บทที่ 3

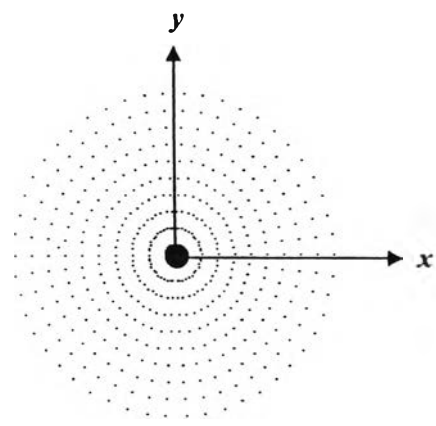
แบบจำลอง

ก่อนที่จะทำการจำลองภาพอันตรกิริยาระหว่างคาราจักร สิ่งแรกที่จะต้องทำก็คือต้องนิยามระบบวัตถุขึ้นมาก่อน(สร้างแบบจำลอง)ว่าระบบของเราประกอบไปด้วยอะไรบ้างและวัตถุเหล่านี้มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

ในบทนี้จะกล่าวถึงการสร้างแบบจำลอง ซึ่งแบบจำลองนี้จะแบ่งเป็น 3 ส่วนคือ ลักษณะและองค์ประกอบภายในของคาราจักร ปัญหาวัตถุ 3 ชิ้นกรณีจำกัด และสุดท้ายคือการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของคาราจักร

3.1 ลักษณะและองค์ประกอบภายในของคาราจักร

ในวิทยานิพนธ์นี้จะสนใจการเกิดอันตรกิริยาในกรณีของการเกิดสะพานและหาง และกรณีของคาราจักรวงแหวน ซึ่งเป็นอันตรกิริยาของคาราจักรจานแบน(หมายถึงคาราจักรเกลียวและคาราจักรเลนส์) ดังนั้นแบบจำลองของคาราจักรที่ใช้จะสมมติให้เป็นคาราจักรจานกลมแบนที่มีความหนาเป็นศูนย์(รูปที่ 3.1) ตัวคาราจักรมีองค์ประกอบสองส่วนคือ แก่นซึ่งอยู่ที่จุดศูนย์กลางของคาราจักรและมวลทั้งหมดของคาราจักรจะอยู่ที่จุดนี้ และดาวที่อยู่ในส่วนของจานกลมแบนกำลังเคลื่อนที่ในสนามแรงโน้มถ่วงที่แก่นนี้สร้างขึ้น[13] การสมมติให้มวลของคาราจักรรวมกันอยู่ที่ศูนย์กลางทำให้สามารถพิจารณาว่าศักย์ที่แก่นสร้างขึ้นมีลักษณะเป็นศักย์แบบเคปเลอร์

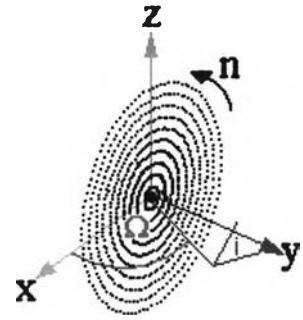


รูปที่ 3.1 คาราจักรจานแบนที่มีดาวโคจรเป็นวงกลมรอบแก่นกลาง

ถ้าระยะห่างจากจุดศูนย์กลางของดาวเป็น a แล้ว อัตราเร็วเชิงมุมการโคจร n ของดาวคือ

$$n = [GM/a^3]^{1/2} \qquad (3.1)$$

M คือมวลทั้งหมดของดาราจักร แต่โดยทั่วไประนาบของดาราจักรมักจะทำมุมเอียงกับระนาบทางโคจรของดาราจักร ถ้าทางโคจรของดาราจักรอยู่ในระนาบ x - y การวางตัวของระนาบดาราจักรเทียบกับระนาบทางโคจรของดาราจักรจะระบุเป็นความเอียงของระนาบดาราจักร i และระยะมุมของเส้นตัดระนาบ Ω ซึ่งเป็นมุมที่วัดจากแกน x ถึงเส้นตัดระนาบ(รูปที่ 3.2)



รูปที่ 3.2 ดาราจักรที่ทำมุมเอียงกับระนาบ x-y

3.2 ปัญหาวัตถุ 3 ชิ้นกรณีจำกัด (Restricted Three-Body Problem)

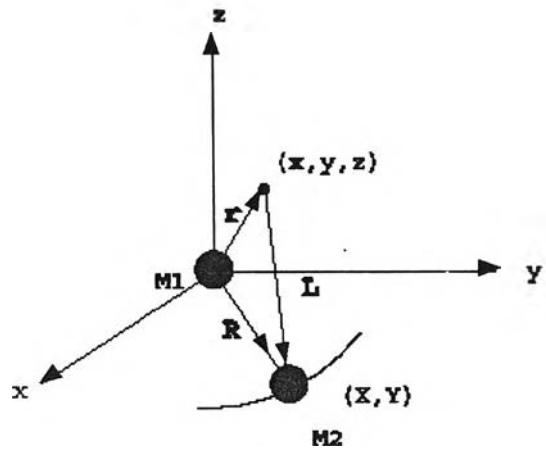
ระบบวัตถุของการเกิดอันตรกิริยาระหว่างดาราจักรจะประกอบด้วย ดาราจักรตัวรบกวน และดาราจักรที่ถูกกระทำเรียกว่าดาราจักรเป้า(ในความเป็นจริงดาราจักรที่เกิดอันตรกิริยากันต่างก็รบกวนซึ่งกันและกัน แต่เพื่อให้ง่ายต่อการอธิบายก็จำเป็นจะต้องกำหนดให้ดาราจักรตัวหนึ่งเป็นดาราจักรเป้า อีกดาราจักรก็จะเป็นดาราจักรตัวรบกวน) ซึ่งเราจะสนใจการเปลี่ยนแปลงการโคจรของดาวแต่ละดวงภายในดาราจักรเป้านี้ ดาราจักรเป้าจะประกอบด้วยสองส่วนคือ แก่น และดาวที่โคจรในจานแบนรอบแก่น(ในหัวข้อที่ 3.1) โดยทั่วไปดาราจักรจะมีมวลประมาณ 10^{11} เท่าของมวลดวงอาทิตย์ ถ้าให้ดาวแต่ละดวงที่โคจรรอบจุดศูนย์กลางหรือแก่นของดาราจักรมีมวลเท่ากับมวลดวงอาทิตย์ และมวลส่วนใหญ่ของดาราจักรอยู่ที่แก่นนี้แล้ว จะเห็นว่ามวลของดาวแต่ละดวงมีค่าน้อยกว่ามวลของดาราจักรมาก ดังนั้นจึงทำให้สามารถประมาณได้ว่ามวลของดาวแต่ละดวงมีค่าเป็นศูนย์

ถึงตอนนี้สามารถพูดได้ว่าระบบของเราเป็นระบบที่ประกอบด้วยวัตถุ 3 ชิ้น(รูปที่ 3.3) ประกอบด้วยแก่นของดาราจักรเป้า ดาราจักรตัวรบกวน และดาวแต่ละดวงซึ่งถือว่าไม่มีมวล เคลื่อน

ที่รอบแก่นของดาราจักรเป้า เรียกกรณีที่มวลของวัตถุ 1 ชิ้นในจำนวน 3 ชิ้นเป็นศูนย์ว่า ปัญหาวัตถุ 3 ชิ้นกรณีจำกัด วัตถุ 2 ชิ้นที่มีมวลจำกัดแน่นอนเคลื่อนที่แบบเคปเลอร์ ส่วนวัตถุที่มีมวลเป็นศูนย์จะเคลื่อนที่ภายใต้แรงโน้มถ่วงของวัตถุ 2 ชิ้นนั้น[14] สมการการเคลื่อนที่ของดาวหรือวัตถุที่ไม่มีมวลนี้คือ(การคำนวณดูในภาคผนวก ข)

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM_1\mathbf{r}}{r^3} - GM_2\left(\frac{\mathbf{R}}{R^3} - \frac{\mathbf{L}}{L^3}\right) \tag{3.2}$$

r คือตำแหน่งของดาวเทียบกับแก่นของดาราจักรเป้า R คือระยะห่างระหว่างแก่นของดาราจักรเป้าและดาราจักรตัวรบกวน L คือตำแหน่งของดาราจักรตัวรบกวนวัดจากดาวในดาราจักรเป้า M_1 และ M_2 คือมวลของดาราจักรเป้าและดาราจักรตัวรบกวนตามลำดับ



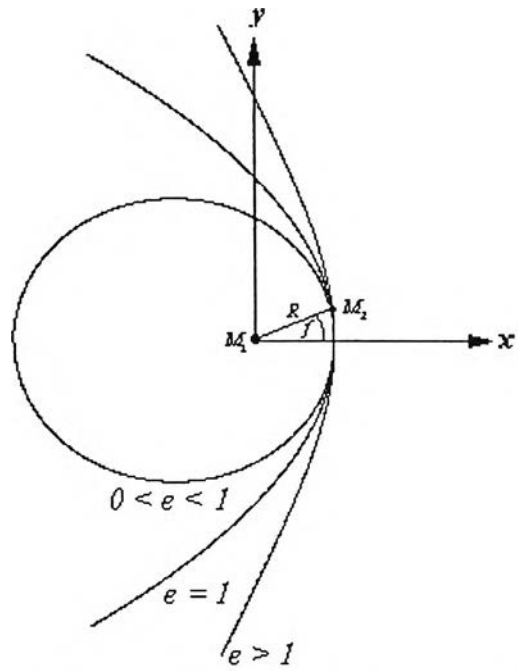
รูปที่ 3.3 ระบบวัตถุ 3 ชิ้น

สมการที่ (3.2) เป็นสมการการเคลื่อนที่ของดาวแต่ละดวงที่ตำแหน่ง r ใดๆซึ่งถือว่าดาวเหล่านี้ไม่เกิดอันตรกิริยาซึ่งกันและกัน จะเห็นว่าเทอมแรกทางขวามือของสมการเป็นการเคลื่อนที่แบบวัตถุ 2 ชิ้นของ M_1 และ ดาว ซึ่งยังไม่มี M_2 เข้ามาเกี่ยวข้อง แต่เมื่อ M_2 เคลื่อนที่เข้ามาใกล้จะเกิดการรบกวนซึ่งก็คือเทอมที่ 2 ทางขวาของสมการที่ 3.2 เทอมการรบกวนประกอบด้วย 2 ส่วน ส่วนแรกคือ $GM_2\mathbf{L}/L^3$ เป็นสนามแรงโน้มถ่วงที่ M_2 กระทำต่อดาวโดยตรง ส่วนที่ 2 คือ $-GM_2\mathbf{R}/R^3$ เป็นผลอันเนื่องมาจากการคำนวณการเคลื่อนที่ของดาวเป็นการคำนวณสัมพัทธ์กับจุดมวล M_1 ซึ่งกำลังหมุนรอบจุดศูนย์กลางมวลของระบบดาราจักร ดังนั้นเทอมการรบกวนส่วนที่สองนี้ก็คือแรงหนีศูนย์กลางนั่นเอง

ถ้าให้ $R >> r$ เทอมที่ 2 ทางขวาของสมการที่ (3.2) ก็คือสมการที่ (2.7)

3.3 การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ระหว่างดาราจักร

จากปัญหาวัตถุ 3 ชิ้นกรณีจำกัดที่ให้มวลของดาวแต่ละดวงเป็นศูนย์ ดังนั้นแก่นของดาราจักรเป้าและตัวรบกวนจะเคลื่อนที่สัมพัทธ์กันแบบวัตถุ 2 ชิ้นภายใต้ศักย์แบบเคปเลอร์(ศักย์แปรผกผันกับระยะทาง)ที่การเคลื่อนที่จะอยู่ในระนาบ วงโคจรแบบเคปเลอร์(รูปที่ 3.4)จะประกอบด้วยวงโคจรแบบวงรี(ellipse) วงโคจรแบบพาราโบลา (parabola) และวงโคจรแบบไฮเปอร์โบลา(hyperbola) (การคำนวณอยู่ในภาคผนวก ก)



รูปที่ 3.4 วงโคจรแบบเคปเลอร์ของวัตถุ 2 ชิ้น

1) วงโคจรแบบวงรี การเคลื่อนที่แบบนี้จะมีพลังงานรวม $E < 0$ และค่าความรี (eccentricity) $0 < e < 1$ สมการความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตของการเคลื่อนที่เป็นวงรีในพิกัดเชิงขั้วคือ

$$R = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f} \tag{3.3}$$

a คือระยะครึ่งแกนเอก(semi-major axis) f คือมุมกวาดจริง(true anomaly) สมการที่ (3.3) เขียนให้อยู่ในรูปของระยะจุดใกล้ q ได้เป็น

$$R = \frac{q(1+e)}{1+e\cos f} \tag{3.4}$$

และสมการการเปลี่ยนแปลงตามเวลาของมุมกวาดจริงคือ

$$\dot{f} = [\frac{M_1 + M_2}{q^3 (e+1)^3}]^{1/2} (1 + e\cos f)^2 \quad (3.5)$$

2) วงโคจรแบบพาราโบลา เป็นการเคลื่อนที่ที่พลังงานรวม $E = 0$ และ $e = 1$ ดังนั้น จากสมการที่ (3.4) และ (3.5) จะได้

$$R = \frac{2q}{1+e\cos f} \quad (3.6)$$

และ

$$\dot{f} = [\frac{M_1 + M_2}{2q^3}]^{1/2} 2\cos^4 \frac{f}{2} \quad (3.7)$$

3) วงโคจรแบบไฮเปอร์โบลา เป็นการเคลื่อนที่ที่พลังงานรวม $E > 0$ และ $e > 1$ ซึ่งมีสมการแสดงความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตและสมการการเปลี่ยนแปลงตามเวลาของมุมกวาดจริงเป็น

$$R = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e\cos f} \quad (3.8)$$

และ

$$\dot{f} = [\frac{M_1 + M_2}{q^3 (e-1)^3}]^{1/2} (1 + e\cos f)^2 \quad (3.9)$$

การแก้สมการอนุพันธ์ของมุมกวาดจริงสำหรับแต่ละวงโคจรทำให้ทราบค่าตำแหน่งสัมพัทธ์ของดาราจักรในพิกัดเชิงขั้ว ณ เวลา t ใดๆ เมื่อให้ดาราจักรหนึ่งเป็นจุดอ้างอิงและคิดว่าอีกดาราจักรหนึ่งกำลังหมุนรอบจุดอ้างอิงนี้

สำหรับความเร็วสัมพัทธ์ของวัตถุบนวงโคจรแต่ละชนิดคือ

วงรี $v = \sqrt{\mu(\frac{2}{R} - \frac{1}{a})}$ (3.10)

พาราโบลา $v = \sqrt{\frac{2\mu}{R}}$ (3.11)

ไฮเปอร์โบลา $v = \sqrt{\mu(\frac{2}{R} + \frac{1}{a})}$ (3.12)

โดยที่ $\mu = G(M_1 + M_2)$

ถ้าให้ระยะจุดใกล้ q เป็นจุดที่จะพิจารณาความเร็วการชนของดาราจักร จะเห็นว่าวงโคจรแบบไฮเปอร์โบลาจะมีความเร็วมากที่สุด และวงโคจรแบบวงรีจะมีความเร็วน้อยที่สุด