บทที่ 2

วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์

วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์เป็นวิธีเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งที่เกิดขึ้นจากการรวมวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์และวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์เข้าด้วยกัน เพื่อที่จะหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่เกิดขึ้นตลอดทั่วโดเมนปัญหาได้ ดังนั้นวิทยานิพนธ์นี้จึงได้นำเสนอวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์มาเป็นวิธีวิเคราะห์ วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ใช้หาผลเฉลยบริเวณวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากและวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ใช้หาผลเฉลยบริเวณเงื่อนไขขอบเขตเปิดโล่ง โดยบริเวณขอบเขตของปัญหาหรืออวกาศว่างจะเป็นบริเวณที่มีการรวมวิธีทั้งสองเข้าด้วยกัน

บทนี้จะประกอบด้วยเนื้อหา ดังนี้

2.1 สมการพื้นฐานการวิเคราะห์สนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมาก

2.2 การวิเคราะห์สนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากกรณีปัญหา 2 มิติ

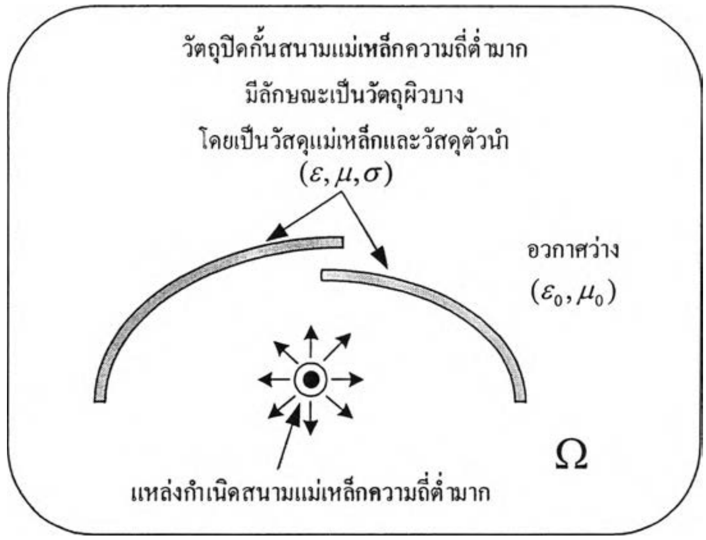
2.3 วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์

2.4 ตัวอย่างการคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์

2.5 บทสรุป

2.1 สมการพื้นฐานการวิเคราะห์สนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากกรณีปัญหา 2 มิติ

การพิจารณาปัญหาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในย่านความถี่ต่ำมาก $(f < 1000\,Hz)$ หรือที่รู้จักกันในชื่อช่วงความถี่ ELF (extremely low frequency) จัดว่าเป็นปัญหาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าอย่างหนึ่งซึ่งต้องเป็นไปตามสมการแมกซ์เวลล์และลักษณะของปัญหาแสดงได้ดังรูปที่ 2.1 ซึ่งประกอบด้วยวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่ผิวบางวางอยู่บริเวณอวกาศว่าง และมีคุณสมบัติทางไฟฟ้าดังนี้ สภาพยอม ε, ความซาบซึมได้ μ, สภาพนำไฟฟ้า σ บริเวณดังกล่าวจะมีแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากอยู่ด้วยซึ่งมีค่าเท่ากับ $\bar{J}_S$ และบริเวณอวกาศว่างจะมีคุณสมบัติทางไฟฟ้าดังนี้ สภาพยอม ε_0, ความซาบซึมได้ μ_0



รูปที่ 2.1 แบบจำลองคณิตศาสตร์การวิเคราะห์สนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมาก

เมื่อสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงตามเวลาแบบฟังก์ชันไซนูซอยด์ด้วยความถี่เชิงมุม ω ตามสมการแมกซ์เวลล์ ความเข้มสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ และความเข้มสนามแม่เหล็ก $\vec{H}$ ในตัวกลางที่พิจารณาต้องสอดคล้องกับสมการแมกซ์เวลล์ดังนี้ (Haus and Melcher, 1989)

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \tag{2.1}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_S + j\omega\varepsilon\vec{E} + \sigma\vec{E} \tag{2.2}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.3}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_s \tag{2.4}$$

ในที่นี้ $\vec{E}$ = ความเข้มสนามไฟฟ้า (electric field strength), $\vec{H}$ = ความเข้มสนามแม่เหล็ก (magnetic field strength), $\vec{B}$ = ความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็ก (magnetic flux density), $\vec{D}$ = ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า (electric flux density), μ = ความซาบซึมได้ (permeability), ε = สภาพยอม (permittivity), σ = สภาพนำไฟฟ้า (conductivity), $\vec{J}_S$ = ความหนาแน่นกระแส (current density) ของแหล่งกำเนิด และ ρ_s คือ ความหนาแน่นประจุไฟฟ้าของแหล่งกำเนิด

โดยที่ $\nabla \cdot \vec{J}_s = -j\omega\rho_s$

เมื่อจัดสมการแมกซ์เวลล์ในสมการที่ (2.1)-(2.4) ให้อยู่ในรูปสนามแม่เหล็กอย่างเดียว โดยการหาเคิร์ลของสมการที่ (2.2)

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \nabla \times \vec{J}_S + j\omega\varepsilon\nabla \times \vec{E} + \sigma\nabla \times \vec{E} \qquad (2.5)$$

แทนสมการ (2.1) ลงในสมการ (2.5) ผลที่ได้คือ สมการในรูปของสนามแม่เหล็กแต่อย่างเดียวดังนี้

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \nabla \times \vec{J}_S + j\omega^2\varepsilon\mu\vec{H} - j\omega\mu\sigma\vec{H} \qquad (2.6)$$

ในกรณีที่พิจารณาความถี่เชิงมุม ω อยู่ในช่วงความถี่ต่ำมาก ค่า $\omega^2\varepsilon\mu$ จะมีค่าน้อยมาก จนสามารถที่จะละการพิจารณาเทอมกระแสกระจัด (displacement current) ที่เกิดขึ้นในอวกาศว่าง (free space) ได้ ดังนั้นสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นในช่วงความถี่นี้จึงเป็นอิสระต่อกัน ในบริเวณอวกาศว่างและมีลักษณะเป็นไปตามอำนาจของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นนี้จะเป็นสนามแม่เหล็กเป็นเสียส่วนใหญ่

การหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่เกิดขึ้นนี้ จะดำเนินการโดยใช้ศักย์เวกเตอร์แม่-เหล็ก A (magnetic vector potential, A) เริ่มต้นจากความสัมพันธ์ของ $\vec{B}$ ตามสมการ (2.3) ดังนี้

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

ตามนิพจน์เวกเตอร์ $\nabla \cdot \nabla \times A = 0$ เสมอ จึงกล่าวได้ว่า

$$\vec{B} = \nabla \times A \qquad (2.7)$$

โดยที่ A คือ เวกเตอร์ใดๆ

เมื่อแทนสมการที่ (2.7) ลงในสมการที่ (2.1) จะได้ความสัมพันธ์ของสมการดังนี้

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\nabla \times A = -\nabla \times j\omega A \qquad (2.8)$$

และ
$$\nabla \times (\vec{E} + j\omega A) = 0 \tag{2.9}$$

จากเอกลักษณ์เวกเตอร์ $\nabla \times \nabla\phi = 0$ ดังนั้นสมการที่ (2.9) จะได้ว่า

$$\vec{E} + j\omega A = -\nabla\phi \tag{2.10}$$

และเมื่อแทน $\vec{E}$ จากสมการที่ (2.10) ลงในสมการที่ (2.2) จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\nabla \times \frac{1}{\mu}\nabla \times A = \vec{J}_S - j\omega\sigma A \tag{2.11}$$

จากเอกลักษณ์เวกเตอร์ $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla\nabla \cdot \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$ ทำให้สามารถแสดงสมการที่ (2.12) ได้เป็น

$$\frac{1}{\mu}\nabla\nabla \cdot A - \frac{1}{\mu}\nabla^2 A = \vec{J}_S - j\omega\sigma A \tag{2.12}$$

และจาก $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ ดังนั้นสมการที่ได้รับ คือ

$$\frac{1}{\mu}\nabla^2 A - j\omega\sigma A = -\vec{J}_S \tag{2.13}$$

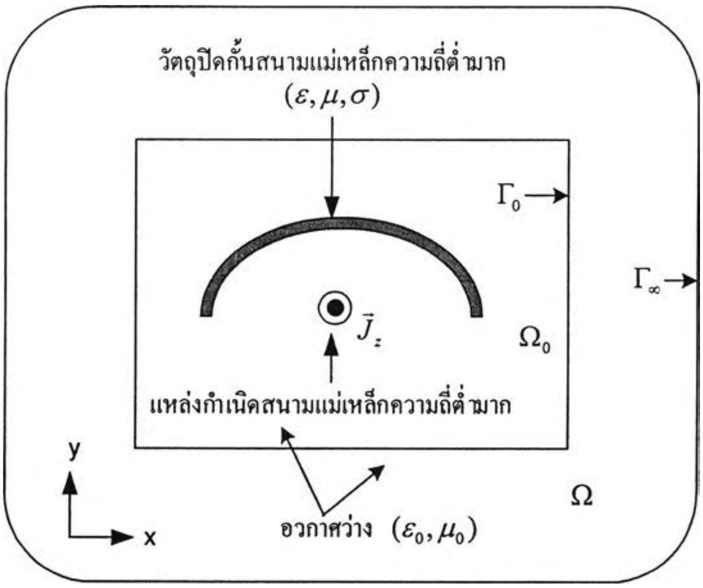
และมีเงื่อนไขขอบเขตระหว่างตัวกลางเป็น

$$\left.\begin{aligned} n \cdot \vec{B} &= continue\ \ function \\ n \times \vec{H} &= continue\ \ function \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

สมการที่ (2.13) นี้เรียกว่า “สมการสเกลาร์เฮลม์โฮมส์” (scalar helmholtz equation) ซึ่งจะเป็นสมการเริ่มต้นที่จะนำมาใช้วิเคราะห์ปัญหาสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากในวิทยานิพนธ์นี้

2.2 การวิเคราะห์สนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากกรณีปัญหา 2 มิติ

กำหนดให้วัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากวางอยู่ในทิศทางตามแนวแกน z บริเวณอวกาศว่าง ซึ่งมีคุณสมบัติทางไฟฟ้าดังนี้ ความซาบซึม μ, สภาพยอม ε, สภาพนำไฟฟ้า σ และแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากอยู่ในทิศทางตามแนวแกนz $(\vec{J}_s = J_z\vec{a}_z)$ บริเวณอวกาศว่างมีคุณสมบัติทางไฟฟ้าดังนี้ สภาพยอม ε_0, ความซาบซึมได้ μ_0 แสดงได้ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 แบบจำลองคณิตศาสตร์การวิเคราะห์สนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากกรณีปัญหา 2 มิติ

เนื่องจากในงานวิทยานิพนธ์นี้พิจารณาให้กระแสที่เป็นแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากอยู่ในทิศทางตามแนวแกน z ยังผลให้สนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่เกิดขึ้นอยู่บนระนาบ xy เท่านั้น ซึ่งทำให้ปัญหาสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่พิจารณากรณีนี้จะเป็นปัญหา 2 มิติ โดยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากตามแนวแกน z จะไม่เปลี่ยนแปลงหรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ ดังนั้นสมการการหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากในระบบพิกัดฉาก (rectangular coordinate system) กรณีปัญหา 2 มิติแสดงได้ดังนี้

$$-\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + j\omega\sigma\, A_z = J_z \tag{2.15}$$

และมีเงื่อนไขขอบเขตระหว่างตัวกลางเป็น

$$\left.\begin{array}{ll} A_z = p & on\ \Gamma_1 \\ \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial A_z}{\partial n} + \beta A_z = q & on\ \Gamma_2 \end{array}\right\} \qquad (2.16)$$

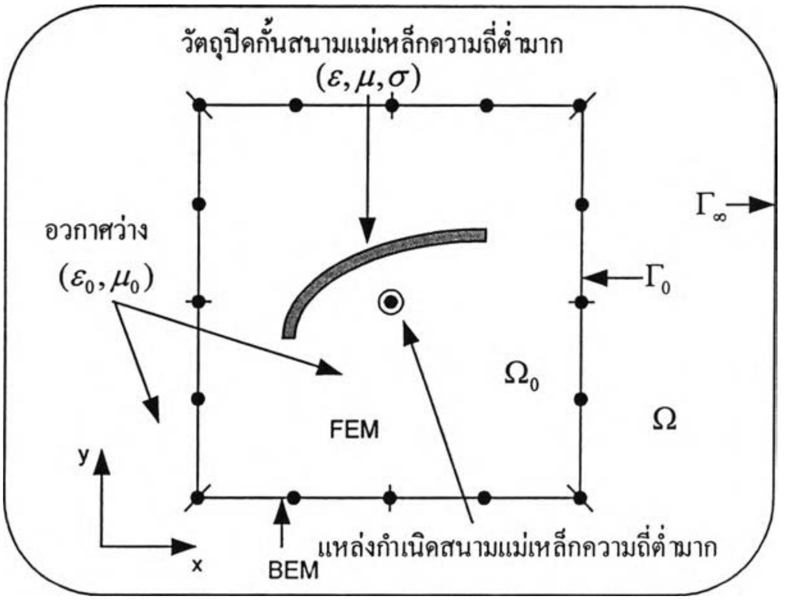
โดยที่ $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$

Γ_1 คือ เงื่อนไขขอบเขตแบบ Dirichlet

Γ_2 คือ เงื่อนไขขอบเขตแบบ Neumann

2.3 วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์

จากที่ได้กล่าวถึงข้อดีของการนำวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์มาหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมาก ดังนั้นในที่นี้จะขอกล่าวถึงรายละเอียดดังนี้ วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์จะใช้หาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากบริเวณรอบวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมาก และวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ใช้หาผลเฉลยบริเวณเงื่อนไขขอบเขตเปิดโล่งดังรูปที่ 2.3



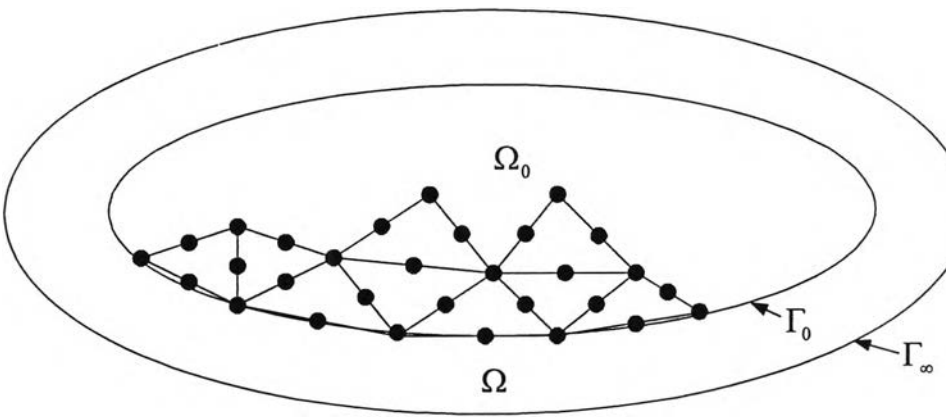
รูปที่ 2.3 แนวคิดของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์

การวิเคราะห์หาผลเฉลยจะเริ่มจากสมการที่ (2.15) และสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตระหว่างตัวกลางตามสมการที่ (2.16) การหาค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่าหรือ A_z ในสมการที่ (2.15) สามารถทำได้โดยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (weighted residual method) และเลือกฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักตามแบบวิธีกาเลอกิน (galerkin method) ซึ่งชุดสมการที่ได้รับในรูปสมการเมทริกซ์ คือ

$$([S]+[T])[A_z]+[D][\frac{\partial A_z}{\partial n}] = J_z[B] \tag{2.17}$$

โดยแต่ละเมทริกซ์มีค่าดังนี้

$$\begin{aligned}
S_{ij} &= \frac{1}{\mu}\iint_{\Omega_0}(\nabla\Phi_i)\cdot(\nabla\Phi_j)dxdy \\
T_{ij} &= j\omega\sigma\iint_{\Omega_0}\Phi_i\Phi_j\,dxdy \\
D_{ij} &= -\frac{1}{\mu}\oint_{\Gamma}\Phi_j\,dl \\
B_{ij} &= \iint_{e}\Phi_j\,dxdy
\end{aligned} \tag{2.18}$$



รูปที่ 2.4 ตำแหน่งตัวแปรที่ไม่ทราบค่า

พิจารณาสมการที่ (2.17) จะพบว่ามีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าอยู่ 2 ตัวแปร คือ A_z และ $\frac{\partial A_z}{\partial n}$ โดย A_z จะเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบที่อยู่ภายใน Ω_0 ตามรูปที่ 2.4 ซึ่งหาได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ และ $\frac{\partial A_z}{\partial n}$ คือ ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าบน Γ_0 ตามรูปที่ 2.4 ซึ่งหาได้จากวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ ดังนั้นการหาความสัมพันธ์ของสมการที่ (2.17) ให้อยู่ในรูปของตัวแปรที่ไม่ทราบค่า A_z สามารถทำได้โดยความสัมพันธ์ตามสมการวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ คือ

$$[H][A_z]=[G]\left[\frac{\partial A_z}{\partial n}\right] \tag{2.19}$$

จัดสมการที่ (2.19) ให้อยู่ในรูปตัวแปรที่ไม่ทราบค่า $\frac{\partial A_z}{\partial n}$ ได้ดังนี้

$$[G]^{-1}[H][A_z]=\left[\frac{\partial A_z}{\partial n}\right] \tag{2.20}$$

แทนสมการที่ (2.20) ลงในสมการที่ (2.17) จะได้ความสัมพันธ์สมการดังนี้

$$([S]+[T])[A_z]+[D][G]^{-1}[H][A_z]=J_z[B] \tag{2.21}$$

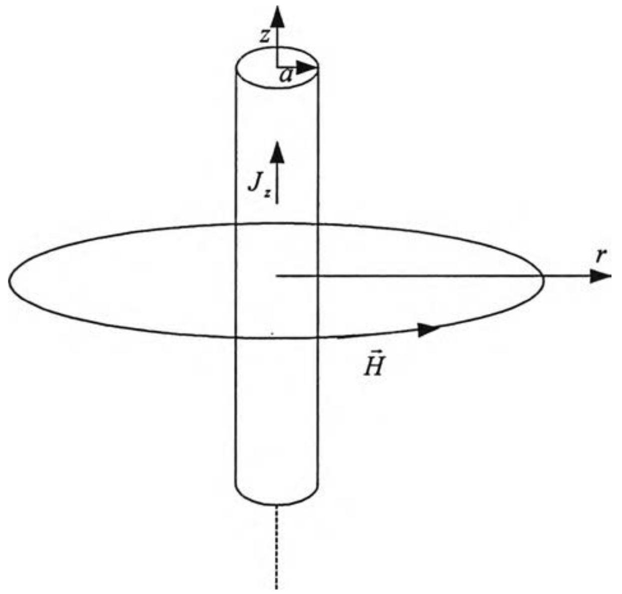
สมการที่ (2.21) จะเป็นสมการที่ใช้คำนวณหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่เกิดขึ้นในวิทยานิพนธ์นี้ ซึ่งจะทำให้ทราบผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่เกิดขึ้นตลอดโดเมนปัญหา

2.4 ตัวอย่างการคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์

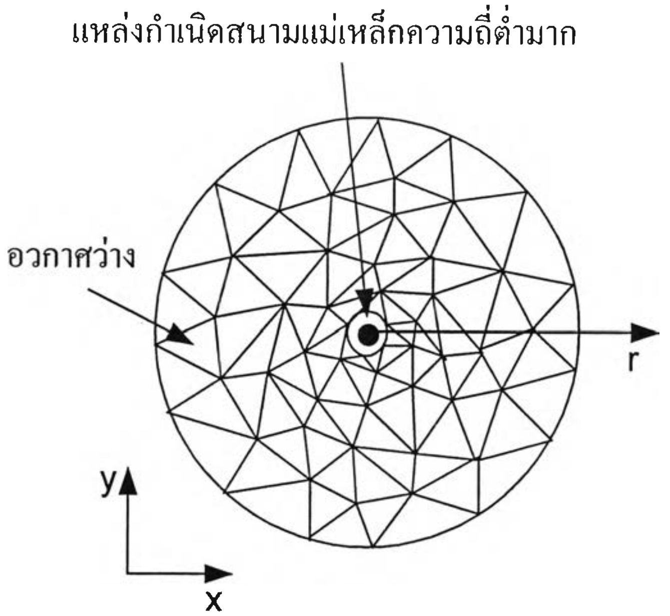
ตัวอย่างกรณีศึกษาการคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์ (line source) ด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์

จุดประสงค์ของตัวอย่างนี้ คือ เป็นการทดสอบความถูกต้องของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ในการคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์ โดยเทียบผลการคำนวณกับวิธีเชิงวิเคราะห์ (กฎของแอมแปร์) และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

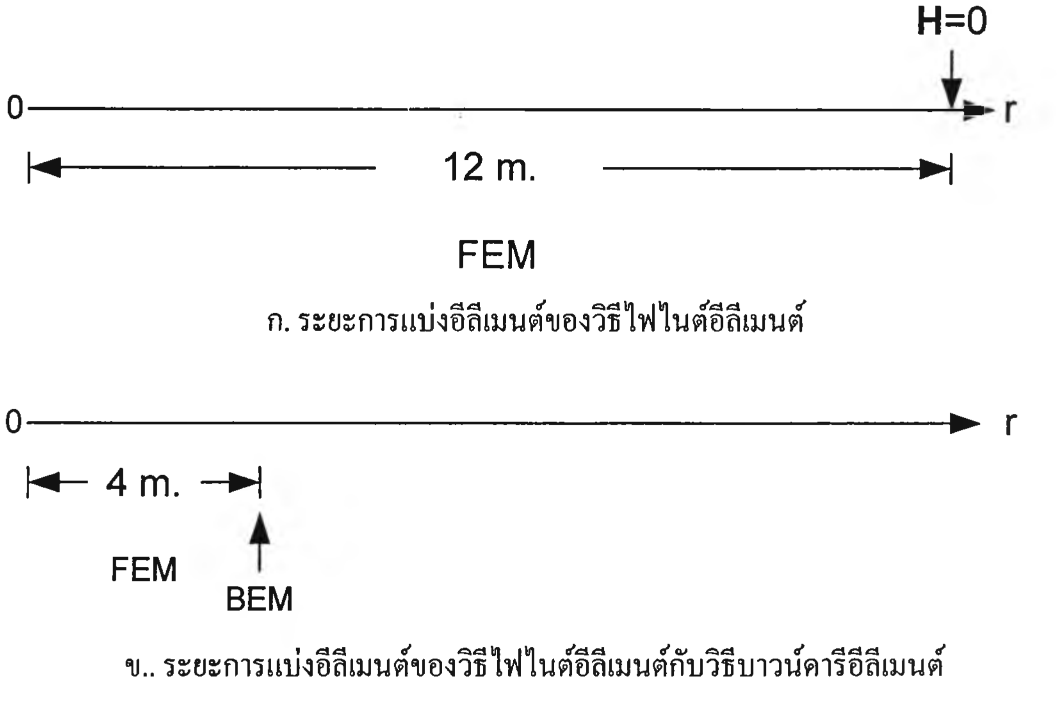
ลักษณะแบบจำลองคณิตศาสตร์แสดงได้ดังรูปที่ 2.5 กำหนดให้แหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากมีลักษณะเป็นเส้นกระแสวางอยู่ในทิศทางแนวแกน z มีความหนาแน่นกระแสเท่ากับ 1 A/m^2 และรัศมี a เท่ากับ 5 เซนติเมตร จำนวนอีลีเมนต์ของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้หาผลเฉลยเท่ากับ 920 อีลีเมนต์ ระยะ r เท่ากับ 12 เมตร ดังรูปที่ 2.7 ก. จำนวนอีลีเมนต์ของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ที่ใช้หาผลเฉลยเท่ากับ 638 อีลีเมนต์ ระยะ r เท่ากับ 4 เมตร ดังรูปที่ 2.7 ข.



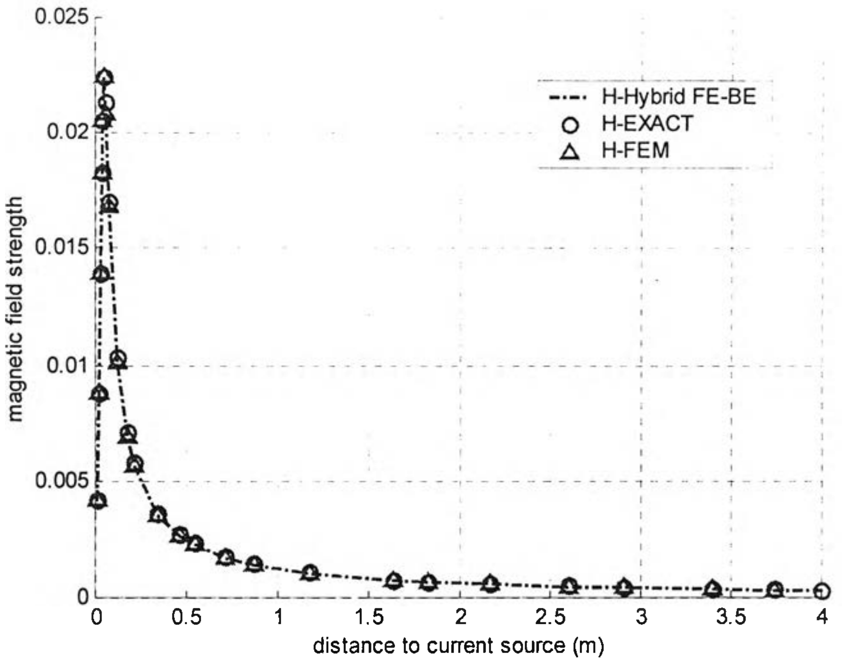
รูปที่ 2.5 แบบจำลองการคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์



รูปที่ 2.6 การแบ่งโดเมนที่ต่อเนื่องของปัญหาออกเป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยม
กรณีที่สนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์



รูปที่ 2.7 เปรียบเทียบระยะการแบ่งอีลีเมนต์ระหว่างวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์
และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์



รูปที่ 2.8 เปรียบเทียบผลการคำนวณความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากระหว่างวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์กับวิธีเชิงวิเคราะห์และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

จากรูปที่ 2.8 เป็นผลการคำนวณความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์ระหว่างวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ด้วยการประมาณผลเฉลยคำตอบด้วยฟังก์ชันรูปร่างอันดับสองและวิธีเชิงวิเคราะห์ ผลการคำนวณความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่ได้จากวิธีทั้งสามจะมีค่าตรงกัน ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าวิธีไฟไนต์-อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์เป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพ มีความแม่นตรงสูงเหมาะสมที่จะนำมาวิเคราะห์ปัญหาสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมาก และเมื่อเปรียบเทียบระยะและจำนวนอีลีเมนต์ที่ใช้หาผลเฉลยระหว่างวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์แล้ว จะพบว่าวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์จะใช้ระยะและจำนวนการแบ่งอีลีเมนต์ที่น้อยกว่าวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ กล่าวคือ วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ จะแบ่งระยะการหาผลเฉลยเพียง 4 เมตร ($r = 4$ m.) และจำนวนอีลีเมนต์ที่ใช้หาผลเฉลยเท่ากับ 638 อีลีเมนต์ แต่วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์จะต้องแบ่งระยะการหาผลเฉลยถึง 12 เมตร ($r = 12$ m.) และจำนวนอีลีเมนต์ที่ใช้หาผลเฉลยเท่ากับ 920 อีลีเมนต์ จะเห็นได้ว่าวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์จะใช้ระยะการหาผลเฉลยและจำนวนอีลีเมนต์ที่น้อยกว่าวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ถึง 8 เมตรและ 282 อีลีเมนต์ตามลำดับ

2.5 บทสรุป

จากตัวอย่างการทดสอบความถูกต้องของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ จะเห็นได้ว่า วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์เป็นวิธีการที่มีประสิทธิภาพ มีความแม่นตรงสูง จำนวนอีลีเมนต์และระยะที่ใช้หาผลเฉลยมีจำนวนน้อยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ ซึ่งเหมาะสมที่จะนำใช้วิเคราะห์ปัญหาสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมาก สำหรับรายละเอียดและสมการของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์และวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ที่ได้กล่าวในบทนี้ก็จะนำเสนอในบทต่อไป