บทที่ 2
หลักการวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบ

ในบทนี้จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์และระบบควบคุมที่นำมาใช้ศึกษาการปรับตั้งค่าพารามิเตอร์ของตัวปรับเสถียรภาพของเครื่องกำเนิดไฟฟ้า ซึ่งได้แก่พื้นฐานทางเสถียรภาพของระบบและความไวของค่าเจาะจง

2.1 พื้นฐานทางเสถียรภาพของระบบ

การแสดงถึงลักษณะ (characteristics) ของระบบไฟฟ้ากำลังในรูปของสมการสภาวะ (state equations) หรือ แสดงในสเตทเสปซ (state-space) หรือ ในรูปของ เวกเตอร์ n มิติ ของสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งแบบไม่เชิงเส้น (n-first order nonlinear differential equations) เป็นดังนี้ [1]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}) \tag{2.1}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{u}) \tag{2.2}$$

เมื่อ

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_r \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdots \\ f_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \cdots \\ g_m \end{bmatrix}$$

โดยที่ **x** คือ เวกเตอร์ของตัวแปรสภาวะ (state variable vector)

u คือ เวกเตอร์ของสัญญาณเข้า (input vector)

f, g คือ เวกเตอร์ของฟังก์ชัน (function vector) ของ **x** และ **u**

y คือ เวกเตอร์ของสัญญาณออก (output vector)

สัญลักษณ์ “ ˙ ” ที่อยู่ด้านบนของเวกเตอร์หมายถึงรูปอนุพันธ์เทียบกับเวลา ($\partial/\partial t$) ของเวกเตอร์สภาวะ

ในการปรับตั้งค่าพารามิเตอร์ของตัวปรับเสถียรภาพของเครื่องกำเนิดไฟฟ้านั้น เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบจะพิจารณาเสถียรภาพในช่วงสัญญาณขนาดเล็ก (small-signal stability) วิธีที่ใช้ในการวิเคราะห์เพื่อให้สมการอยู่ในรูปที่ง่ายขึ้นคือการประมาณระบบไม่เชิงเส้นให้เป็นระบบเชิงเส้น ซึ่งเรียกว่าวิธีการประมาณระบบเป็นระบบเชิงเส้น (linearization)

2.1.1 การประมาณระบบเป็นระบบเชิงเส้น (Linearization)[1]

ที่จุดสมดุลของระบบ สมการสภาวะ (state equation) จะเป็น

$$\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \tag{2.3}$$

โดย $\mathbf{x}_0$ คือเวกเตอร์ของตัวแปรสภาวะ (state variable vector) ที่จุดสมดุล

$\mathbf{u}_0$ คือเวกเตอร์ของสัญญาณเข้าที่จุดสมดุล

เมื่อเกิดสัญญาณรบกวนขนาดเล็กกับระบบทำให้ค่าตัวแปรเปลี่ยน ดังนี้

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x} \quad \text{และ} \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u} \tag{2.4}$$

โดย $\Delta\mathbf{x}$, $\Delta\mathbf{u}$ คือการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กของ $\mathbf{x}$ และ $\mathbf{u}$ ตามลำดับ

จากสมการที่ (2.3) และ (2.4)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \dot{\mathbf{x}}_0 + \Delta\dot{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u}) \end{aligned} \tag{2.5}$$

ใช้การกระจายในรูปของอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's series)ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{x}_i = \dot{x}_{i0} + \Delta\dot{x}_i &= f_i\,[(\mathbf{x}_0, \Delta\mathbf{x}), (\mathbf{u}_0, \Delta\mathbf{u})] \\ &= f_i(x_0, u_0) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\Delta x_i + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\Delta x_n \\ &\quad + \frac{\partial f_i}{\partial u_1}\Delta u_1 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial u_n}\Delta u_n \end{aligned} \tag{2.6}$$

และจาก

$$\dot{\mathbf{x}}_{i0} = \mathbf{f}_i\,(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \tag{2.7}$$

เมื่อทำการประมาณระบบเป็นระบบเชิงเส้น กับสมการที่ (2.1) และ (2.2) ได้เป็น

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u} \tag{2.8}$$

$$\Delta\mathbf{y} = \mathbf{C}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{D}\Delta\mathbf{u} \tag{2.9}$$

โดยที่

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_r} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial u_r} \end{bmatrix}$$

โดยที่ $\Delta\mathbf{x}$ คือ เวกเตอร์สภาวะมิติ n ของการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรสภาวะ

$\Delta\mathbf{y}$ คือ เวกเตอร์สภาวะมิติ m ของการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณออก

$\Delta\mathbf{u}$ คือ เวกเตอร์สภาวะมิติ r ของการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณเข้า

A คือ เมตริกซ์ของระบบ ซึ่งมีขนาด n x n

B คือ เมตริกซ์ของสัญญาณเข้า ซึ่งมีขนาด n x r

C คือ เมตริกซ์ของสัญญาณออก ซึ่งมีขนาด m x n

D คือ เมตริกซ์ของสัญญาณเข้าซึ่งมีผลโดยตรงกับสัญญาณออก ซึ่งมีขนาด m x r

2.1.2 การวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบ

สำหรับระบบที่สนใจ จะพิจารณากรณีของเสถียรภาพช่วงสัญญาณขนาดเล็ก (small-signal stability) ซึ่งเกี่ยวกับระบบขณะอยู่ที่จุดสมดุล (equilibrium) แล้วเกิดการรบกวนขนาดเล็กทำให้สามารถประมาณระบบเป็นระบบเชิงเส้นได้ ในที่นี้ได้แก่การเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กของโหลดที่มีค่าน้อยกว่า 1% ของกำลังจริงของระบบที่สามารถจ่ายได้[1] ซึ่งก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กกับมุมของโรเตอร์ และการเปลี่ยนแปลงของโหลดจะมีผลโดยตรงกับการเปลี่ยนแปลงของแรงดันของระบบไฟฟ้า

สำหรับเนื้อหาในส่วนต่อไปนี้เมื่อกล่าวถึงเสถียรภาพของระบบไม่เชิงเส้น จะหมายถึงเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ (asymptotic stability) นอกจากจะระบุเป็นอย่างอื่น นิยามของเสถียรภาพดังกล่าวมีดังต่อไปนี้

นิยาม 1 [9] สภาวะสมดุล x_e ของระบบไม่เชิงเส้นตามสมการ (2.1) จะมีเสถียรภาพในทัศนะของเลียปูโนฟ (stable in the sense of Lyapunov) ถ้า ทุก ๆ ค่าของ $\varepsilon > 0$ จะมีค่า $\delta > 0$ โดย δ จะขึ้นกับ ε เท่านั้น ดังอสมการ $\|x_0 - x_e\| < \delta$ เป็นผลให้ $\|x(t;x_0) - x_e\| < \varepsilon$ สำหรับทุกค่าของ $t > t_0$

นิยาม 2 [9] สภาวะสมดุล x_e ของระบบไม่เชิงเส้นอิสระจะมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ ถ้า

1) ระบบมีเสถียรภาพในทัศนะของเลียปูโนฟ
2) มีค่า $\delta_a > 0$ โดยทุก ๆ การเคลื่อนที่ที่เริ่มภายในบริเวณข้างเคียง (neighborhood) ของ x_e จะลู่เข้าสู่ x_e เมื่อ $t \rightarrow \infty$

ระเบียบวิธีที่หนึ่งของเลียปูโนฟ (Lyapunov's first method) เป็นวิธีแสดงเสถียรภาพของระบบไม่เชิงเส้น โดยใช้การพิจารณาระบบไม่เชิงเส้นที่ประมาณเป็นเชิงเส้น กล่าวไว้ว่า [9-12]

1) ถ้าระบบที่ประมาณเป็นเชิงเส้น $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ มีค่าส่วนจริงของค่าเจาะจงทุกตัวเป็นลบแล้วระบบไม่เชิงเส้นจะมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ
2) ถ้าระบบที่ประมาณเป็นเชิงเส้นมีค่าส่วนจริงของค่าเจาะจง (มากกว่าหรือเท่ากับ 1 ตัว) เป็นบวกแล้ว ระบบไม่เชิงเส้นจะไม่มีเสถียรภาพ

3) ถ้าระบบที่ประมาณเป็นเชิงเส้นมีค่าส่วนจริงของค่าเจาะจง (มากกว่าหรือเท่ากับ 1 ตัว) มีค่าเป็นศูนย์ และส่วนจริงของค่าเจาะจงตัวที่เหลือมีค่าเป็นลบแล้ว เสถียรภาพของระบบไม่เชิงเส้นจะไม่สามารถพิจารณาโดยใช้การประมาณเป็นเชิงเส้นอย่างเดียวได้

2.2 ความไวของค่าเจาะจง (Eigenvalue Sensitivity) [1]

กำหนดให้ A เป็นเมตริกซ์ของระบบ ค่าเจาะจงที่ i และเวกเตอร์เจาะจงทางขวาที่ i ของเมตริกซ์ A สามารถแสดงได้โดยสมการที่ (2.10)

$$A\phi_i = \lambda_i\phi_i$$
$$(A - \lambda_i I)\phi_i = 0 \qquad (2.10)$$

โดย λ_i คือ ค่าเจาะจงของเมตริกซ์ A ตัวที่ i

ϕ_i คือ เวกเตอร์เจาะจงทางขวา (right eigenvector) ของเมตริกซ์ A ของค่าเจาะจงตัวที่ i

i =1, 2, …, n

เมื่อทำการหาอนุพันธ์ของสมการที่ (2.10) เทียบกับ a_{kj} (สมาชิกในแถวที่ k หลักที่ j ของเมตริกซ์ A) จะได้

$$\frac{\partial A}{\partial a_{kj}}\phi_i + A\frac{\partial \phi_i}{\partial a_{kj}} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{kj}}\phi_i + \lambda_i\frac{\partial \phi_i}{\partial a_{kj}} \qquad (2.11)$$

กำหนดให้ φ_i คือ เวกเตอร์เจาะจงทางซ้าย (left eigenvector) ของเมตริกซ์ A ของค่าเจาะจงตัวที่ i ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้คือ

$$\varphi_i^T\phi_i = 1 \qquad (2.12)$$

และจากสมการ (2.10) เวกเตอร์เจาะจงทางซ้ายมีคุณสมบัติคล้ายกับเวกเตอร์เจาะจงทางขวาคือ

$$\varphi_i^T(A-\lambda_i I) = 0 \tag{2.13}$$

โดย I คือเมตริกซ์เอกลักษณ์

เมื่อนำ φ_i^T คูณในสมการที่ (2.11) แล้วจากคุณสมบัติในสมการ (2.12) และ (2.13) จะได้

$$\varphi_i^T \frac{\partial A}{\partial a_{kj}}\phi_i + \varphi_i^T A \frac{\partial \phi_i}{\partial a_{kj}} = \varphi_i^T \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{kj}}\phi_i + \varphi_i^T \lambda_i \frac{\partial \phi_i}{\partial a_{kj}}$$

$$\varphi_i^T \frac{\partial A}{\partial a_{kj}}\phi = \varphi_i^T \phi_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{kj}} - \varphi_i^T(A-\lambda_i I)\frac{\partial \phi_i}{\partial a_{kj}}$$

$$\varphi_i^T \frac{\partial A}{\partial a_{kj}}\phi_i = \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{kj}} \tag{2.14}$$

กำหนดให้

$\Delta A = A - A_0$ คือการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กของเมตริกซ์ A

$\Delta\lambda_i = \lambda_i - \lambda_{i0}$ คือการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กของค่าเจาะจงตัวที่ i

เมื่อทำการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ ทำให้ $\Delta\lambda_i$ มีสมการเป็น

$$\begin{aligned}
\Delta\lambda_i &\cong \sum_{k,j}\frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{kj}}\Delta a_{kj} \\
&\cong \sum_{k,j}(\varphi_i^T \frac{\partial A}{\partial a_{kj}}\phi_i)\Delta a_{kj} \\
&\cong \varphi_i^T(\sum_{k,j}\frac{\partial A}{\partial a_{kj}}\Delta a_{kj})\phi_i \\
&\cong \varphi_i^T \Delta A \phi_i
\end{aligned}$$

โดยที่ $\Delta A = \sum_{k,j} \frac{\partial A}{\partial a_{kj}} \Delta a_{kj}$

ΔA คือการประมาณอนุกรมเทย์เลอร์อันดับหนึ่งของเมตริกซ์ **A**

จึงได้

$$\Delta\lambda_i = \varphi_i^{T} \Delta A \phi_i \tag{2.15}$$

2.3 สมการสภาวะของเครื่องกำเนิดไฟฟ้าเมื่อรวมผลของตัวปรับเสถียรภาพของเครื่องกำเนิดไฟฟ้า

กำหนดให้[5,7]

$\mathbf{x}_1$ คือ เวกเตอร์ของตัวแปรสภาวะ (state variable vector) ของเมตริกซ์ของระบบ ซึ่งไม่รวมตัวแปรสภาวะของตัวปรับเสถียรภาพ

$\mathbf{x}_2$ คือ เวกเตอร์ของตัวแปรสภาวะ (state variable vector) ของเมตริกซ์ของระบบ เฉพาะตัวแปรของตัวปรับเสถียรภาพ

$\mathbf{u}$ คือ เวกเตอร์ของสัญญาณเข้า (input signal vector)

จะได้

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{13}\mathbf{u}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}_{21}(\mathbf{K})\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}(\mathbf{K})\mathbf{x}_2 + \mathbf{A}_{23}(\mathbf{K})\mathbf{x}_3$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}_{31}(\mathbf{K})\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{32}(\mathbf{K})\mathbf{x}_2 + \mathbf{A}_{33}(\mathbf{K})\mathbf{x}_3$$

หรือเขียนเป็น

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \\ \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21}(\mathbf{K}) & \mathbf{A}_{22}(\mathbf{K}) & \mathbf{A}_{23}(\mathbf{K}) \\ \mathbf{A}_{31}(\mathbf{K}) & \mathbf{A}_{32}(\mathbf{K}) & \mathbf{A}_{33}(\mathbf{K}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

โดย **K** เป็นเวกเตอร์ของพารามิเตอร์ของตัวปรับเสถียรภาพของเครื่องกำเนิดไฟฟ้า

จากสมการที่ (2.16) จะเห็นว่า $\mathbf{A}_{12}$ มีค่าเท่ากับศูนย์เนื่องจากเวกเตอร์ของตัวแปรสภาวะ $\mathbf{x}_1$ ถูกกำหนดให้ไม่รวมผลของการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรของตัวปรับเสถียรภาพ $\mathbf{x}_2$ จากการพิจารณาระบบในสภาวะการรบกวนด้วยสัญญาณขนาดเล็ก (small-signal disturbance) จนประมาณได้ว่า $\Delta\mathbf{u}$ ซึ่งได้แก่ แรงบิดทางกล (mechanical torque , T_m) ที่เข้าสู่แกนโรเตอร์ และแรงดันอ้างอิง (voltage reference , V_{ref}) จะไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อเกิดการรบกวนเนื่องจากสัญญาณรบกวนมีขนาดเล็ก ทำให้ $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{0}$

จึงเป็นผลให้สมการที่ (2.16) ลดรูปเป็น

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 \\ \mathbf{A}_{21}(\mathbf{K}) & \mathbf{A}_{22}(\mathbf{K}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

ในทำนองเดียวกัน จากผลของการกระจายโดยอนุกรมเทย์เลอร์

$$\Delta\mathbf{A} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{K}}\Delta\mathbf{K} \tag{2.18}$$

ซึ่งจากสมการที่ (2.17) จะได้

$$\Delta\mathbf{A} = \Delta\mathbf{A}(\Delta\mathbf{K}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{\partial\mathbf{A}_{21}}{\partial\mathbf{K}}\Delta\mathbf{K} & \dfrac{\partial\mathbf{A}_{22}}{\partial\mathbf{K}}\Delta\mathbf{K} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

โดย $\Delta\mathbf{K}$ คือการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็กของตัวแปรของตัวปรับเสถียรภาพของเครื่องกำเนิดไฟฟ้า

จากสมการ (2.15) และ (2.19) จะเขียนได้เป็น

$$\Delta\lambda_i = \varphi_i^T \, \Delta\mathbf{A}(\Delta\mathbf{K}) \, \phi_i \tag{2.20}$$

เมื่อพิจารณาถึงค่าเจาะจงที่เด่นที่สุดจะใช้สมการ (2.20) เป็นฟังก์ชันเป้าหมาย (objective function) ของการทำโปรแกรมเชิงเส้น ซึ่งจะกล่าวถึงอีกครั้งในบทที่ 5