บทที่ 4

วิธีการทางคณิตศาสตร์และการแสดงผล

การจำลองภาพการเกิดอันตรกิริยาระหว่างดาราจักรจะเป็นการแก้สมการอนุพันธ์เพื่อหาตำแหน่งของดาว ณ เวลา t ใดๆ แล้วทำการแสดงผลบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ การแก้สมการอนุพันธ์จะเลือกใช้ระเบียบวิธีรุงเกคุตตาอันดับที่ 5 โดยจะต้องแก้สมการการเคลื่อนที่ของดาวซึ่งมีการเคลื่อนที่ใน 3 มิติ ผลที่ได้ก็จะฉายภาพลงบนระนาบ 2 มิติของหน้าจอคอมพิวเตอร์

4.1 หน่วยที่ใช้ในการคำนวณ

เพื่อความสะดวกในการคำนวณจะเลือกใช้หน่วยที่เหมาะสมกับขนาดของระบบ และช่วงเวลาของปรากฏการณ์ เนื่องจากอันตรกิริยาระหว่างดาราจักรเกิดขึ้นเมื่อดาราจักรเคลื่อนที่เข้ามาใกล้กันมาก ดังนั้นหน่วยระยะทางจะใช้สเกลของรัศมีของดาราจักรซึ่งมีขนาดอยู่ในระดับกิโลพาร์เสค (*kpc*) มวลของดาราจักรก็จะใช้ค่าเฉลี่ยมวลของดาราจักรคือ $10^{11}M_{\odot}$ นิยามของหน่วยเหล่านี้คือ

หน่วยระยะทาง: รัศมีโดยประมาณของดาราจักรทางช้างเผือก $\approx 10\ kpc = 3.0856 \times 10^{17}\ km$

$= 3.26 \times 10^{4}$ ปีแสง

หน่วยมวล : มวลโดยประมาณของดาราจักรทางช้างเผือก $\approx 10^{11}M_{\odot} = 2 \times 10^{41}\ kg$

หากแทนค่ารัศมีและมวลของดาราจักรทางช้างเผือกข้างต้นลงในส่วนกลับสมการที่ (3.1) จะได้

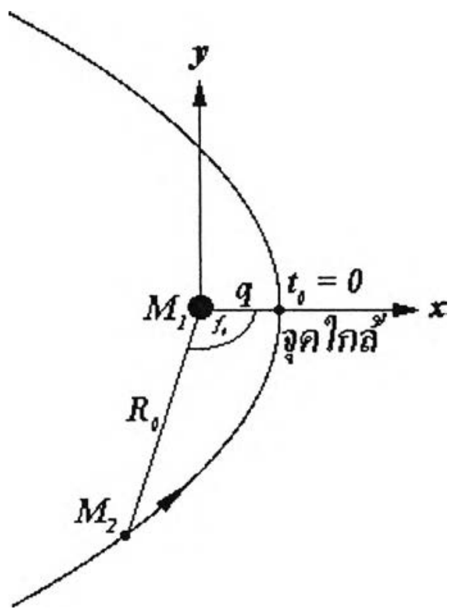
$$\left[\frac{(10\ kpc)^3}{G\,(10^{11}\ M_{\odot})}\right]^{1/2} \approx 4.7 \times 10^{7}\ \text{ปี}$$

ดังนั้นจะกำหนดให้ 1 หน่วยเวลาคือเวลาในการเคลื่อนที่ครบรอบของดาวที่รัศมี $10\ kpc$ รอบจุดมวล $10^{11}M_{\odot}$ ซึ่งมีค่าประมาณ 4.7×10^{7} ปี การกำหนดปริมาณข้างต้นให้มีค่าเป็น 1 หน่วย ทำให้ค่าคงที่แรงโน้มถ่วงสากล G มีค่าเป็น 1[15]

4.2 การแก้สมการอนุพันธ์

การแก้สมการอนุพันธ์จะเริ่มด้วยการกำหนดสภาวะเริ่มต้นของระบบซึ่งจะแบ่งเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนที่เป็นเงื่อนไขเริ่มต้นของวงโคจรสัมพัทธ์ระหว่างดาราจักร และส่วนที่เป็นเงื่อนไขเริ่มต้นของดาวที่โคจรอยู่รอบดาราจักร

ในส่วนของเงื่อนไขเริ่มต้นของวงโคจรของดาราจักร(รูปที่ 4.1)จะประกอบด้วยมวลของดาราจักรทั้งสอง คือ M_1 และ M_2 ค่าความรี e ระยะจุดใกล้ q ค่าเหล่านี้จะเป็นตัวกำหนดความเร็วในการชนและรูปร่างของวงโคจร ส่วนเวลาอ้างอิงซึ่งเป็นเวลาที่วัตถุบนวงโคจรอยู่ที่ตำแหน่งจุดใกล้นั้นจะกำหนดให้เป็นเวลา $t_0 = 0$ และตัวสุดท้ายจะเป็นระยะห่างระหว่างดาราจักรตอนเริ่มต้น R_0 เงื่อนไขเริ่มต้นเหล่านี้จะถูกนำไปใช้ในการแก้สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งของการเปลี่ยนแปลงตามเวลาของมุมกวาดจริง f โดยมุมกวาดจริงเริ่มต้น f_0 จะคำนวณได้จาก R_0



รูปที่ 4.1 ตัวอย่างวงโคจร ในรูปเป็นวงโคจรสัมพัทธ์ของ M_2 ซึ่งเคลื่อนที่แบบพาราโบลารอบจุดมวล M_1 โดยวงโคจรพาราโบลาจะเป็นกรณีที่ $e = 1$

ส่วนเงื่อนไขเริ่มต้นของตัวดาราจักรเองนั้น จากหัวข้อ 3.1 ได้กำหนดไว้แล้วว่าดาราจักรทำมุมเอียงกับระนาบวงโคจร โดยมีมุมที่กำหนดทิศทางการวางตัวของระนาบดาราจักรเทียบกับ

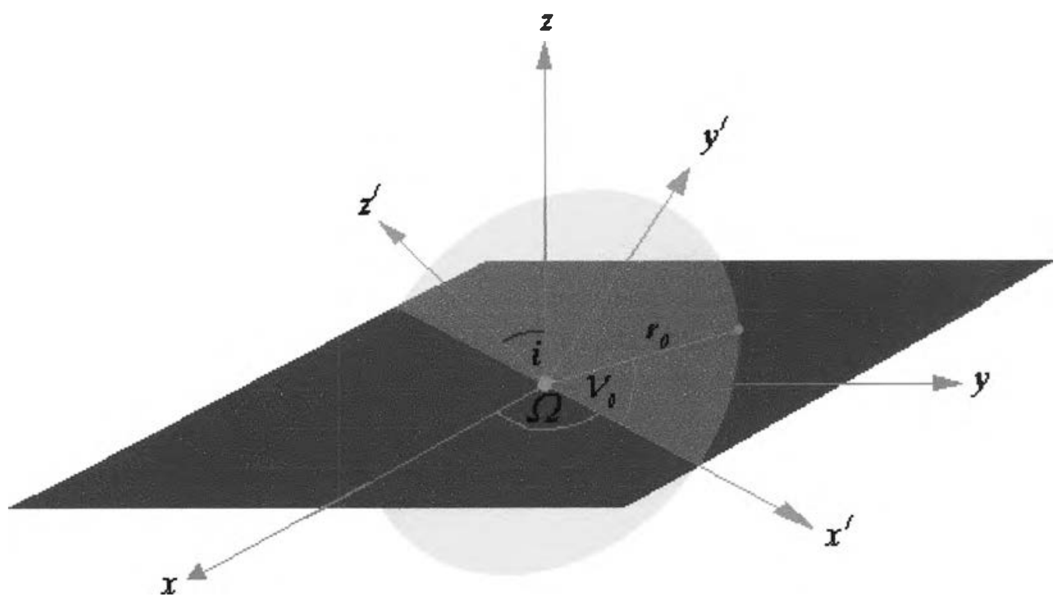
ระนาบวงโคจร $(x-y)$ เป็น i , Ω ส่วนการระบุตำแหน่งเริ่มต้นของดาวภายในระนาบวงโคจรนี้จะต้องระบุสองค่าคือ รัศมีวงโคจร r_0 และ ตำแหน่งเชิงมุม V_0 (รูปที่ 4.2)

จำนวนวงโคจรของดาวจะกำหนดให้เหมาะสมกับระบบที่จะทำการจำลอง โดยมีได้ไม่เกิน 10 วงโคจร วงโคจรนอกสุดจะกำหนดให้เป็นรัศมีดาราจักร แต่ละวงโคจรจะมีจำนวนดาวคงที่คือ $N = 103$ ดวง ดังนั้นตำแหน่งเชิงมุมเริ่มต้นของดาวดวงที่ k ในแต่ละวงโคจรคือ

$$V_0 = \frac{2k\pi}{N} \quad ; \; k = 1, 2, ..., 103 \tag{4.1}$$

สำหรับรัศมีวงโคจรเริ่มต้นของวงโคจรดาวซึ่งเป็นวงโคจรวงกลม จะกำหนดให้รัศมีวงโคจรที่ m มีค่าเป็น

$$r_0 = 0.1m \; ; \; m = 1,2, ...,10 \tag{4.2}$$



รูปที่ 4.2 แสดงตำแหน่งของดาว ณ เวลาเริ่มต้นสำหรับดาวที่รัศมีวงโคจร r_0 และตำแหน่งเชิงมุม V_0 ระนาบของดาราจักร(สีเหลือง)อยู่ในระนาบ x' - y' ส่วนวงโคจรของดาราจักร (ระนาบสีฟ้า)อยู่ในระนาบ x - y ในรูปนี้ใช้ศูนย์กลางของดาราจักร M_l เป็นจุดกำเนิด

จากรูปที่ 4.2 ตำแหน่งของดาวในพิกัดคาร์ทีเซียน (x', y', z') คือ

$$x_0' = r_0 \cos V_0$$

$$y_0' = r_0 \sin V_0$$

$$z_0' = 0$$

แต่การคำนวณตำแหน่งของดาว จะคำนวณโดยอ้างอิงพิกัด $(x\ ,\ y,\ z)$ ดังนั้นจะต้องแปลงพิกัดของดาวจาก $(x', y', z') \rightarrow (x, y, z)$ โดยแทนค่าสมการข้างบนลงในสมการที่ (ง.2) จะได้พิกัดของดาว ณ เวลาเริ่มต้นเป็น

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= r_0 [\cos V_0 \cos \Omega - \sin V_0 \sin \Omega \cos i] \\ y_0 &= r_0 [\cos V_0 \sin \Omega + \sin V_0 \cos \Omega \cos i] \\ z_0 &= r_0 \sin V_0 \sin i \end{aligned}\right\} \quad (4.3)$$

หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของสมการที่ (4.3) เทียบกับเวลาได้สมการที่ (4.4) ซึ่งเป็นความเร็วเริ่มต้นของดาว

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_0 &= -nr_0 [\sin V_0 \cos \Omega + \cos V_0 \sin \Omega \cos i] \\ \dot{y}_0 &= -nr_0 [\sin V_0 \sin \Omega - \cos V_0 \cos \Omega \cos i] \\ \dot{z}_0 &= nr_0 \cos V_0 \sin i \end{aligned}\right\} \quad (4.4)$$

n คืออัตราเร็วเชิงมุมของวงโคจร (ความเร็วข้างต้นเป็นความเร็วของดาวที่กำหนดให้หมุนทวนเข็มนาฬิกา หากต้องการให้ดาวหมุนตามเข็มนาฬิกาจะต้องคูณความเร็วข้างต้นด้วย -1)

หลังจากได้กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นให้กับระบบเรียบร้อยแล้วต่อไปก็จะเป็นการแก้สมการอนุพันธ์ โดยจะเริ่มจากการแก้สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งของมุมกวาดจริง คือสมการที่ (3.5), (3.7) หรือ (3.9) ขึ้นอยู่กับชนิดของวงโคจร (ชนิดของวงโคจรกำหนดโดยค่า e) สมการเหล่านี้จะอินทิเกรตด้วยวิธีรุงเกคุตตา อันดับที่ 5 (ภาคผนวก ค) ผลลัพธ์จะได้เป็นมุมกวาดจริง f เมื่อแทนเข้าไปในสมการที่ (3.4) , (3.6) หรือ (3.8) ก็จะได้ระยะห่างระหว่างดาราจักร R และแสดงตำแหน่งของดาราจักรในพิกัดคาร์ทีเซียน (X, Y, Z) (โดยให้ดาราจักร M_1เป็นจุดกำเนิด)เป็น

$$\left.\begin{aligned} X &= R \cos f \\ Y &= R \sin f \\ Z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (4.5)$$

หลังจากนั้นจะเป็นการแก้สมการอนุพันธ์เพื่อหาตำแหน่งของดาว ณ เวลา t ใดๆ จากสมการที่ (3.2) สามารถแยกองค์ประกอบของสมการการเคลื่อนที่ของดาวในพิกัดคาร์ทีเซียน (x, y, z) ได้เป็น

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\frac{GM_1 x}{r^3} - GM_2\left[\frac{X}{R^3} - \frac{X-x}{L^3}\right] \\
\ddot{y} &= -\frac{GM_1 y}{r^3} - GM_2\left[\frac{Y}{R^3} - \frac{Y-y}{L^3}\right] \\
\ddot{z} &= -\frac{GM_1 z}{r^3} - GM_2\frac{z}{L^3}
\end{aligned}\right\} \qquad (4.6)$$

โดย $L = [(X-x)^2 + (Y-y)^2 + z^2]^{1/2}$

สมการที่ (4.6) จะอินทิเกรตด้วยวิธีรุงเกคุตตาอันดับที่ 5 สำหรับสมการอนุพันธ์อันดับสอง (ภาคผนวก ค) โดยใช้สมการที่ (4.3) , (4.4) และ R_0 เป็นเงื่อนไขเริ่มต้นของการคำนวณ

ในกรณีที่มีดาวโคจรรอบดาราจักร M_2ด้วยก็จะต้องกำหนดพารามิเตอร์ของดาราจักร M_2 ต่างหากเป็น i_2 , Ω_2 ส่วนการกำหนดค่าเริ่มต้นและการคำนวณตำแหน่งของดาวก็จะเหมือนกับกรณีของดาวในดาราจักร M_1 เพียงแต่เปลี่ยนพารามิเตอร์ของดาราจักร และการคำนวณจะให้ M_2 เป็นจุดกำเนิด

4.3 การแสดงผล

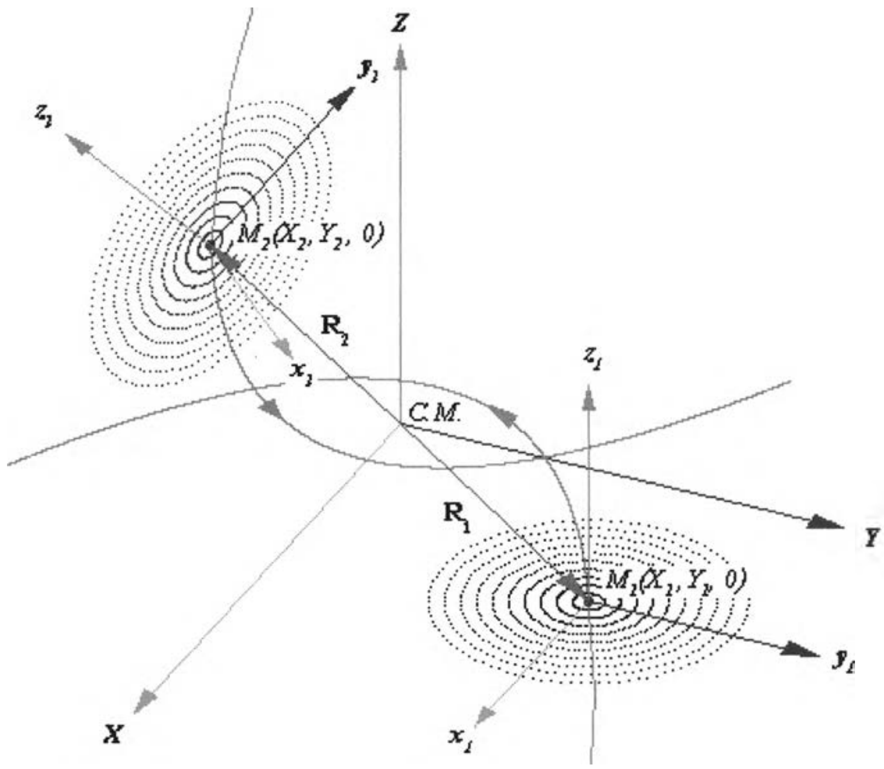
หลังจากการคำนวณจะนำผลที่ได้คือตำแหน่งของดาราจักรและดาวมาแสดงผลบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ การแสดงตำแหน่งของดาราจักรจะใช้จุดศูนย์กลางมวลของระบบดาราจักรทั้งสองเป็นจุดอ้างอิงดังรูปที่ 4.3 จากสมการที่ (ก.25) และ (ก.26) ตำแหน่งของดาราจักร M_1 และ M_2 ในกรอบอ้างอิงของจุดศูนย์กลางมวลนี้คือ

$$\mathbf{R}_1 = -\frac{M_2}{(M_1 + M_2)}\mathbf{R} \tag{4.7}$$

$$\mathbf{R}_2 = \frac{M_1}{(M_1 + M_2)}\mathbf{R} \tag{4.8}$$

R เป็นเวกเตอร์ที่ชี้จาก มวล M_1 ไปยัง M_2

ส่วนการแสดงตำแหน่งของดาวก็จะใช้จุดศูนย์กลางของดาราจักรเป็นจุดอ้างอิง เช่นดาวที่แต่เดิมเคลื่อนที่รอบดาราจักร M_1 ก็จะแสดงตำแหน่งโดยอ้างอิงจุด $(X_1, Y_1, 0)$ เป็นต้น



รูปที่ 4.3 การแสดงตำแหน่งของดาราจักรโดยให้จุดศูนย์กลางมวล *C.M.* เป็นจุดอ้างอิง วงโคจรพาราโบลาของดาราจักรอยู่ในระนาบ *X-Y* จากรูปดาราจักรทั้งสองจะทำมุมเทียบกับระนาบวงโคจรไม่เหมือนกัน

ทิศทางการมองไปบนระนาบวงโคจรที่แตกต่างกันมีผลทำให้เห็นรูปร่างของระบบเปลี่ยนแปลงไป (รูปที่ 4.4) ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องระบุทิศทางการมองไปบนระนาบทางโคจรไว้ด้วย การจะระบุทิศทางการมองจะต้องมีระนาบอ้างอิงก่อนโดยให้หน้าจอคอมพิวเตอร์เป็นระนาบ

อ้างอิงเรียกว่าระนาบท้องฟ้า (plane of sky) ทิศทางการวางตัวของระนาบวงโคจรจะระบุเป็นมุมอ้างอิงกับระนาบท้องฟ้า (รูปที่ 4.5)

แต่เดิมเมื่อมีพิกัดของจุดต่างๆในระบบพิกัด *(x , y, z)* ก็จะต้องแปลงไปสู่ระบบพิกัด (x_s , y_s , z_s) จากสมการที่ (ง.1) จะได้

$$x_s = x(\cos\lambda\cos\alpha - \sin\lambda\sin\alpha\cos\beta)$$

$$+ y(-\sin\lambda\cos\alpha - \cos\lambda\sin\alpha\cos\beta) \qquad (4.9a)$$

$$+ z\sin\alpha\sin\beta$$

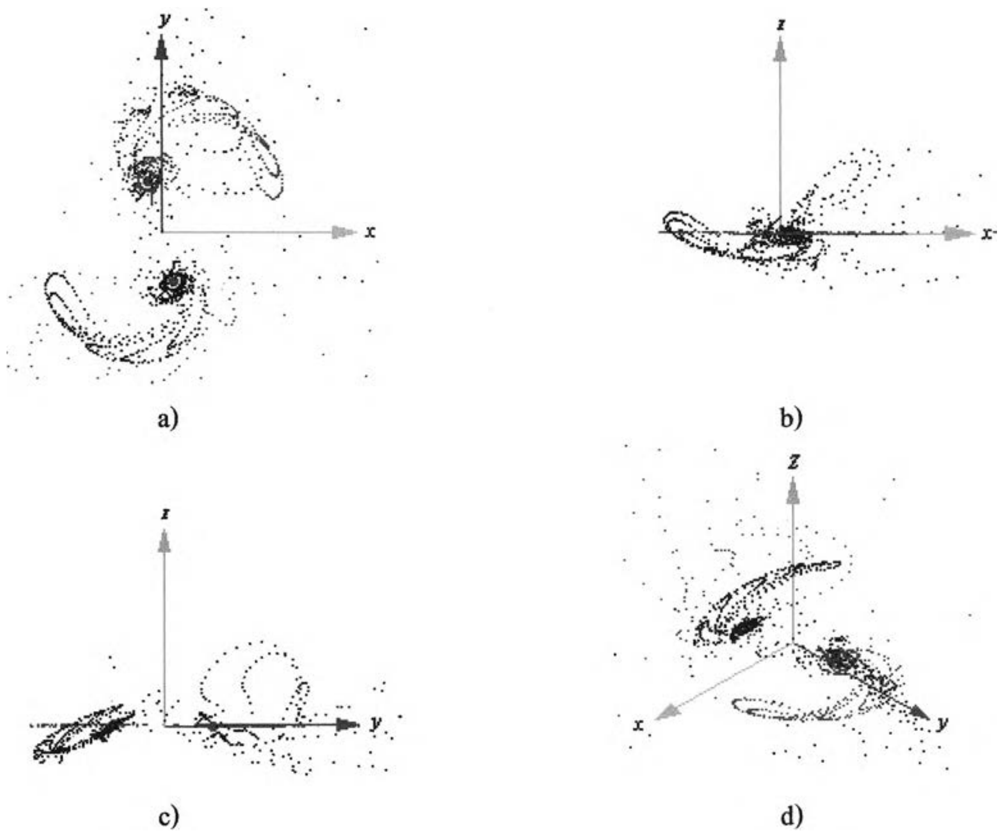
$$y_s = x(\cos\lambda\sin\alpha + \sin\lambda\cos\alpha\cos\beta)$$

$$+ y(-\sin\lambda\sin\alpha + \cos\lambda\cos\alpha\cos\beta) \qquad (4.9b)$$

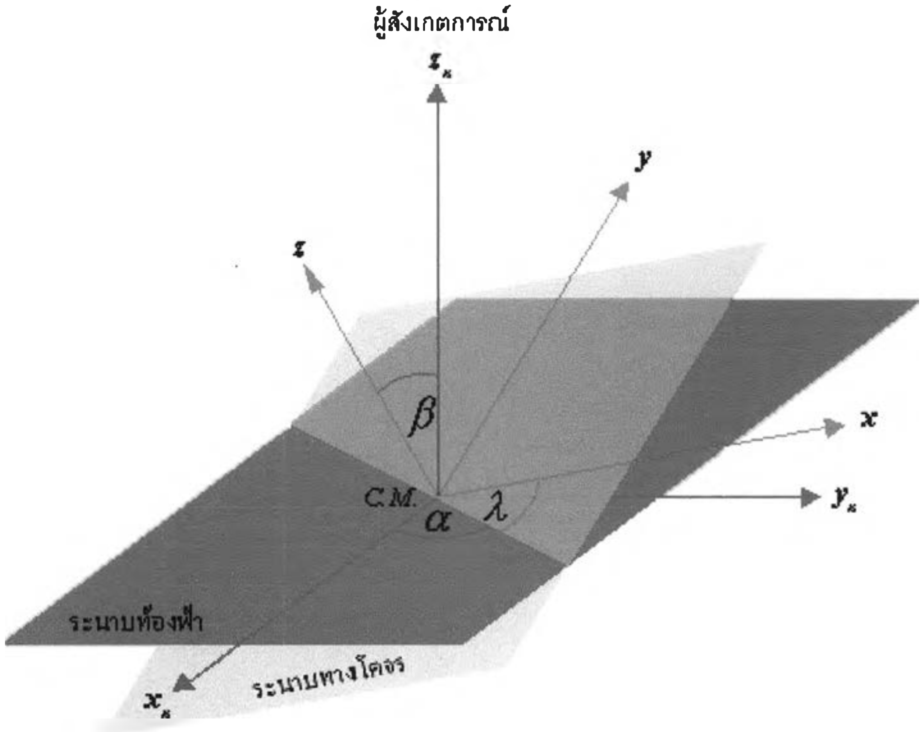
$$- z\cos\alpha\sin\beta$$

$$z_s = x\sin\lambda\sin\beta + y\cos\lambda\sin\beta + z\cos\beta \qquad (4.9c)$$

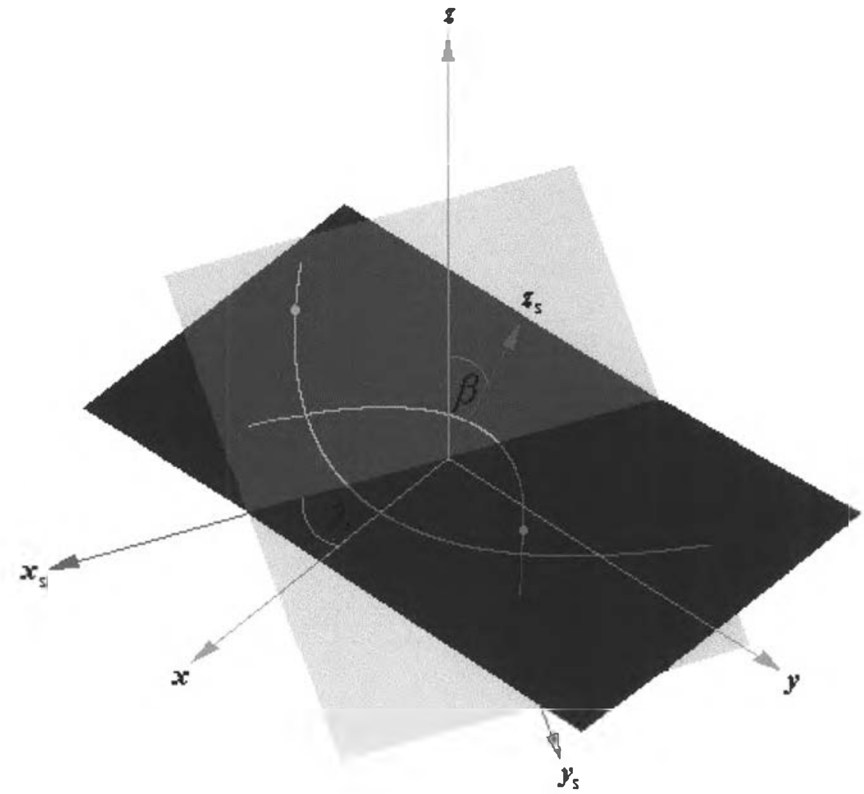
จากสมการที่ (4.9) เฉพาะ x_s และ y_s เท่านั้นที่จะถูกนำไปแสดงผลเป็นภาพของการเกิดอันตรกิริยาที่ฉายภาพลงบนระนาบท้องฟ้า การเปลี่ยนทิศทางการมองก็คือการเปลี่ยนค่า β, λ และ α แต่โดยทั่วไปนิยมระบุเฉพาะค่า β และ λ ดังรูปที่ 4.6 เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงค่า α ไม่ได้ทำให้ลักษณะปรากฏของดาราจักรเปลี่ยนแปลงไป



รูปที่ 4.4 ภาพจำลองอันตรกิริยาระหว่างดาราจักรที่มองจากมุมมองที่ต่างกัน a) มองตั้งฉากกับระนาบวงโคจร(มองจากแกน z) b) มองจากแกน $-y$ c) มองจากแกน x d) มองเป็นมุมเอียงจากทางด้านบนของระนาบวงโคจร



รูปที่ 4.5 แสดงความสัมพันธ์ของระนาบท้องฟ้ากับระนาบวงโคจร ระบบพิกัดของระนาบวงโคจรและระนาบท้องฟ้าคือ (x, y, z) และ (x_s, y_s, z_s) ตามลำดับ กำหนดให้แกน x_s และ y_s ชี้ไปทางขวาและด้านบนของหน้าจอคอมพิวเตอร์ตามลำดับ ส่วนแกน z_s จะชี้ออกจากหน้าจอคอมพิวเตอร์(ชี้ไปยังผู้สังเกตการณ์) α คือมุมที่วัดจากแกน x_s ไปยังเส้นตัดของระนาบ เรียกระยะแวงของเส้นตัดระนาบ λ คือมุมที่วัดจากเส้นตัดระนาบไปยังแกน x ส่วน β เป็นมุมที่วัดระหว่างแกน z และ z_s ซึ่งก็คือความเอียงของระนาบวงโคจร



รูปที่ 4.6 การระบุทิศทางการมองไปบนระนาบ x -y จะระบุเป็นมุมเอียง β และมุมระยะเส้นตัดระนาบ λ ซึ่งวัดจากแกน x ถึงเส้นตัดระนาบ ซึ่งในที่นี้แกน x_s จะชี้ไปยังเส้นตัดระนาบเสมอ ($\alpha = 0^{o}$)