บทที่ 2

สถิติที่ใช้ในการวิจัย

ในบทนี้กล่าวถึงเทคนิคต่างๆที่เกี่ยวข้องและวิธีการประมาณพารามิเตอร์ของการแจกแจงความสูญเสียสำหรับข้อมูลถูกตัดปลายทางซ้ายและเป็นแบบกลุ่ม ด้วยวิธีการประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimation Method) วิธีการประมาณแบบไค-สแควร์ต่ำสุด (Minimum Chi-Square Estimation Method) และวิธีการประมาณแบบระยะต่ำสุดของคราเมอร์-วอน ไมส์ (Cramer-Von Mises Minimum Distance Estimation Method) ซึ่งมีรายละเอียดต่าง ๆ ดังนี้ โดยจะเริ่มด้วยวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่จะใช้ ประกอบการแก้สมการ คือ วิธีนิวตัน-ราฟสัน

วิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson Method)

ในบางครั้งการแก้สมการหาค่ารากไม่สามารถจะหาได้โดยตรง จำเป็นต้องใช้เทคนิคการวิเคราะห์เชิงตัวเลขเข้ามาช่วย การวิจัยครั้งนี้จะใช้วิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson Method) ซึ่งเป็นวิธีนิยมใช้แพร่หลาย โดยจะใช้สมการ p สมการ เมื่อต้องการหาค่าพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า p พารามิเตอร์ เนื่องจากการแจกแจงที่ใช้ในการวิจัยเป็นการแจกแจงที่มี 2 พารามิเตอร์ ดังนั้นสมการที่ใช้จะมีเพียง 2 สมการ

กำหนดให้สมการที่ต้องการหาค่าพารามิเตอร์เป็นดังนี้

$$g_1(\theta_1,\theta_2) = 0$$
$$g_2(\theta_1,\theta_2) = 0$$

เมื่อ θ_1 , θ_2 เป็นพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า

กำหนดค่าเริ่มต้น θ_{10} , θ_{20} จากนั้นใช้วิธีการประมาณเชิงเส้นจะได้สมการดังนี้

$$g_1(\theta_{10},\theta_{20}) + g_{11}(\theta_{10},\theta_{20})(\theta_1 - \theta_{10}) + g_{12}(\theta_{10},\theta_{20})(\theta_2 - \theta_{20}) = 0$$

$$g_2(\theta_{10},\theta_{20}) + g_{21}(\theta_{10},\theta_{20})(\theta_1 - \theta_{10}) + g_{22}(\theta_{10},\theta_{20})(\theta_2 - \theta_{20}) = 0$$

เมื่อ

$$g_{11}(\theta_1,\theta_2) = \frac{\partial g_1(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1} \quad , \quad g_{12}(\theta_1,\theta_2) = \frac{\partial g_1(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2}$$

$$g_{21}(\theta_1,\theta_2) = \frac{\partial g_2(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1} \quad , \quad g_{22}(\theta_1,\theta_2) = \frac{\partial g_2(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2}$$

หรือสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ คือ

$$\begin{bmatrix} g_1(\theta_{10},\theta_{20}) \\ g_2(\theta_{10},\theta_{20}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{11}(\theta_{10},\theta_{20}) & g_{12}(\theta_{10},\theta_{20}) \\ g_{21}(\theta_{10},\theta_{20}) & g_{22}(\theta_{10},\theta_{20}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 - \theta_{10} \\ \theta_2 - \theta_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{10} \\ \theta_{20} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_{11}(\theta_{10},\theta_{20}) & g_{12}(\theta_{10},\theta_{20}) \\ g_{21}(\theta_{10},\theta_{20}) & g_{22}(\theta_{10},\theta_{20}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} g_1(\theta_{10},\theta_{20}) \\ g_2(\theta_{10},\theta_{20}) \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

จะใช้กระบวนการทำซ้ำโดยในรอบที่สองและรอบถัดไป จะให้ θ_{10} ,θ_{20} ในแต่ละรอบเป็นค่า θ_1 ,θ_2 ในรอบที่ผ่านมา ทำซ้ำจนกระทั่งได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ต้องการ โดยกำหนดเกณฑ์การหยุดทำซ้ำดังนี้

$$|\theta_1 - \theta_{10}| < 0.0001 \quad \text{และ} \quad |\theta_2 - \theta_{20}| < 0.0001$$

เมื่อค่าประมาณพารามิเตอร์ทั้ง 2 พารามิเตอร์ในรอบนี้แตกต่างจากรอบที่ผ่านมาไม่เกิน 0.0001 จะได้ว่าค่า θ_1 ,θ_2 คือค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ต้องการ

การกำหนดค่าเริ่มต้น

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ใช้วิธีการประมาณแบบโมเมนต์ (Moment Estimation) ในการประมาณค่าพารามิเตอร์เริ่มต้น สำหรับการแจกแจงแบบลอกนอร์มอลและการแจกแจงแบบพาร์โต ส่วนการแจกแจงแบบไวบูลล์จะใช้วิธีเปอร์เซ็นต์ไทล์ แมทชิ่ง (Percentile Matching) เนื่องจากวิธีการประมาณแบบโมเมนต์ไม่สามารถแก้สมการหาค่าประมาณให้อยู่ในรูปที่ง่ายได้ อย่างไรก็ตาม ทั้งสองวิธีนี้ต่างก็เป็นวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์อย่างง่าย และไม่ค่อยมีความ

ซับซ้อนมากนักในการคำนวณ

เมื่อความสูญเสียมีการแจกแจงแบบลอกนอร์มอล ซึ่งมี 2 พารามิเตอร์คือ μ และ σ จะประมาณค่าพารามิเตอร์เริ่มต้น μ_0 และ σ_0 ได้จาก

$$E(X) = e^{\mu_0+\frac{\sigma_0^2}{2}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i C_i}{n} = m_1$$

$$E(X^2) = e^{2\mu_0+\sigma_0^2} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i C_i^2}{n} = m_2$$

โดยที่ m_1 , m_2 เป็นโมเมนต์ที่หนึ่งและสองของข้อมูลตามลำดับ

จาก 2 สมการนี้ แก้สมการหาค่า μ_0 และ σ_0 ได้ดังนี้

$$\sigma_0 = \sqrt{\ln m_2 - 2\ln m_1}$$

$$\mu_0 = \ln m_1 - \frac{{\sigma_0}^2}{2}$$

เมื่อความสูญเสียมีการแจกแจงแบบพาเรโต ซึ่งมี 2 พารามิเตอร์คือ α และ λ จะประมาณค่าพารามิเตอร์เริ่มต้น α_0 และ λ_0 ได้จาก

$$E(X) = \frac{\lambda_0}{\alpha_0 - 1} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i C_i}{n} = m_1 \ , \qquad \alpha_0 > 1$$

$$E(X^2) = \frac{2\lambda_0^2}{(\alpha_0 - 1)(\alpha_0 - 2)} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i C_i^2}{n} = m_2 \ , \ \alpha_0 > 2$$

โดยที่ m_1 , m_2 เป็นโมเมนต์ที่หนึ่งและสองของข้อมูลตามลำดับ

จาก 2 สมการนี้ แก้สมการหาค่า α_0 และ λ_0 ได้ดังนี้

$$\alpha_0 = \frac{2(m_1^2 - m_2)}{2m_1^2 - m_2}$$

$$\lambda_0 = (\alpha_0 - 1)m_1$$

เมื่อความสูญเสียมีการแจกแจงแบบไวบูลล์ ซึ่งมี 2 พารามิเตอร์คือ c และ τ จะประมาณค่าพารามิเตอร์เริ่มต้น c_0 และ τ_0 ด้วยวิธีเปอร์เซ็นต์ไทล์ แมทชิ่ง โดยพิจารณาจาก

$$F_Y(C_i) = 1 - \exp(-c_0 C_i^{\tau_0}) = F_n(C_i)$$

$$F_Y(C_j) = 1 - \exp(-c_0 C_j^{\tau_0}) = F_n(C_j)$$

โดยที่ C_i และ C_j เป็นขอบเขตบนของความสูญเสียกลุ่มที่ i , j

จากสองสมการนี้ แก้สมการหาค่า c_0 และ τ_0 ได้ดังนี้

$$\tau_0 = \frac{\ln\left[\dfrac{\ln(1 - F_n(C_i))}{\ln(1 - F_n(C_j))}\right]}{\ln\left(\dfrac{C_i}{C_j}\right)}$$

$$c_0 = -\frac{\ln(1 - F_n(C_i))}{C_i^{\tau_0}}$$

การแจกแจงที่ใช้ในการวิจัย

1. การแจกแจงแบบลอกนอร์มอล (Lognormal Distribution)

ฟังก์ชันความหนาแน่นและฟังก์ชันการแจกแจงอยู่ในรูปของ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]}{x\sigma\sqrt{2\pi}} & ;x>0\ ,-\infty<\mu<\infty\ ,\sigma>0 \\ 0 & ;x\le 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} \Phi\left(\dfrac{\ln x-\mu}{\sigma}\right) & ;x>0\ ,-\infty<\mu<\infty\ ,\sigma>0 \\ 0 & ;x\ge 0 \end{cases}$$

เราสามารถหาค่าคาดหวัง ค่าความแปรปรวน ค่าสัมประสิทธิ์ความแปรผัน และฐานนิยมได้ดังต่อไปนี้

$$E(X) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$$

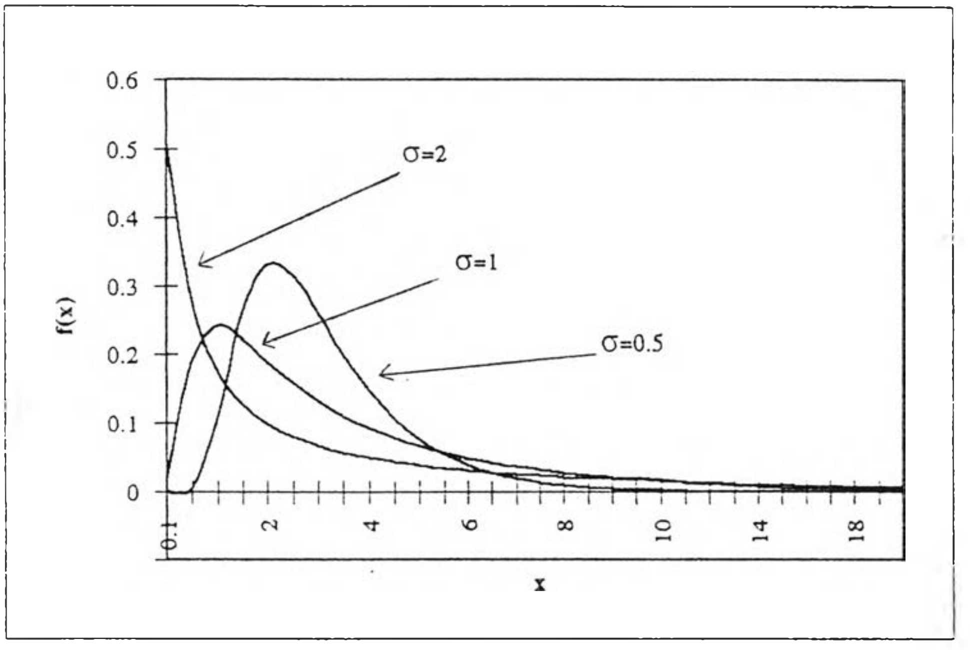
$$V(X) = e^{2\mu+\sigma^2}\left[e^{\sigma^2}-1\right]$$

$$CV(X) = \sqrt{e^{\sigma^2}-1}$$

$$Mode = e^{\mu-\sigma^2}$$

โดยที่ μ เป็นพารามิเตอร์แสดงสเกล (scale parameter) , $-\infty<\mu<\infty$

σ เป็นพารามิเตอร์แสดงรูปร่าง (shape parameter) , $\sigma>0$



รูปที่ 2.1 แสดงกราฟของการแจกแจงแบบลอกนอร์มอล

2. การแจกแจงแบบไวบูลล์ (Weibull Distribution)

ฟังก์ชันความหนาแน่นและฟังก์ชันการแจกแจงอยู่ในรูปของ

$$f(x) = \begin{cases} c\tau x^{\tau-1}e^{-cx^{\tau}} & ;x>0\ ,c>0\ ,\tau>0 \\ 0 & ;x\le 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1-e^{-cx^{\tau}} & ;x>0\ ,c>0\ ,\tau>0 \\ 0 & ;x\le 0 \end{cases}$$

เราสามารถหาค่าคาดหวัง ค่าความแปรปรวน ค่าสัมประสิทธิ์ความแปรผัน และฐานนิยมได้ดังต่อไปนี้

$$E(X) = \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\tau}\right)}{c^{\frac{1}{\tau}}}$$

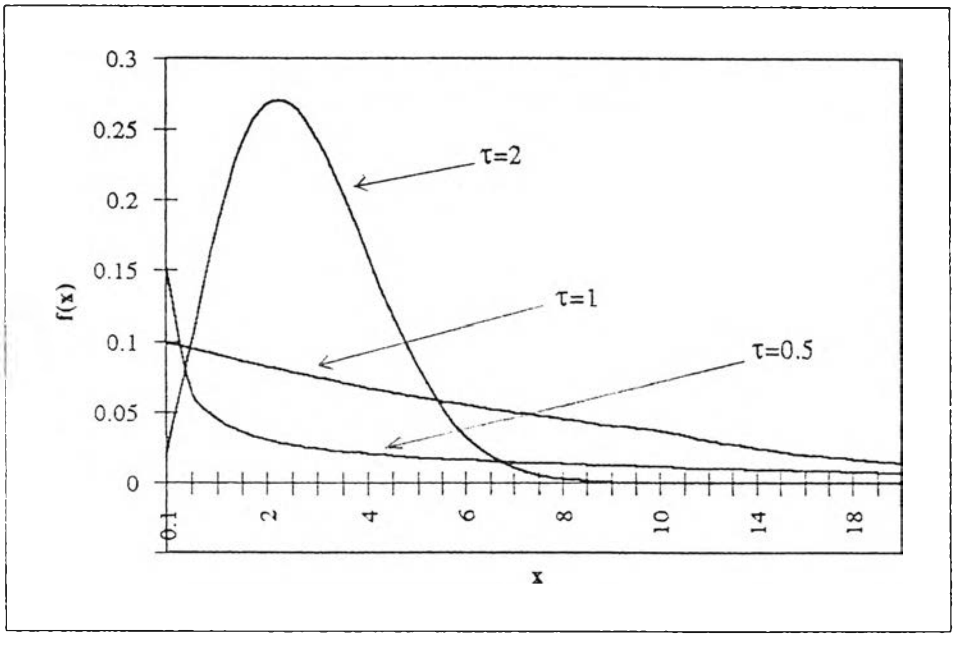
$$V(X) = \frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\tau}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\tau}\right)}{c^{\frac{2}{\tau}}}$$

$$CV(X) = \sqrt{\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\tau}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\tau}\right)}-1}$$

$$Mode = \begin{cases} 0 & , \tau \le 1 \\ \left(\frac{\tau-1}{c\tau}\right)^{\frac{1}{\tau}} & , \tau > 1 \end{cases}$$

โดยที่ c เป็นพารามิเตอร์แสดงสเกล (scale parameter) , $c > 0$

τ เป็นพารามิเตอร์แสดงรูปร่าง (shape parameter) , $\tau > 0$



รูปที่ 2.2 แสดงกราฟของการแจกแจงแบบไวบูลล์

8. การแจกแจงแบบพาเรโต (Pareto Distribution)

ฟังก์ชันความหนาแน่นและฟังก์ชันการแจกแจงอยู่ในรูปของ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\lambda^{\alpha}}{(x+\lambda)^{\alpha+1}} & ;x>0\ ,\alpha>0\ ,\lambda>0 \\ 0 & ;x\le 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1-\left(\dfrac{\lambda}{x+\lambda}\right)^{\alpha} & ;x>0\ ,\alpha>0\ ,\lambda>0 \\ 0 & ;x\le 0 \end{cases}$$

เราสามารถหาค่าคาดหวัง ค่าความแปรปรวน ค่าสัมประสิทธิ์ความแปรผัน และฐานนิยมได้ดังต่อไปนี้

$$E(X) = \frac{\lambda}{\alpha-1} \qquad ;\alpha>1$$

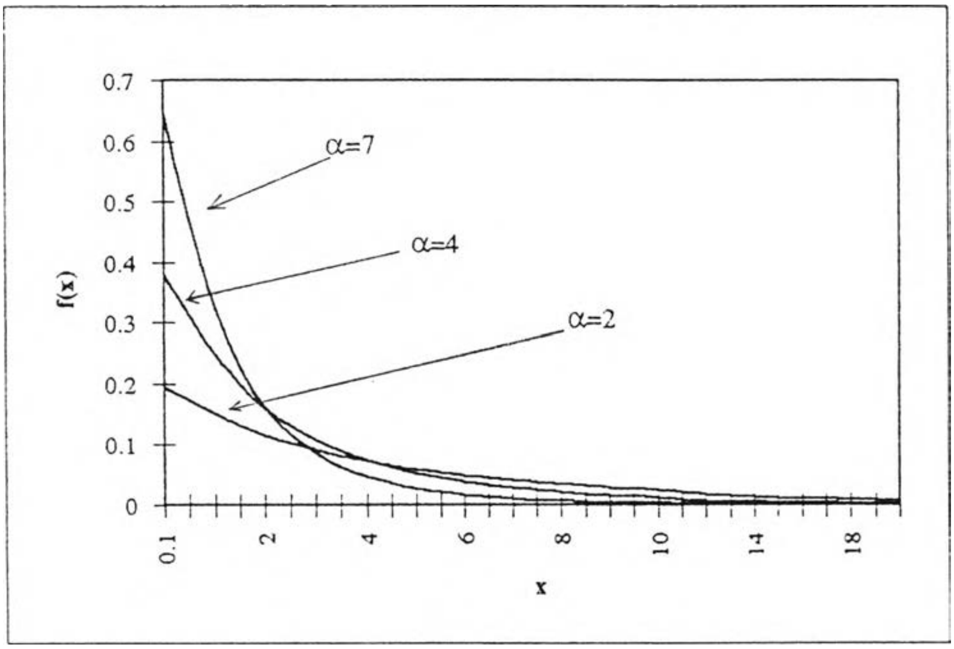
$$V(X) = \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \qquad ;\alpha>2$$

$$CV(X) = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-2}} \qquad ;\alpha>2$$

$$Mode = 0$$

โดยที่ λ เป็นพารามิเตอร์แสดงสเกล (soale parameter) , $\lambda > 0$

α เป็นพารามิเตอร์แสดงรูปร่าง (shape parameter) , $\alpha > 0$



รูปที่ 2.3 แสดงกราฟของการแจกแจงแบบพาเรโต

การประมาณค่าพารามิเตอร์

1. วิธีการประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

วิธีการประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ไม่ใช้ฟังก์ชันการเสี่ยงในการคัดเลือกตัวประมาณที่เหมาะสม แต่ใช้ในการวิเคราะห์จากสภาพความเป็นจริง ผู้ที่ค้นพบวิธีนี้เป็นคนแรกชื่อ ซี เอฟ เกาส์ (C.F. Gauss 1821) ซึ่งเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน ต่อมานักสถิติชาวอังกฤษชื่อ อาร์ เอ ฟิชเชอร์ (R.A. Fisher 1922) ได้ปรับปรุงวิธีการและตรวจสอบคุณสมบัติต่าง ๆ วิธีการนี้จะใช้ได้เมื่อตัวอย่างสุ่มมีการแจกแจงแบบมีพารามิเตอร์ (Parametric Distribution)[1]

สำหรับกรณีข้อมูลแบบกลุ่มเมื่อถูกตัดปลายทางซ้ายจะมีฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นดังนี้

$$L = \prod_{i=1}^{k}\left[\int_{C_{i-1}}^{C_i} f_Y(y;\theta)dy\right]^{f_i}$$

---

[1] ธีระพร วีระถาวร,ดร. <u>การอนุมานเชิงสถิติขั้นกลาง:โครงสร้างและความหมาย</u> (พิทักษ์การพิมพ์ : 2531) หน้า 99.

$$L = \prod_{i=1}^{k} \left[F_Y(C_i;\theta) - F_Y(C_{i-1};\theta)\right]^{f_i}$$

$$\begin{aligned}\ln L &= \sum_{i=1}^{k} f_i \ln\left[F_Y(C_i;\theta) - F_Y(C_{i-1};\theta)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{k} f_i \ln P_i(\theta)\end{aligned}$$

เมื่อ

$$P_i = F_Y(C_i;\theta) - F_Y(C_{i-1};\theta)$$

ประมาณค่าพารามิเตอร์ θ ได้โดยการหาอนุพันธ์บางส่วน (Partial Derivatives) ของลอกของภาวะน่าจะเป็น (Loglikelihood) เทียบกับ θ และให้สมการอนุพันธ์บางส่วนเท่ากับ 0

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_i} = 0 \qquad , \ i = 1,2$$

1.1 เมื่อความสูญเสียมีการแจกแจงแบบลอกนอร์มอล

$$\ln L = \sum_{i=1}^{k} f_i \ln P_i \tag{2.2}$$

$$P_i = \frac{\Phi\left(\dfrac{\ln C_i - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{\ln C_{i-1} - \mu}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\dfrac{\ln d - \mu}{\sigma}\right)} \tag{2.3}$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.3) ลงใน (2.2) จะได้ลอกของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นสำหรับการแจกแจงนี้ จากนั้นหาค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ทำให้สมการ (2.2) มีค่าสูงสุด โดยการหาอนุพันธ์ของลอกของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นเทียบกับพารามิเตอร์ μ และ σ จะได้ดังนี้

$$g_1(\mu,\sigma) = \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{P_i} \frac{\partial P_i}{\partial \mu} = 0 \tag{2.4}$$

$$g_2(\mu,\sigma) = \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = \sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{P_i} \frac{\partial P_i}{\partial \sigma} = 0 \tag{2.5}$$

เมื่อ

$$\frac{\partial P_i}{\partial \mu} = \frac{\phi\left(\frac{\ln C_{i-1}-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right) - P_i\phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma\left[1-\Phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right]} \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \sigma} = \frac{\left(\frac{\ln C_{i-1}-\mu}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{\ln C_{i-1}-\mu}{\sigma}\right) - \left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma\left[1-\Phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right]} - \frac{P_i\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma\left[1-\Phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right]} \tag{2.7}$$

และ

$$\phi\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right]}{\sqrt{2\pi}} \tag{2.8}$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.8) ลงใน (2.6) และ (2.7) และแทนค่าที่ได้จากสมการ (2.3) (2.6) และ (2.7) ลงในสมการ (2.4) และ (2.5) เนื่องจากการแก้สมการไม่สามารถกระทำได้โดยง่าย จะต้องใช้วิธีนิวตัน-ราฟสันช่วย โดยสมการที่ใช้ประกอบการหาค่าประมาณพารามิเตอร์มีดังนี้

$$g_{11}(\mu,\sigma) = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu^2} = \sum_{i=1}^{k} f_i\left[\frac{\frac{\partial^2 P_i}{\partial \mu^2}}{P_i} - \left(\frac{\frac{\partial P_i}{\partial \mu}}{P_i}\right)^2\right] \tag{2.9}$$

$$g_{12}(\mu,\sigma) = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma \partial \mu} = \sum_{i=1}^{k} f_i\left[\frac{\frac{\partial^2 P_i}{\partial \sigma \partial \mu}}{P_i} - \frac{\left(\frac{\partial P_i}{\partial \mu}\right)\left(\frac{\partial P_i}{\partial \sigma}\right)}{P_i^2}\right] \tag{2.10}$$

$$g_{21}(\mu,\sigma) = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\mu\partial\sigma} = \sum_{i=1}^{k} f_i \left[\frac{\frac{\partial^2 P_i}{\partial\mu\partial\sigma}}{P_i} - \frac{\left(\frac{\partial P_i}{\partial\sigma}\right)\left(\frac{\partial P_i}{\partial\mu}\right)}{P_i^2} \right] \tag{2.11}$$

$$g_{22}(\mu,\sigma) = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\sigma^2} = \sum_{i=1}^{k} f_i \left[\frac{\frac{\partial^2 P_i}{\partial\sigma^2}}{P_i} - \left(\frac{\frac{\partial P_i}{\partial\sigma}}{P_i} \right)^2 \right] \tag{2.12}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P_i}{\partial\mu^2} = {} & \frac{\left(\frac{\ln C_{i-1}-\mu}{\sigma^2}\right)\phi\left(\frac{\ln C_{i-1}-\mu}{\sigma}\right) - \left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma^2}\right)\phi\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma\left[1-\Phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right]} \\ & - \frac{P_i\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma^2}\right)\phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right) + \frac{\partial P_i}{\partial\mu}\phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma\left[1-\Phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right]} \\ & - \frac{\phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma^2\left[1-\Phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right]^2}\left\{\phi\left(\frac{\ln C_{i-1}-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right) - P_i\phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right\}\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P_i}{\partial\sigma\partial\mu} = {} & \frac{\frac{1}{\sigma}\left[\left(\frac{\ln C_{i-1}-\mu}{\sigma}\right)^2 - 1\right]\phi\left(\frac{\ln C_{i-1}-\mu}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma}\left[\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right)^2 - 1\right]\phi\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma\left[1-\Phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right]} \\ & - \frac{\frac{P_i}{\sigma}\left[\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)^2 - 1\right]\phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right) + \frac{\partial P_i}{\partial\sigma}\phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma\left[1-\Phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right]} \\ & - \frac{\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma^2\left[1-\Phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right]^2}\left\{\phi\left(\frac{\ln C_{i-1}-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right) - P_i\phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right\}\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial^2 P_i}{\partial\sigma\partial\mu} = \frac{\partial^2 P_i}{\partial\mu\partial\sigma}$$

$$\frac{\partial^2 P_i}{\partial\sigma^2} = \frac{\left(\frac{\ln C_{i-1}-\mu}{\sigma^2}\right)\left[\left(\frac{\ln C_{i-1}-\mu}{\sigma}\right)^2-2\right]\phi\left(\frac{\ln C_{i-1}-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma\left[1-\Phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right]}$$

$$-\frac{\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma^2}\right)\left[\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right)^2-2\right]\phi\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma\left[1-\Phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right]}$$

$$-\frac{P_i\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma^2}\right)\left[\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)^2-1\right]\phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)+\frac{\partial P_i}{\partial\sigma}\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma\left[1-\Phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right]}$$

$$-\frac{\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma^2\left[1-\Phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right]^2}\left\{\left(\frac{\ln C_{i-1}-\mu}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{\ln C_{i-1}-\mu}{\sigma}\right)-\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right)\right.$$

$$\left. - P_i\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right\} \qquad (2.15)$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.3) , (2.6) , (2.7) , (2.13) , (2.14) , (2.15) ลงใน (2.9) , (2.10) , (2.11) , (2.12) จากนั้นนำค่าที่ได้จากสมการ (2.4) , (2.5) , (2.9) , (2.10) , (2.11) , (2.12) และค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นไปแทนในสมการ (2.1) และใช้กระบวนการทำซ้ำจนได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ต้องการ

1.2 เมื่อความสูญเสียมีการแจกแจงแบบไวบูลล์

จากสมการ (2.2)

$$\ln L = \sum_{i=1}^{k} f_i \ln P_i \qquad (2.2)$$

$$P_i = \exp\left[-c\left(C_{i-1}^{\tau} - d^{\tau}\right)\right] - \exp\left[-c\left(C_i^{\tau} - d^{\tau}\right)\right] \qquad (2.16)$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.16) ลงใน (2.2) จะได้ลอกของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นสำหรับการแจกแจงนี้ จากนั้นหาค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ทำให้สมการ (2.2) มีค่าสูงสุดโดยการหาอนุพันธ์ของลอกของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นเทียบกับพารามิเตอร์ c และ τ จะได้ดังนี้

$$g_1(c,\tau) = \frac{\partial \ln L}{\partial c} = \sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{P_i}\frac{\partial P_i}{\partial c} = 0 \tag{2.17}$$

$$g_2(c,\tau) = \frac{\partial \ln L}{\partial \tau} = \sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{P_i}\frac{\partial P_i}{\partial \tau} = 0 \tag{2.18}$$

เมื่อ

$$\frac{\partial P_i}{\partial c} = \left(C_i^{\tau} - d^{\tau}\right)e^{-c\left(C_i^{\tau}-d^{\tau}\right)} - \left(C_{i-1}^{\tau} - d^{\tau}\right)e^{-c\left(C_{i-1}^{\tau}-d^{\tau}\right)} \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \tau} = c\left(C_i^{\tau}\ln C_i - d^{\tau}\ln d\right)e^{-c\left(C_i^{\tau}-d^{\tau}\right)} - c\left(C_{i-1}^{\tau}\ln C_{i-1} - d^{\tau}\ln d\right)e^{-c\left(C_{i-1}^{\tau}-d^{\tau}\right)} \tag{2.20}$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.16) , (2.19) , (2.20) ลงใน (2.17) และ (2.18) เนื่องจากสมการ (2.17) , (2.18) ไม่สามารถแก้สมการหาค่าประมาณได้โดยง่าย ต้องใช้วิธีนิวตัน-ราฟสันช่วย โดยสมการที่ใช้ประกอบการหาค่าประมาณพารามิเตอร์มีดังนี้

$$g_{11}(c,\tau) = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial c^2} = \sum_{i=1}^{k} f_i\left[\frac{\frac{\partial^2 P_i}{\partial c^2}}{P_i} - \left(\frac{\frac{\partial P_i}{\partial c}}{P_i}\right)^2\right] \tag{2.21}$$

$$g_{12}(c,\tau) = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \tau \partial c} = \sum_{i=1}^{k} f_i\left[\frac{\frac{\partial^2 P_i}{\partial \tau \partial c}}{P_i} - \frac{\left(\frac{\partial P_i}{\partial c}\right)\left(\frac{\partial P_i}{\partial \tau}\right)}{P_i^2}\right] \tag{2.22}$$

$$g_{21}(c,\tau) \;=\; \frac{\partial^2 \ln L}{\partial c \partial \tau} \;=\; \sum_{i=1}^{k} f_i \left[\frac{\frac{\partial^2 P_i}{\partial c \partial \tau}}{P_i} - \frac{\left(\frac{\partial P_i}{\partial \tau}\right)\left(\frac{\partial P_i}{\partial c}\right)}{P_i^2} \right] \tag{2.23}$$

$$g_{22}(c,\tau) \;=\; \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \tau^2} \;=\; \sum_{i=1}^{k} f_i \left[\frac{\frac{\partial^2 P_i}{\partial \tau^2}}{P_i} - \left(\frac{\frac{\partial P_i}{\partial \tau}}{P_i} \right)^2 \right] \tag{2.24}$$

เมื่อ

$$\frac{\partial^2 P_i}{\partial c^2} \;=\; \left[C_{i-1}^{\tau} - d^{\tau}\right]^2 e^{-c\left(C_{i-1}^{\tau} - d^{\tau}\right)} - \left[C_i^{\tau} - d^{\tau}\right]^2 e^{-c\left(C_i^{\tau} - d^{\tau}\right)} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_i}{\partial \tau \partial c} \;=\; & \left(C_i^{\tau} \ln C_i - d^{\tau} \ln d\right) e^{-c\left(C_i^{\tau} - d^{\tau}\right)} \left(c d^{\tau} - c C_i^{\tau} + 1\right) \\ & - \left(C_{i-1}^{\tau} \ln C_{i-1} - d^{\tau} \ln d\right) e^{-c\left(C_{i-1}^{\tau} - d^{\tau}\right)} \left(c d^{\tau} - c C_{i-1}^{\tau} + 1\right) \\ =\; & \frac{\partial^2 P_i}{\partial c \partial \tau} \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_i}{\partial \tau^2} \;=\; & c e^{-c\left(C_i^{\tau} - d^{\tau}\right)} \left[(\ln C_i)^2 C_i^{\tau} - (\ln d)^2 d^{\tau} - c\left(C_i^{\tau} \ln C_i - d^{\tau} \ln d\right)^2 \right] \\ & - c e^{-c\left(C_{i-1}^{\tau} - d^{\tau}\right)} \left[(\ln C_{i-1})^2 C_{i-1}^{\tau} - (\ln d)^2 d^{\tau} - c\left(C_{i-1}^{\tau} \ln C_{i-1} - d^{\tau} \ln d\right)^2 \right] \end{aligned} \tag{2.27}$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.16) , (2.19) , (2.20) , (2.25) , (2.26) , (2.27) ลงใน (2.21) (2.22) , (2.23) , (2.24) จากนั้นก็นำค่าที่ได้จากสมการ (2.17) , (2.18) , (2.21) , (2.22) , (2.23) , (2.24) และค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นไปแทนในสมการ (2.1) และใช้กระบวนการทำซ้ำจนได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ต้องการ

1.3 เมื่อความสูญเสียมีการแจกแจงแบบพาเรโต

จากสมการ (2.2)

$$\ln L = \sum_{i=1}^{k} f_i \ln P_i \tag{2.2}$$

$$P_i = \left(\frac{\lambda+d}{\lambda+C_{i-1}}\right)^{\alpha} - \left(\frac{\lambda+d}{\lambda+C_i}\right)^{\alpha} \tag{2.28}$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.28) ลงใน (2.2) จะได้ลอกของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นสำหรับการแจกแจงนี้ จากนั้นหาค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ทำให้สมการ (2.2) มีค่าสูงสุด โดยการหาอนุพันธ์ของลอกของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นเทียบกับพารามิเตอร์ α และ λ จะได้ดังนี้

$$g_1(\alpha,\lambda) = \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{P_i}\frac{\partial P_i}{\partial \alpha} = 0 \tag{2.29}$$

$$g_2(\alpha,\lambda) = \frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{P_i}\frac{\partial P_i}{\partial \lambda} = 0 \tag{2.30}$$

เมื่อ

$$\frac{\partial P_i}{\partial \alpha} = \left(\frac{\lambda+d}{\lambda+C_{i-1}}\right)^{\alpha} \ln\left(\frac{\lambda+d}{\lambda+C_{i-1}}\right) - \left(\frac{\lambda+d}{\lambda+C_i}\right)^{\alpha} \ln\left(\frac{\lambda+d}{\lambda+C_i}\right) \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \lambda} = \alpha(\lambda+d)^{\alpha-1}\left[\frac{C_{i-1}-d}{(\lambda+C_{i-1})^{\alpha+1}} - \frac{C_i-d}{(\lambda+C_i)^{\alpha+1}}\right] \tag{2.32}$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.28) , (2.31) , (2.32) ลงใน (2.29) , (2.30) เนื่องจากสมการ (2.29) และ (2.30) ไม่สามารถแก้สมการหาค่าประมาณได้โดยง่าย ต้องใช้วิธีนิวตัน-ราฟสันช่วย โดยสมการที่ใช้ประกอบการหาค่าประมาณพารามิเตอร์มีดังนี้

$$g_{11}(\alpha,\lambda) = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2} = \sum_{i=1}^{k} f_i \left[\frac{\frac{\partial^2 P_i}{\partial \alpha^2}}{P_i} - \left(\frac{\frac{\partial P_i}{\partial \alpha}}{P_i} \right)^2 \right] \tag{2.33}$$

$$g_{12}(\alpha,\lambda) = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda \partial \alpha} = \sum_{i=1}^{k} f_i \left[\frac{\frac{\partial^2 P_i}{\partial \lambda \partial \alpha}}{P_i} - \frac{\left(\frac{\partial P_i}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial P_i}{\partial \lambda}\right)}{P_i^2} \right] \tag{2.34}$$

$$g_{21}(\alpha,\lambda) = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha \partial \lambda} = \sum_{i=1}^{k} f_i \left[\frac{\frac{\partial^2 P_i}{\partial \alpha \partial \lambda}}{P_i} - \frac{\left(\frac{\partial P_i}{\partial \lambda}\right)\left(\frac{\partial P_i}{\partial \alpha}\right)}{P_i^2} \right] \tag{2.35}$$

$$g_{22}(\alpha,\lambda) = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda^2} = \sum_{i=1}^{k} f_i \left[\frac{\frac{\partial^2 P_i}{\partial \lambda^2}}{P_i} - \left(\frac{\frac{\partial P_i}{\partial \lambda}}{P_i} \right)^2 \right] \tag{2.36}$$

เมื่อ

$$\frac{\partial^2 P_i}{\partial \alpha^2} = \left(\frac{\lambda+d}{\lambda+C_{i-1}}\right)^{\alpha} \left[\ln\left(\frac{\lambda+d}{\lambda+C_{i-1}}\right)\right]^2 - \left(\frac{\lambda+d}{\lambda+C_i}\right)^{\alpha} \left[\ln\left(\frac{\lambda+d}{\lambda+C_i}\right)\right]^2 \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial^2 P_i}{\partial \lambda \partial \alpha} = (\lambda+d)^{\alpha-1} \left[\frac{C_{i-1}-d}{(\lambda+C_{i-1})^{\alpha+1}} \left(1+\alpha \ln\left(\frac{\lambda+d}{\lambda+C_{i-1}}\right)\right) - \frac{C_i-d}{(\lambda+C_i)^{\alpha+1}} \left(1+\alpha \ln\left(\frac{\lambda+d}{\lambda+C_i}\right)\right) \right] \tag{2.38}$$

$$= \frac{\partial^2 P_i}{\partial \alpha \partial \lambda}$$

$$\frac{\partial^2 P_i}{\partial \lambda^2} = \alpha(\lambda+d)^{\alpha-2} \left[\frac{C_{i-1}-d}{(\lambda+C_{i-1})^{\alpha+1}} \left(\frac{(\alpha+1)(C_{i-1}-d)}{\lambda+C_{i-1}} - 2 \right) - \frac{C_i-d}{(\lambda+C_i)^{\alpha+1}} \left(\frac{(\alpha+1)(C_i-d)}{\lambda+C_i} - 2 \right) \right] \tag{2.39}$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.28) , (2.31) , (2.32) , (2.37) , (2.38) , (2.39) ลงในสมการ (2.33) , (2.34) , (2.35) , (2.36) จากนั้นนำค่าที่ได้จากสมการ (2.29) , (2.30) , (2.33) , (2.34) , (2.35) , (2.36) และค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นไปแทนในสมการ (2.1) และใช้กระบวนการทำซ้ำจนได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ต้องการ

2. วิธีการประมาณแบบไค-สแควร์ต่ำสุด

หลักการของวิธีนี้คือ การหาค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ทำให้ตัวสถิติไค-สแควร์ (Q) มีค่าต่ำสุด

$$\min Q = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left[f_i - n\left(F_Y(C_i;\theta) - F_Y(C_{i-1};\theta)\right)\right]^2}{n\left(F_Y(C_i;\theta) - F_Y(C_{i-1};\theta)\right)}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{\left[f_i - nP_i\right]^2}{nP_i}$$

$$P_i = F_Y(C_i;\theta) - F_Y(C_{i-1};\theta)$$

ประมาณค่าพารามิเตอร์ได้โดยหาอนุพันธ์บางส่วน (Partial Derivatives) ของตัวสถิติไค-สแควร์เทียบกับ θ และให้สมการอนุพันธ์บางส่วนเท่ากับ 0

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta_j} = \sum_{i=1}^{k}\left[n - \frac{f_i^2}{nP_i^2}\right]\frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} \qquad , j = 1,2$$

2.1 เมื่อความสูญเสียมีการแจกแจงแบบลอกนอร์มอล

$$Q = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(f_i - nP_i\right)^2}{nP_i} \qquad (2.40)$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.3) ลงใน (2.40) จะได้ตัวสถิติไค-สแควร์สำหรับการแจกแจงนี้ จากนั้นหาค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ทำให้สมการ (2.40) มีค่าต่ำสุด โดยการหาอนุพันธ์ของตัวสถิติไค-สแควร์เทียบกับพารามิเตอร์ μ และ σ จะได้ดังนี้

$$g_1(\mu,\sigma) = \frac{\partial Q}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{k}\left(n-\frac{f_i^2}{nP_i^2}\right)\frac{\partial P_i}{\partial \mu} = 0 \tag{2.41}$$

$$g_2(\mu,\sigma) = \frac{\partial Q}{\partial \sigma} = \sum_{i=1}^{k}\left(n-\frac{f_i^2}{nP_i^2}\right)\frac{\partial P_i}{\partial \sigma} = 0 \tag{2.42}$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.3) , (2.6) , (2.7) ลงในสมการ (2.41) , (2.42) จากนั้นจึงใช้วิธีนิวตัน-ราฟสันแก้สมการ โดยสมการที่ใช้ประกอบการหาค่าประมาณพารามิเตอร์มีดังนี้

$$g_{11}(\mu,\sigma) = \frac{\partial^2 Q}{\partial \mu^2} = \sum_{i=1}^{k}\left[\left(n-\frac{f_i^2}{nP_i^2}\right)\frac{\partial^2 P_i}{\partial \mu^2}+\frac{2f_i^2}{nP_i^3}\left(\frac{\partial P_i}{\partial \mu}\right)^2\right] \tag{2.43}$$

$$g_{12}(\mu,\sigma) = \frac{\partial^2 Q}{\partial \sigma \partial \mu} = \sum_{i=1}^{k}\left[\left(n-\frac{f_i^2}{nP_i^2}\right)\frac{\partial^2 P_i}{\partial \sigma \partial \mu}+\frac{2f_i^2}{nP_i^3}\left(\frac{\partial P_i}{\partial \mu}\right)\left(\frac{\partial P_i}{\partial \sigma}\right)\right] \tag{2.44}$$

$$g_{21}(\mu,\sigma) = \frac{\partial^2 Q}{\partial \mu \partial \sigma} = \sum_{i=1}^{k}\left[\left(n-\frac{f_i^2}{nP_i^2}\right)\frac{\partial^2 P_i}{\partial \mu \partial \sigma}+\frac{2f_i^2}{nP_i^3}\left(\frac{\partial P_i}{\partial \sigma}\right)\left(\frac{\partial P_i}{\partial \mu}\right)\right] \tag{2.45}$$

$$g_{22}(\mu,\sigma) = \frac{\partial^2 Q}{\partial \sigma^2} = \sum_{i=1}^{k}\left[\left(n-\frac{f_i^2}{nP_i^2}\right)\frac{\partial^2 P_i}{\partial \sigma^2}+\frac{2f_i^2}{nP_i^3}\left(\frac{\partial P_i}{\partial \sigma}\right)^2\right] \tag{2.46}$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.3) , (2.6) , (2.7) , (2.13) , (2.14) , (2.15) ลงในสมการ (2.43) , (2.44) , (2.45) และ (2.46) จากนั้นนำค่าที่ได้จากสมการ (2.41) , (2.42) , (2.43) , (2.44) , (2.45) และ (2.46) และค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นไปแทนในสมการ (2.1) และใช้กระบวนการทำซ้ำจนได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ต้องการ

2.2 เมื่อความสูญเสียมีการแจกแจงแบบไวบูลล์

จากสมการ (2.40)

$$Q = \sum_{i=1}^{k}\frac{(f_i - nP_i)^2}{nP_i}$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.16) ลงในสมการ (2.40) จะได้ตัวสถิติไค-สแควร์สำหรับการแจกแจงนี้ จากนั้นหาค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ทำให้สมการ (2.40) มีค่าต่ำสุด โดยการหาอนุพันธ์ของตัวสถิติไค-สแควร์เทียบกับพารามิเตอร์ c และ τ จะได้ดังนี้

$$g_1(c,\tau) = \frac{\partial Q}{\partial c} = \sum_{i=1}^{k}\left(n - \frac{f_i^2}{nP_i^2}\right)\frac{\partial P_i}{\partial c} = 0 \tag{2.47}$$

$$g_2(c,\tau) = \frac{\partial Q}{\partial \tau} = \sum_{i=1}^{k}\left(n - \frac{f_i^2}{nP_i^2}\right)\frac{\partial P_i}{\partial \tau} = 0 \tag{2.48}$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.16) , (2.19) , (2.20) ลงในสมการ (2.47) , (2.48) จากนั้นแก้สมการโดยใช้วิธีนิวตัน-ราฟสัน เพื่อหาค่าประมาณพารามิเตอร์ โดยสมการที่ใช้ประกอบการหาค่าประมาณพารามิเตอร์มีดังนี้

$$g_{11}(c,\tau) = \frac{\partial^2 Q}{\partial c^2} = \sum_{i=1}^{k}\left[\left(n - \frac{f_i^2}{nP_i^2}\right)\frac{\partial^2 P_i}{\partial c^2} + \frac{2f_i^2}{nP_i^3}\left(\frac{\partial P_i}{\partial c}\right)^2\right] \tag{2.49}$$

$$g_{12}(c,\tau) = \frac{\partial^2 Q}{\partial \tau \partial c} = \sum_{i=1}^{k}\left[\left(n - \frac{f_i^2}{nP_i^2}\right)\frac{\partial^2 P_i}{\partial \tau \partial c} + \frac{2f_i^2}{nP_i^3}\left(\frac{\partial P_i}{\partial c}\right)\left(\frac{\partial P_i}{\partial \tau}\right)\right] \tag{2.50}$$

$$g_{21}(c,\tau) = \frac{\partial^2 Q}{\partial c \partial \tau} = \sum_{i=1}^{k}\left[\left(n - \frac{f_i^2}{nP_i^2}\right)\frac{\partial^2 P_i}{\partial c \partial \tau} + \frac{2f_i^2}{nP_i^3}\left(\frac{\partial P_i}{\partial \tau}\right)\left(\frac{\partial P_i}{\partial c}\right)\right] \tag{2.51}$$

$$g_{22}(c,\tau) = \frac{\partial^2 Q}{\partial \tau^2} = \sum_{i=1}^{k}\left[\left(n - \frac{f_i^2}{nP_i^2}\right)\frac{\partial^2 P_i}{\partial \tau^2} + \frac{2f_i^2}{nP_i^3}\left(\frac{\partial P_i}{\partial \tau}\right)^2\right] \tag{2.52}$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.16) , (2.19) , (2.20) , (2.25) , (2.26) , (2.27) ลงใน (2.49) , (2.50) , (2.51) , (2.52) จากนั้นนำค่าที่ได้จากสมการ (2.47) , (2.48) , (2.49) , (2.50) , (2.51) , (2.52) และค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นไปแทนในสมการ (2.1) และใช้กระบวนการทำซ้ำจนได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ต้องการ

2.3 เมื่อความสูญเสียมีการแจกแจงแบบพาเรโต

จากสมการ (2.40)

$$Q = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(f_i - nP_i\right)^2}{nP_i}$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.28) ลงในสมการ (2.40) จะได้ตัวสถิติไค-สแควร์สำหรับการแจกแจงนี้ จากนั้นหาค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ทำให้สมการ (2.40) มีค่าต่ำสุด โดยการหาอนุพันธ์ของตัวสถิติไค-สแควร์เทียบกับพารามิเตอร์ α และ λ จะได้ดังนี้

$$g_1(\alpha,\lambda) = \frac{\partial Q}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{k}\left(n - \frac{f_i^2}{nP_i^2}\right)\frac{\partial P_i}{\partial \alpha} = 0 \qquad (2.53)$$

$$g_2(\alpha,\lambda) = \frac{\partial Q}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{k}\left(n - \frac{f_i^2}{nP_i^2}\right)\frac{\partial P_i}{\partial \lambda} = 0 \qquad (2.54)$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.28) , (2.31) , (2.32) ลงในสมการ (2.53) , (2.54) จากนั้นแก้สมการโดยใช้วิธีนิวตัน-ราฟสัน เพื่อหาค่าประมาณพารามิเตอร์ โดยสมการที่ใช้ประกอบการหาค่าประมาณพารามิเตอร์มีดังนี้

$$g_{11}(\alpha,\lambda) = \frac{\partial^2 Q}{\partial \alpha^2} = \sum_{i=1}^{k}\left[\left(n - \frac{f_i^2}{nP_i^2}\right)\frac{\partial^2 P_i}{\partial \alpha^2} + \frac{2f_i^2}{nP_i^3}\left(\frac{\partial P_i}{\partial \alpha}\right)^2\right] \qquad (2.55)$$

$$g_{12}(\alpha,\lambda) = \frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda \partial \alpha} = \sum_{i=1}^{k}\left[\left(n - \frac{f_i^2}{nP_i^2}\right)\frac{\partial^2 P_i}{\partial \lambda \partial \alpha} + \frac{2f_i^2}{nP_i^3}\left(\frac{\partial P_i}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial P_i}{\partial \lambda}\right)\right] \qquad (2.56)$$

$$g_{21}(\alpha,\lambda) = \frac{\partial^2 Q}{\partial \alpha \partial \lambda} = \sum_{i=1}^{k}\left[\left(n - \frac{f_i^2}{nP_i^2}\right)\frac{\partial^2 P_i}{\partial \alpha \partial \lambda} + \frac{2f_i^2}{nP_i^3}\left(\frac{\partial P_i}{\partial \lambda}\right)\left(\frac{\partial P_i}{\partial \alpha}\right)\right] \qquad (2.57)$$

$$g_{22}(\alpha,\lambda) = \frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda^2} = \sum_{i=1}^{k}\left[\left(n - \frac{f_i^2}{nP_i^2}\right)\frac{\partial^2 P_i}{\partial \lambda^2} + \frac{2f_i^2}{nP_i^3}\left(\frac{\partial P_i}{\partial \lambda}\right)^2\right] \qquad (2.58)$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.28) , (2.31) , (2.32) , (2.37) , (2.38) , (2.39) ลงใน (2.55) , (2.56) , (2.57) , (2.58) จากนั้นนำค่าที่ได้จากสมการ (2.53) , (2.54) , (2.55) , (2.56) , (2.57) , (2.58) และค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นไปแทนในสมการ (2.1) และใช้กระบวนการทำซ้ำจนได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ต้องการ

3. วิธีการประมาณแบบระยะต่ำสุดของคราเมอร์-วอน ไมส์

ผู้ที่ค้นพบวิธีการประมาณแบบระยะต่ำสุดชื่อ Wolfowitz (1950s) [2] หลักการของวิธีนี้ คือ การทำให้ฟังก์ชันระยะทาง (Distance Function) ระหว่าง ฟังก์ชันการแจกแจงเชิงทดลอง (Empirical Distribution Function) และฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแบบ มีค่าต่ำสุด ซึ่งก็คือหลักการของตัวสถิติโคลโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟ (Kolmogorov-Smirnov Statistic)

ในที่นี้จะใช้ฟังก์ชันระยะทางระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงเชิงทดลองและฟังก์ชันการแจกแจงยกกำลังสอง ซึ่งคือตัวสถิติของคราเมอร์ -วอน ไมส์ (Cramer-Von Mises Statistic)

$$\min K = \sum_{i=1}^{k}\left[F_n(C_i) - F_Y(C_i;\theta)\right]^2$$

ประมาณค่าพารามิเตอร์ θ ได้โดยหาอนุพันธ์บางส่วน (Partial Derivatives) ของตัวสถิติของคราเมอร์-วอน ไมส์เทียบกับ θ และให้สมการอนุพันธ์บางส่วนเท่ากับ 0

$$\frac{\partial K}{\partial \theta_j} = -2\sum_{i=1}^{k}\left[F_n(C_i) - F_Y(C_i;\theta)\right]\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial \theta_j} \qquad , j = 1,2$$

3.1 เมื่อความสูญเสียมีการแจกแจงแบบลอกนอร์มอล

$$K = \sum_{i=1}^{k}\left[F_n(C_i) - F_Y(C_i)\right]^2 \qquad (2.59)$$

[2] Hogg, Robert V. and Klugman, Stuart A. Loss Distributions. (New York : John Wiley & Sons, 1984), p. 83.

เมื่อ

$$F_Y(C_i) = 1-\frac{1-\Phi\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right)}{1-\Phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)} \quad (2.60)$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.60) ลงใน (2.59) จะได้ตัวสถิติของคราเมอร์-วอน ไมส์ สำหรับการแจกแจงนี้ จากนั้นหาค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ทำให้สมการ (2.59) มีค่าต่ำสุด โดยการหาอนุพันธ์ของตัวสถิติเทียบกับพารามิเตอร์ μ และ σ จะได้ดังนี้

$$g_1(\mu,\sigma) = \frac{\partial K}{\partial \mu} = -2\sum_{i=1}^{k}\left[F_n(C_i)-F_Y(C_i)\right]\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial \mu} = 0 \quad (2.61)$$

$$g_2(\mu,\sigma) = \frac{\partial K}{\partial \sigma} = -2\sum_{i=1}^{k}\left[F_n(C_i)-F_Y(C_i)\right]\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial \sigma} = 0 \quad (2.62)$$

เมื่อ

$$\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial \mu} = \frac{\phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\left[1-\Phi\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right)\right]}{\sigma\left[1-\Phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right]^2} - \frac{\phi\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma\left[1-\Phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right]} \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial \sigma} = \frac{\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\left[1-\Phi\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right)\right]}{\sigma\left[1-\Phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right]^2} - \frac{\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma\left[1-\Phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right]}$$

(2.64)

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.60) , (2.63) , (2.64) ลงในสมการ (2.61) , (2.62) จากนั้น แก้สมการโดยใช้วิธีนิวตัน-ราฟสัน เพื่อหาค่าประมาณพารามิเตอร์ โดยสมการที่ใช้ประกอบการหาค่าประมาณพารามิเตอร์มีดังนี้

$$g_{11}(\mu,\sigma) = \frac{\partial^2 K}{\partial \mu^2} = 2\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial \mu}\right)^2 - \left(F_n(C_i) - F_Y(C_i)\right)\frac{\partial^2 F_Y(C_i)}{\partial \mu^2}\right] \quad (2.65)$$

$$g_{12}(\mu,\sigma) = \frac{\partial^2 K}{\partial \sigma \partial \mu} = 2\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial \mu}\right)\left(\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial \sigma}\right) - \left(F_n(C_i) - F_Y(C_i)\right)\frac{\partial^2 F_Y(C_i)}{\partial \sigma \partial \mu}\right]$$
(2.66)

$$g_{21}(\mu,\sigma) = \frac{\partial^2 K}{\partial \mu \partial \sigma} = 2\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial \sigma}\right)\left(\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial \mu}\right) - \left(F_n(C_i) - F_Y(C_i)\right)\frac{\partial^2 F_Y(C_i)}{\partial \mu \partial \sigma}\right]$$
(2.67)

$$g_{22}(\mu,\sigma) = \frac{\partial^2 K}{\partial \sigma^2} = 2\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(F_n(C_i) - F_Y(C_i)\right)\frac{\partial^2 F_Y(C_i)}{\partial \sigma^2}\right] \quad (2.68)$$

เมื่อ

$$\frac{\partial^2 F_Y(C_i)}{\partial \mu^2} = \frac{\left(\frac{\ln d - \mu}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{\ln d - \mu}{\sigma}\right)\left[1 - \Phi\left(\frac{\ln C_i - \mu}{\sigma}\right)\right] + 2\phi\left(\frac{\ln d - \mu}{\sigma^2}\right)\phi\left(\frac{\ln C_i - \mu}{\sigma}\right)}{\sigma^2\left[1 - \Phi\left(\frac{\ln d - \mu}{\sigma}\right)\right]^2}$$
$$- \frac{2\left[\phi\left(\frac{\ln d - \mu}{\sigma}\right)\right]^2\left[1 - \Phi\left(\frac{\ln C_i - \mu}{\sigma}\right)\right]}{\sigma^2\left[1 - \Phi\left(\frac{\ln d - \mu}{\sigma}\right)\right]^3} - \frac{\left(\frac{\ln C_i - \mu}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{\ln C_i - \mu}{\sigma}\right)}{\sigma^2\left[1 - \Phi\left(\frac{\ln d - \mu}{\sigma}\right)\right]}$$
(2.69)

$$\frac{\partial^2 F_Y(C_i)}{\partial\sigma\partial\mu} = \frac{\phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right)\left[\left(\frac{\ln C_i+\ln d-2\mu}{\sigma}\right)\right]}{\sigma^2\left[1-\Phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right]^2}$$

$$+\frac{\phi\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right)\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right)^2\left[\Phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right)\right]}{\sigma^2\left[1-\Phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right]^2}$$

$$-\frac{2\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\left[\Phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right]^2\left[1-\Phi\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right)\right]}{\sigma^2\left[1-\Phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right]^3}$$

$$-\frac{\phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\left[1-\Phi\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right)\right]}{\sigma^2\left[1-\Phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right]^2}+\frac{\phi\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma^2\left[1-\Phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right]} \qquad (2.70)$$

$$= \frac{\partial^2 F_Y(C_i)}{\partial\mu\partial\sigma}$$

$$\frac{\partial^2 F_Y(C_i)}{\partial\sigma^2} = \frac{\left[1-\Phi\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right)\right]\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\left[\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)^2-2\right]}{\sigma^2\left[1-\Phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right]^2}$$

$$+\frac{2\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma^2\left[1-\Phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right]^2}$$

$$-\frac{2\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)^2\left[\phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right]^2\left[1-\Phi\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right)\right]}{\sigma^2\left[1-\Phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right]^3}$$

$$-\frac{\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right)\left[\left(\frac{\ln C_i-\mu}{\sigma}\right)^2-2\right]}{\sigma^2\left[1-\Phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right]} \qquad (2.71)$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.60) , (2.63) , (2.64) , (2.69) , (2.70) , (2.71) ลงใน (2.65) , (2.66) , (2.67) , (2.68) จากนั้นนำค่าที่ได้จากสมการ (2.61) , (2.62) , (2.65) , (2.66) , (2.67) , (2.68) และค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นไปแทนในสมการ (2.1) และใช้กระบวนการทำซ้ำจนได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ต้องการ

3.2 เมื่อความสูญเสียมีการแจกแจงแบบไวบูลล์

จากสมการ (2.59)

$$K = \sum_{i=1}^{k}\left[F_n(C_i) - F_Y(C_i)\right]^2$$

เมื่อ

$$F_Y(C_i) = 1 - e^{-cC_i^{\tau} - d^{\tau}} \tag{2.72}$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.72) ลงในสมการ (2.59) จะได้ตัวสถิติของคราเมอร์-วอนไมส์สำหรับการแจกแจงนี้ จากนั้นหาค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ทำให้สมการ (2.59) มีค่าต่ำสุด โดยการหาอนุพันธ์ของตัวสถิติเทียบกับพารามิเตอร์ c และ τ จะได้ดังนี้

$$g_1(c,\tau) = \frac{\partial K}{\partial c} = -2\sum_{i=1}^{k}\left[F_n(C_i) - F_Y(C_i)\right]\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial c} = 0 \tag{2.73}$$

$$g_2(c,\tau) = \frac{\partial K}{\partial \tau} = -2\sum_{i=1}^{k}\left[F_n(C_i) - F_Y(C_i)\right]\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial \tau} = 0 \tag{2.74}$$

เมื่อ

$$\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial c} = \left(C_i^{\tau} - d^{\tau}\right)e^{-c\left(C_i^{\tau} - d^{\tau}\right)} \tag{2.75}$$

$$\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial \tau} = c\left(C_i^{\tau}\ln C_i - d^{\tau}\ln d\right)e^{-c\left(C_i^{\tau} - d^{\tau}\right)} \tag{2.76}$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.72) , (2.75) , (2.76) ลงในสมการ (2.73) , (2.74) จากนั้นแก้สมการโดยใช้วิธีนิวตัน-ราฟสัน เพื่อหาค่าประมาณพารามิเตอร์ โดยสมการที่ใช้ประกอบการ

หาค่าประมาณพารามิเตอร์มีดังนี้

$$g_{11}(c,\tau) = \frac{\partial^2 K}{\partial c^2} = 2\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial c}\right)^2 - \left(F_n(C_i) - F_Y(C_i)\right)\frac{\partial^2 F_Y(C_i)}{\partial c^2}\right] \quad (2.77)$$

$$g_{12}(c,\tau) = \frac{\partial^2 K}{\partial \tau \partial c} = 2\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial c}\right)\left(\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial \tau}\right) - \left(F_n(C_i) - F_Y(C_i)\right)\frac{\partial^2 F_Y(C_i)}{\partial \tau \partial c}\right] \quad (2.78)$$

$$g_{21}(c,\tau) = \frac{\partial^2 K}{\partial c \partial \tau} = 2\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial \tau}\right)\left(\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial c}\right) - \left(F_n(C_i) - F_Y(C_i)\right)\frac{\partial^2 F_Y(C_i)}{\partial c \partial \tau}\right] \quad (2.79)$$

$$g_{22}(c,\tau) = \frac{\partial^2 K}{\partial \tau^2} = 2\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial \tau}\right)^2 - \left(F_n(C_i) - F_Y(C_i)\right)\frac{\partial^2 F_Y(C_i)}{\partial \tau^2}\right] \quad (2.80)$$

เมื่อ

$$\frac{\partial^2 F_Y(C_i)}{\partial c^2} = -\left[C_i^\tau - d^\tau\right]^2 e^{-c\left(C_i^\tau - d^\tau\right)} \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial^2 F_Y(C_i)}{\partial \tau \partial c} = \left(C_i^\tau \ln C_i - d^\tau \ln d\right) e^{-c\left(C_i^\tau - d^\tau\right)}\left(cd^\tau - cC_i^\tau + 1\right) \quad (2.82)$$

$$= \frac{\partial^2 F_Y(C_i)}{\partial c \partial \tau}$$

$$\frac{\partial^2 F_Y(C_i)}{\partial \tau^2} = ce^{-c\left(C_i^\tau - d^\tau\right)}\left[\left(\ln C_i\right)^2 C_i^\tau - (\ln d)^2 d^\tau - c\left(C_i^\tau \ln C_i - d^\tau \ln d\right)^2\right] \quad (2.83)$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.72) , (2.75) , (2.76) , (2.81) , (2.82) , (2.83) ลงใน (2.77) , (2.78) , (2.79) , (2.80) จากนั้นนำค่าที่ได้จากสมการ (2.73) , (2.74) , (2.77) , (2.78) , (2.79) , (2.80) และค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นไปแทนในสมการ (2.1) และใช้กระบวนการทำซ้ำจนได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ต้องการ

3.3 เมื่อความสูญเสียมีการแจกแจงแบบพาเรโต

จากสมการ (2.59)

$$K = \sum_{i=1}^{k}\left[F_n(C_i) - F_Y(C_i)\right]^2$$

เมื่อ

$$F_Y(C_i) = 1-\left(\frac{\lambda+d}{\lambda+C_i}\right)^{\alpha} \qquad (2.84)$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.84) ลงในสมการ (2.59) จะได้ตัวสถิติของคราเมอร์-วอน ไมส์ สำหรับการแจกแจงนี้ จากนั้นหาค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ทำให้สมการ (2.59) มีค่าต่ำสุด โดยการหาอนุพันธ์ของตัวสถิติเทียบกับพารามิเตอร์ α และ λ จะได้ดังนี้

$$g_1(\alpha,\lambda) = \frac{\partial K}{\partial \alpha} = -2\sum_{i=1}^{k}\left[F_n(C_i) - F_Y(C_i)\right]\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial \alpha} = 0 \qquad (2.85)$$

$$g_2(\alpha,\lambda) = \frac{\partial K}{\partial \lambda} = -2\sum_{i=1}^{k}\left[F_n(C_i) - F_Y(C_i)\right]\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial \lambda} = 0 \qquad (2.86)$$

เมื่อ

$$\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial \alpha} = -\left(\frac{\lambda+d}{\lambda+C_i}\right)^{\alpha}\ln\left(\frac{\lambda+d}{\lambda+C_i}\right) \qquad (2.87)$$

$$\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial \lambda} = -\frac{\alpha(\lambda+d)^{\alpha-1}(C_i-d)}{(\lambda+C_i)^{\alpha+1}} \qquad (2.88)$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.84) , (2.87) , (2.88) ลงในสมการ (2.85) , (2.86) จากนั้น แก้สมการโดยใช้วิธีนิวตัน-ราฟสัน เพื่อหาค่าประมาณพารามิเตอร์ โดยสมการที่ใช้ประกอบการหาค่าประมาณพารามิเตอร์มีดังนี้

$$g_{11}(\alpha,\lambda) = \frac{\partial^2 K}{\partial \alpha^2} = 2\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial \alpha}\right)^2 - \left(F_n(C_i) - F_Y(C_i)\right)\frac{\partial^2 F_Y(C_i)}{\partial \alpha^2}\right] \quad (2.89)$$

$$g_{12}(\alpha,\lambda) = \frac{\partial^2 K}{\partial \lambda \partial \alpha} = 2\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial \lambda}\right) - \left(F_n(C_i) - F_Y(C_i)\right)\frac{\partial^2 F_Y(C_i)}{\partial \lambda \partial \alpha}\right] \quad (2.90)$$

$$g_{21}(\alpha,\lambda) = \frac{\partial^2 K}{\partial \alpha \partial \lambda} = 2\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial \lambda}\right)\left(\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial \alpha}\right) - \left(F_n(C_i) - F_Y(C_i)\right)\frac{\partial^2 F_Y(C_i)}{\partial \alpha \partial \lambda}\right] \quad (2.91)$$

$$g_{22}(\alpha,\lambda) = \frac{\partial^2 K}{\partial \lambda^2} = 2\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\frac{\partial F_Y(C_i)}{\partial \lambda}\right)^2 - \left(F_n(C_i) - F_Y(C_i)\right)\frac{\partial^2 F_Y(C_i)}{\partial \lambda^2}\right] \quad (2.92)$$

เมื่อ

$$\frac{\partial^2 F_Y(C_i)}{\partial \alpha^2} = -\left(\frac{\lambda + d}{\lambda + C_i}\right)^{\alpha}\left[\ln\left(\frac{\lambda + d}{\lambda + C_i}\right)\right]^2 \quad (2.93)$$

$$\frac{\partial^2 F_Y(C_i)}{\partial \lambda \partial \alpha} = -\frac{(\lambda + d)^{\alpha - 1}(C_i - d)}{(\lambda + C_i)^{\alpha + 1}}\left[1 + \alpha \ln\left(\frac{\lambda + d}{\lambda + C_i}\right)\right] \quad (2.94)$$

$$= \frac{\partial^2 F_Y(C_i)}{\partial \alpha \partial \lambda}$$

$$\frac{\partial^2 F_Y(C_i)}{\partial \lambda^2} = -\frac{\alpha(\lambda + d)^{\alpha - 2}(C_i - d)}{(\lambda + C_i)^{\alpha + 1}}\left[\frac{(\alpha + 1)(C_i - d)}{\lambda + C_i} - 2\right] \quad (2.95)$$

แทนค่าที่ได้จากสมการ (2.84) , (2.87) , (2.88) , (2.93) , (2.94) , (2.95) ลงใน (2.89) , (2.90) , (2.91) , (2.92) จากนั้นนำค่าที่ได้จากสมการ (2.85) , (2.86) , (2.89) , (2.90) , (2.91) , (2.92) และค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นไปแทนในสมการ (2.1) และใช้กระบวนการทำซ้ำจนได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ต้องการ