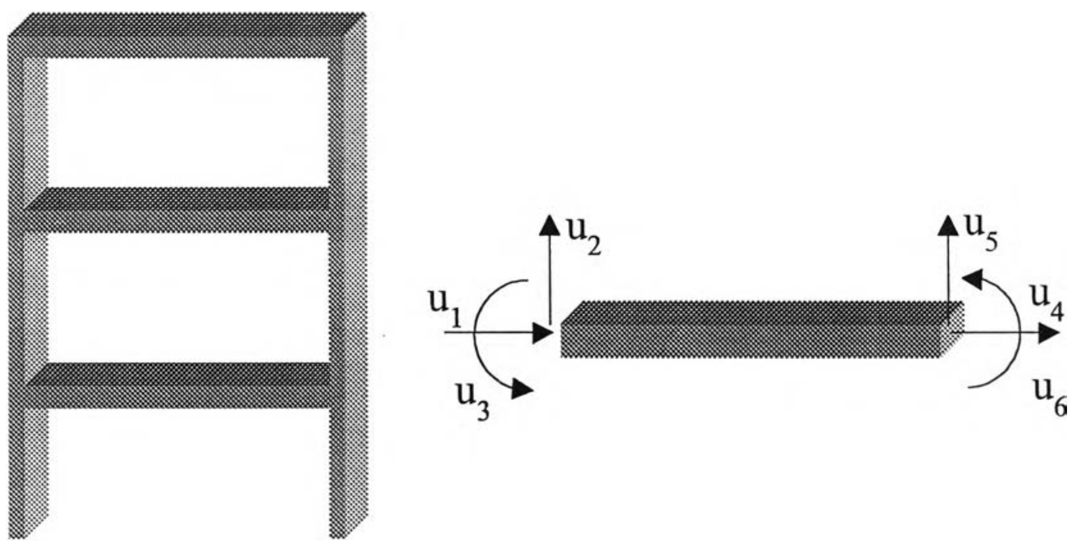
บทที่ 2
ทฤษฎีพลศาสตร์ของโครงข่ายแบบระนาบโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ในบทนี้จะกล่าวถึงการสร้างสมการการสั่นสะเทือนของโครงสร้างอาคาร เริ่มตั้งแต่การกำหนดเมตริกซ์มวล (Mass matrix) และเมตริกซ์ความแข็งเกร็ง (Stiffness matrix) ของแต่ละเอลิเมนต์จากฟังก์ชันโดยประมาณภายใน (Element interpolation functions) และสมการของลากรานจ์ (Lagrange's equation) แล้วทำการเปลี่ยนแปลงพิกัดของการขจัดทั้งหมดเพื่อปรับให้ทุกเอลิเมนต์ที่วางตัวทำมุมต่าง ๆ กันมีพิกัดอ้างอิงเดียวกัน จากนั้นนำเมตริกซ์ของแต่ละเอลิเมนต์มาประกอบเข้าด้วยกันเป็นเมตริกซ์รวมของโครงสร้างแล้วสร้างระบบสมการดิฟเฟอเรนเชียล (System of simultaneous differential equations) ขึ้น ซึ่งเป็นระบบสมการแสดงลักษณะการสั่นสะเทือนของโครงสร้างอาคาร จากนั้นแก้ระบบสมการโดยการหาค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดเชพก่อน แล้วนำโหมดเชพทั้งหมดมาสร้างเป็นเมตริกซ์โมแดล ซึ่งใช้ในการหาคำตอบของระบบสมการดิฟเฟอเรนเชียลในรูปผลตอบสนองสูงสุดสำหรับแต่ละพิกัดของโครงสร้างอาคาร

2.1 สมมติฐานของโครงสร้างอาคาร (จากรายการอ้างอิง [1])



(ก) (ข)

รูปที่ 2-1 ตัวอย่างแบบจำลองของโครงสร้างอาคารที่ใช้ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

- โครงสร้างของอาคารเป็นโครงข่ายแบบระนาบ 2 มิติ (Plane frame) ซึ่งประกอบขึ้นจากเอลิเมนต์ย่อยแบบคาน
- การเคลื่อนตัวในแนวแกนของคาน (u_1 และ u_4) เป็นอิสระจากการเคลื่อนตัวในแนวดิ่งและการโก่งตัวของคาน (u_2 u_3 u_5 และ u_6)
- กำหนดให้ที่จุดต่อระหว่างเสากับคานเป็นมุมฉากตลอดเวลา
- ถือว่าความหน่วงของโครงสร้างมีค่าน้อยมากจึงไม่นำมาคิด ในการหาค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดเชพของโครงสร้างอาคาร

2.2 การกำหนดเมตริกซ์มวล และเมตริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์

วิธีการหนึ่งที่ใช้กันอย่างแพร่หลายในทางวิศวกรรมศาสตร์และทางฟิสิกส์สำหรับหาสมการการเคลื่อนที่ของระบบได้แก่ การใช้สมการของลากรานจ์ (Lagrange's equation) ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad , \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad (2\text{-}1)$$

โดยที่ q_i คือพิกัดทั่ว ๆ ไป T และ U คือพลังงานจลน์รวม และพลังงานศักย์รวมของระบบ ตามลำดับ และ Q_i คือ แรงหรือโมเมนต์ภายนอกที่มากระตุ้นระบบ

อาศัยสมมติฐานในการกำหนดค่าพลังงานศักย์รวม และพลังงานจลน์รวมของแต่ละเอลิเมนต์ขึ้น นำไปแทนค่าในสมการของลากรานจ์จะได้เมตริกซ์มวลและเมตริกซ์ความแข็งเกร็งของคาน 1 เอลิเมนต์ ดังนี้ (การหาค่าเมตริกซ์มวลและเมตริกซ์ความแข็งเกร็ง ภาคผนวก ก.)

<u>เมตริกซ์มวล</u>

$$[m]_e = \frac{\gamma l}{420}\begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 156 & -22l \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}2)$$

เมตริกซ์ความแข็งเกร็ง

$$[k]_e = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} \left(\frac{l}{r}\right)^2 & 0 & 0 & -\left(\frac{l}{r}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ -\left(\frac{l}{r}\right)^2 & 0 & 0 & \left(\frac{l}{r}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}3)$$

โดยที่ l คือความยาวของคาน E คือ ค่ามอดูลัสความยืดหยุ่นของวัสดุ I คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่ γ คือ มวลต่อหนึ่งหน่วยความยาวของคาน และ r คือรัศมีไจเรชันรอบแกนการโก่งของคาน

ในขั้นต้นนี้สามารถกำหนดสมการการเคลื่อนที่ของคานแต่ละเอลิเมนต์ ได้ดังนี้

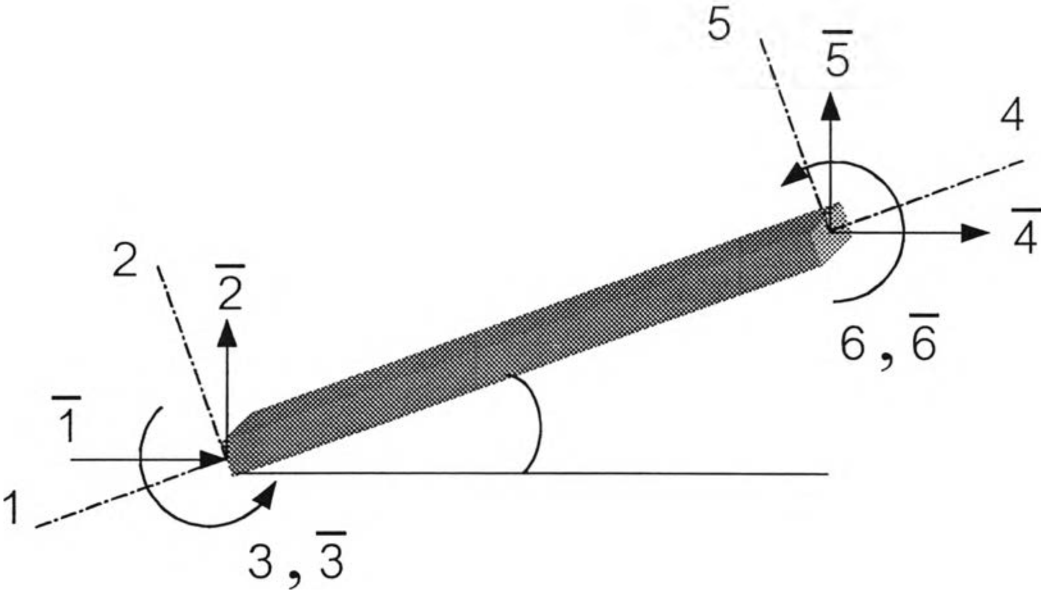
$$[m]_e\{\ddot{u}_i\}_e + [k]_e\{u_i\}_e = \{f_i\}_e \qquad (2\text{-}4)$$

โดยที่ $\{u_i\}_e$ คือ เวคเตอร์การขจัดของจุดต่อประกอบด้วยพิกัดการขจัดตามแนวแกน การขจัดตามแนวดิ่ง และพิกัดการหมุน

$\{f_i\}_e$ คือ แรงหรือโมเมนต์ภายนอกที่มากระทำ ณ จุดต่อของเอลิเมนต์

2.3 การแปลงพิกัดของคาน (Coordinate transformations)

สมการที่ (2-4) เป็นสมการการเคลื่อนที่ของคาน 1 เอลิเมนต์ แต่โครงสร้างของอาคารทั้งหมดประกอบขึ้นจากคานหลาย ๆ เอลิเมนต์ ดังในรูปที่ 2-1 แต่ละเอลิเมนต์วางตัวอยู่ในทิศทำมุมต่าง ๆ กันกับแนวระดับ ดังนั้นจำเป็นต้องมีการปรับให้แต่ละพิกัดของทุก ๆ เอลิเมนต์อยู่ในระบบพิกัดทั่วไปของโครงสร้าง ซึ่งเป็นระบบที่ใช้อ้างอิงทั้งโครงสร้าง ดังแสดงในรูปที่ 2-2



รูปที่ 2–2 การเปลี่ยนแปลงจากพิกัดทั่วไปของคานเป็นพิกัดอ้างอิงหลักของโครงสร้าง

การแปลงจากพิกัดใด ๆ ของแต่ละเอลิเมนต์เป็นพิกัดทั่วไปของโครงสร้างนั้นสามารถทำได้โดยใช้เมตริกซ์เปลี่ยนแปลงคูณกับเวคเตอร์การขจัดของพิกัดหลัก และเวคเตอร์จากแรงภายนอกของแต่ละเอลิเมนต์ ดังนี้

$$\{u_i\}_e = [R]\{\bar{u}_i\}_e \tag{2-5}$$

$$\{f_i\}_e = [R]\{\bar{f}_i\}_e \tag{2-6}$$

โดยที่

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-7}$$

และ คุณสมบัติที่สำคัญของเมตริกซ์เปลี่ยนแปลงอย่างหนึ่ง คือ

$$[R]^T[R] = [I] \qquad (2\text{-}8)$$

โดยที่ $[I]$ คือ เมตริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix) หรือกล่าวได้ว่า $[R]$ เป็นเมตริกซ์ออร์โธโกนัล (Orthogonal matrix) ซึ่งมีคุณสมบัติ คือ

$$[R]^T = [R]^{-1} \qquad (2\text{-}9)$$

จากสมการที่ (2-5) และ (2-6) แทนค่าลงในสมการที่ (2-4) ได้สมการ

$$[m]_e[R]\{\ddot{u}_i\}_e + [k]_e[R]\{\bar{u}_i\}_e = [R]\{\bar{f}_i\}_e \qquad (2\text{-}10)$$

คูณสมการที่ (2-10) ตลอด ด้วย $[R]^{-1}$ และอาศัยคุณสมบัติจากสมการที่ (2-9) แทนในสมการที่ (2-10) ได้สมการ

$$[R]^T[m]_e[R]\{\ddot{u}_i\}_e + [R]^T[k]_e[R]\{\bar{u}_i\}_e = \{\bar{f}_i\}_e \qquad (2\text{-}11)$$

เขียนสมการที่ (2-11) ใหม่ ดังนี้

$$[\overline{m}]_e\{\ddot{u}_i\}_e + [\bar{k}]_e\{\bar{u}_i\}_e = \{\bar{f}_i\}_e \qquad (2\text{-}12)$$

โดยที่ $[\overline{m}]_e = [R]^T[m]_e[R]$ และ $[\bar{k}]_e = [R]^T[k]_e[R]$

สมการที่ (2-12) นี้เป็นสมการการเคลื่อนที่ของคาน 1 เอลิเมนต์ ในพิกัดทั่วไปของโครงสร้างอาคารทั้งหมด

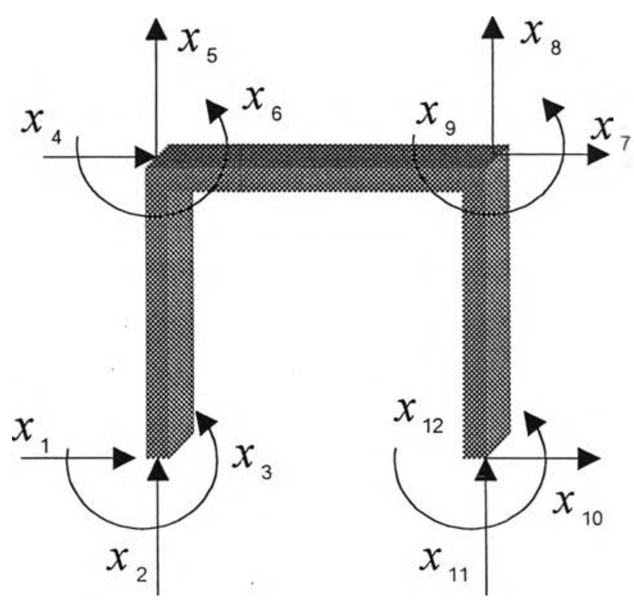
2.4 การประกอบระบบสมการของโครงสร้างจากสมการของเอลิเมนต์

เนื่องจากโครงสร้างของอาคารทั้งหมดถูกสมมติให้ประกอบขึ้นจากคานหลาย ๆ เอลิเมนต์ ดังนั้นระบบสมการของโครงสร้างจึงประกอบขึ้นจากสมการย่อย ๆ ของแต่ละเอลิเมนต์ โดยอาศัยความสัมพันธ์ของจุดต่อเป็นหลักอ้างอิง ดังนี้

$$\{\bar{u}_i\}_e = [A]_e\{x_i\} \tag{2-13}$$

โดยที่ $[A]_e$ คือ เมตริกซ์สี่เหลี่ยมผืนผ้ามีมิติเป็น 6 × 3 เท่าของจำนวนจุดต่อ สมาชิกประกอบด้วย 0 และ 1 ทำหน้าที่แปลงจากพิกัดทั่วไปของแต่ละเอลิเมนต์เป็นพิกัดอ้างอิงของโครงสร้างทั้งหมด ซึ่งสมาชิกของเมตริกซ์ $[A]_e$ จะมีค่าเป็น 1 เฉพาะในตำแหน่งที่ทำให้ผลคูณระหว่างเมตริกซ์ทางด้านขวามือของสมการที่ (2-13) มีค่าตรงกับพิกัดทั่วไปของแต่ละเอลิเมนต์ เช่นในรูปที่ 2-3 เอลิเมนต์ที่ 2 นั้น $[A]_2$ มีสมาชิกที่เป็น 1 เฉพาะในตำแหน่งที่ 4 ถึง 9 เท่านั้น

กำหนดให้ โครงสร้างประกอบด้วยคานทั้งหมด 3 เอลิเมนต์ มี 4 จุดต่อ ดังตัวอย่างในรูปที่ 2-3 เมื่อนำมาสร้างเป็นระบบสมการมีตัวแปรทั้งหมด 12 ตัว สามารถกำหนด $[A]_2$ ได้ดังนี้



รูปที่ 2-3 ตัวอย่างการกำหนดพิกัดหลักอ้างอิงของโครงสร้าง

$$[A]_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อแทนค่าสมการที่ (2-13) ลงไปในสมการที่ (2-12) แล้วเขียนสมการ

$$[\overline{m}]_e[A]_e\{\ddot{x}_i\} + [\bar{k}]_e[A]_e\{x_i\} = \{\bar{f}_i\}_e \qquad (2\text{-}14)$$

เพื่อความสะดวกในการรวมสมการทุกเอลิเมนต์เข้าด้วยกัน คูณสมการ (2-14) ตลอดด้วย $[A]_e^T$ ได้สมการเป็น

$$[A]_e^T[\overline{m}]_e[A]_e\{\ddot{x}_i\} + [A]_e^T[\bar{k}]_e[A]_e\{x_i\} = [A]_e^T\{\bar{f}_i\}_e \qquad (2\text{-}15)$$

สมการที่ (2-15) นี้ เป็นสมการการเคลื่อนที่ของคาน 1 เอลิเมนต์ เมื่ออยู่ในระบบพิกัดทั่วไปของโครงสร้างทั้งหมด ใช้วิธีการเดียวกันนี้เพื่อสร้างเมตริกซ์ $[A]_e^T[\overline{m}]_e[A]_e$ และเมตริกซ์ $[A]_e^T[\bar{k}]_e[A]_e$ ของทุก ๆ เอลิเมนต์ หลังจากนั้นนำเมตริกซ์ของทุกเอลิเมนต์มาบวกกันแบบเมตริกซ์จะได้เมตริกซ์รวมของระบบสมการ ซึ่งเป็นตัวแทนของการสั่นสะเทือนของโครงสร้างอาคาร ดังสมการ

$$[M]\{\ddot{x}_i\} + [K]\{x_i\} = \{F_i\} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots , n \qquad (2\text{-}16)$$

โดยที่ $[M] = \sum_{e=1}^{p} [A]_e^T[\overline{m}]_e[A]_e$ เมตริกซ์มวลรวมของระบบ

$$[K] = \sum_{e=1}^{p} [A]_e^T [\bar{k}]_e [A]_e$$ เมตริกซ์ความแข็งเกร็งรวมของระบบ

$$\{F_i\} = \sum_{e=1}^{p} [A]_e^T \{\bar{f}_i\}_e$$ เมตริกซ์แรงกระตุ้นรวมของระบบ

2.5 เงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition)

สำหรับปัญหาของโครงสร้างในงานวิจัยนี้ กำหนดให้ที่ตำแหน่งฐานเสาของอาคารส่วนที่ต่อจากพื้นดิน (Foundation) มีเงื่อนไขขอบเขตเป็นแบบแคลมพ์ (Clamped end) ดังนั้นการขจัดที่ตำแหน่งจุดต่อของฐานเสามีค่าเป็นศูนย์ตลอดทั้งการขจัดตามแนวแกน การขจัดตามแนวดิ่ง และการขจัดแบบหมุน เป็นผลให้ระบบสมการของโครงสร้างในรูปที่ 2-1 (ก) มีระดับขั้นความเสรี (Degree of freedom) ลดลงไป 6 ค่า

2.6 การหาค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดเชพของโครงสร้าง

สำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนของระบบสมการที่มีระดับขั้นความเสรีมากกว่า 1 นั้น ข้อมูลที่สำคัญที่สุดที่ใช้ในการศึกษา คือ ค่าความถี่ธรรมชาติ และโหมดเชพของระบบ ซึ่งหาได้จากค่าเจาะจง และเวคเตอร์เจาะจง ของระบบสมการที่ (2-16) ซึ่งค่าต่าง ๆ เหล่านี้ ต้องอาศัยวิธีการทางคณิตศาสตร์ช่วยในการหา โดยเริ่มต้นจากสมการการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแบบอิสระและไม่มีแรงหน่วง (Undamped free vibration) ดังนี้คือ

$$[M]\{\ddot{x}_i\} + [K]\{x_i\} = \{0\} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (2\text{-}17)$$

เมื่อกำหนดให้คำตอบของสมการมีลักษณะเป็นแบบฮาร์โมนิคคือกำหนดให้ $\{x_i\} = \{x_i\}e^{j\omega t}$ แล้วนำไปแทนค่าในสมการที่ (2-17) จะได้สมการรูปแบบทั่วไปสำหรับหาค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดเชพของระบบโครงสร้าง ดังนี้คือ

$$\omega^2[M]\{\phi_i\} = [K]\{\phi_i\} \qquad (2\text{-}18)$$

วิธีการหาค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดเชพจากสมการที่ (2-18) นี้ มีอยู่หลายวิธีอาทิ เช่น วิธีการของจาโคบี (Jacobi 's method) วิธีการเพาเวอร์ (Power method) และวิธีการของเฮาส์โฮลเดอร์ (Househoulder 's method) เป็นต้น แต่ละวิธีการขึ้นอยู่กับขนาดของเมตริกซ์ จำนวนของค่าความถี่ธรรมชาติ และจำนวนของโหมดเชพที่ต้องการ (ทั้งหมดหรือเพียงบางส่วน) สำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างในงานวิจัยนี้ เมตริกซ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์มีขนาดค่อนข้างใหญ่ ขนาดสูงสุดที่ใช้ในการวิเคราะห์มีมิติ 117 × 117 ดังนั้นจึงไม่สามารถใช้วิธีการแทนค่าผลลัพธ์แบบวนรอบ (Iterative method) เช่นวิธีการของจาโคบีได้ เพราะเมื่อเมตริกซ์มีขนาดใหญ่การแทนค่าผลลัพธ์นี้จะให้ค่าผิดพลาดสูงมาก

ในการแก้ปัญหาเรื่องการหาค่าเจาะจงของเมตริกซ์ขนาดใหญ่ ได้นำวิธีการจากรายการอ้างอิง [2] มาใช้ เป็นวิธีการหาค่าเจาะจง และเวคเตอร์เจาะจงของเมตริกซ์ขนาดใหญ่โดยการแปลงเมตริกซ์ให้กลายเป็นเมตริกซ์ในรูปที่สามารถหาค่าเจาะจงและเวคเตอร์เจาะจงได้ง่ายกว่าและค่าเจาะจงที่ได้จากเมตริกซ์ซึ่งถูกแปลงแล้วจะมีค่าเท่ากับค่าเจาะจงของเมตริกซ์เดิม ซึ่งวิธีการแปลงนี้ถูกเรียกว่า วิธีการแปลงเสมือน (Similarity transformation) ผลการคำนวณด้วยวิธีการนี้ให้ค่าที่ถูกต้องมีเสถียรภาพสูงมาก รายละเอียดของวิธีการนี้ศึกษาได้จาก ภาคผนวก ข สำหรับค่าเจาะจงที่ได้จากการคำนวณนำมาคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างได้ ส่วนเวคเตอร์เจาะจงนั้นคือโหมดเชพที่แต่ละค่าความถี่ธรรมชาติ สำหรับโหมดเชพแต่ละโหมดของโครงสร้างเมื่อทำให้ค่าใดค่าหนึ่งมีค่าเป็น 1 (ในงานวิจัยนี้กำหนดให้ค่าแรกเป็น 1 หรือถ้าค่าแรกมีค่าน้อยมากจะใช้ค่าที่มากที่สุดมีค่าเป็น 1 แทน) แล้วนำมาเรียงต่อกันจากโหมดเชพที่ความถี่ต่ำที่สุดไล่ไปจนถึงโหมดเชพที่ความถี่สูงที่สุดจะได้ เมตริกซ์โมแดล (Modal matrix) ดังนี้

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_n \end{Bmatrix}_1 & \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_n \end{Bmatrix}_2 & \cdots & \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_n \end{Bmatrix}_n \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}19)$$

ซึ่งจะนำไปใช้แก้สมการหาผลตอบสนองของโครงสร้างในลำดับต่อไป

2.7 การหาผลตอบสนองโดยวิธีการแปลงพิกัดด้วยเมตริกซ์โมแดล (Modal synthesis)

วิธีการนี้เป็นเพียงหนึ่งในหลาย ๆ วิธีการที่ใช้ในการหาค่าผลตอบสนองของระบบ เริ่มต้นจากการแปลงพิกัดแบบเชิงเส้นจากพิกัดทั่วไปของโครงสร้างมาเป็นพิกัดหลักก่อนดังนี้

$$\{x_i\} = [\Phi]\{\delta_i\} \qquad (2\text{-}20)$$

เมื่อ $\{\delta_i\}$ คือ เวคเตอร์ของพิกัดหลัก (principle coordinates) จากสมการที่ (2-20) แทนค่าลงในสมการที่ (2-16) จะได้สมการ

$$[M][\Phi]\{\ddot{\delta}_i\} + [K][\Phi]\{\delta_i\} = \{F_i\} \qquad (2\text{-}21)$$
$$, i = 1, 2, \ldots, n$$

คูณทางด้านซ้ายของทุก ๆ เทอม ในสมการที่ (2-21) ด้วย $[\Phi]^T$ ได้สมการใหม่ คือ

$$[\Phi]^T[M][\Phi]\{\ddot{\delta}_i\} + [\Phi]^T[K][\Phi]\{\delta_i\} = [\Phi]^T\{F_i\},$$
$$i = 1, 2, \ldots, n$$
$$(2\text{-}22)$$

กำหนดให้ $[M_r] = [\Phi]^T[M][\Phi]$ และ $[K_r] = [\Phi]^T[K][\Phi]$ ซึ่งต่างก็เป็นเมตริกซ์ทแยงมุม (Diagonal matrix) ดังนั้น สมการที่ (2-22) นำมาเขียนใหม่ได้ ดังนี้

$$[M_r]\{\ddot{\delta}_i\} + [K_r]\{\delta_i\} = [\Phi]^T\{F_i\}, \; i = 1, 2, \ldots, n \qquad (2\text{-}23)$$

ในขั้นต้นถือว่าความหน่วงของโครงสร้างมีผลกับค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดเชพของโครงสร้างน้อยมาก แต่สำหรับผลตอบสนองของโครงสร้างนั้น ความหน่วงของโครงสร้างมีความสำคัญอยู่ไม่น้อย และเนื่องจากเมตริกซ์ความหน่วงของโครงสร้างใด ๆ ไม่สามารถกำหนดได้โดยตรง ดังนั้นจึงพิจารณาวิธีการสร้างเมตริกซ์ความหน่วงของโครงสร้างโดยประมาณ วิธีการหนึ่งที่ใช้ในการกำหนดเมตริกซ์ความหน่วงของโครงสร้างโดยประมาณ เรียกว่า วิธีการกำหนดความหน่วง

แบบสัดส่วนของเรย์ไลน์ (Reyleigh's proportional damping) จากรายการอ้างอิง [1] ซึ่งสมมติให้เมตริกซ์ความหน่วงเป็นสัดส่วนกับเมตริกซ์มวลหรือเมตริกซ์ความแข็งเกร็งก็ได้ ทั้งนี้เพื่อให้เมตริกซ์ความหน่วงสามารถถูกลดรูปเป็นเมตริกซ์ทแยงมุมได้เช่นเดียวกัน ดังนั้นจึงกำหนดความสัมพันธ์ของเมตริกซ์ความหน่วงเป็น ดังนี้

$$[C] = \beta[M] \tag{2-24}$$

โดยที่ β เป็นค่าคงที่ใด ๆ และจากสมการที่ (2-24) สามารถกำหนดได้ว่า

$$[\Phi]^T[C][\Phi] = \beta[\Phi]^T[M][\Phi] \tag{2-25}$$

ซึ่งเป็นเมตริกซ์ทแยงมุมเช่นเดียวกัน ดังนั้นจึงสามารถกำหนดเมตริกซ์ความหน่วงของพิกัดหลักของโครงสร้างได้จากสมาชิกของความหน่วงในแนวทแยงมุม ซึ่งมีค่าเป็น

$$2\zeta_r\omega_r[M_r] = \beta[M_r] \tag{2-26}$$

โดยที่ ζ_r คือ แฟคเตอร์ของความหน่วง (Damping factor) ซึ่งสำหรับโครงสร้างของอาคารที่เป็นคอนกรีตเสริมเหล็ก ค่า ζ_r ที่เหมาะสมใช้ 5 เปอร์เซ็นต์ จากรายการอ้างอิง [1]

สำหรับเมตริกซ์ของความหน่วง $[C]$ นั้นต้องใช้วิธีการหาย้อนกลับโดยเริ่มต้นจาก

$$[C_r] = [\Phi]^T[C][\Phi] = 2\zeta_r\omega_r[M_r] \tag{2-27}$$

อาศัยคุณสมบัติทางคณิตศาสตร์ของเมตริกซ์ ดังนั้น

$$[C] = \left([\Phi]^T\right)^{-1}[C_r][\Phi]^{-1} \tag{2-28}$$

ต่อมานำเมตริกซ์ความหน่วงรวมเข้าไว้ในระบบสมการของโครงสร้าง สมการที่ (2-23)

$$[M_r]\{\ddot{\delta}_i\} + [C_r]\{\dot{\delta}_i\} + [K_r]\{\delta_i\} = [\Phi]^T\{F_i\}\ , \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (2\text{-}29)$$

สมการที่ (2-29) นี้เป็นระบบสมการที่แต่ละสมการต่างก็เป็นอิสระต่อกัน (Decoupling differential equations) ดังนั้นจึงสามารถหาคำตอบของแต่ละสมการแยกกันได้ เมื่อนำมาเขียนในเทอมพิกัดหลัก สมการที่ (2-29) เขียนแยกได้เป็น

$$\ddot{\delta}_r + 2\zeta_r\omega_r\dot{\delta}_r + \omega_r^2\delta_r = \frac{[\Phi]^T f_r}{M_r}\ , \quad r = 1, 2, \ldots, n \qquad (2\text{-}30)$$

ในที่นี้พิจารณาจำกัดเฉพาะกรณีที่ภาระกระทำจากภายนอกเป็นแบบฮาร์โมนิค (รูปแบบของภาระกระทำเนื่องจากเครื่องจักรแบบหมุนที่มีปัญหาการไม่สมดุล) นั่นคือภาระกระทำมีรูปแบบเป็น $f = F_0 \sin\omega t$ หรือ $f = F_0 \cos\omega t$ สำหรับแรงในแนวดิ่งและแนวราบตามลำดับ ซึ่งคำตอบของสมการที่ (2-30) แต่ละสมการ จะคิดเฉพาะขนาดของการขจัดสูงสุดหรือคำตอบสภาวะคงตัวเท่านั้น

หลังจากที่ได้คำตอบของแต่ละสมการในเทอมของพิกัดหลักแล้ว คำตอบของสมการในพิกัดอ้างอิงหรือคำตอบที่แท้จริงของโครงสร้างนั้นจะอยู่ในรูปการรวมกันแบบเชิงเส้น (Linear combination) ระหว่างโหมดเชพแต่ละโหมดกับแต่ละผลตอบสนองสูงสุดในเทอมของพิกัดหลักดังสมการต่อไปนี้

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{Bmatrix}_{max} = \delta_1 \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ . \\ . \\ \phi_n \end{Bmatrix}_1 + \delta_2 \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ . \\ . \\ \phi_n \end{Bmatrix}_2 + \ldots + \delta_n \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ . \\ . \\ \phi_n \end{Bmatrix}_n \qquad (2\text{-}31)$$

ในการพิจารณาคำตอบของระบบสมการดังกล่าว จะทำอย่างละเอียดในบทที่ 4