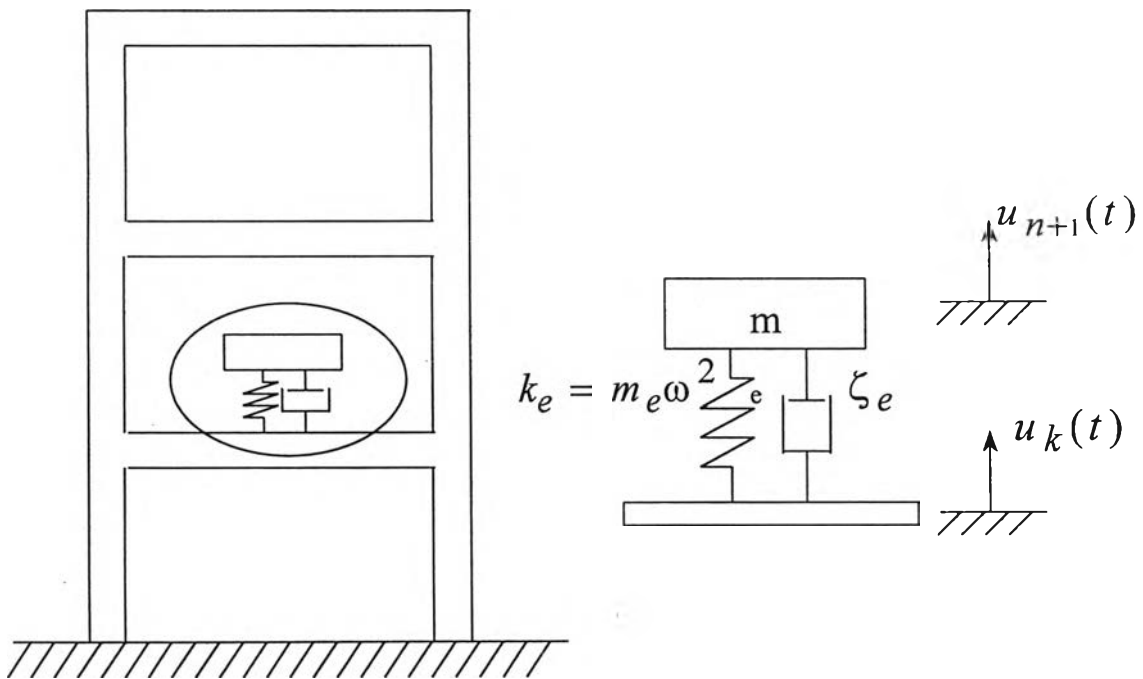


บทที่ 3

คุณสมบัติทางพลศาสตร์ของระบบโครงสร้างอาคาร กับ เครื่องจักร

ในบทที่แล้วได้ประดิษฐ์สมการการสั่นสะเทือนของโครงสร้างอาคารที่มีลักษณะเป็นโครงข่ายแบบระนาบโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ส่วนที่จะกล่าวถึงในบทนี้ได้แก่ การสร้างระบบสมการสำหรับการสั่นสะเทือนของระบบรวมโครงสร้างอาคารรวมเครื่องจักร โดยการนำระบบสมการของโครงสร้างอาคารมาประกอบเข้ากับสมการของชุดแยกการสั่นสะเทือน ซึ่งในการติดตั้งชุดแยกการสั่นสะเทือนเข้ากับโครงสร้างของอาคารนี้ เป็นการเพิ่มระดับขึ้นความเสรีให้กับระบบสมการทั้งหมด ส่งผลให้คุณสมบัติการสั่นสะเทือนของระบบทั้งหมดเปลี่ยนแปลงไป สำหรับวิธีการที่ใช้ประกอบระบบสมการการสั่นสะเทือนของโครงสร้างอาคารเข้ากับเครื่องจักรในงานวิจัยนี้ใช้วิธีการคอนเวนชัน (Conventional Method) หลังจากนั้นนำระบบสมการที่เกิดขึ้นใหม่นี้ไปหาคำตอบด้วยวิธีการเดียวกันกับในบทที่ 2 ในที่สุดจะได้ผลตอบสนองสูงสุดของระบบโครงสร้างอาคารรวมเครื่องจักร นอกจากนี้ยังได้ทำการวิเคราะห์แนวโน้มของความถี่ธรรมชาติ และโหมดเซพที่เกิดขึ้นใหม่เทียบกับค่าเดิมของโครงสร้างอาคารโดยใช้วิธีการเพอร์เทอร์เบชัน (Perturbation Method) ซึ่งถือว่าน้ำหนักของชุดแยกการสั่นสะเทือนที่นำไปติดตั้งมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับน้ำหนักของโครงสร้างอาคาร



รูปที่ 3.1 แสดงการประกอบชุดแยกการสั่นสะเทือนเข้ากับ โครงสร้าง

3.1 วิธีการคอนเวนชัน

เป็นวิธีการหนึ่งที่ใช้ในการหาคุณสมบัติทางพลศาสตร์ของระบบร่วมระหว่างระบบที่มีหลายระดับขั้นความเสรี (โครงสร้าง) กับระบบที่มีหนึ่งระดับขั้นความเสรี (ชุดฐานแยกการสั่นสะเทือน และอุปกรณ์) โดยเริ่มต้นจากระบบสมการเฉพาะของโครงสร้าง ในสมการที่ (2-17) คือ

$$[M]\{\ddot{X}_i\} + [K]\{X_i\} = \{0\}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3-1)$$

และ สามารถหาค่าความถี่ธรรมชาติ และ โหมดเซพของโครงสร้าง ได้จากสมการที่ (2-18)

$$[K]\{\Phi_i\} = \omega^2[M]\{\Phi_i\} \quad (3-2)$$

โดยที่ เมตริกซ์มวล เมตริกซ์ความแข็งแกร่ง และ โหมดเซพของโครงสร้าง ได้แก่

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & \cdot & m_{1k} & \cdot & m_{1n} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ m_{k1} & \cdot & m_{kk} & \cdot & m_{kn} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ m_{n1} & \cdot & m_{nk} & \cdot & m_{nn} \end{bmatrix}, \quad \{\Phi_i\} = \begin{Bmatrix} \Phi_{1i} \\ \cdot \\ \Phi_{ki} \\ \cdot \\ \Phi_{ni} \end{Bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdot & k_{1k} & \cdot & k_{1n} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ k_{k1} & \cdot & k_{kk} & \cdot & k_{kn} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ k_{n1} & \cdot & k_{nk} & \cdot & k_{nn} \end{bmatrix}$$

ในรูปที่ 3-1 แสดงการติดตั้งอุปกรณ์หรือเครื่องจักร เข้ากับโครงสร้าง โดยผ่านฐานแยกการสั่นสะเทือน ตำแหน่งที่ติดตั้งตรงกับพิกัด u_k และ พิกัดการเคลื่อนที่ของฐานแยกการสั่นสะเทือนซึ่งเพิ่มขึ้นมามีพิกัดเป็น u_{n+1} กำหนดให้ค่าความแข็งแกร่งและค่าความหน่วงของสปริง

หรือวัสดุที่รองรับฐานแยกการสั่นสะเทือน ใช้สัญลักษณ์ k_e และสัญลักษณ์ ζ_e ตามลำดับ ดังนั้นจะได้เมตริกซ์มวล เมตริกซ์ความแข็งแกร่ง และโหนดเซพใหม่ของระบบ ดังนี้

$$[M^*] = \begin{bmatrix} m_{11} & \cdot & m_{1k} & \cdot & m_{1n} & | & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & | & \cdot \\ m_{k1} & \cdot & m_{kk} & \cdot & m_{kn} & | & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & | & \cdot \\ m_{n1} & \cdot & m_{nk} & \cdot & m_{nn} & | & 0 \\ \hline 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & | & m_e \end{bmatrix}, \quad \{\Phi_i^*\} = \begin{Bmatrix} \Phi_{1i}^* \\ \cdot \\ \Phi_{ki}^* \\ \cdot \\ \Phi_{ni}^* \\ \hline \Phi_{n+1,i}^* \end{Bmatrix}$$

$$[K^*] = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdot & k_{1k} & \cdot & k_{1n} & | & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & | & \cdot \\ k_{k1} & \cdot & k_{kk} + m_e \omega_e^2 & \cdot & k_{kn} & | & -m_e \omega_e^2 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & | & \cdot \\ k_{n1} & \cdot & k_{nk} & \cdot & k_{nn} & | & 0 \\ \hline 0 & \cdot & -m_e \omega_e^2 & \cdot & 0 & | & m_e \omega_e^2 \end{bmatrix}$$

สังเกตค่าเมตริกซ์มวลและเมตริกซ์ความแข็งแกร่งของระบบใหม่ที่เกิดขึ้นนั้นได้มาจากการพิจารณาสมการการเคลื่อนที่ของระบบในเทอมของการจัดสัมพัทธ์ ส่วนโหนดเซพของระบบใหม่จะมีระดับขั้นความเสรีเพิ่มขึ้นจากเดิม 1 ค่า แล้วนำเมตริกซ์เหล่านี้ไปหาค่าความถี่ธรรมชาติ และโหนดเซพใหม่ได้จากสมการ

$$[K^*]\{\Phi_i^*\} = \omega^{*2}[M^*]\{\Phi_i^*\} \quad (3-3)$$

หลังจากนั้นสร้างเมตริกซ์ความหน่วงของระบบรวมขึ้นมาใหม่ จากเมตริกซ์ความหน่วงโดยประมาณของโครงสร้าง เพื่อที่จะนำไปใช้ในการหาค่าผลตอบสนองสูงสุดของระบบ ดังสมการที่ (2-28) ดังนี้

เมตริกซ์ความหน่วงโดยประมาณของโครงสร้าง คือ

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdot & c_{1k} & \cdot & c_{1n} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ c_{k1} & \cdot & c_{kk} & \cdot & c_{kn} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ c_{n1} & \cdot & c_{nk} & \cdot & c_{nn} \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ความหน่วงของระบบรวม คือ

$$[C^*] = \left[\begin{array}{cccc|c} c_{11} & \cdot & c_{1k} & \cdot & c_{1n} & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ c_{k1} & \cdot & c_{kk} + 2\zeta_e m_e \omega_e & \cdot & c_{kn} & -2\zeta_e m_e \omega_e \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdot & c_{nk} & \cdot & c_{nn} & 0 \\ \hline 0 & \cdot & -2\zeta_e m_e \omega_e & \cdot & \cdot & 2\zeta_e m_e \omega_e \end{array} \right]$$

เมื่อได้เมตริกซ์ของระบบทั้งหมดแล้ว นำมาแทนค่าเพื่อหาผลตอบสนองของระบบรวม โดยเริ่มต้นจากสมการ

$$[M^*] \{\ddot{X}_i^*\} + [C^*] \{\dot{X}_i^*\} + [K^*] \{X_i^*\} = \{F^*\}, \quad (3-4)$$

$$i = 1, 2, \dots, n+1$$

ใช้วิธีการแก้ปัญหาเช่นเดียวกับในบทที่ 2 คือแปลงจากพิกัดทั่วไปของระบบมาเป็นพิกัดหลักซึ่งแต่ละสมการจะสามารถหาค่าตอบหรือผลตอบสนองสูงสุดได้โดยอิสระต่อกัน แล้วจึงแปลงจากผลตอบสนองสูงสุดในเทอมของพิกัดหลักเป็นเทอมของพิกัดทั่วไปอีกครั้ง วิธีการเริ่มต้นจากนำค่าโหมดเฉพาะมาเรียงไว้ด้วยกันได้เป็นเมตริกซ์โมเดล ดังนี้

$$[\Phi^*] = \left[\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_{n+1} \end{array} \right\}_1 \\ \left\{ \begin{array}{c} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_{n+1} \end{array} \right\}_2 \\ \dots \\ \left\{ \begin{array}{c} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_{n+1} \end{array} \right\}_{n+1} \end{array} \right] \quad (3-5)$$

แล้วกำหนดพิกัดใหม่ คือ

$$\left\{ \delta_i^* \right\} = [\Phi^*] \left\{ x_i^* \right\} \quad (3-6)$$

นำไปแทนค่าในสมการที่ (3-4) แล้วคูณทางด้านซ้ายของสมการทั้งหมดด้วยทรานสโพสของเมตริกโมเดล ในที่สุดจะได้สมการที่เป็นอิสระต่อกัน จำนวน $n+1$ สมการ เช่นเดียวกับสมการที่ (2-29) ซึ่งสามารถหาคำตอบสนองสูงสุดในสภาวะคงตัวของแต่ละสมการได้ แล้วจึงเปลี่ยนพิกัดกลับมาเป็นพิกัดเดิม โดยคำตอบของระบบสมการที่ (3-4) จะอยู่ในรูปแบบ ดังนี้

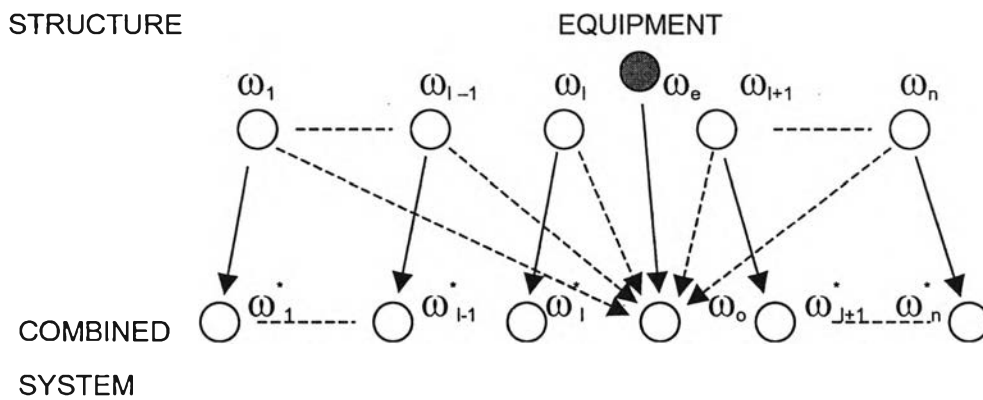
$$\left\{ \begin{array}{c} x_1^* \\ x_2^* \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^* \end{array} \right\}_{\max} = \delta_1^* \left\{ \begin{array}{c} \phi_1^* \\ \phi_2^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_{n+1}^* \end{array} \right\}_1 + \delta_2^* \left\{ \begin{array}{c} \phi_1^* \\ \phi_2^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_{n+1}^* \end{array} \right\}_2 + \dots + \delta_{n+1}^* \left\{ \begin{array}{c} \phi_1^* \\ \phi_2^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_{n+1}^* \end{array} \right\}_{n+1} \quad (3-7)$$

3.2 การประมาณคุณสมบัติร่วมของระบบกรณีเครื่องจักรมีน้ำหนักเบา

ในการติดตั้งเครื่องจักรหรืออุปกรณ์ในอาคาร โดยใช้ฐานแยกการสั่นสะเทือนนั้น เป็นผลให้ระบบทั้งหมดมีคุณสมบัติเปลี่ยนแปลงไปดังที่กล่าวมาแล้ว ถ้าหากไม่รู้ว่าทิศทาง การเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติเป็นอย่างไร ก็ไม่สามารถที่จะออกแบบระบบแยกการสั่นสะเทือนที่มีประสิทธิภาพได้ หรือไม่สามารถทำนายผลที่จะเกิดขึ้นล่วงหน้าได้ ดังนั้นในหัวข้อนี้จะนำเสนอการวิธีการออก

แบบระบบแยกการสั่นสะเทือนในอาคารที่มีประสิทธิภาพ โดยมีสมมติฐานคือถือว่าน้ำหนักของเครื่องจักรบนชุดแยกการสั่นสะเทือนมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับน้ำหนักของโครงสร้างอาคารทั้งหมด

การเพิ่มระบบของอุปกรณ์หรือเครื่องจักรเข้าไปในระบบโครงสร้างของอาคาร เป็นผลให้ค่าความถี่ธรรมชาติ และโหมดเซพของทั้งระบบเปลี่ยนแปลงไป แต่ในการเปลี่ยนแปลงนั้นมีความเกี่ยวเนื่องกับค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดเซพเดิมอยู่ไม่น้อย เนื่องจากค่าของแต่ละโหมดที่เกิดขึ้นมาใหม่มาจากอิทธิพลของทุก ๆ โหมดของโครงสร้างเดิมประกอบกัน ดังรูปที่ 3-2 จากรายการอ้างอิง [3]



รูปที่ 3-2 แสดงกลไกการเปลี่ยนแปลงความถี่ธรรมชาติของระบบรวม

เริ่มต้นจากสมการที่ (3-3) ทำการแยกออกมาเป็น 2 สมการได้ดังนี้ คือ

$$[K] \begin{Bmatrix} \phi_{1i}^* \\ \vdots \\ \phi_{ki}^* \\ \vdots \\ \phi_{ni}^* \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ m_e \omega_e^2 (\phi_{ki}^* - \phi_{n+1,i}^*) \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \omega_i^{*2} [M] \begin{Bmatrix} \phi_{1i}^* \\ \vdots \\ \phi_{ki}^* \\ \vdots \\ \phi_{ni}^* \end{Bmatrix} \quad (3-8ก.)$$

$$-m_e \omega_e^2 (\phi_{ki}^* - \phi_{n+1,i}^*) = \omega_i^{*2} m_e \phi_{n+1,i}^* \quad (3-8ข.)$$

สมการที่ (3-8ข.) สามารถนำมาเขียนใหม่ได้ ดังนี้

$$\phi_{n+1,i}^* = -\frac{\omega_e^2}{\omega_i^{*2} - \omega_e^2} \phi_{ki}^* = \alpha_i \phi_{ki}^* \quad (3-9)$$

โดยที่ $\alpha_i = \phi_{n+1,i}^* / \phi_{ki}^*$ คือ แฟกเตอร์การขยายตัวของโหนดเซพของอุปกรณ์เมื่อเทียบกับตำแหน่งที่ติดตั้ง นำค่าจากสมการที่ (3-9) นี้ไปแทนในสมการที่ (3-8ก.) ได้สมการ

$$[K] \begin{Bmatrix} \phi_{1i}^* \\ \vdots \\ \phi_{ki}^* \\ \vdots \\ \phi_{ni}^* \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ m_e \phi_{ki}^* \omega_i^{*2} \omega_e^2 / (\omega_i^{*2} - \omega_e^2) \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \omega_i^{*2} [M] \begin{Bmatrix} \phi_{1i}^* \\ \vdots \\ \phi_{ki}^* \\ \vdots \\ \phi_{ni}^* \end{Bmatrix} \quad (3-10)$$

จากสมการที่ (3-10) เทอมที่ไม่เป็นศูนย์เพียงเทอมเดียวในเวกเตอร์ที่สองทางด้านซ้ายเกิดจากอุปกรณ์หรือเครื่องจักร ซึ่งมีมวลน้อยมากเมื่อเทียบกับมวลของโครงสร้าง ดังนั้นจึงกำหนดให้ค่าความถี่ธรรมชาติและโหนดเซพของระบบโครงสร้างรวมเครื่องจักร เปลี่ยนแปลงไปจากของโครงสร้างเดิมน้อยมาก (สมมติฐานของวิธีการเพอร์เทอเบชันในรายการอ้างอิง [3]) ทั้งนี้อัตราส่วนเรย์ไลน์ (Reyliegh's Quotient) กล่าวไว้ว่า ถ้ากำหนดให้ขนาดของค่าผิดพลาดจากการประมาณค่าโหนดเซพของระบบอยู่ในระดับที่หนึ่ง (First order) แล้วจะส่งผลให้ค่าผิดพลาดจากการประมาณค่าความถี่ธรรมชาติอยู่ในระดับที่สอง (Second Order) ซึ่งมีค่าน้อยกว่าเพียงพอที่จะใช้อ้างอิงได้ สำหรับกรณีนี้สมมติฐานข้อแรกคือโหนดเซพของโครงสร้างก่อนติดตั้งมีค่าใกล้เคียงกับโหนดเซพหลังติดตั้งจนถือว่าเท่ากันได้ เขียนได้ดังนี้

$$\phi_{mi}^* = \phi_{mi} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n ; i \neq 0 \quad (3-11)$$

วิธีการประมาณค่าแบบนี้สามารถใช้ได้เฉพาะในกรณีที่โหมดเซพของระบบรวมโหมดที่ i ได้รับอิทธิพลมาจากโหมดเซพโหมดที่ i ของระบบโครงสร้างเดิมเป็นหลักเท่านั้น หรือกล่าวได้ว่าวิธีการนี้จะใช้ได้ก็ต่อเมื่อความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างกับความถี่ธรรมชาติของชุดแยกการสั่นสะท้อนไม่ตรงกันเท่านั้น และมีวิธีประมาณค่าความถี่ธรรมชาติที่เกิดขึ้นใหม่ ดังนี้

คุณตลอดสมการที่ (3-8) ด้วยโหมดเซพโหมดใดโหมดหนึ่ง คือ $\{\Phi_i\}^T$ ได้สมการ

$$\omega_i^2 M_i + m_e \phi_{ki}^2 \frac{\omega_i^{*2} \omega_e^2}{\omega_i^{*2} - \omega_e^2} = \omega_i^{*2} M_i \quad (3-12)$$

โดยที่ $M_i = \{\Phi_i\}^T [M] \{\Phi_i\}$ คือ มวลโมเดลโหมดที่ i ของโครงสร้าง ซึ่งสมการนี้เขียนใหม่ได้เป็น

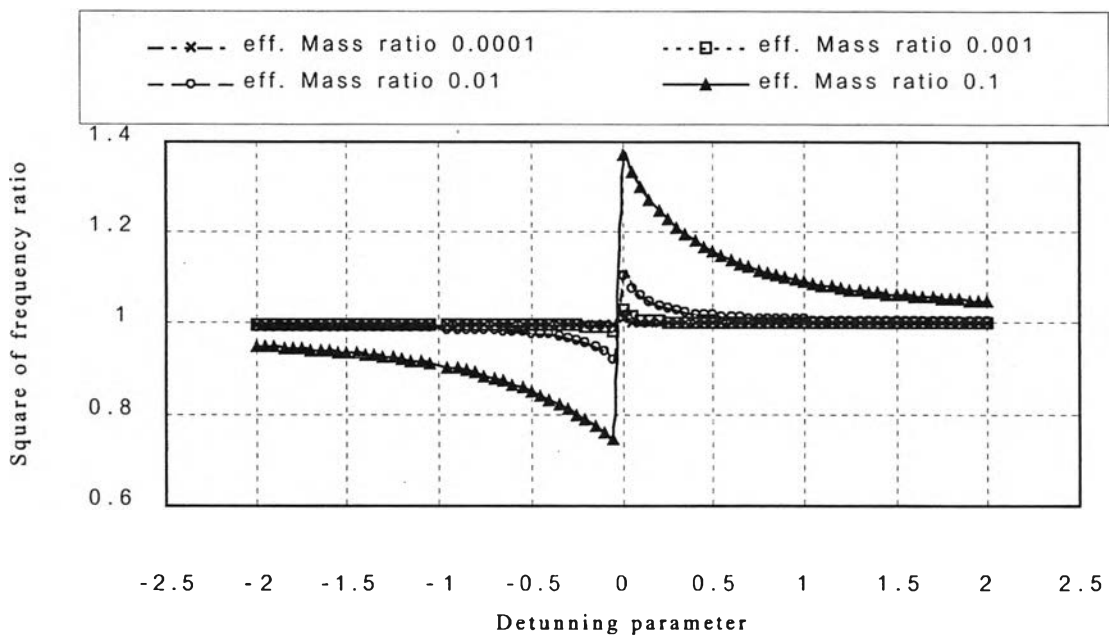
$$(1 + \beta_i) \left(\frac{\omega_i^*}{\omega_i} \right)^4 - 2 \left(1 + \frac{\beta_i + \gamma_i}{2} \right) \left(\frac{\omega_i^*}{\omega_i} \right)^2 + 1 = 0 \quad (3-13)$$

โดยที่ $\beta_i = \frac{\omega_i^2 - \omega_e^2}{\omega_e^2}$ เรียกว่า พารามิเตอร์ความถี่ไม่สอดคล้อง (Detuning parameter)

สำหรับโหมดที่ i ส่วน $\gamma_i = m_e / (M_i / \phi_{ki}^2)$ เรียกว่าอัตราส่วนมวลประสิทธิผล (Effective mass ratio) สำหรับโหมดที่ i ซึ่งสมการที่ (3-13) นี้มีผลเฉลย ดังในสมการที่ (3-14)

$$\left(\frac{\omega_i^*}{\omega_i}\right)^2 = \begin{cases} \frac{1 + \frac{\beta_i + \gamma_i}{2} - \left[\left(1 + \frac{\beta_i + \gamma_i}{2}\right)^2 - (1 + \beta_i) \right]^{1/2}}{1 + \beta_i} & , \beta_i < 0 \\ \frac{1 + \frac{\beta_i + \gamma_i}{2} + \left[\left(1 + \frac{\beta_i + \gamma_i}{2}\right)^2 - (1 + \beta_i) \right]^{1/2}}{1 + \beta_i} & , \beta_i \geq 0 \end{cases} \quad (3-14)$$

หลักเกณฑ์ในการเลือกค่าของ β_i คือเลือกเพื่อให้ได้ค่าของ ω_i^* ใกล้เคียงกับค่าของ ω_i หรือถ้าเลือก ω_i^* ให้มีค่าใกล้เคียงกับ ω_e จะได้โหมดเซพมีแนวโน้มเข้าใกล้โหมดใหม่ ส่วนกรณีที่ $\beta_i = 0$ รากของสมการโหมดอื่น ๆ ใช้ได้หมด ยกเว้นในโหมดที่ความถี่ตรงกันเท่านั้น ดังในรูปที่ 3-3



รูปที่ 3-3 กำลังสองของความถี่ใหม่เทียบกับความถี่เดิมหลังจากมีการติดตั้งเครื่องจักร

ตัวแปรอีกตัวหนึ่งที่ใช้ช่วยในการออกแบบ ได้จากการแทนค่าสมการที่ (3-9) ลงในสมการที่ (3-14) ได้เป็น

$$\alpha_i = \begin{cases} -\frac{1}{\frac{\beta_i + \gamma_i}{2} - \left[\left(1 + \frac{\beta_i + \gamma_i}{2} \right)^2 - (1 + \beta_i) \right]^{1/2}} & , \beta_i < 0 \\ -\frac{1}{\frac{\beta_i + \gamma_i}{2} + \left[\left(1 + \frac{\beta_i + \gamma_i}{2} \right)^2 - (1 + \beta_i) \right]^{1/2}} & , \beta_i \leq 0 \end{cases} \quad (3-15)$$

สำหรับสมการนี้ค่าของ α_i จะมีขนาดใหญ่ในกรณีที่ค่าของ β_i มีค่าน้อยมาก ซึ่งเกิดขึ้นเฉพาะในกรณีที่ความถี่ของระบบเครื่องจักรสอดคล้องกับความถี่โหมดใดโหมดหนึ่งของโครงสร้างอาคาร

กำหนดให้โหมดเซพของความถี่ที่เกิดขึ้นใหม่ (มาจากความถี่ของชุดแยกการสั่นสะเทือน) เป็น โหมดที่ 0 และสามารถหาค่าได้ดังนี้ เริ่มต้นจากกำหนดให้

$$\{\Phi_0^*\} = \begin{Bmatrix} \phi_{10}^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_{n0}^* \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3-16)$$

จากคุณสมบัติความเป็นออร์โธโกนัล ได้แก่ $\{\Phi_i^*\}^T [M^*] \{\Phi_0^*\} = 0$ เมื่อ i ไม่เป็นศูนย์ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \{\Phi_i^*\}^T [M^*] \{\Phi_0^*\} &= \{\Phi_i\}^T [M] \{\Phi_0\} + m_e \alpha_i \phi_{ki} = 0, \\ i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3-17)$$

ในที่สุดจะได้

$$\{\Phi_i\}^T [M] \{\Phi_0\} = -m_e \alpha_i \phi_{ki} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3-18)$$

นำค่าจากทุก ๆ โหมด $i = 1, 2, \dots, n$ มารวมเข้าด้วยกัน จะได้สมการใหม่คือ

$$[\Phi]^T [M] \{\Phi_0\} = - \begin{Bmatrix} m_e \alpha_1 \phi_{k1} \\ \vdots \\ m_e \alpha_n \phi_{kn} \end{Bmatrix} \quad (3-19)$$

จากสมการที่ (3-19) นำเมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์ 2 พจน์แรกทางซ้ายคูณตลอด ในที่สุดจะได้โหนดเซพ

$$\{\Phi_0\} = - \begin{Bmatrix} \sum_i \alpha_i \gamma_i \phi_{li} / \phi_{ki} \\ \vdots \\ \sum_i \alpha_i \gamma_i \phi_{ni} / \phi_{ki} \end{Bmatrix} \quad (3-20)$$

สมการที่ (3-20) แสดงให้เห็นว่าทุก ๆ โหมดจะร่วมกันสร้างโหนดเซพโหนดใหม่ขึ้นมา แต่ถึงอย่างไรก็ตามโหนดเซพใหม่ที่เกิดขึ้นนี้จะได้รับอิทธิพลจากโหนดเซพของโหนดที่มีค่าความถี่ใกล้เคียงกับความถี่ของระบบเครื่องจักร เป็นหลัก

สำหรับความถี่ของโหนดใหม่ที่เกิดขึ้น สามารถหาได้จากสมการที่ (3-16) และ (3-20) นำไปแทนค่าในสมการที่ (3-8ข.) ได้

$$\omega_0^* = \left(1 + \sum_i \alpha_i \gamma_i \right)^{1/2} \omega_e \quad (3-21)$$

จากสมมติฐานที่ประมาณค่าโหนดเซพของระบบโหนดใหม่ที่เกิดขึ้นในสมการที่ (3-11) สังเกตได้ว่าความถี่ของโหนดใหม่โดยประมาณนี้มีค่าแตกต่างจากความถี่เดิมของระบบเครื่องจักรเพียง เล็กน้อย ซึ่งความแตกต่างที่เกิดขึ้นเป็นผลเนื่องมาจากทุก ๆ โหนดประกอบกัน และโหนดที่มีอิทธิพลสูงที่สุดได้แก่โหนดที่มีความถี่ใกล้เคียงกันมากที่สุด นั่นคือโหนดที่ l

สำหรับโหนดเซพของโหนดที่มีความถี่ก่อนรวมระบบใกล้เคียงกับความถี่ของระบบเครื่องจักร จำเป็นต้องมีการปรับปรุงเพื่อความถูกต้อง ได้แก่โหนดที่ l ในการปรับปรุงโหนดเซพใช้วิธีการเดียวกันกับการสร้างโหนดเซพใหม่ คือใช้วิธีการรวมคุณสมบัติออร์โธโกนัลของทุก ๆ โหนดเข้าด้วยกัน รวมทั้งของโหนดใหม่ด้วย ดังนี้

$$\left\{ \Phi_l^* \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \sum_{i \neq l} \alpha_i \gamma_i \phi_{li} / \phi_{ki} - \frac{1}{\alpha_l} \phi_{ll} / \phi_{kl} \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{i \neq l} \alpha_i \gamma_i \phi_{ni} / \phi_{ki} - \frac{1}{\alpha_l} \phi_{nl} / \phi_{kl} \\ -1 \end{array} \right\} \quad (3-22)$$

3.3 กรณีระบบของเครื่องจักรมีความถี่สอดคล้องกับโครงสร้างอาคารอย่างสมบูรณ์

กรณีนี้กำหนดให้ระบบเครื่องจักรมีความถี่ตรงกันกับความถี่โหนดที่ l ของโครงสร้าง พิจารณาความถี่ที่เปลี่ยนแปลงไป ดังนี้

$$\omega_i^* \approx \begin{cases} \omega_i & , \quad i \neq l, 0 \\ \left(1 + \sqrt{\frac{\gamma_l}{2}}\right) \omega_l & , \quad i = l \\ \left(1 - \sqrt{\frac{\gamma_l}{2}}\right) \omega_e & , \quad i = 0 \end{cases} \quad (3-23)$$

จากสมการที่ (3-23) สามารถหาเฟคเตอร์การขยายตัวของโหนดเซพของชุดแยกการสั้น
 สะเทือนเมื่อเทียบกับโหนดเซพของโครงสร้าง ณ พิกัดที่ติดตั้งซึ่งสอดคล้องกันได้จากสมการ

$$\alpha_i = \begin{cases} -\frac{1}{\beta_i} & , \quad i \neq l, 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{\gamma_i}} & , \quad i = l \end{cases} \quad (3-24)$$

นำค่าต่าง ๆ เหล่านี้ไปใช้ในการหาโหนดเซพของระบบรวมได้ ดังแสดงต่อไปนี้

$$\{\Phi_i^*\} \approx \begin{cases} \phi_{1i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_{ni} \\ -\frac{\phi_{ki}}{\beta_i} \end{cases} , \quad i \neq l, 0 \quad \{\Phi_l^*\} \approx \begin{cases} \sqrt{\gamma_l} \frac{\phi_{1l}}{\phi_{kl}} - \sum_{i \neq l} \frac{\gamma_i}{\beta_i} \frac{\phi_{1i}}{\phi_{ki}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sqrt{\gamma_l} \frac{\phi_{nl}}{\phi_{kl}} - \sum_{i \neq l} \frac{\gamma_i}{\beta_i} \frac{\phi_{1i}}{\phi_{ki}} \\ -1 \end{cases}$$

$$\{\Phi_0^*\} \approx \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{\gamma_l} \frac{\phi_{1l}}{\phi_{kl}} + \sum_{i \neq l} \frac{\gamma_i}{\beta_i} \frac{\phi_{1i}}{\phi_{ki}} \\ \vdots \\ \sqrt{\gamma_l} \frac{\phi_{nl}}{\phi_{kl}} + \sum_{i \neq l} \frac{\gamma_i}{\beta_i} \frac{\phi_{li}}{\phi_{ki}} \\ + 1 \end{array} \right\} \quad (3-25)$$

จากสมการในบทนี้ ทำให้เข้าใจได้ถึงกลไกการเปลี่ยนแปลงของระบบโครงสร้างอาคารรวมเครื่องจักร โดยพิจารณาระบบแยกกันซึ่งสามารถใช้เป็นพื้นฐานในการออกแบบติดตั้งเครื่องจักรภายในอาคารโดยประมาณได้