บทที่ 2
ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

การศึกษาและวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ของการถ่ายเทความร้อนของของไหลสองสถานะที่มีลักษณะการไหลแบบ droplet flow ภายใน thermal entrance region ของท่อกลม ภายใต้สภาวะการไหลแบบราบเรียบ โดยวิธี simple analytical model จำเป็นที่จะต้องมีการกำหนดรูปแบบจำลอง (model) และ ข้อกำหนดของปัญหา (assumption) ขึ้น โดยรูปแบบจำลองและข้อกำหนดของปัญหา จะต้องถูกกำหนดขึ้น ภายใต้เงื่อนไขที่ไม่ขัดแย้งกับความเป็นจริง และต้องมีเหตุผลอ้างอิงที่ถูกต้อง ซึ่งในการกำหนดรูปแบบจำลองและข้อกำหนดของปัญหาขึ้นมาก็เพื่อ ให้ง่ายต่อการวิเคราะห์ปัญหา เนื่องจากรูปแบบจำลองและข้อกำหนดของปัญหาจะได้จากการตัดรายละเอียดที่ไม่สำคัญบางประการของปัญหาออกไป แต่จะต้องคงไว้ซึ่งหัวใจสำคัญ หรือ ลักษณะที่สำคัญ ของปัญหาเอาไว้ เพื่อให้ผลที่ได้ใกล้เคียงความเป็นจริงมากที่สุด

2.1 รูปแบบจำลอง และข้อกำหนดของปัญหา

การถ่ายเทความร้อนที่เกิดขึ้นในของไหลสองสถานะที่มีลักษณะการไหลแบบ droplet flow ภายใน thermal entrance region ของท่อกลม จะประกอบด้วยการถ่ายเทความร้อนที่เกิดขึ้นระหว่าง ผนังท่อกับไอน้ำร้อนยิ่งยวด ผนังท่อกับละอองน้ำ และ ไอน้ำร้อนยิ่งยวด กับละอองน้ำ ทั้งนี้ได้รวมไปถึงการแผ่รังสีความร้อนที่อาจจะเกิดขึ้นด้วย สำหรับในงานวิจัยนี้ได้กำหนดให้พิจารณา การไหลของของไหลสองสถานะในสภาวะ post dry-out condition ซึ่งเป็นสภาวะที่ไม่เกิด ฟิล์มเหลว (liquid film) ที่ผนังท่อ โดยอุณหภูมิของผนังท่อจะต้องอยู่ในระดับที่สูงกว่า อุณหภูมิระเหยตัวของละอองน้ำ ซึ่ง Yao (1979) และ Henry (1978) ได้แสดงให้เห็นว่าการไหลของของไหลสองสถานะในสภาวะ post dry-out condition การนำความร้อนที่เกิดขึ้นระหว่างองค์ประกอบที่มีสถานะของเหลวกับผนังท่อที่ฟิล์มเดือด (film boiling) ถือว่ามีความสำคัญน้อยมากเมื่อเทียบกับ การพาความร้อนขององค์ประกอบที่มีสถานะไอ ส่วน Kendall (1978) ได้ศึกษาพบว่า การไหลของไหลสองสถานะที่มีลักษณะการไหลแบบ droplet flow ภายในท่อกลม จะเกิดการถ่ายเทความร้อนขึ้นระหว่างละอองน้ำกับผนังท่อที่

สัมผัสกัน แต่จะมีค่าน้อยมาก เมื่ออุณหภูมิของผนังท่อมีค่าสูงกว่า อุณหภูมิระเหยตัวของละอองน้ำ ดังนั้นในงานวิจัยนี้ จึงไม่จำเป็นที่จะต้องพิจารณาการถ่ายเทความร้อนที่เกิดขึ้นจากละอองน้ำที่สัมผัสกับผนังท่อโดยตรง นอกจากนี้ที่สภาวะ post dry-out condition การแผ่รังสีความร้อนถือว่ามีความสำคัญน้อยมากเมื่อเทียบกับ การพาความร้อนขององค์ประกอบที่มีสถานะไอ เหตุผลดังกล่าวนี้ ได้ถูกแสดงไว้ในงานวิจัยของ Yao (1979) ซึ่งได้ใช้วิธี order of magnitude analysis เพื่อเปรียบเทียบผลจากการพาความร้อนที่ละอองน้ำ กับการแผ่รังสีความร้อนจากผนังท่อไปยังละอองน้ำ โดยได้แสดงให้เห็นว่า ถ้าอัตราส่วนการพาความร้อนกับการแผ่รังสีความร้อนมีค่ามากกว่า 1 มากๆ ให้ถือว่าการแผ่รังสีความร้อนมีความสำคัญน้อยมากจนสามารถตัดทิ้งได้โดยไม่ต้องพิจารณา ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\frac{\beta r_0\left(T_w - T_s\right)}{2\varepsilon_l \sigma\left(T_w^4 - T_s^4\right)} \gg 1 \qquad (2.1)$$

จากที่ได้กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า ในการพิจารณาการถ่ายเทความร้อนของของไหลสองสถานะที่มีลักษณะการไหลแบบ droplet flow ในสภาวะ post dry-out condition จะพิจารณาการถ่ายเทความร้อนที่เกิดขึ้นระหว่างผนังท่อกับไอน้ำร้อนยิ่งยวด และ ละอองน้ำกับไอน้ำร้อนยิ่งยวดเท่านั้น

ในงานวิจัยนี้ ได้เจาะจงให้การไหลของของไหล อยู่ภายใต้สภาวะการไหลแบบราบเรียบ ซึ่งในสภาวะดังกล่าว ทิศทางการเคลื่อนที่ของละอองน้ำนอกจากจะมีทิศในแนวตามยาวท่อแล้ว พบว่ามีการเคลื่อนที่ในแนวรัศมีของท่ออีกด้วย ทั้งนี้เป็นผลอันเนื่องมาจากความแตกต่างของความเร็วและอุณหภูมิในแนวรัศมีท่อขององค์ประกอบที่มีสถานะไอ และ ผลจากความแตกต่างของอัตราการระเหยตัวของละอองน้ำที่อยู่ในตำแหน่งใกล้ผนังท่อ จะทำให้ละอองน้ำในตำแหน่งดังกล่าวเคลื่อนที่ในทิศออกจากผนังท่อ นอกจากนี้ ความเร็วสัมพัทธ์ระหว่างละอองน้ำกับองค์ประกอบที่มีสถานะไอก็มีผลต่อการเคลื่อนที่ในแนวรัศมีของละอองน้ำด้วยเช่นกัน ดังนั้นผลจากการเคลื่อนที่ในแนวรัศมีของละอองน้ำ จะก่อให้เกิดการผสมผสานกันของละอองน้ำ ทำให้สามารถประมาณได้ว่า อัตราการระเหยตัวของละอองน้ำที่ตำแหน่งหน้าตัดหนึ่งของท่อจะมีค่าเท่ากัน และเพื่อให้เป็นการง่ายในการวิเคราะห์ ได้กำหนดให้ขนาดของละอองน้ำที่ตำแหน่งทางเข้าของท่อกลม มีขนาดเท่ากันหมด ดังนั้น จากข้อ

กำหนดดังกล่าว และ การกำหนดให้อัตราการระเหยตัวของละอองน้ำมีค่าเท่ากัน ทำให้สามารถสรุปได้ว่า ขนาดของ ละอองน้ำที่หน้าตัดหนึ่งๆ จะมีค่าเท่ากัน หรือกล่าวได้อีกนัยหนึ่งว่า ขนาดของละอองน้ำจะมีการเปลี่ยนแปลงในทิศทางตามแนวยาวท่อเท่านั้น

สำหรับ velocity profile ของของไหลสองสถานะที่มีลักษณะการไหลแบบ droplet flow นั้น จะขึ้นอยู่กับองค์ประกอบที่มีสถานะไอเป็นหลัก เนื่องจาก แรงเคลื่อนตัว (drag) ขององค์ประกอบที่มีสถานะไอจะมีอิทธิพลต่อการเคลื่อนที่ของละอองน้ำเป็นอย่างมาก จากงานวิจัยของ Langhaar (1942) ได้แสดงให้เห็นว่า การไหลของของไหลที่มีสถานะไอในท่อกลม จากตำแหน่งทางเข้าท่อ velocity boundary layer จะเริ่มขยายตัวจากผนังท่อ จนกระทั่งถึงจุดที่ velocity boundary layer ขยายตัวถึงแนวแกนท่อ ซึ่งในช่วงดังกล่าว เรียกว่า hydrodynamic region ความเร็วของของไหลจะเป็นฟังก์ชันของตำแหน่งในแนวรัศมี และ ตำแหน่งตามแนวแกนท่อ ซึ่งถูกเรียกว่า Langhaar velocity profile โดยได้แสดงสมการ แสดงความสำพันธ์ระหว่างความเร็วของของไหล กับตำแหน่งในแนวรัศมี และตำแหน่งตามแนวแกนท่อ ในช่วง hydrodynamic region ดังที่ได้แสดงไว้ในสมการ (1.3)-(1.3.1) ดังนี้

$$u = \left(\frac{I_0(\gamma) - I_0\left(\gamma \frac{r}{r_0}\right)}{I_0(\gamma)} \right) V \tag{1.3}$$

โดย

$$I_n(P) = \frac{P^n}{2^n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{P^{2m}}{4^m m!(m+n)!} \tag{1.3.1}$$

สำหรับค่า γ ในสมการ 1.3 ได้ถูกแสดงไว้ในงานวิจัยของ Langhaar (1942) โดยค่า γ จะเป็นฟังก์ชันกับระยะตามแนวแกนท่อ ดังที่ได้แสดงไว้ในตารางที่ 2.1

γ	100	30	20	16	14.5	13	12
X	0.000026	0.000334	0.00082	0.00137	0.00172	0.00222	0.00269
γ	11	10	9	8	7	6.5	6
X	0.00332	0.00418	0.00541	0.00722	0.00997	0.01188	0.0143
γ	5.5	5	4.5	4	3.5	3.25	3
X	0.0174	0.0214	0.0267	0.0335	0.0426	0.0483	0.0549
γ	2.75	2.5	2.25	2	1.85	1.7	1.55
X	0.0625	0.0715	0.0821	0.0947	0.1034	0.1132	0.1241
γ	1.4	1.3	1.2	1.1	1	0.9	0.8
X	0.1365	0.1459	0.1560	0.1671	0.1795	0.1934	0.2091
γ	0.7	0.6	0.5	0.4			
X	0.2270	0.2479	0.2730	0.3040			

ตารางที่ 2.1 แสดงค่า γ ตามแนวแกนท่อจากผลงานวิจัยของ Langhaar(1942)

Kays และ Crawford (1993) ได้เสนอ velocity profile ในรูป parabolic สำหรับการไหลของไอน้ำในท่อกลม ภายใต้สภาวะการไหลแบบราบเรียบ ซึ่งเป็นความเร็วของของไหลหลังจากที่ velocity boundary layer ขยายตัวถึงแกนท่อ เรียกว่า fully developed velocity profile ซึ่งความเร็วจะเป็นฟังก์ชันของตำแหน่งตามแนวรัศมีเท่านั้น โดยมีสมการดังนี้

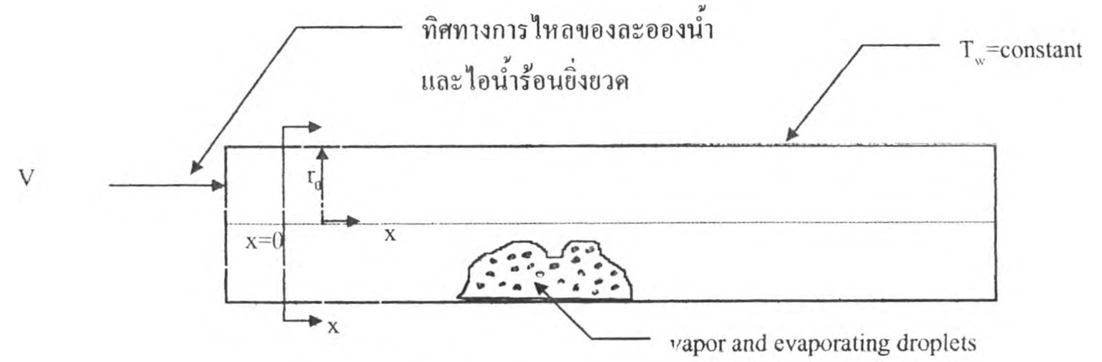
$$u = 2\left(1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right)V \tag{2.2}$$

ในงานวิจัยนี้ได้กำหนดให้พิจารณา velocity profile ของไอน้ำร้อนยิ่งยวดที่อยู่ในรูป parabolic velocity profile ตลอดระยะการไหล เปรียบเทียบกับการใช้ Langhaar velocity profile ซึ่งเป็นการพิจารณารูปแบบการแจกแจงความเร็วของของไหลในช่วง hydrodynamic region ด้วย เพื่อให้ได้ผลการวิจัยออกมาตรงตามความเป็นจริงมากที่สุด อย่างไรก็ตาม ในความเป็นจริงแล้วนั้น velocity profile ของไอน้ำร้อนยิ่งยวด จะมีการเปลี่ยนแปลง อันเนื่องมา

จากผลของการระเหยตัวของละอองน้ำ ซึ่ง ถ้าอัตราการระเหยตัวของละอองน้ำยิ่งมีค่าสูงเท่าใด ก็ยิ่งมีผลต่อ velocity profile สูงขึ้นเท่านั้น แต่การเปลี่ยนแปลงของ velocity profile จะได้รับผลกระทบจากสาเหตุดังกล่าวน้อยมาก ถ้าความหนาแน่นและขนาดของละอองน้ำอยู่ในระดับที่ไม่สูงมากนัก ดังที่ได้แสดงไว้ในงานวิจัยของ Tien (1961) ซึ่งได้แสดงให้เห็นว่า ถ้าคุณภาพการไหล (flow quality) หรือ อัตราส่วนระหว่างอัตราการไหลโดยมวลขององค์ประกอบที่มีสถานะไอต่ออัตราการไหลโดยมวลทั้งหมด ของของไหลสองสถานะมีค่ามากกว่า 0.5 หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า ความหนาแน่น และขนาดของละอองน้ำจะมีค่าน้อยมากพอที่จะไม่ส่งผลกระทบต่อ velocity profile ขององค์ประกอบที่มีสถานะไอ ซึ่งหมายความว่า โมเมนตัมของละอองน้ำ จะไม่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมขององค์ประกอบที่มีสถานะไอนั่นเอง อย่างไรก็ตาม ถึงแม้ว่า velocity profile จะไม่มีการเปลี่ยนแปลง แต่ขนาดของความเร็วจะมีค่าสูงขึ้น จากผลของการระเหยตัวของละอองน้ำ นอกจากนี้ การถ่ายเทมวล (mass transfer) อันเนื่องมาจากผลของความเข้มข้นที่แตกต่างกันขององค์ประกอบทั้งสองจะไม่เกิดขึ้น ถ้าองค์ประกอบทั้งสองมีคุณสมบัติทางเคมีที่เหมือนกัน จากที่ได้กล่าวมาทั้งหมด พอที่จะสรุปข้อกำหนดของปัญหา สำหรับในงานวิจัยได้ดังนี้คือ

1. ไม่พิจารณาการถ่ายเทความร้อนระหว่างละอองน้ำกับผนังท่อที่สัมผัสกัน
2. ไม่พิจารณาการแผ่รังสีความร้อน
3. ขนาดของละอองน้ำที่ตำแหน่งทางเข้าของท่อกลมมีขนาดเท่ากัน และ ขนาดของละอองน้ำจะมีการเปลี่ยนแปลงในทิศตามแนวยาวท่อเท่านั้น
4. คุณภาพการไหลมีค่าสูง กล่าวคือ มีค่ามากกว่า 0.5 ดังนั้น โมเมนตัมของละอองน้ำจะไม่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมขององค์ประกอบที่มีสถานะไอ
5. ความเร็วของละอองน้ำมีค่าเท่ากับความเร็วขององค์ประกอบที่มีสถานะไอ
6. คุณสมบัติของของไหลมีค่าคงที่ โดย ไอน้ำร้อนยิ่งยวด และละอองน้ำเป็นสารชนิดเดียวกัน
7. Velocity profile ของไอน้ำร้อนยิ่งยวด กำหนดให้ใช้ Langhaar velocity profile และ parabolic velocity profile
8. ไม่พิจารณาการนำความร้อนระหว่างละอองน้ำ กับผนังท่อที่สัมผัสกัน
9. อุณหภูมิผนังท่อคงที่

สำหรับรูปแบบจำลองของการไหลของของไหลสองสถานะที่มีลักษณะการไหลแบบ droplet flow ภายใน thermal entrance region ของท่อกลม ได้แสดงไว้ในรูปที่ 2.1 ซึ่งได้แสดงทิศทางการไหล ไอน้ำร้อนยิ่งยวด และละอองน้ำ ไว้ในระนาบสองมิติดังนี้



รูปที่ 2.1 รูปแบบจำลองของปัญหา

จากที่ได้กำหนดรูปแบบจำลอง และข้อกำหนดของปัญหาสำหรับงานวิจัยนี้แล้ว ก็สามารถที่จะทำการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนของของไหลสองสถานะที่มีลักษณะการไหลแบบ droplet flow ภายใน thermal entrance region ของท่อกลมได้ ซึ่งในการ วิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนของของไหลสองสถานะโดยการสร้างสมการพลังงาน และสมการที่เกี่ยวข้อง ที่แสดงความสัมพันธ์ของการถ่ายเทความร้อนของระบบ และรวมไปถึงการแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรต่างๆที่มีความเกี่ยวข้อง โดยได้แสดงรายละเอียดไว้ดังต่อไปนี้

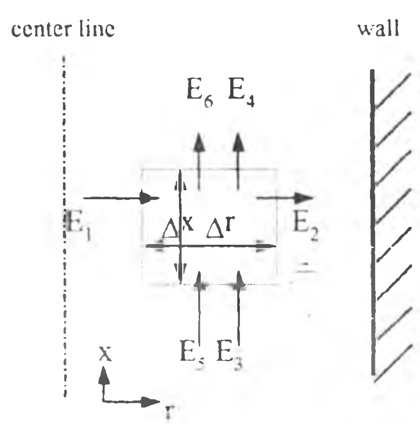
2.2 สมการพลังงาน

ในการสร้างสมการพลังงาน ที่แสดงความสัมพันธ์ของการถ่ายเทความร้อนของของไหลสองสถานะที่มีลักษณะการไหลแบบ droplet flow ภายใน thermal entrance region ของท่อกลม ต้องอาศัยการดุลพลังงาน โดยแยกพิจารณา ในแต่ละองค์ประกอบ ภายในปริมาตรควบคุม (control volume) ที่กำหนดขึ้น ซึ่งก็คือ 1. การดุลพลังงานสำหรับองค์ประกอบสถานะไอ (ไอน้ำร้อนยิ่งยวด) และ 2. การดุลพลังงานสำหรับองค์ประกอบสถานะของเหลว (ละอองน้ำ) ดังที่ได้แสดงไว้ในรูปที่ 2.2 โดยได้กำหนดทิศทางเข้าออกของพลัง

งาน แต่ละประเภทภายในปริมาตรควบคุมเอาไว้ ซึ่งสามารถจำแนกประเภทของการถ่ายเทความร้อนภายในระบบออกได้ 5 ประเภท ดังนี้

1. การพาความร้อนของไอน้ำร้อนยิ่งยวด
2. การแผ่รังสีความร้อนระหว่างผนังท่อกับไอน้ำร้อนยิ่งยวด
3. การนำความร้อนระหว่างไอน้ำร้อนยิ่งยวดกับละอองน้ำ
4. การนำความร้อนระหว่างละอองน้ำกับผนังท่อที่สัมผัสกัน

จากข้อกำหนดของงานวิจัยนี้ ที่กำหนดให้ ไม่ต้องพิจารณาการแผ่รังสีความร้อนและการถ่ายเทความร้อนระหว่างละอองน้ำกับผนังท่อที่สัมผัสกัน ทำให้การถ่ายเทความร้อนที่จะถูกพิจารณา มีเพียงการพาความร้อนของไอน้ำร้อนยิ่งยวด และการนำความร้อนระหว่างไอน้ำร้อนยิ่งยวดและละอองน้ำ เท่านั้น



รูปที่ 2.2 การดุลพลังงานภายในปริมาตรควบคุม

2.2.1 การดุลพลังงาน สำหรับองค์ประกอบที่มีสถานะไอ (ไอน้ำร้อนยิ่งยวด) ในสภาวะคงที่ **(steady-state)**

จากรูปที่ 2.2 พลังงานที่เกี่ยวข้องไอน้ำร้อนยิ่งยวด จะประกอบด้วย E_1-E_4 ซึ่งสามารถทำการดุลพลังงานได้ดังนี้

$$E_1 + E_3 = E_2 + E_4 \tag{2.3}$$

E_1 และ E_2 เป็น เทอมที่แสดงพลังงาน จากการนำความร้อน ผ่านไอน้ำร้อนยิ่งยวด โดยมีรูปสมการดังนี้

$$E_1 = -\alpha\, k\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)2\pi r\Delta x \tag{2.4}$$

$$E_2 = -\alpha\, k\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)2\,\pi\, r\Delta x - \frac{\partial}{\partial r}\left(2\pi\, rk\,\frac{\partial T}{\partial r}\right)\alpha\Delta r\Delta x \tag{2.5}$$

E_3 และ E_4 เป็นเทอมที่แสดง พลังงาน ที่เคลื่อนที่ผ่านปริมาตรควบคุม โดยมีไอน้ำร้อนยิ่งยวดเป็นตัวพา ซึ่งมีรูปสมการดังแสดงไว้ในงานวิจัยของ Sun (1976) ดังนี้

$$E_3 = W_v h_v \tag{2.6}$$

$$E_4 = W_v h_v + \frac{\partial}{\partial x}\left(W_v h_v\right)\Delta x \tag{2.7}$$

นำค่าจากสมการ (2.4)-(2.7) แทนในสมการ (2.3) ทำให้ได้รูปสมการดังนี้

$$\left(\frac{\alpha\, k}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{2\pi\, r\Delta r}\frac{\partial}{\partial z}\left(W_v h_v\right) \tag{2.8}$$

โดยได้กำหนดให้ค่า k เป็นค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของไอน้ำร้อนยิ่งยวด ที่ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ หรือกำหนดให้เป็นค่าคงที่

2.2.2 การดุลพลังงาน สำหรับองค์ประกอบที่มีสถานะของเหลว (ละอองน้ำ) ในสภาวะคงที่ (steady-state)

จากรูปที่ 2.2 พลังงานที่เกี่ยวข้องกับละอองน้ำ จะประกอบด้วย E_5-E_6 เท่านั้น ซึ่งสามารถทำการดุลพลังงานได้ดังนี้

$$E_5 = E_6 \tag{2.9}$$

E_5 และ E_6 เป็นเทอมที่แสดง พลังงาน ที่เคลื่อนที่ผ่านปริมาตรควบคุม โดยมีละอองน้ำเป็นตัวพา ซึ่งมีรูปสมการดังแสดงไว้ในงานวิจัยของ Sun (1976) ดังนี้

$$E_5 = W_l h_f \tag{2.10}$$

$$E_6 = W_l h_f + \frac{\partial}{\partial x}\left(W_l h_f\right)\Delta x \tag{2.11}$$

h_f คือ ค่าเอนทาลปี (enthalpy) ของละอองน้ำ ซึ่งอยู่ในสถานะของเหลวอิ่มตัว โดยในงานวิจัยนี้ได้กำหนดให้เป็นค่าคงที่

นำค่าจากสมการ (2.10) และสมการ (2.11) แทนลงในสมการ (2.9) ทำให้ได้รูปสมการดังนี้

$$h_f \frac{\partial W_l}{\partial x}\Delta x = 0 \tag{2.12}$$

จากการดุลพลังงานสำหรับละอองน้ำ จะไม่มีพลังงานจากการนำความร้อนผ่านละอองน้ำเข้ามาเกี่ยวข้อง เนื่องจากในของไหลสองสถานะที่มีลักษณะการไหลแบบ droplet flow ละอองน้ำจะเป็นองค์ประกอบที่ไม่มีความต่อเนื่อง จึงไม่จำเป็นที่จะต้องพิจารณาการนำความร้อนผ่านละอองน้ำในปริมาตรควบคุม

ในสภาวะการไหลคงที่ ของของไหลสองสถานะ จะมีความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการไหลโดยมวลขององค์ประกอบทั้งสอง หรือที่เรียกว่าสมการความต่อเนื่อง ดังนี้

$$\frac{\partial W_l}{\partial x}+\frac{\partial W_v}{\partial x}=0 \tag{2.13}$$

โดย

$$W_v = \rho_v u(2\pi\, r\Delta\, r)\alpha \tag{2.14}$$

และ

$$\frac{\partial h_v}{\partial x}=C_p\frac{\partial T}{\partial x} \tag{2.15}$$

รวมสมการ(2.8) กับสมการ (2.12)-(2.15) จะได้สมการดังนี้

$$\rho\, uC_p\alpha\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{k\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\partial\, T}{\partial r}\right)-\frac{\left(h_v-h_f\right)\left(\frac{\partial W_v}{\partial x}\right)}{2\pi\, r\Delta r} \tag{2.16}$$

เทอมสุดท้ายของสมการ (2.16) ที่ค่า gradient $(\partial W_v/\partial x)$ เป็นค่าที่แสดงปริมาณการระเหยตัวของละอองน้ำภายในปริมาตรควบคุม โดยกำหนดให้ละอองน้ำอยู่ในสถานะของเหลวอิ่มตัวเสมอ ดังนั้นจึงสามารถแสดงความสัมพันธ์ของค่าดังกล่าวได้ดังนี้

$$\frac{\partial W_v}{\partial x}\Delta x=\frac{q_d}{h_{fg}} \tag{2.17}$$

โดย q_d เป็นค่า พลังงานทั้งหมดที่ถ่ายเทไปยังละอองน้ำภายในปริมาตรควบคุม ต่อหน่วยเวลา ซึ่งพลังงานที่ถ่ายเทไปยังละอองน้ำ ก็คือพลังงานจากการพาความร้อนระหว่างไอน้ำร้อนยิ่งยวดกับละอองน้ำ โดยปริมาณพลังงานจากการพาความร้อนระหว่างไอน้ำร้อนยิ่งยวด และละอองน้ำ จะขึ้นอยู่กับความแตกต่างของอุณหภูมิระหว่างองค์ประกอบทั้งสอง ซึ่งปริมาณพลังงานจากการพาความร้อน สามารถแสดงให้อยู่ในรูปของผลคูณระหว่าง ค่าคงที่

การถ่ายเทความร้อนระหว่างไอน้ำร้อนยิ่งยวด กับ ละอองน้ำ (vapor-droplet heat transfer constant, β) กับค่าผลต่างของอุณหภูมิ ระหว่างองค์ประกอบทั้งสอง โดยผลลัพธ์ที่ได้จะขึ้นอยู่กับลักษณะของละอองน้ำ ดังนั้นสมการ (2.17) สามารถจัดรูปได้ใหม่ดังนี้

$$\frac{\partial W_v}{\partial x}\Delta x = \beta\left(T - T_s\right)\left(\frac{2\pi r \Delta r \Delta x}{h_{fg}}\right) \tag{2.18}$$

จากสมการ(2.16) เทอม (h_v-h_f) สามารถเขียนแทนได้ด้วย $C_p(T-T_s) + h_{fg}$ และสำหรับค่า void fraction (α) ของของไหลสองสถานะที่มีลักษณะการไหลแบบ droplet flow จะมีค่าสูงมาก หรือกล่าวได้ว่าจะมีค่าเข้าใกล้ 1 ซึ่งก็หมายความว่า ปริมาตรไอน้ำร้อนยิ่งยวดมีค่ามากกว่าปริมาตรของละอองน้ำมาก ดังนั้นเพื่อความสะดวกต่อการวิเคราะห์ ในงานวิจัยนี้ จึงได้กำหนดให้ค่า void fraction มีค่าคงที่ โดยกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 1 จากผลดังกล่าวทำให้สามารถจัดรูปสมการ (2.16) ได้ใหม่ดังนี้

$$\rho_v u C_p \alpha \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{k\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\partial T}{\partial r}\right) - \beta(T - T_s) - C_p(T - T_s)\left[\frac{\beta(T - T_s)}{h_{fg}}\right] \tag{2.19}$$

สำหรับค่าคงที่การถ่ายเทความร้อนระหว่างไอน้ำร้อนยิ่งยวดกับละอองน้ำ จะมีขนาดเท่าใดนั้น ขึ้นกับลักษณะของละอองน้ำ ซึ่งในที่นี้ กำหนดให้ละอองน้ำมีลักษณะเป็นทรงกลม ดังนั้น ค่าคงที่การถ่ายเทความร้อนระหว่างองค์ประกอบที่มีสถานะไอกับละอองน้ำ จะสามารถแสดงในรูปสมการได้ดังนี้

$$\beta = n\pi d^2 h_d \tag{2.20}$$

แทนสมการ (2.20) ลงในสมการ(2.19) ทำให้สามารถจัดรูปสมการได้ใหม่ดังนี้

$$\rho_v u C_p \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) - n\pi d^2 h_d . \left\{ 1 + \frac{\left[C_p \left(T - T_s \right)\right]}{h_{fg}} \right\} \left(T - T_s \right) \quad (2.21)$$

เทอมสุดท้ายของสมการ (2.21) ถูกเรียกว่า equivalent heat sink per unit volume ดังในงานวิจัยของ Yao (1979) ซึ่งเป็นเทอมที่แสดงความสัมพันธ์ของการถ่ายเทความร้อนระหว่างไอน้ำร้อนยิ่งยวดกับละอองน้ำ โดยละอองน้ำถูกเปรียบให้เป็น heat sink หรือเป็นแหล่งรับความร้อนจากไอน้ำร้อนยิ่งยวด โดยจะอยู่ในสถานะของเหลวอิ่มตัวเสมอ (อุณหภูมิไม่เปลี่ยนแปลง) เมื่อละอองน้ำได้รับความร้อนจากไอน้ำร้อนยิ่งยวด ก็จะเกิดการระเหยตัวเป็นไอน้ำ ไอน้ำที่ได้จากการระเหยตัวจะรวมตัวกับไอน้ำร้อนยิ่งยวด และถูกทำให้มีอุณหภูมิสูงขึ้นเท่ากับอุณหภูมิของไอน้ำร้อนยิ่งยวด

ในเทอม equivalent heat sink per unit volume ค่า h_d เป็นค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อน จากไอน้ำร้อนยิ่งยวดไปสู่ละอองน้ำ ซึ่งในงานวิจัยของ Yuen และ Chen (1978) ได้แสดงให้เห็นว่า ผลจากการระเหยตัวของละอองน้ำจะทำให้สัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนมีค่าลดลง เมื่อเปรียบเทียบกับละอองน้ำที่ไม่มีการระเหยตัว หรือที่เรียกว่า solid sphere โดยสามารถแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$h_d = \frac{h_p}{\left\{ 1 + \left(C_p \left(T - T_s \right) / h_{fg} \right) \right\}^{\chi}} \quad (2.22)$$

โดย χ เป็นค่าคงที่ ที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0.7-1.0 ซึ่งในงานวิจัยนี้จะเลือกใช้ค่าเท่ากับ 1.0 เพื่อให้เป็นการง่ายต่อการคำนวณ ส่วน h_p เป็นค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนสำหรับละอองน้ำไม่ระเหยตัว หรือ solid sphere Lee และ Ryley (1968) ได้แสดงความสัมพันธ์ของค่า h_p ไว้ดังนี้

$$h_p = \frac{k}{d}\left(2.0 + 0.74\,\mathrm{Re}_d^{0.5}\,\mathrm{Pr}^{0.33} \right) \quad (2.23)$$

จากความสัมพันธ์ของค่า h_p ในกรณีที่ขนาดของละอองน้ำมีขนาดเล็กมาก จะพบว่าเทอมสุดท้ายของสมการ (2.23) จะมีค่าเท่ากับศูนย์ เนื่องจากค่า droplet reynolds number (Re_d) จะขึ้นกับความเร็วสัมพัทธ์ระหว่างละอองน้ำและไอน้ำร้อนยิ่งยวด ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้กำหนดไว้ว่า โมเมนตัมของละอองน้ำจะไม่มีอิทธิผลต่อความเร็วไอน้ำร้อนยิ่งยวด หรือกล่าวได้ว่าความเร็วของละอองน้ำ และไอน้ำร้อนยิ่งยวดมีค่าเท่ากัน ทำให้ค่า droplet reynolds number มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นจึงสามารถแสดงความสัมพันธ์ของสมการ (2.23) ได้ใหม่ตามข้อกำหนดของงานวิจัยได้ดังนี้

$$h_p = \frac{2k}{d} \tag{2.24}$$

แทนสมการ (2.22) ลงในสมการ (2.21) จะได้รูปสมการใหม่ดังนี้

$$\rho_v u C_p \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r} \right) - n\pi d^2 h_p \left(T - T_s \right) \tag{2.25}$$

สำหรับ initial condition และ boundary condition ของสมการ(2.25) มีดังนี้คือ

$$T=T_s \text{ เมื่อ } x=0 \tag{2.26}$$

$$\partial T/\partial r=0 \text{ เมื่อ } r=0 \tag{2.27}$$

และ

$$T=T_w \text{ เมื่อ } r=r_0 \text{ สำหรับกรณีอุณหภูมิที่ผนังท่อมีค่าคงที่} \tag{2.28}$$

จากข้อกำหนดในงานวิจัย ที่ได้กำหนดไว้ว่า โมเมนตัมของละอองน้ำจะไม่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของไอน้ำร้อนยิ่งยวด ดังนั้นในการกำหนด velocity profile ของของไหลสองสถานะ ในงานวิจัยนี้จะยึด ไอน้ำร้อนยิ่งยวดเป็นหลัก ซึ่งได้กำหนดให้ velocity profile ของไอน้ำร้อนยิ่งยวด อยู่ในรูป parabolic velocity profile และ Langhaar velocity profile อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติ การไหลของของไหลสองสถานะที่มีลักษณะการไหลแบบ droplet flow ไม่สามารถที่จะกำหนดได้ว่า velocity profile ให้มีลักษณะที่ตายตัวได้ เนื่องจากการระเหยตัวของละอองน้ำจะมีผลต่อการเปลี่ยนแปลงของ velocity profile โดยเฉพาะการระเหยตัวในช่วงก่อนละอองน้ำระเหยตัวหมด ซึ่งมีอัตราการระเหยตัวที่สูงมากกว่าช่วงอื่นๆ แต่อย่างไรก็ตาม ผลกระทบดังกล่าว จะอยู่ในระดับที่น้อยมาก ถ้าความหนาแน่นของละอองน้ำ (droplet number density) และขนาดของละอองน้ำ มีค่าไม่สูงมากนัก (คุณภาพการไหลมากกว่า 0.5) ถึงแม้ว่า velocity profile จะสามารถกำหนดได้ว่าไม่มีการเปลี่ยนแปลง แต่ผลจากการระเหยตัวของละอองน้ำ จะทำให้ไอน้ำร้อนยิ่งยวดมีปริมาณที่สูงขึ้น ซึ่งจะมีผลต่อความเร็วของการไหล ดังนั้น ค่าความเร็วเฉลี่ยของไอน้ำร้อนยิ่งยวดจึงมีการเปลี่ยนแปลงจนกว่าละอองน้ำจะระเหยตัวหมด

2.3 สมการแสดงการเปลี่ยนแปลงขนาดของละอองน้ำ

ในสมการ (2.25) ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของละอองน้ำ เป็นตัวแปรหนึ่งที่มีการเปลี่ยนแปลง ดังนั้นจึงมีความจำเป็นที่จะต้องหาความสัมพันธ์แสดงการเปลี่ยนแปลงขนาดของละอองน้ำ ซึ่งสามารถทำได้โดยการดุลพลังงานบนละอองน้ำ และอาศัยข้อกำหนด ที่กำหนดให้ความเร็วของละอองน้ำมีค่าเท่ากับความเร็วไอน้ำร้อนยิ่งยวด ทำให้สามารถสร้างสมการแสดงการเปลี่ยนแปลงของขนาดละอองน้ำได้ดังนี้

พลังงานความร้อนที่ละอองน้ำได้รับจากไอน้ำร้อนยิ่งยวด

= พลังงานความร้อนที่ใช้ในการระเหยตัวของละอองน้ำ

$$\pi d^2 h_d\left(T_m - T_S\right) = -\frac{1}{2}\rho_l h_{fg}\pi d^2 \frac{dd}{dt} \tag{2.29}$$

และ เนื่องจากความเร็วของละอองน้ำมีค่าเท่ากับความเร็วของไอน้ำร้อนยิ่งยวด ทำให้ได้รูปสมการดังนี้

$$\pi d^2 h_d \left(T_m - T_s\right) = -\frac{1}{2}\rho_1 h_{fg} \pi d^2 V \frac{dd}{dx} \tag{2.30}$$

โดยมี initial condition ดังนี้

$$d = d_0 \quad \text{ที่} \quad x = 0 \tag{2.31}$$

จากสมการ(2.30) ค่า T_m หรือ อุณหภูมิเฉลี่ยขององค์ประกอบที่มีสถานะไอ (vapor bulk mean temperature) ถูกใช้สำหรับค่าปริมาณโดยเฉลี่ยของการถ่ายเทความร้อนจากไอน้ำร้อนยิ่งยวดไปยังละอองน้ำ ซึ่งมีรูปสมการดังนี้

$$T_m = \frac{4}{r_0^2}\int_0^{r_0} T\left(1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right) r\,dr \tag{2.32}$$

สำหรับกรณีที่ใช้ parabolic velocity profile

$$T_m = \frac{4}{r_0^2}\int_0^{r_0} T\left(\frac{I_0(\gamma) - I_0\left(\gamma \frac{r}{r_0}\right)}{2I_2(\gamma)}\right) r\,dr \tag{2.33}$$

สำหรับกรณีที่ใช้ Langhaar velocity profile

จากข้อกำหนดที่กำหนดให้จำนวนละอองน้ำที่หน้าตัดใดๆของท่อจะมีค่าเท่ากัน จึงสามารถกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นของจำนวนละอองน้ำ กับความเร็วเฉลี่ยของละอองน้ำ ซึ่งถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับความเร็วของไอน้ำร้อนยิ่งยวด ได้ดังนี้

$$Vn = V_0 n_0 \tag{2.34}$$

นอกจากนี้ โดยอาศัยการดุลมวลที่ละอองน้ำ จะสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นของจำนวนละอองน้ำ กับการเปลี่ยนแปลงขนาดของละอองน้ำ ได้ดังนี้

อัตราการเพิ่มขึ้นของมวล (rate of creation of mass) = 0

อัตราการเพิ่มขึ้นของมวลไอน้ำร้อนยิ่งยวด = อัตราการลดลงของมวลละอองน้ำ

$$\rho_v\left(V+\Delta V\right)-\rho_v V = n\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{6}\pi d^3 \rho_l \Delta x\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\rho_v V\right) = \frac{1}{2} n\pi d^2 \rho_l \frac{dd}{dt}$$

$$\rho_v \frac{dV}{V} = \frac{1}{2} n\pi d^2 \rho_l dd$$

จากสมการ(2.34) แทนในสมการข้างต้น ทำให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นของจำนวนละอองน้ำ กับการเปลี่ยนแปลงขนาดของละอองน้ำ ดังนี้

$$-\rho_v \frac{dn}{n} = \frac{1}{2} n\pi d^2 \rho_l dd \qquad (2.35)$$

โดยมี initial condition ดังนี้

$$n = n_0 \text{ เมื่อ } d = d_0 \qquad (2.36)$$

ทำการแก้สมการ (2.35) ซึ่งจะให้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n_0} + \frac{\pi}{6}\left(\frac{\rho_l}{\rho_v}\right)\left\{d_0^3 - d^3\right\} \qquad (2.37)$$

สำหรับค่า local Nusselt number ของของไหลสองสถานะที่มีลักษณะการไหลแบบ droplet flow ในทิศตามแนวยาวท่อ ภายใต้สภาวะอุณหภูมิผนังท่อคงที่ จะหาได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$Nu_x = \frac{2r_0}{T_w - T_m}\left(\frac{\partial T}{\partial R}\right)_{r=r_0} \tag{2.38}$$

2.4 การจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปตัวแปรไร้หน่วย (Nondimensionalization)

วัตถุประสงค์ในการจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปตัวแปรไร้หน่วยนั้น ก็เพื่อลดความซับซ้อนของรูปสมการ โดยการกำหนดตัวแปรในสมการที่มีค่าไม่คงที่ ให้อยู่ในรูปไร้หน่วย และทำการจัดกลุ่มของตัวแปรที่มีค่าคงที่ให้รวมเป็นกลุ่มเดียวกัน ดังเช่นในงานวิจัยนี้ ได้กำหนดกลุ่มตัวแปร ขึ้นมา 3 กลุ่ม ซึ่งประกอบด้วย 1. Liquid loading parameter (A) 2. Heat sink parameter (S) และ 3. Wall superheat parameter (C) โดย parameter แต่ละตัวมีค่าดังนี้

1. Liquid loading parameter

$$A = \frac{\pi}{6}\left(n_0 d_0^3\right)\frac{\rho_l}{\rho_v} \tag{2.39}$$

2. Heat sink parameter

$$S = \frac{n_0 \pi d_0^2 h_{p0} r_0^2}{k} \tag{2.40}$$

3. Wall superheat parameter

$$C = \frac{C_p\left(T_w - T_s\right)}{h_{fg}} \tag{2.41}$$

พิจารณาสมการ (2.25) ซึ่งเป็นสมการพลังงาน สำหรับการไหลของของไหลสองสถานะที่มีลักษณะการไหลแบบ droplet flow ซึ่งได้กำหนดให้ velocity profile ของการไหลอยู่รูป parabolic velocity profile และ Langhaar velocity profile ทำให้สมการ(2.25) เปลี่ยนรูปไป โดยการแทนค่าความเร็ว (u) ด้วยสมการ (1.3) และสมการ (2.2) ดังนี้

$$2\rho_v C_p V\left(1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right)\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)-n\pi d^2 h_p\left(T-T_s\right) \qquad (2.42)$$

สำหรับกรณีที่ใช้ parabolic velocity profile

$$2\rho_v C_p V\left(\frac{I_0\left(\gamma\right)-I_0\left(\gamma\frac{r}{r_0}\right)}{2I_2\left(\gamma\right)}\right)\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)-n\pi d^2 h_p\left(T-T_s\right) \qquad (2.43)$$

สำหรับกรณีที่ใช้ Langhaar velocity profile

จัดรูปสมการ(2.42) และสมการ(2.43) ให้อยู่ในรูปตัวแปรไร้หน่วย โดยกำหนดตัวแปรไร้หน่วยดังต่อไปนี้

$$D=\frac{d}{d_0} \qquad (2.44a)$$

$$R=\frac{r}{r_0} \qquad (2.44b)$$

$$X=\frac{x}{r_0\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}} \qquad (2.44c)$$

$$\theta=\frac{T-T_s}{T_w-T_s} \qquad (2.44d)$$

โดย

$$\mathrm{Re} = \frac{2\,\rho_v V_0 r_0}{\mu} \tag{2.45a}$$

และ

$$\mathrm{Pr} = \frac{\mu C_p}{k} \tag{2.45b}$$

ดังนั้น เมื่อใช้กลุ่มตัวแปรในสมการ (2.39)-(2.41) และตัวแปรไร้หน่วยในสมการ (2.44)-(2.45) แทนลงในสมการ (2.43) จะทำให้สามารถจัดรูปสมการพลังงานให้อยู่ในรูปตัวแปรไร้หน่วยได้ดังนี้

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{k(T_w - T_s)}{2\,\rho_v r_0^2 V_0 C_p}\frac{\partial \theta}{\partial X} \tag{2.46}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{T_w - T_s}{r_0}\frac{\partial \theta}{\partial R} \tag{2.47}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \left(\frac{T_w - T_s}{r_0}\right)\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial \theta}{\partial R}\right) \tag{2.48}$$

จากสมการ (2.46) -(2.48) และกลุ่มตัวแปรทั้งหมด เมื่อแทนลงใน สมการ (2.43) ซึ่งจะให้รูปสมการดังนี้

$$\left(1 + A\left(1 - D^3\right)\right)\left(1 - R^2\right)\frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial \theta}{\partial R}\right) - S\left(\frac{D}{1 + A\left(1 - D^3\right)}\right)\theta \tag{2.49}$$

สำหรับกรณีที่ใช้ parabolic velocity profile

$$\left(1+A\left(1-D^{3}\right)\right)\left(\frac{I_0(\gamma)-I_0(\gamma R)}{2I_2(\gamma)}\right)\frac{\partial\theta}{\partial X}=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\theta}{\partial R}\right)-S\left(\frac{D}{1+A\left(1-D^{3}\right)}\right)\theta \qquad (2.50)$$

สำหรับกรณีที่ใช้ Langhaar velocity profile

สำหรับ initial condition และ boundary condition ภายใต้สภาวะอุณหภูมิผนังท่อคงที่ ในสมการ (2.26)-(2.28) จะจัดรูปได้ใหม่ดังนี้

$$\theta=0 \text{ ที่ } X=0 \qquad (2.51)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial R}=0 \text{ ที่ } R=0 \qquad (2.52)$$

และ

$$\theta=1 \text{ ที่ } R=1 \qquad (2.53)$$

สำหรับสมการ(2.30)สามารถจัดรูปให้อยู่ในรูปตัวแปรไร้หน่วยได้ดังนี้

$$D\left(1+A\left(1-D^{3}\right)\right)\frac{dD}{dX}=-\frac{2}{3}\frac{S}{A}\left(\frac{\theta_m}{C^{-1}+\theta_m}\right) \qquad (2.54)$$

และ initial condition ในสมการ(2.31) จัดรูปได้ดังนี้

$$D=1 \text{ ที่ } X=0 \qquad (2.55)$$

และสำหรับค่า bulk mean temperature สมการ(2.32) จัดให้อยู่ในรูปตัวแปรไร้หน่วยได้ดังนี้

$$\theta_m=4\int_0^1\theta\left(1-R^{2}\right)RdR \qquad (2.56)$$

สำหรับกรณีที่ใช้ parabolic velocity profile

$$\theta_m = 4\int_0^1 \theta\left(\frac{I_0(\gamma)-I_0(\gamma R)}{2I_2(\gamma)}\right)RdR \tag{2.57}$$

สำหรับกรณีที่ใช้ Langhaar velocity profile

สำหรับสมการ (2.37) จัดให้อยู่ในรูปตัวแปรไร้หน่วยได้ดังนี้

$$\frac{n_0}{n} = 1 + A\left\{1-(D)^3\right\} \tag{2.58}$$

แต่เนื่องจาก $\frac{V}{V_0} = \frac{n_0}{n}$ ดังนั้น

$$\frac{V}{V_0} = 1 + A\left\{1-(D)^3\right\} \tag{2.59}$$

สำหรับค่า local Nusselt number ภายใต้สภาวะอุณหภูมิผนังท่อคงที่ สมการ (2.38) จัดให้อยู่ในรูปตัวแปรไร้หน่วยได้ดังนี้

$$Nu_x = \frac{2}{1-\theta_m}\left(\frac{\partial\theta}{\partial R}\right)_{R=1} \tag{2.60}$$