปรเข้าและตัวแปรออกหรือตัวแปรปรับและตัวแปรควบคุมนั้นมีความสัมพันธ์กันในรูปแบบเชิงเส้นนี้จึงทำให้ตัวควบคุมจีแอลซีสามารถประยุกต์ใช้กับระบบที่มีค่าระดับสัมพัทธ์ต่างๆได้อย่างไม่เจาะจง นอกจากนี้ในกรณีที่ระบบที่ต้องการควบคุมมีค่าระดับสัมพัทธ์เป็นหนึ่งจากสมการที่ (3.1) , (3.2) และ (3.51) จะได้

$$u = \frac{v - \beta_1 L_f h(x) - \beta_0 h(x)}{\beta_1 L_g h(x)} \tag{3.53}$$

ซึ่งส่วนใหญ่แล้วจะได้ $\frac{\partial h(x)}{\partial x} = 1$ เมื่อแทนค่าดังกล่าวลงในสมการ (3.53) จะได้

$$u = \frac{v_0 + k_c\left[(y^{sp} - y) + \frac{1}{\tau_I}\int_0^t (y^{sp} - y)dt\right] - \beta_1 f(x) - \beta_0 h(x)}{\beta_1 g(x)} \tag{3.54}$$

เมื่อนำสมการที่ (3.8) และ (3.54) มาเปรียบเทียบกับจะพบว่ามีลักษณะที่คล้ายคลึงกันมาก

โดยถ้าให้

$$v_0 = 0$$

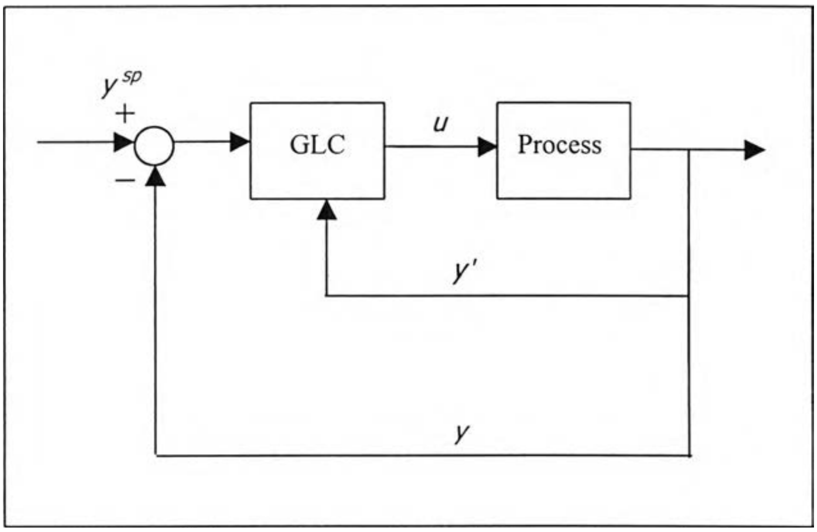
$$\beta_0 = 0$$

$$\frac{k_c}{\beta_1} = k_1$$

$$\tau_I = \frac{k_1}{k_2}$$

สมการที่ (3.54) ก็คือสมการที่ (3.8) นั่นเอง

พบว่าในกรณีที่ระบบที่ต้องการควบคุมมีค่าระดับสัมพัทธ์เป็นหนึ่งแล้ว ลักษณะโครงสร้างในการควบคุมของตัวควบคุมแบบจีเอ็มซีจะเหมือนกับจีแอลซีนั่นเอง อย่างไรก็ตามเมื่อค่าระดับสัมพัทธ์มีค่ามากกว่าหนึ่งแล้ว จะมีผลให้ลักษณะโครงสร้างในการควบคุมของตัวควบคุมแบบจีเอ็มซีและจีแอลซีมีลักษณะที่แตกต่างกัน




**รูปที่ 3.7** การใช้จีแอลซีกับระบบที่มีค่าระดับสัมพัทธ์สอง

พิจารณาลักษณะโครงสร้างในการควบคุมระบบที่มีค่าระดับสัมพัทธ์สองของตัวควบคุมแบบจีเอ็มซีและจีแอลซีตามรูปที่ 3.4 และ 3.7 ตามลำดับ จะเห็นได้ว่าจีเอ็มซีจะมีลูพการควบคุมเพิ่มขึ้นเป็นสองลูพ แต่จีแอลซีจะมีลูพการควบคุมเพียงลูพเดียว ซึ่งลักษณะดังกล่าวย่อมจะมีผลให้ลักษณะผลตอบสนองที่ได้จากการควบคุมของตัวควบคุมทั้งสองมีลักษณะที่แตกต่างกัน

ลักษณะผลตอบสนองที่ได้จากการใช้จีแอลซีควบคุมระบบที่มีค่าระดับสัมพัทธ์สองคือ

$$v = \beta_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \beta_1 \frac{dy}{dt} + \beta_0 y \tag{3.55}$$

โดยที่ $v = v_0 + k_c \left[ (y^{sp} - y) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t (y^{sp} - y) dt \right]$

ทรานส์ฟอร์มสมการ (3.55) ให้อยู่ในรูปลาปลาซโดเมนได้

$$\frac{y(s)}{y^{sp}(s)} = \frac{k_c s + \frac{k_c}{\tau_I}}{\beta_2 s^3 + \beta_1 s^2 + (\beta_0 + k_c) s + \frac{k_c}{\tau_I}} \tag{3.56}$$

ในขณะที่ลักษณะผลตอบสนองที่ได้จากการใช้จีเอ็มซีควบคุมตัวแปรควบคุมภายในของระบบที่มีค่าระดับสัมพัทธ์สองคือ

$$\frac{dy'}{dt} = k_{21}(y'^{sp} - y') + k_{22} \int (y'^{sp} - y') dt \tag{3.57}$$

ทรานส์ฟอร์มสมการ (3.57) ให้อยู่ในรูปลาปลาซโดเมนได้

$$y'(s) = \frac{k_{21} s + k_{22}}{s^2 + k_{21} s + k_{22}} \cdot y'^{sp}(s) \tag{3.58}$$

อย่างไรก็ตามค่าของ $y'^{sp}(s)$ ในสมการที่ (3.58) นั้นมีลักษณะขึ้นกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรควบคุม $y$ จากสมการที่ (3.48) ถ้าแทน $y'$ ด้วย $y'^{sp}$ ในสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งของตัวแปรควบคุม จะได้ว่า

$$y'^{sp}(s) = F(s) \cdot y(s) \tag{3.59}$$

เมื่อ $F(s)$ คือทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันระหว่าง $y'^{sp}(s)$ และ $y(s)$

แทนสมการที่ (3.59) ลงในสมการที่ (3.58) ได้

$$y'(s) = \frac{k_{21}s + k_{22}}{s^2 + k_{21}s + k_{22}} \cdot F(s) \cdot y(s) \tag{3.60}$$

ลักษณะผลตอบสนองที่ได้จากการใช้จีเอ็มซีควบคุมตัวแปรควบคุมของระบบที่มีค่าระดับสัมพัทธ์สองคือ

$$\frac{dy}{dt} = k_{11}(y^{sp} - y) + k_{12}\int(y^{sp} - y)dt \tag{3.61}$$

ทรานส์ฟอร์มสมการ (3.61) ให้อยู่ในรูปลาปลาซโดเมนได้

$$y(s) = \frac{k_{11}s + k_{12}}{s^2 + k_{11}s + k_{12}} \cdot y^{sp}(s) \tag{3.62}$$

แทนสมการที่ (3.62) ลงในสมการที่ (3.60) จะได้

$$y'(s) = \frac{k_{21}s + k_{22}}{s^2 + k_{21}s + k_{22}} \cdot F(s) \cdot \frac{k_{11}s + k_{12}}{s^2 + k_{11}s + k_{12}} \cdot y^{sp}(s) \tag{3.63}$$

ความสัมพันธ์ที่ได้จากสมการที่ (3.63) เป็นความสัมพันธ์ระหว่าง $y^{sp}(s)$ และ $y'(s)$ ไม่ใช่ความสัมพันธ์ระหว่าง $y^{sp}(s)$ และ $y(s)$ ซึ่งจากสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งของตัวแปรควบคุมในสมการที่ (3.48) จะได้ว่า

$$y'(s) = F(s) \cdot y(s) \tag{3.64}$$

เมื่อ $F(s)$ คือทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันระหว่าง $y'(s)$ และ $y(s)$

แทนสมการที่ (3.64) ลงในสมการที่ (3.63) ได้

$$y(s) = \frac{k_{11}s + k_{12}}{s^2 + k_{11}s + k_{12}} \cdot \frac{k_{21}s + k_{22}}{s^2 + k_{21}s + k_{22}} \cdot y^{sp}(s) \tag{3.65}$$

หรือ

$$\frac{y(s)}{y^{sp}(s)} = \frac{k_{11}s + k_{12}}{s^2 + k_{11}s + k_{12}} \cdot \frac{k_{21}s + k_{22}}{s^2 + k_{21}s + k_{22}} \tag{3.66}$$

จากสมการที่ (3.56) และ (3.66) พบว่าลักษณะอัตราผลตอบสนองของตัวแปรควบคุมที่ได้จากตัวควบคุมแบบจีแอลซีและจีเอ็มซีมีลักษณะที่แตกต่างกัน โดยลักษณะผลตอบสนองที่ได้จากตัวควบคุมจีแอลซีแสดงถึงลักษณะของระบบอันดับสาม (Third-Order Systems) ที่มีซีโรส์ 1 ตัว ในขณะที่ลักษณะผลตอบสนองที่ได้จากตัวควบคุมจีเอ็มซีแสดงถึงลักษณะของระบบอันดับสี่ (Fourth-Order Systems) ที่มีซีโรส์ 2 ตัว ซึ่งลักษณะผลตอบสนองทั้งสองแบบนี้ไม่สามารถบอกได้ว่าแบบใดให้ผลการควบคุมที่ดีกว่า ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงใช้การจำลองผลการควบคุมโดยใช้ตัวควบคุมทั้งสองชนิดนี้กับระบบที่ใช้เป็นกรณีศึกษาเพื่อเปรียบเทียบสมรรถนะของตัวควบคุมแบบจีเอ็มซีและจีแอลซี

## 3.6 การเพิ่มความทนทานให้กับการควบคุมแบบจีเอ็มซี

การควบคุมแบบจีเอ็มเป็นการควบคุมที่อาศัยแบบจำลองของระบบในการควบคุมดังนั้นความถูกต้องของแบบจำลองจึงเป็นสิ่งจำเป็น ในกรณีที่มีความคลาดเคลื่อนระหว่างแบบจำลองที่ใช้กับกระบวนการจริงจะทำให้สมรรถนะในการควบคุมลดลง ซึ่งถ้าพิจารณาถึงความเป็นจริงแล้วจะเห็นว่ามีความเป็นไปได้น้อยมากที่แบบจำลองที่ใช้จะสามารถแสดงถึงพฤติกรรมของระบบได้เหมือนจริงทุกประการ อีกทั้งตัวรบกวนที่เกิดขึ้นภายในระบบก็นับเป็นสาเหตุสำคัญที่ทำให้ไม่สามารถทราบถึงลักษณะที่แท้จริงของระบบได้ (ในกรณีที่ไม่มีการวัดค่าตัวแปรรบกวน หรือไม่สามารถวัดค่าตัวแปรรบกวนนั้นได้) ดังนั้นจึงจำเป็นต้องให้ตัวควบคุมสามารถทำงานได้แม้ในสภาวะที่มีความคลาดเคลื่อนของแบบจำลองนั้นด้วย

### 3.6.1 การควบคุมแบบโรบัสท์เจนเนริกโมเดล(Robust Generic Model Control)

การควบคุมแบบอาร์จีเอ็มซีโดย Lundberg และ Benzanson (1990) เป็นการเพิ่มความทนทานให้กับตัวควบคุมแบบจีเอ็มซี ทำให้สรรถนะในการควบคุมดีขึ้นในกรณีที่มีความผิดพลาดของแบบจำลอง โดยความคลาดเคลื่อนของแบบจำลองที่มีต่อกระบวนการจริงจะถูกชดเชยไว้ในขั้นตอนการกำหนดอัตราการเปลี่ยนแปลงตัวแปรควบคุมที่ต้องการตามสมการที่(3.4) โดยในอาร์จีเอ็มซีนี้จะให้ลักษณะการเปลี่ยนแปลงตัวแปรควบคุมที่ต้องการคือ

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^{d} = k_1(y^{sp} - y) + k_2\int(y^{sp} - y)dt - (y_p^{\bullet} - y_m^{\bullet}) \qquad (3.67)$$

โดยที่

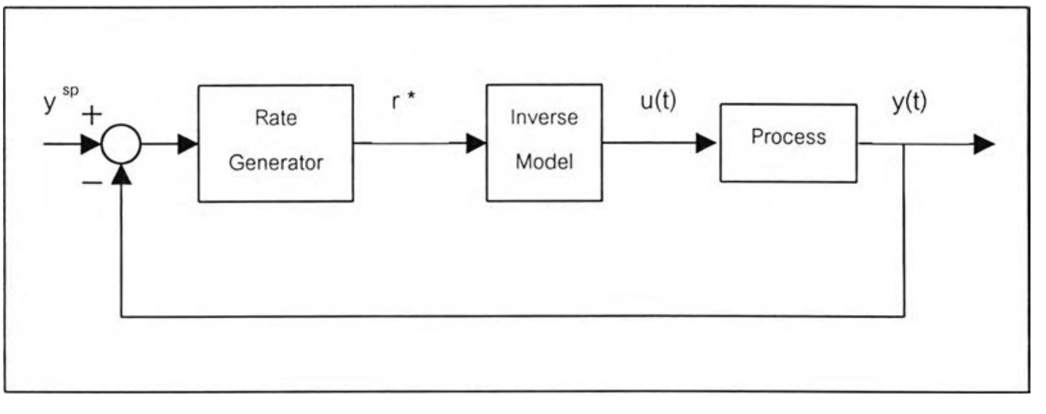
$y_p^{\bullet}$ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าตัวแปรควบคุมที่ได้จากกระบวนการจริง

$y_m^{\bullet}$ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าตัวแปรควบคุมที่ได้จากแบบจำลอง

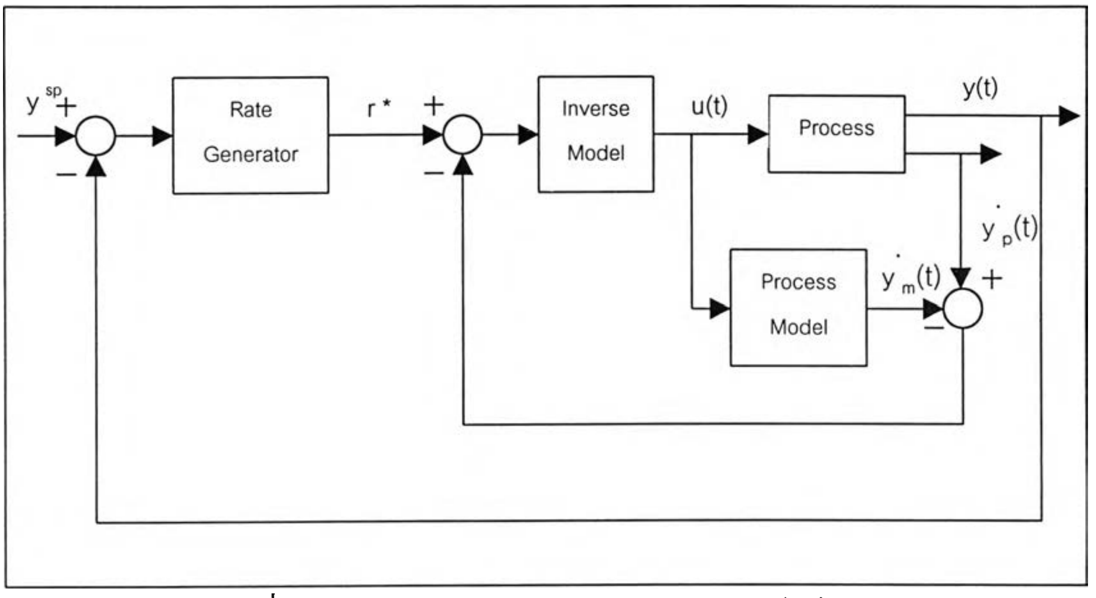
ถ้าให้อัตราการเปลี่ยนแปลงตัวแปรควบคุมที่ต้องการแทนด้วย $r^{*}$
สมการที่ (3.67) จะเขียนรูปใหม่ได้คือ

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^{d} = r^{*} - (y_p^{\bullet} - y_m^{\bullet}) \qquad (3.68)$$

โดยความแตกต่างทางโครงสร้างระหว่างการควบคุมแบบจีเอ็มซีและอาร์จีเอ็มซีพิจารณาได้จากรูปที่ 3.8 และ 3.9



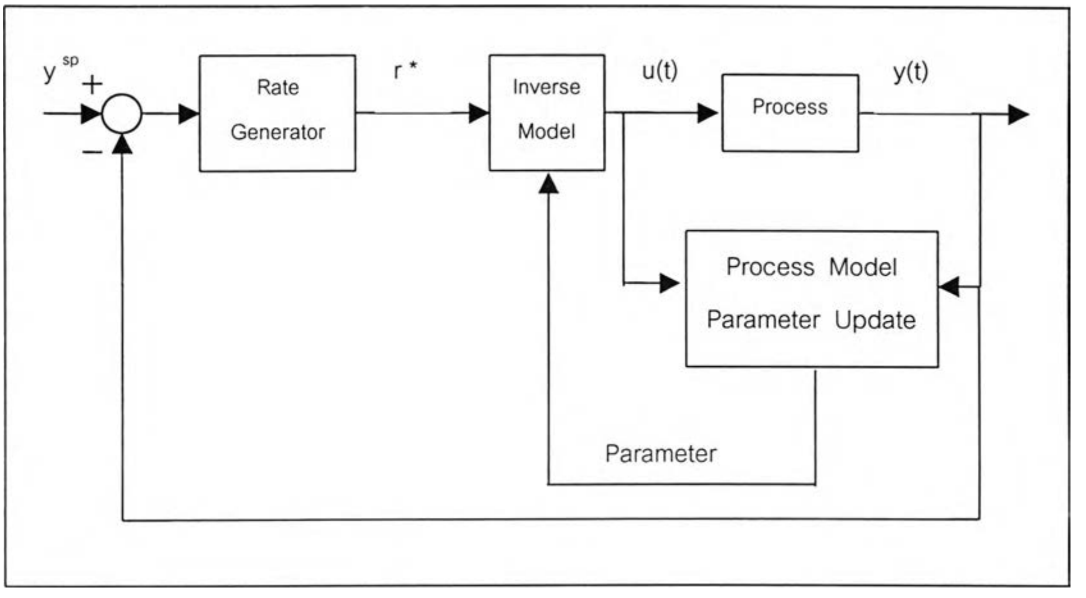

**รูปที่ 3.8** รูปแสดงโครงสร้างการควบคุมแบบจีเอ็มซี




**รูปที่ 3.9** รูปแสดงโครงสร้างการควบคุมแบบอาร์จีเอ็มซี

## 3.6.2 การควบคุมแบบจีเอ็มซีที่มีการปรับตัวของค่าพารามิเตอร์(Adaptive Generic Model Control)

การควบคุมแบบจีเอ็มซีที่มีการปรับค่าของพารามิเตอร์ในแบบจำลองที่ใช้ในการควบคุม หรือที่เรียกว่าเอจีเอ็มซี เป็นการควบคุมที่มีการนำเอาตัวประมาณค่าเข้ามาช่วยประมาณค่าสเตท หรือพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าหรือไม่ทราบค่าที่แท้จริง ค่าเอาท์พุทของกระบวนการที่วัดค่าได้จะนำมาใช้ในการประมาณค่าสเตทหรือพารามิเตอร์โดยใช้ตัวประมาณค่า อย่างเช่น ตัวกรองคาลมาน ซึ่งค่าสเตทและพารามิเตอร์ที่ได้จากการประมาณจะส่งเข้าไปใช้ยังส่วนของแบบจำลองในตัวควบคุมเพื่อทำการคำนวณค่าตัวแปรปรับต่อไป ดังนั้นตัวประมาณค่าจะมีบทบาทอย่างมากต่อประสิทธิภาพของตัวควบคุมแบบจีเอ็มซี ถ้าตัวประมาณค่าให้ผลการประมาณที่ดี ตัวควบคุมแบบจีเอ็มซีก็จะสามารถคำนวณค่าตัวแปรปรับได้อย่างเหมาะสม ทำให้สามารถควบคุมให้ค่าตัวแปรควบคุมลู่เข้าสู่ค่าที่ต้องการได้ อย่างไรก็ตามในการประยุกต์ใช้เทคนิคการประมาณค่าสเตทและพารามิเตอร์นั้น จะใช้ได้กับระบบที่ซึ่งตัวแปรออกหรือเอาท์พุทสามารถวัดได้และเชื่อถือได้เท่านั้น และนอกจากนี้เอาท์พุทที่สามารถวัดค่าได้จะต้องเป็นเอาท์พุทที่ทำให้ระบบที่สนใจสามารถสังเกตได้ด้วย




**รูปที่ 3.10** รูปแสดงโครงสร้างการควบคุมแบบจีเอ็มซีที่มีการปรับค่าพารามิเตอร์

สิ่งที่ต้องการในการใช้เทคนิคการประมาณค่าสเตทและพารามิเตอร์

- ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่สามารถวัดค่าได้และไม่สามารถวัดค่าได้ อาทิเช่น จากแบบจำลองของกระบวนการ
- การวัดค่าของตัวแปรที่สามารถวัดได้

## 3.7 การใช้ตัวกรองคาลมานเป็นตัวประมาณค่าพารามิเตอร์

ตัวกรองคาลมานเป็นเทคนิคในการประมาณค่าที่ถูกพัฒนาขึ้นมาจากวิธีกำลังสองน้อยที่สุดในรูปแบบของสเตทสเปซ ด้วยข้อดีที่สำคัญคือแบบจำลองของตัวแปรที่ต้องการทราบค่าจะถูกนำมาใช้ในการคำนวณด้วย และขั้นตอนการคำนวณเป็นแบบวิธีเรียกซ้ำจึงทำให้ประหยัดหน่วยความจำและเวลาในการคำนวณ

### 3.7.1 ตัวกรองคาลมาน

ปัญหาโดยทั่วไปที่เกี่ยวข้องกับตัวกรองคาลมานนั้นจะเป็นการประมาณค่าสเตทและพารามิเตอร์ของระบบ โดยสมการแบบจำลองในรูปแบบเชิงเส้นของระบบสามารถเขียนได้ดังนี้

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + w_k \tag{3.69}$$

และสมการค่าการวัดคือ

$$y_k = C_k x_k + v_k \tag{3.70}$$

เมื่อ

$x_k$ คือ ค่าของสเตท ณ เวลา k ซึ่งกำหนดให้มีจำนวนเท่ากับ n

$u_k$ คือ ค่าตัวแปรปรับ ณ เวลา k ซึ่งกำหนดให้มีจำนวนเท่ากับ r

$y_k$ คือ ค่าการวัด ณ เวลา k ซึ่งกำหนดให้มีจำนวนเท่ากับ m

$A_k$ คือ เมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าสเตท ณ เวลา k กับสเตท ณ เวลา k+1 มีมิติ nxn

$B_k$ คือ เมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าตัวแปรปรับและค่าสเตทมีมิติ nxr

$C_k$ คือ เมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าการวัดและค่าสเตทมีมิติ mxn

โดยที่ $w_k$ และ $v_k$ เป็นตัวแปรสุ่มสัญญาณรบกวนของระบบและค่าการวัด โดยสมมติให้ทั้ง $w_k$ และ $v_k$ เป็นอิสระซึ่งกันและกันและมีการกระจายแบบปกติซึ่งคือ

$$Prob(w_k) \approx N(0,Q) \tag{3.71}$$

$$Prob(v_k) \approx N(0,R) \tag{3.72}$$

เมื่อ $E(w_k . w_k^T) = Q_k$ คือความแปรปรวนหรือความไม่แน่นอนของแบบจำลอง

$E(v_k . v_k^T) = R_k$ คือความแปรปรวนหรือความไม่แน่นอนของการวัด

ถ้ากำหนดให้ $\hat{x}_{k+1|k}$ เป็นค่าประมาณของ $x$ ณ เวลา k+1 ที่ได้จากการคำนวณโดยอาศัยค่าของข้อมูลในอดีต ณ เวลา k และกำหนดให้ $\hat{x}_{k+1|k+1}$ เป็นค่าประมาณ ณ เวลา k+1 ที่ได้จาก

การคำนวณโดยอาศัยค่าของข้อมูลของ $\hat{x}_{k+1|k}$ และค่าการวัด $y_{k+1}$ จะสามารถนิยามความคลาดเคลื่อนของค่าประมาณได้ดังนี้

$$e_{k+1|k} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k} \tag{3.73}$$

และ

$$e_{k+1|k+1} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k+1} \tag{3.74}$$

จะได้เมตริกซ์ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนดังนี้

$$P_{k+1|k} = E[e_{k+1|k} . e_{k+1|k}^T] \tag{3.75}$$

และ

$$P_{k+1|k+1} = E[e_{k+1|k+1} . e_{k+1|k+1}^T] \tag{3.76}$$

ค่าของ $\hat{x}_{k+1|k}$ จะได้จากการคำนวณโดยอาศัยสมการแบบจำลองดังนี้

$$\hat{x}_{k+1|k} = A_k \hat{x}_{k|k} + B_k u_k \tag{3.77}$$

ค่าของ $\hat{x}_{k+1|k+1}$ จะได้จากการคำนวณโดยการรวมพจน์ของ $\hat{x}_{k+1|k}$ กับค่าถ่วงน้ำหนักคูณกับผลต่างระหว่างค่าที่ได้จากการวัดจริงและค่าการวัดที่ได้จากการทำนาย ซึ่งเขียนได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1}(y_{k+1} - C_{k+1}\hat{x}_{k+1|k}) \tag{3.78}$$

พจน์ของผลต่างระหว่างค่าที่ได้จากการวัดจริงและค่าการวัดที่ได้จากการทำนายนี้จะเป็นส่วนที่ใช้ในการปรับความถูกต้องให้กับค่า $\hat{x}_{k+1|k}$ ที่ได้จากแบบจำลอง ซึ่งจะเรียกว่า “Residual”

เมตริกซ์ $K_{k+1}$ ซึ่งมีมิติ nxm ในสมการ (3.78) จะเรียกว่า “เมตริกซ์เกนคาลมาน (Kalman gain matrix)”

จากการแทนสมการที่ (3.78) ลงในสมการที่ (3.76) จะได้

$$\begin{aligned} P_{k+1|k+1} = E\{&[(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k}) - K_{k+1}(C_{k+1}x_{k+1} + v_{k+1} - C_{k+1}\hat{x}_{k+1|k})] \\ &[(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k}) - K_{k+1}(C_{k+1}x_{k+1} + v_{k+1} - C_{k+1}\hat{x}_{k+1|k})]^T\} \end{aligned} \tag{3.79}$$

ทำการแทน $x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k}$ ด้วย $e_{k+1|k}$ จะได้

$$P_{k+1|k+1} = E\{[(e_{k+1|k} - K_{k+1}(C_{k+1}e_{k+1|k} + v_{k+1})] \\ [(e_{k+1|k} - K_{k+1}(C_{k+1}e_{k+1|k} + v_{k+1})]^T\} \tag{3.80}$$

เมื่อทำการกระจายพจน์ของสมการ (3.80) และกำหนดให้ $e_{k+1|k}$ ไม่มีความสัมพันธ์ (uncorrelated) กับ $v_{k+1}$ จะได้

$$P_{k+1|k+1} = (I - K_{k+1}C_{k+1})P_{k+1|k}(I - K_{k+1}C_{k+1})^T + K_{k+1}R_{k+1}K_{k+1}^T \tag{3.81}$$

จากสมการที่ (3.81) พบว่าค่าความคลาดเคลื่อนในการประมาณมีค่าขึ้นอยู่กับค่าเมตริกซ์เกนคาลมาน ดังนั้นค่าของเมตริกซ์เกนคาลมานที่เลือกมาควรจะทำให้ได้ค่าความคลาดเคลื่อนในการประมาณที่น้อยที่สุด นั่นก็คือทำให้สมการที่ (3.81) มีค่าน้อยที่สุดนั่นเอง โดยค่าของเมตริกซ์เกนคาลมานที่จะทำให้ได้ค่าความคลาดเคลื่อนในการประมาณน้อยที่สุดสามารถคำนวณได้จากสมการต่อไปนี้

$$K_{k+1} = P_{k+1|k}C_{k+1}^T(C_{k+1}P_{k+1|k}C_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \tag{3.82}$$

ในส่วนของการพิสูจน์ว่าค่าเมตริกซ์เกนคาลมานที่ได้มาสามารถทำให้ได้ค่าความคลาดเคลื่อนในการประมาณน้อยที่สุดนั้นมีการกล่าวไว้โดย วีรยุทธ (2543)

จากสมการที่ (3.75) ค่าของ $e_{k+1|k}$ สามารถหาได้ดังนี้

$$\begin{aligned} e_{k+1|k} &= x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k} \\ &= (A_k x_k + B_k u_k + w_k) - (A_k x_k + B_k u_k) \\ &= A_k(x_k - \hat{x}_{k|k}) + w_k \\ &= A_k e_{k|k} + w_k \end{aligned} \tag{3.83}$$

แทนค่าจากสมการที่ (3.83) ลงในสมการที่ (3.75) ได้

$$P_{k+1|k} = E[(A_k e_{k|k} + w_k)\cdot(A_k e_{k|k} + w_k)^T] \tag{3.84}$$

เมื่อทำการกระจายพจน์ของสมการ (3.84) และกำหนดให้ $e_{k|k}$ ไม่มีความสัมพันธ์กับ $w_k$ จะได้

$$P_{k+1|k} = A_k P_{k|k} A_k^T + Q_k \tag{3.85}$$

จากสมการที่ได้แสดงมาทั้งหมด สมการ (3.77) , (3.78) , (3.81) , (3.82) และ (3.85) จะถูกนำมารวมเป็นขั้นตอนการคำนวณของตัวกรองคาลมาน ซึ่งจะวนเป็นรอบการคำนวณซ้ำไปจนถึงเวลาที่ต้องการ ดังจะกล่าวต่อไปดังนี้

<u>ขั้นตอนการคำนวณของตัวกรองคาลมาน</u>

จากสมการด้านบนที่ได้กล่าวมาจะเห็นได้ว่าตัวกรองคาลมานจะทำการประมาณค่าของสเตทหรือพารามิเตอร์จากแบบจำลองก่อน จากนั้นจึงทำการปรับปรุงแก้ไขค่าเพื่อให้มีความถูกต้องมากขึ้น ดังนั้น กลุ่มของสมการของตัวกรองคาลมานจึงสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ส่วน คือ สมการการทำนาย (Predictor equations หรือ Time update equations) และสมการการแก้ไข (Corrector equations หรือ Measurement update equations) ซึ่งสามารถนำมาสรุปเป็นขั้นตอนการคำนวณ และแผนภาพดังนี้

## สมการการทำนาย

คำนวณค่าประมาณโดยอาศัยค่าของข้อมูลในอดีต

$$\hat{x}_{k+1|k} = A_k \hat{x}_{k|k} + B_k u_k$$

คำนวณเมตริกซ์ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนที่ได้จากค่าของข้อมูลในอดีต

$$P_{k+1|k} = A_k P_{k|k} A_k^T + Q_k$$

## สมการการแก้ไข

คำนวณค่าเมตริกซ์เกนคาลมาน

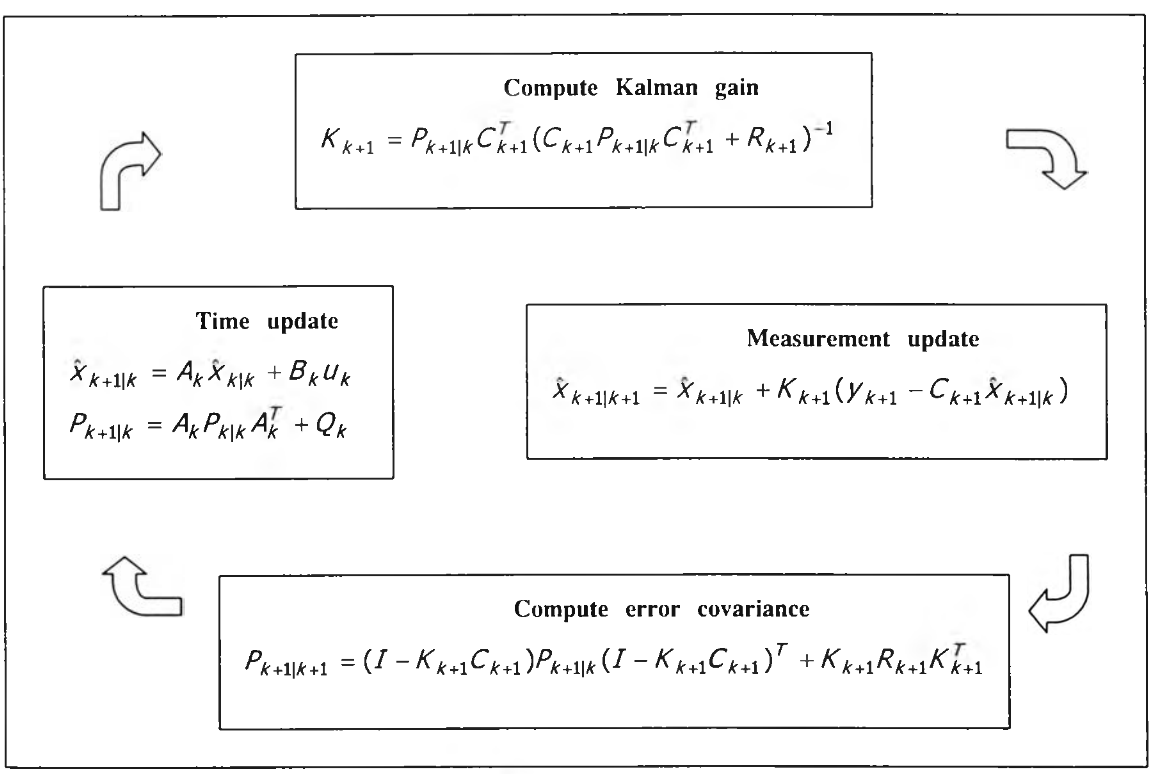
$$K_{k+1} = P_{k+1|k}C_{k+1}^{T}(C_{k+1}P_{k+1|k}C_{k+1}^{T} + R_{k+1})^{-1}$$

คำนวณค่าประมาณค่าใหม่

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1}(y_{k+1} - C_{k+1}\hat{x}_{k+1|k})$$

คำนวณค่าเมตริกซ์ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนค่าใหม่

$$P_{k+1|k+1} = (I - K_{k+1}C_{k+1})P_{k+1|k}(I - K_{k+1}C_{k+1})^{T} + K_{k+1}R_{k+1}K_{k+1}^{T}$$




**รูปที่ 3.11** แผนผังแสดงขั้นตอนการคำนวณของตัวกรองคาลมาน

### 3.7.2 ตัวกรองคาลมานแบบยืดขยาย (Extended Kalman Filter)

ตัวกรองคาลมานที่ได้กล่าวถึงในหัวข้อ 3.7.1 นั้นจะเกี่ยวข้องกับการประมาณของระบบเชิงเส้น แต่ระบบจริงในอุตสาหกรรมนั้นมักจะเป็นระบบไม่เชิงเส้นและความสัมพันธ์ระหว่างค่าตัวแปรสเตทกับค่าการวัดนั้นอาจไม่เป็นเชิงเส้นก็ได้ ดังนั้นจึงได้มีการปรับปรุงแก้ไขขั้นตอนการคำนวณบางขั้นตอนเพื่อให้สามารถนำตัวกรองคาลมานไปประยุกต์ใช้งานกับระบบไม่เชิงเส้นได้ด้วย จึงเป็นที่มาของตัวกรองคาลมานแบบยืดขยาย
พิจารณาแบบจำลองของระบบไม่เชิงเส้นดังนี้

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k) \tag{3.86}$$

และสมการค่าการวัดคือ

$$y_k = h(x_k, v_k) \tag{3.87}$$

เมื่อ ฟังก์ชัน f คือ สมการความสัมพันธ์ระหว่างค่าสเตท ณ เวลา k และค่าสเตท ณ เวลา k+1

ฟังก์ชัน h คือ สมการความสัมพันธ์ระหว่างค่าการวัด ณ เวลา k และค่าสเตท ณ เวลา k

$w_k$ และ $v_k$ เป็นตัวแปรสุ่มสัญญาณรบกวนของระบบและค่าการวัดที่เป็นอิสระซึ่งกันและกันและมีการกระจายแบบปกติ

ในส่วนของขั้นตอนการคำนวณของตัวกรองคาลมานแบบยืดขยายนี้จะคล้ายกับขั้นตอนการคำนวณที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อ 3.7.1 แต่เนื่องจากลักษณะของแบบจำลองที่เป็นแบบไม่เชิงเส้นนี้ทำให้มีความต่างกันที่การคำนวณค่า $\hat{x}_{k+1|k}$ และค่าประมาณของการวัด $\hat{y}_{k+1}$ ในสมการของการแก้ไข ซึ่งจะทำการคำนวณจากสมการในรูปแบบไม่เชิงเส้นเลย ในขณะที่ขั้นตอนการคำนวณอื่นยังคงเป็นรูปแบบเดิม

โดยในส่วนของสมการที่ (3.77) จะเปลี่ยนเป็น

$$\hat{x}_{k+1|k} = f(\hat{x}_{k|k}, u_k) \tag{3.88}$$

และในส่วนของสมการที่ (3.78) จะเปลี่ยนเป็น

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1}(y_{k+1} - h(\hat{x}_{k+1|k})) \tag{3.89}$$

จากที่กล่าวมาจะสามารถนำมาสรุปเป็นขั้นตอนการคำนวณและแผนภาพของตัวกรองคาลมานแบบยืดขยายได้ ดังนี้

**สมการการทำนาย**

คำนวณค่าประมาณโดยอาศัยค่าของข้อมูลในอดีต

$$\hat{x}_{k+1|k} = f(\hat{x}_{k|k}, u_k)$$

คำนวณเมตริกซ์ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนที่ได้จากค่าของข้อมูลในอดีต

$$P_{k+1|k} = A_k P_{k|k} A_k^T + Q_k$$

**สมการการแก้ไข**

คำนวณค่าเมตริกซ์เกนคาลมาน

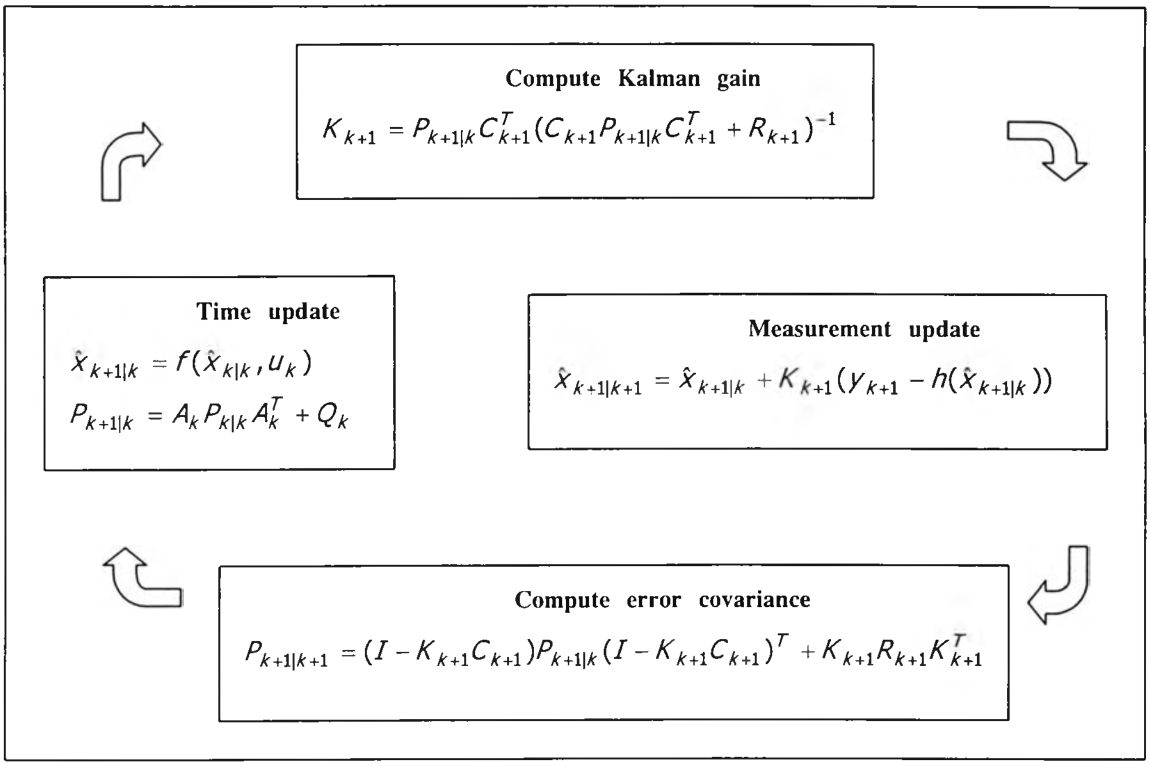
$$K_{k+1} = P_{k+1|k} C_{k+1}^T (C_{k+1} P_{k+1|k} C_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1}$$

คำนวณค่าประมาณค่าใหม่

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1}(y_{k+1} - h(\hat{x}_{k+1|k}))$$

คำนวณค่าเมตริกซ์ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนค่าใหม่

$$P_{k+1|k+1} = (I - K_{k+1} C_{k+1}) P_{k+1|k} (I - K_{k+1} C_{k+1})^T + K_{k+1} R_{k+1} K_{k+1}^T$$




**รูปที่ 3.12** แผนผังแสดงขั้นตอนการคำนวณของตัวกรองคาลมานแบบยืดขยาย

### 3.7.3 การปรับจูนค่าพารามิเตอร์ของตัวกรองคาลมาน

จากขั้นตอนการคำนวณของตัวกรองคาลมานพบว่า ต้องมีการกำหนดค่าเริ่มต้นของเมตริกซ์ค่าประมาณ $x_{k|k}$ และเมตริกซ์ความไม่แน่นอนของค่าประมาณ $P_{k|k}$ นอกจากนี้ยังต้องกำหนดค่าเมตริกซ์ความไม่แน่นอนของแบบจำลอง $Q_k$ และเมตริกซ์ความไม่แน่นอนของการวัด $R_k$ ซึ่งหลักในการกำหนดค่าดังกล่าวอาจพอสรุปได้ดังนี้

#### 3.7.3.1 การกำหนดค่าเริ่มต้นของเมตริกซ์ค่าประมาณ ($x_{k|k}$) และเมตริกซ์ความไม่แน่นอนของค่าประมาณ ($P_{k|k}$)

การกำหนดค่าเริ่มต้นของเมตริกซ์ค่าประมาณ $x_{k|k}$ นั้น จะขึ้นอยู่กับการสมมติค่าของผู้ใช้ซึ่งอาจจะมาจากประสบการณ์หรืออาศัยค่าการวัดในอดีต ส่วนการกำหนดค่าเริ่มต้นของเมตริกซ์

ความไม่แน่นอนของค่าประมาณ $P_{k|k}$ จะขึ้นอยู่กับความเชื่อมั่นในค่าที่สมมติขึ้น ซึ่งถ้าไม่แน่ใจในค่าที่สมมติก็อาจกำหนดค่าเมตริกซ์ $P_{k|k}$ ให้มีค่ามากๆ โดยค่าที่ตำแหน่งทะแยงมุมของเมตริกซ์ $P_{k|k}[i,i]$ จะแทนความไม่แน่นอนของค่าประมาณ $x_{k|k}[i]$ เมื่อ $i = 1,2,\ldots,n$ ส่วนค่าที่ไม่อยู่ในตำแหน่งทะแยงมุม $P_{k|k}[i,j]$ เมื่อ $i \neq j$ จะเป็นค่าความไม่แน่นอนร่วมของค่าประมาณ $x_{k|k}[i]$ และ $x_{k|k}[j]$ โดยทั่วไปจะสมมติให้ค่าประมาณ $x_{k|k}[i]$ และ $x_{k|k}[j]$ ไม่มีความสัมพันธ์ซึ่งกันและกัน นั่นคือ ค่าที่ไม่อยู่ในแนวทะแยงมุมของเมตริกซ์ $P_{k|k}$ จะถูกกำหนดให้มีค่าเป็นศูนย์นั่นเอง

### 3.7.3.2 การกำหนดค่าเมตริกซ์ความไม่แน่นอนของแบบจำลอง ($Q_k$)

โดยทั่วไปเพื่อความง่าย เมตริกซ์ความไม่แน่นอนของแบบจำลอง $Q_k$ จะถูกกำหนดให้มีค่าคงที่ โดยการกำหนดค่าเมตริกซ์ $Q_k$ จะขึ้นอยู่กับว่าแบบจำลองที่หามาได้นั้นมีความถูกต้องมากน้อยเพียงไร โดยถ้าเชื่อว่าแบบจำลองที่หามาได้มีความถูกต้อง ก็อาจกำหนดค่าของเมตริกซ์ $Q_k$ ให้มีค่าน้อยๆ ในการตรวจสอบว่าแบบจำลองที่ได้มีความถูกต้องหรือไม่ อาจทำได้โดยการตรวจสอบค่าที่ได้จากแบบจำลองเทียบกับค่าที่ได้จากการวัดจริง (ทั้งนี้เครื่องมือวัดที่ใช้นั้นควรจะมีความน่าเชื่อถือ) อย่างไรก็ตามในการกำหนดค่าเมตริกซ์ $Q_k$ นั้นอาจถูกกำหนดให้มีค่าเปลี่ยนแปลงตามเวลาได้ ซึ่งขึ้นอยู่กับพลวัตของระบบ เช่น อาจกำหนดให้ $Q_k$ มีค่าน้อยๆเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงทางพลวัตอย่างช้าๆ และกำหนดให้ $Q_k$ มีค่ามากๆเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงทางพลวัตอย่างรวดเร็ว

### 3.7.3.3 การกำหนดค่าเมตริกซ์ความไม่แน่นอนของค่าการวัด ($R_k$)

การกำหนดค่าเมตริกซ์ $R_k$ โดยทั่วไปจะกำหนดให้มีค่าคงที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา โดยหลักในการกำหนดค่าจะขึ้นอยู่กับความน่าเชื่อถือของเครื่องมือวัด ซึ่งถ้าเครื่องมือวัดมีความน่าเชื่อถือน้อยก็อาจกำหนดค่าของเมตริกซ์ $R_k$ ให้มีค่ามากๆ อย่างไรก็ตามค่าของเมตริกซ์ $R_k$ นั้นอาจจะหาได้จากการสอบเทียบกับเครื่องมือวัด และเช่นเดียวกับการกำหนดค่าเมตริกซ์ $Q_k$ ค่าของเมตริกซ์ $R_k$ อาจถูกกำหนดให้มีค่าเปลี่ยนแปลงตามเวลาได้ เช่น ในกรณีที่เครื่องมือวัดได้รับผลกระทบจากแหล่งกำเนิดสัญญาณเคลื่อนที่