บทที่ 3

ฟัซซีลอจิกและการควบคุมแบบฟัซซี

เนื้อหาในบทนี้จะอธิบายถึงหลักการและพื้นฐานของฟัซซีเซ็ตที่แตกต่างไปจากเซ็ตปกติ ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับฟัซซีเซ็ต ลักษณะและสัญลักษณ์ที่ใช้ ตัวดำเนินการระหว่างฟัซซีเซ็ต นิยามของฟังก์ชันสมาชิกที่ใช้อธิบายฟัซซีเซ็ตรวมทั้งรูปแบบต่างๆ ของฟังก์ชัน หลักการยืดขยายของฟังก์ชันไปบนฟัซซีเซ็ต เพื่อประโยชน์ในการแก้สมการฟัซซี ความสัมพันธ์ระหว่างฟัซซีเซ็ตที่แสดงในรูปของสมการ จากนั้นจะกล่าวถึงลอจิกภาคแสดงและคุณสมบัติต่างๆ เช่นทอโทโลยี ความขัดแย้ง การอนุมานแบบนิรนัย ซึ่งเป็นพื้นฐานของฟัซซีลอจิกและเข้าสู่ฟัซซีลอจิกโดยแสดงความสัมพันธ์ของข้อความฟัซซีในรูปสมการความสัมพันธ์ และกล่าวถึงการให้เหตุผลแบบฟัซซีที่ใช้โดยทั่วไปอันได้แก่ การให้เหตุผลแบบจีเอ็มพีและแบบจีเอ็มที ในส่วนต่อไปจะกล่าวถึงระบบผู้เชี่ยวชาญแบบอิงกฎฟัซซี ซึ่งรวบรวมรูปแบบต่างๆ ของกฎระบบผู้เชี่ยวชาญฟัซซี เทอมภาษาและคำขยาย จากนั้นเข้าสู่ระบบสมการความสัมพันธ์ฟัซซีซึ่งจะแทนความสัมพันธ์ของตัวแปรระบบในรูปแบบของสมการเพื่อให้ง่ายต่อการวิเคราะห์แก้ปัญหา ขั้นตอนในการแก้สมการฟัซซีได้แก่ การรวมกฎความสัมพันธ์เข้าด้วยกันโดยการเชื่อมแบบเลือกและแบบร่วม การทำให้ได้ความสัมพันธ์ฟัซซีในรูปแบบที่ง่ายต่อการแก้สมการด้วยวิธีการแจกแจงเหตุสู่ผล และโดยใช้หลักการยืดขยาย การประกอบความสัมพันธ์ฟัซซีทั้งหมดเข้าด้วยกันด้วยการ

ประกอบแบบต่างๆ เช่นแบบ *Max-Min, Max-Product* ในขั้นตอนสุดท้ายจะเป็นการแก้สมการความสัมพันธ์ฟัซซีจากผลที่ได้ในการประกอบความสัมพันธ์ การแจกแจงเหตุสู่ผล และรวมสัมพันธ์ทั้งหมดเข้าด้วยกันได้เป็นผลลัพท์หรือคำตอบของสมการ ในส่วนต่อไปจะเป็นการแก้สมการฟัซซีโดยการแสดงแบบกราฟฟิคจากหลักการและขั้นตอนการแก้สมการที่ได้กล่าวมา ขั้นตอนสุดท้ายจะกล่าวถึงวิธีในการแปลงคำตอบฟัซซีจากรูปแบบของคำตอบฟัซซีให้เป็นรูปแบบคริส์พซึ่งเป็นค่าที่นำไปใช้จริงในงานควบคุมกระบวนการหรือกระบวนการตัดสินใจต่างๆ ส่วนสุดท้ายจะกล่าวถึงการนำหลักการฟัซซีลอจิกมาใช้ในการสร้างตัวควบคุมกระบวนการซึ่งจะกล่าวถึงโครงสร้างของตัวควบคุม ขั้นตอนการทำงานตลอดจนแนวทางในการออกแบบตัวควบคุม

3.1 บทนำ

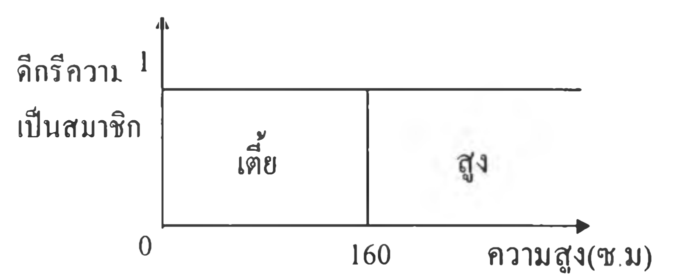
ในทฤษฎีเซ็ตปกตินั้น เราสามารถแยกแยะได้ว่าตัวแปรใดเป็นหรือไม่เป็นสมาชิกของเซ็ตนั้นๆ ได้ ทฤษฎีดังกล่าวจะมีมุมมองในโลกของความเป็นจริงแบบลอจิกได้เพียง ขาวหรือดำ จริงหรือเท็จ ไม่มีความก้ำกึ่งไม่ชัดเจน ทฤษฎีลอจิกแบบสองค่านี้ได้พิสูจน์มาแล้วว่ามีประสิทธิภาพและประสบความสำเร็จในการนำไปใช้อย่างมากสำหรับการแก้ปัญหาที่มีลักษณะที่กำหนดชัดเจน (Well-defined) ซึ่งเป็นการกำหนดคุณลักษณ์โดยการอธิบายที่ชัดเจนของกระบวนการที่เป็นปัญหาในรูปแบบทางปริมาณ (Quantitative form) อย่างไรก็ตาม ปัญหาต่างๆ ที่ปรากฏอยู่ในโลกของความเป็นจริงมีหลายปัญหาที่ไม่สามารถจำแนกหรือกำหนดได้อย่างชัดเจนด้วยวิธี

ดังกล่าว ปัญหาเหล่านี้มักจะมีลักษณะที่มีความยุ่งยากหรือมีโครงสร้างที่ไม่ชัดเจนทำให้ยากในการตัดสินใจแก้ปัญหานั้นๆ โดยวิธีการทางคณิตศาสตร์ได้ การแก้ปัญหาจะเป็นไปในลักษณะที่ต้องใช้มนุษย์ในการแก้มากกว่า ลักษณะของคอนเส็ปท์ดังกล่าวคือ นอกจากจะสามารถแยกแยะได้เช่น ถูก หรือผิดแล้ว ยังอาจเป็นได้ในลักษณะที่คลุมเครือ เช่น ค่อนข้างถูก ค่อนข้างผิด เป็นต้น เหล่านี้จะเรียกว่าเป็นคอนเส็ปท์หรือลักษณะของการตัดสินใจแบบคลุมเครือหรือการตัดสินใจแบบฟัซซี

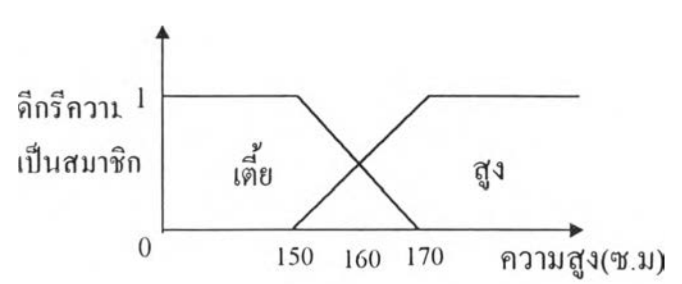
ทฤษฎีฟัซซีเซ็ตนั้นเป็นแนวทางหนึ่งที่ใช้ในการแก้ปัญหาเหล่านี้ ซึ่งทฤษฎีนี้ได้ถูกคิดค้นและพัฒนาโดย Lofti A. Zadeh (1965) แห่งมหาวิทยาลัยแคลิฟอร์เนียที่เบอร์คเลย์ โดยเป็นการขยายความมาจากทฤษฎีเซ็ตปกติ และพัฒนาทฤษฎีฟัซซีลอจิกซึ่งเป็นทฤษฎีที่นำเอาฟัซซีเซ็ตมาใช้งาน ฟัซซีเซ็ตนั้นยอมให้ค่าดีกรีของความเป็นสมาชิกของตัวแปรใดๆ ในเซ็ตสามารถเป็นค่าจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 1 ได้ ซึ่งก็คือหลักการนี้จะอนุญาติให้มนุษย์สามารถสังเกตุและแสดงข้อสรุปหรือความชำนาญได้เข้าใกล้ความเป็นจริงมากยิ่งขึ้น พิจารณาตัวอย่างของความคลุมเครือในการตัดสินใจเช่น การกล่าวว่าใครคนหนึ่งสูงหรือเตี้ย จำเป็นที่จะต้องมีเกณฑ์วัดที่แน่นอนเพื่อหาคำตอบซึ่งจะมีค่าได้เพียงจริงหรือเท็จเท่านั้น เช่นอาจกำหนดว่าถ้าใครคนหนึ่งสูงเท่ากับหรือเกิน 160 เซนติเมตร ถือว่าคนๆ นั้นสูง ถ้าใครคนนั้นมีความสูงน้อยกว่า 160 เซนติเมตร จะถือว่าคนๆ นั้นเตี้ย ถ้ากล่าวในภาษาเซ็ตก็คือ ทุกคนที่มีความสูงมากว่าหรือเท่ากับ 160 เซนติเมตร จะเป็นสมาชิกในเซ็ตของคนสูง มิฉะนั้นแล้วจะอยู่ในเซ็ตของคนเตี้ย รูปที่ 3.1

เป็นกราฟแสดงดีกรีของการเป็นสมาชิกในเซ็ตเทียบกับส่วนสูง สังเกตุว่าส่วนสูงแต่ละค่าจะมีดีกรีของการเป็นสมาชิกในเซ็ตสูงหรือเตี้ยได้เพียงหนึ่งในสองค่าคือ 0 (เท็จ) หรือ 1 (จริง) เท่านั้น

ในโลกของความเป็นจริงนั้นความคลุมเครือในการตัดสินปัญหามักจะเป็นสิ่งซึ่งพบอยู่เสมอ เงื่อนไขบางอย่างอาจจะตัดสินไม่ได้ว่าจริงหรือเท็จอย่างชัดเจน เช่นคนที่มีส่วนสูงเท่ากับ 165 เซนติเมตร อาจเป็นคนที่เราคิดว่าเขาเป็นคนที่ไม่เตี้ยแต่เป็นคนที่ค่อนข้างสูงเป็นต้น ทฤษฎีฟัซซีเซ็ตเสนอแนวทางที่จะแทนลักษณะกำกวมนี้โดยแสดงในรูปของฟังก์ชันสมาชิก (Membership function) ที่มีค่าอย่างต่อเนื่องตั้งแต่ 0 ถึง 1 รูปที่ 3.2 แสดงฟังก์ชันสมาชิกของฟัซซีเซ็ตสูงหรือเตี้ย สังเกตุว่าคนที่มีความสูง 160 เซนติเมตร จะมีค่าความเป็นสมาชิกในเซ็ตสูงและในเซ็ตเตี้ยเท่ากันคือ 0.5 ส่วนความสูง 165 เซนติเมตร มีค่าความเป็นสมาชิกในเซ็ตสูงเท่ากับ 0 75 และค่าความเป็นสมาชิกในเซ็ตเตี้ยเท่ากับ 0.25 เป็นต้น



รูปที่ 3.1 เซ็ตแบบปกติ



รูปที่ 3.2 ฟัซซีเซ็ต

3.2 ฟัซซีเซ็ต

เซ็ตปกติ (Classical set) หรือ คริส์พเซ็ต (Crisp set) นั้นเราสามารถบ่งชี้ว่าตัวแปรใดๆ เป็นสมาชิกหรือไม่เป็นสมาชิกของเซ็ตใดได้อย่างชัดเจน ลักษณะการเปลี่ยนแปลงค่าความเป็นสมาชิกจะมีลักษณะที่เป็นไปอย่างฉับพลันและชัดเจน แต่สำหรับฟัซซีเซ็ตแล้วลักษณะการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวจะมีลักษณะที่ค่อยเป็นค่อยไป ลักษณะดังกล่าวนี้อาจพูดได้ว่าขอบเขตของฟัซซีเซ็ตนั้นมีลักษณะที่คลุมเครือไม่ชัดเจน ซึ่งลักษณะของค่าความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซ็ตนี้จะสามารถแทนได้ด้วยฟังก์ชันเรียกว่าฟังก์ชันสมาชิก

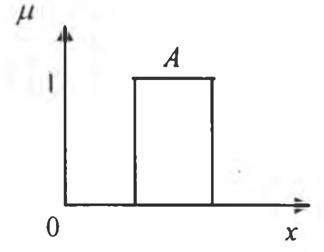
ฟัซซีเซ็ตนั้นคือเซ็ตซึ่งประกอบไปด้วยสมาชิกต่างๆ ที่มีดีกรีของความเป็นสมาชิกหลายๆ ค่าในเซ็ต ซึ่งแตกต่างจากเซ็ตปกติหรือคริส์พเซ็ต ที่สมาชิกต่างๆ ภายในเซ็ตจะมีดีกรีความเป็นสมาชิกได้เพียงสองค่าเท่านั้น หรือจะพูดในแง่ของลอจิกคือ จะมีค่าความเป็นสมาชิกเพียง 0 หรือ 1 เท่านั้น ในขณะที่ฟัซซีเซ็ตจะสามารถมีค่าความเป็นสมาชิกเป็นจำนวนใดๆ ได้ตั้งแต่ 0 ถึง 1 ฟัซซีเซ็ตนั้นจะเขียนได้ในรูปสัญลักษณ์เซ็ตที่มีส่วนขยาย เช่น นิยามให้เซ็ต A คือฟัซซีเซ็ตในเอกภพ (Universe) ของ X ถ้า x เป็นสมาชิกในเอกภพ X และเป็นสมาชิกในฟัซซีเซ็ต A ค่าความเป็นสมาชิกของ x ใน A จะแสดงได้ในรูปของ

$$\mu_A(x) \in [0,1] \tag{3.1}$$

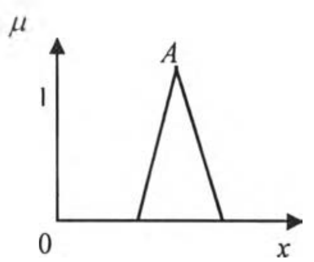
ดังนั้นฟัซซีเซ็ต A จะเขียนได้ในรูปของ

$$A = (x, \mu_A(x) | x \in X) \tag{3.2}$$

การแสดงค่าความเป็นสมาชิกหรือการแม็พ (Mapping) นี้แสดงได้ในรูปที่ 3.3 และ 3.4



รูปที่ 3.3 คริสพ์เซ็ตของ A



รูปที่ 3.4 ฟัซซีเซ็ตเซ็ตของ A

ในกรณีที่เซ็ตเอกภพเป็นลักษณะดีสกรีต (Discrete) และมีขอบเขต (Finite) ฟัซซีเซ็ต A จะเขียนได้ในรูปของ

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \ldots = \sum_i \frac{\mu_A(x_i)}{x_i} \tag{3.3}$$

และในกรณีที่เซ็ตเอกภพ X เป็นเซ็ตต่อเนื่องและมีขอบเขตฟัซซีเซ็ต A เขียนได้ในรูปของ

$$A = \int \frac{\mu_A(x)}{x} \tag{3.4}$$

โดยที่ '+', '$\sum$' และ '$\int$' จะหมายถึงการรวมของเซ็ต และ '—' จะหมายถึงตัวเชื่อมของสมาชิกกับค่าความเป็นสมาชิกของมันมิใช่ความหมายทางพีชคณิตแต่อย่างใด

3.3 การดำเนินการของฟัซซีเซ็ต (Fuzzy set operations)

นิยามฟัซซีเซ็ต A และ B เป็นฟัซซีซับเซ็ตของเอกภพ X สำหรับสมาชิก x ใดๆ ภายในเอกภพ และ C เป็นฟัซซีซับเซ็ตของเอกภพ Y สำหรับสมาชิก y โอเปอเรชันของฟัซซีเซ็ตจะนิยามโดย

A, B, C บน X

ก. คอมพลีเมนต์ (Complement) ของ A: $\bar{\mu}_A(x) = 1 - \mu_A(x)$

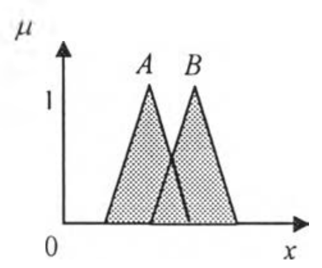
ข. ยูเนียน (Union) ของ A และ B : $\mu_{A \cup B}(x) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$

ค. อินเตอร์เซ็คชัน (Intersection) ของ A และ B : $\mu_{A \cap B}(x) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$

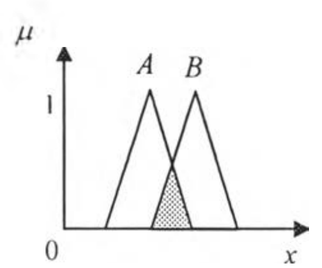
ง. ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian product) ของ A และ C :

$\mu_{A \times B}(x) = min\{\mu_A(x), \mu_C(y)\}$

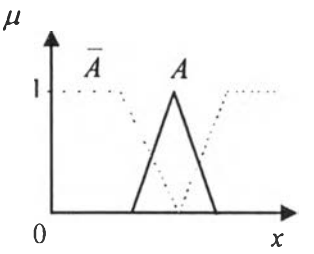
แสดงในรูปไดอะแกรมของเวนน์ (Venn's diagram) ได้โดย



รูปที่ 3.5 ยูเนียนของ A และ B



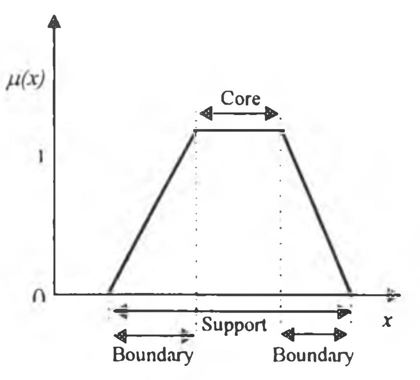
รูปที่ 3.6 อินเตอร์เซ็คชันของ A และ B



รูปที่ 3.7 คอมพลีเมนต์ของ A

3.4 ฟังก์ชันสมาชิก

ข้อมูลเกี่ยวกับฟัซซีเซ็ตนั้นจะสามารถอธิบายได้ด้วยฟังก์ชันสมาชิก ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องทราบนิยามของส่วนประกอบต่างๆ ของฟังก์ชันสมาชิกดังนี้



รูปที่ 3.8 รายละเอียดของฟังก์ชันสมาชิก

<u>คอร์</u> (Core) ของฟังก์ชันสมาชิกของฟัซซีเซ็ต A นิยามโดย ย่านภายในเอกภพซึ่งสมาชิกทุกตัวมีดีกรีความเป็นสมาชิกที่สูงที่สุด (Full degree) นั่นคือ จะประกอบด้วยสมาชิก x ในเอกภพซึ่ง

$\mu_A(x) = 1$

<u>ซัพพอร์ท</u> (Support) ของฟังก์ชันสมาชิกของฟัซซีเซ็ต A นิยามโดย ย่านภายในเอกภพซึ่งสมาชิกทุกตัวมีดีกรีความเป็นสมาชิกที่ไม่เป็นศูนย์นั่นคือ จะประกอบด้วยสมาชิก x ในเอกภพซึ่ง $\mu_A(x_i) \neq 0$

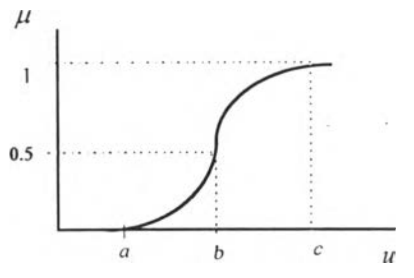
<u>ขอบเขต</u> (Boundary) ของฟังก์ชันสมาชิกของฟัซซีเซ็ต A นิยามโดย ย่านภายในเอกภพซึ่งสมาชิกทุกตัวมีดีกรีความเป็นสมาชิกไม่เท่ากับศูนย์แต่น้อยกว่าดีกรีสูงสุด นั่นคือจะประกอบด้วยสมาชิก x ในเอกภพซึ่ง $0<\mu_A(x_i)< 1$

รูปแบบของฟังก์ชันสมาชิกสำหรับฟัซซีเซ็ตจะสามารถนิยามได้สองวิธี คือ นิยามด้วยตัวเลข (Numerical definition) และนิยามด้วยฟังก์ชัน (Function definition) วิธีการนิยามด้วยตัวเลขจะแสดงค่าความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซ็ตเป็นค่าเวคเตอร์ (Vector value) ซึ่งจะมีมิติที่ขึ้นอยู่กับระดับของการดีสกรีตของเอกภพนั้น และวิธีการนิยามด้วยฟังก์ชันซึ่งการนิยามวิธีนี้จะใช้กับเอกภพแบบต่อเนื่อง การแสดงค่าความเป็นสมาชิกจะทำได้ในลักษณะของฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ ตัวอย่างฟังก์ชันที่ใช้เป็นมาตรฐานได้แก่ ฟังก์ชัน S ฟังก์ชัน π ฟังก์ชัน T หรือฟังก์ชันสามเหลี่ยม และฟังก์ชันสี่เหลี่ยมคางหมู

<u>ฟังก์ชัน S</u> นิยามได้ด้วยสมการ (3.5)

$$S(u;a,b,c) = \begin{cases} 0 & for \quad u < a \\ 2[(u-a)/(c-a)]^2 & for \quad a \le u \le b \\ 1-2[(u-c)/(c-a)]^2 & for \quad b \le u \le c \\ 1 & for \quad u > c \end{cases} \tag{3.5}$$

แสดงได้ในรูปที่ 3.9

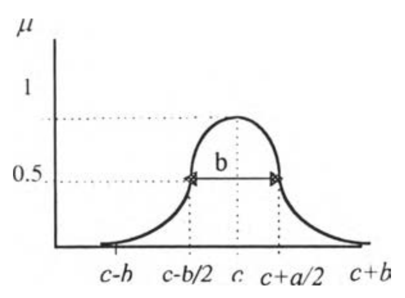


รูปที่ 3.9 ฟังก์ชัน S

<u>ฟังก์ชัน π</u> นิยามได้ด้วยสมการ (3.6)

$$S(u;a,b,c)=\begin{cases} S(u;c-b,c-b/2,c) & for\ \ u\le c \\ 1-S(u;c,c+b/2,c+b) & for\ \ u\ge c \end{cases} \tag{3.6}$$

แสดงได้ในรูปที่ 3.9

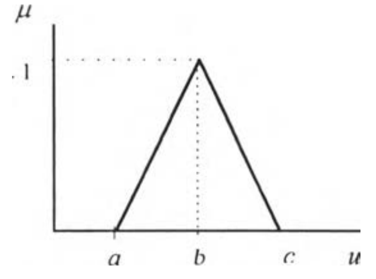


รูปที่ 3.10 ฟังก์ชัน π

<u>ฟังก์ชัน T</u> นิยามได้ด้วยสมการ (3.7)

$$T(u;a,b,c)=\begin{cases} 0 & for\ \ u<a \\ (u-a)/(b-a) & for\ \ a\le u\le b \\ (c-u)/(c-b) & for\ \ b\le u\le c \\ 0 & for\ \ u>c \end{cases} \tag{3.7}$$

แสดงได้ในรูปที่ 3.11



รูปที่ 3.11 ฟังก์ชัน T

3.5 หลักการยืดขยาย (Extension principle)

หลักการยืดขยายมีประโยชน์ในขั้นตอนของการหาสมการความสัมพันธ์ฟัซซีซึ่งเป็นวิธีหนึ่งที่ใช้ในการแก้สมการคำตอบของความสัมพันธ์ฟัซซี

สมมติว่าการแม็พระหว่างสมาชิก u ในเอกภพ U กับสมาชิก v ในเอกภพ V กระทำผ่านฟังก์ชัน f หลักของการยืดซึ่งเสนอโดย Zadeh (1975) และ Yage (1986) สามารถยืดขยายโดเมนของฟังก์ชันไปบนฟัซซีเซ็ตได้

ให้ $f : u \rightarrow v$

นิยาม A เป็นฟัซซีซับเซ็ตบนเอกภพ U นั่นคือ $A \subset U$ และ

$$A = \frac{\mu_1}{u_1} + \frac{\mu_2}{u_2} + \ldots \frac{\mu_n}{u_n} \tag{3.8}$$

การยืดสำหรับฟังก์ชัน f ซึ่งแม็พสมาชิกในเอกภพ U ไปเป็นสมาชิกในเอกภพ V คือ

$$\begin{aligned} f(A) &= f\left(\frac{\mu_1}{u_1}+\frac{\mu_2}{u_2}+\ldots+\frac{\mu_n}{u_n}\right) \\ &= \frac{\mu_1}{f(u_1)}+\frac{\mu_1}{f(u_2)}+\ldots+\frac{\mu_n}{f(u_n)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.6 ความสัมพันธ์ระหว่างฟัซซีเซ็ต (Relation among fuzzy sets)

ความสัมพันธ์ฟัซซี R คือการแม็พจากปริภูมิคาร์ทีเซียน (Cartesian space) $X \times Y$ ไปในช่วง [0,1] โดยค่าความแรง (Strength) ของการแม็พจะแสดงโดยฟังก์ชันสมาชิกของความสัมพันธ์สำหรับคู่ลำดับจากทั้งสองเอกภพหรือ $\mu_R(x,y)$

การดำเนินการของความสำพันธ์ฟัซซี

กำหนดให้ R, S และ T เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีบนปริภูมิคาร์ทีเซียน $X \times Y$ ตามการดำเนินการดังนี้

ยูเนียน: $\mu_{R \cup S}(x,y) = max(\mu_R(x,y), \mu_S(x,y))$ (3.10)

อินเตอร์เซ็คชัน: $\mu_{R \cap S}(x,y) = min(\mu_R(x,y), \mu_S(x,y))$ (3.11)

คอมพลีเมนต์: $\mu_{R^-}(x,y_i) = 1 - \mu_R(x,y)$ (3.12)

เพราะว่าโดยปกติแล้วความสัมพันธ์ฟัซซีจะอยู่ในรูปของฟัซซีเซ็ต เราสามารถนิยามผลคูณคาร์ทีเซียนระหว่างฟัซซีเซ็ตได้ ถ้าให้ A เป็นฟัซซีเซ็ตในเอกภพ X และ B เป็นฟัซซีเซ็ตในเอกภพ Y ดังนั้นผลคูณคาร์ทีเซียนระหว่างฟัซซีเซ็ต A และ B จะให้ผลลัพท์ในความสัมพันธ์

ฟัซซี R หรือ

$$A \times B = R \subset X \times Y \tag{3.13}$$

ด้วยฟังก์ชันสมาชิก

$$\mu_R(x,y) = \mu_{A\times B}(x,y) = min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \tag{3.14}$$

สมมติให้ R เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีในปริภูมิคาร์ทีเซียน $X \times Y$, S เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีบน $Y \times Z$ และ T เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีบน $X \times Z$ ดังนั้นการประกอบฟัซซี (Fuzzy composition) *Max-Min* นิยามโดยให้

$$T = R \bullet S \tag{3.15}$$

$$\mu_T(x,y) = \vee_{y \in Y}(\mu_R(x,y) \wedge \mu_S(y,z)) \tag{3.16}$$

และสำหรับการประกอบแบบ *Max-Product* นิยามโดย

$$\mu_T(x,z) = \vee_{y \in Y}(\mu_R(x,y) \bullet \mu_S(y,z)) \tag{3.17}$$

การประกอบความสัมพันธ์ทั้งสองแบบนี้จะใช้ประโยชน์ในกระบวนการอนุมานสำหรับการหาคำตอบของระบบสมการฟัซซีลอจิกต่อไป

3.7 ลอจิกภาคแสดง (Predicate logic)

ในลอจิกภาคแสดง ข้อความ P คือข้อความทางภาษาในเอกภพของการเสนอ ซึ่งสามารถระบุได้ว่ามีความเป็นจริงหรือเท็จได้อย่างชัดเจน ค่าความเป็นจริงของข้อความ P สามารถกำหนดได้ในลักษณะของค่าความเป็นจริงแบบไบนารี (Binary truth value) เรียกว่า

$T(P)$ สำหรับลอจิกนี้ $T(P)$ จะมีเพียงสองค่าคือ 1 (จริง) หรือ 0 (เท็จ) ถ้า U คือ เอกภพสำหรับข้อความทั้งหมด T คือการแม็พข้อความเหล่านี้ไปเป็นปริมาณทางไบนารี (0,1) เขียนได้เป็น

$T : U \to \{0,1\}$

กำหนดให้ P และ Q เป็นข้อความในเอกภพเดียวกัน จะสามารถเชื่อมกันได้โดยตัวเชื่อมทางลอจิกคือ

ก. การเลือก (Disjunction) ($\vee$)

ข. การร่วม (Conjunction) ($\wedge$)

ค. นิเสธ (Negation) (-)

จ. การแจกแจงเหตุสู่ผล (Implication) ($\to$)

ง. การเท่ากัน (Equality) ($\leftrightarrow$ หรือ $\equiv$)

นิยามให้ A และ B เป็นเซ็ตในเอกภพ X การคำนวณข้อความ (Propositional calculus) จะทำได้สำหรับกรณีที่ข้อความ P ประเมินค่าความเป็นจริงของประโยคซึ่งสมาชิก x จากเอกภพ X อยู่ในเซ็ต A และค่าความเป็นจริงของข้อความซึ่งสมาชิก x อยู่ในเซ็ต B หรือ

P: จริง ซึ่ง $x \in A$

Q: จริง ซึ่ง $x \in B$

นั่นคือ ถ้า $x \in A$, $T(P) = 1$ นอกจากนี้ $T(P) = 0$

ถ้า $x \in B$, $T(Q) = 1$ นอกจากนี้ $T(Q) = 0$

หรือแสดงโดยฟังก์ชัน

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases} \tag{3.18}$$

ตัวเชื่อมทางลอจิกข้างต้นสามารถใช้สร้างข้อความแบบผสมได้ ข้อความแบบดังกล่าวจะเป็นการประกอบหรือเชื่อมกันระหว่างข้อความต่างๆ สำหรับกรณีข้อความอย่างง่ายๆ สองข้อความ ผลของการผสมนิยามได้ในเทอมของค่าความเป็นจริงแบบไบนารีคือ

$P: x \in A$, $\bar{P}: x \in A$

$P \wedge Q \Rightarrow x \in A$ หรือ B

ดังนั้น $T(P \vee Q) = max(T(P),T(Q))$

$P \wedge Q \Rightarrow x \in A$ หรือ B

ดังนั้น $T(P \wedge Q) = min(T(P),T(Q))$

ถ้า $T(P) = 1$ แล้ว $T(\bar{P}) = 0$; ถ้า $T(P) = 0$ แล้ว $T(\bar{P}) = 1$

$P \leftrightarrow Q \Rightarrow x \in A, B$

ดังนั้น $T(P \leftrightarrow Q) = T(P) = T(Q)$

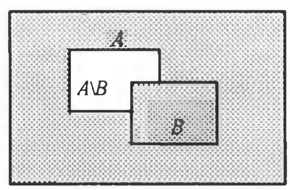
ตัวเชื่อมทางลอจิก "การแจกแจงเหตุสู่ผล" ในที่นี้รู้จักกันในแบบของการแจกแจงเหตุสู่ผลแบบธรรมดา (Classical implication) สำหรับข้อความ P ซึ่งถูกนิยามบนเซ็ต A และข้อความ Q นิยามบนเซ็ต B การแจกแจง "P implies Q" จะเทียบเท่ากับการรวม (Union) ของสมาชิกในคอมพลีเมนต์ของเซ็ต A กับสมาชิกในเซ็ต B เขียนได้ในรูปของเซ็ตคือ

$P \rightarrow Q \equiv \bar{A} \cup$ เป็นจริง $\equiv$ ทั้ง "not in A" หรือ "in B"

ดังนั้นจะได้ว่า $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\bar{P} \wedge Q)$

$$T(P \rightarrow Q) = T(\bar{P} \vee Q) = max(\bar{T}(P), T(Q))$$

การเทียบเท่าทางภาษาแสดงได้โดยข้อความ “*P* implies *Q* is true” แสดงได้ในรูปไดอะแกรมของเวนน์ในรูป 3.12 จากรูป ส่วนของ $A \backslash B$ คือย่านเซ็ตที่มีการแจกแจง “*P* implies *Q*” เป็นเท็จ ในส่วนของการแรเงาจะแสดงส่วนของสมาชิกซึ่งการแจกแจงมีค่าเป็นจริง



รูปที่ 3.12 การแจกแจงโดยรูปภาพของข้อความ “*P* implies *Q* is true”

พื้นที่ส่วนแรเงาคือเซ็ตของ

$\overline{A \backslash B} = \bar{A} \cup B = \overline{(A \cap B)}$

if x is in A and x is not in B then

$A \rightarrow B$ fails $\equiv A \backslash B$ (difference)

สำหรับข้อความ *P* และ *Q* จะมีค่าความเป็นจริงได้หนึ่งในสองค่า (0 หรือ 1) ดังนั้นจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดจะเป็น $2^2 = 4$ แสดงได้ในรูปตัวเชื่อมทางลอจิกต่างในตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 ค่าความเป็นจริงของของการเชื่อมลอจิก *P* และ *Q*

P	Q	P	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

สมมติตัวดำเนินการแจกแจงเหตุสู่ผลที่ใช้กับเอกภพ; P คือข้อความที่อธิบายด้วยเซ็ต A นิยามบนเอกภพของ X และ Q คือข้อความที่อธิบายด้วยเซ็ต B นิยามบนเอกภพ Y ดังนั้นการแจกแจง "P implies Q" จะสามารถแทนได้ด้วยเทอมของเซ็ตความสัมพันธ์ R ซึ่งนิยามโดย

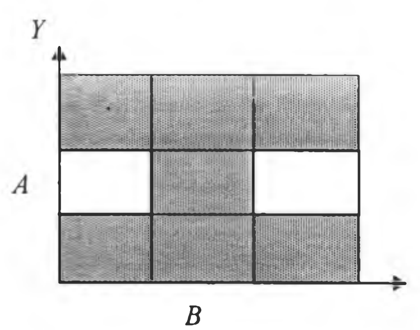
$$R = (A\times B)\cup(A\times Y) \equiv \text{IF } A, \text{ THEN } B \tag{3.19}$$

if $x\in A$ โดย $x\in X$, $A\subset X$

then $y\in B$ โดย $y\in Y$, $B\subset Y$

การแจกแจงนี้จะเทียบเท่ากับรูปแบบของกฎภาษา : IF A, THEN B รูปที่ 3.13 แสดงปริภูมิคาร์ทีเซียนของผลคูณ $X\times Y$ ซึ่งเทียบเท่ากับการแจกแจง

$$P\to Q \Rightarrow \text{if } x\in A \text{ then } x\in B, \text{ or } P\to Q \equiv A\cup B$$



รูปที่ 3.13 ปริภูมิคาร์ทีเซียนแสดงการแจกแจง IF A, THEN B

พื้นที่เรเงาในรูป 3.13 จะแทนค่าความเป็นจริงของการแจกแจง IF A, THEN B (P implies Q)

รูปแบบอื่นๆ ของข้อความแบบผสมจะแสดงได้ในรูปแบบของกฎภาษาคือ

IF A, THEN B, ELSE C

ในลอจิกภาคแสดง ข้อความนี้จะอยู่ในรูปของ

$$(P\to Q)\wedge(P\to S)$$

โดย P: $x \in A$, $A \subset X$

Q: $y \in B$, $B \subset Y$

S: $y \in C$, $C \subset Y$

ในทางภาษาข้อความผสมสามารถแสดงได้เป็น

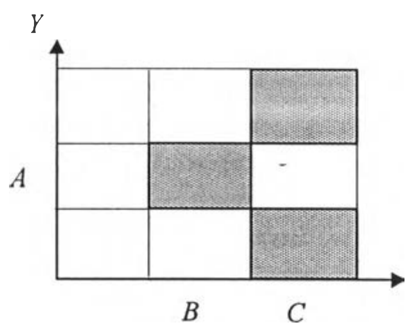
IF A, THEN B or

IF A, THEN C.

เซ็ตที่เทียบเท่ากับการผสมของข้อความนี้จะเป็น

IF A THEN B ELSE $C \equiv (A \times B) \cup (A \times C) = R =$ ความสัมพันธ์บน $X \times Y$ (3.20)

รูปที่ 3.14 แสดงส่วนแรเงาที่แทนค่าความเป็นจริงสำหรับข้อความแบบผสม



รูปที่ 3.14 ค่าความเป็นจริงสำหรับข้อความผสม IF A, THEN B ELSE C.

3.7.1 ทอโทโลยี (Tautologies)

ในลอจิกธรรมดาข้อความแบบผสมอาจมีค่าความเป็นจริงที่จริงเสมอไม่ขึ้นกับค่าความเป็นจริงของแต่ละส่วน ข้อความซึ่งมีคุณสมบัตินี้จะเรียกว่า "ทอโทโลยี" ทอโทโลยีเป็นประโยชน์สำหรับการให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive reasoning) และสำหรับการอนุมานแบบนิรนัย (Deductive inference) ดังนั้นถ้าข้อความสามารถแสดงได้ในรูปแบบของทอโทโลยี

I 17463671

ค่าความเป็นจริงของข้อความจะมีค่าเป็นจริงเสมอ นิรนัยแบบเอ็มพี (Modus ponents deduction) เป็นการใช้งานรูปแบบหนึ่งของทอโทโลยี โดยเป็นไปในลักษณะของกฎผู้เชี่ยวชาญแบบไปข้างหน้า (Forward chaining rule-based expert systems) คือทำหน้าที่หาค่าความเป็นจริงของข้อสรุป (Conseqent) จากค่าความเป็นจริงในส่วนเงื่อนไขของกฎ การใช้งานอีกรูปแบบหนึ่งของทอโทโลยีคือ การอนุมานแบบเอ็มที (Modus tollens inference) ซึ่งเป็นลักษณะของกฎผู้เชี่ยวชาญแบบย้อนกลับ (Backward chaining rule-based expert systems) ทอโทโลยีโดยทั่วไปแสดงได้คือ

$B \cup B \leftrightarrow X \qquad (A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ (modus ponens)

พิสูจน์ได้โดย

A	B	$A \rightarrow B$	$(A \wedge (A \rightarrow B))$	$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$
1	1	1	0	1
1	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	1	1

และ $A \cup X; \ \bar{A} \cup X \leftrightarrow X \qquad (\bar{B} \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow \bar{A}$ (modus tollens)

พิสูจน์ได้โดย

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \rightarrow B$	$(\bar{B} \wedge (A \rightarrow B))$	$(\bar{B} \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow \bar{A}$
1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	1

3.7.2 ความขัดแย้ง (Contradictions)

ความขัดแย้งคือข้อความแบบผสมซึ่งมีความเป็นจริงที่เป็นเท็จเสมอไม่ว่าค่าความเป็นจริงในแต่ละข้อความย่อยจะเป็นอย่างไร ตัวอย่างของความขัดแย้งแสดงได้คือ

$$\bar{B} \cap B$$

$$A \cap \varnothing; \bar{A} \cap \varnothing$$

3.7.3 การอนุมานแบบนิรนัย (Deductive inference)

การอนุมานแบบเอ็มพีจะใช้ในการอนุมานของระบบฐานกฎ กฎทั่วไปที่อยู่ในรูปของ IF-THEN จะใช้ในการหาเหตุผลจากเงื่อนไขไปสู่ข้อสรุป สมมติกฎอยู่ในรูปของ

IF A, THEN B

กฎนี้จะเขียนได้ในรูปของผลคูณคาร์ทีเซียนของเซ็ต A และ B คือ

$$R = A \times B \tag{3.21}$$

สมมติเงื่อนไขใหม่เป็น A' เราสามารถใช้การอนุมานแบบเอ็มพีเพื่อให้ได้ข้อสรุป B' คือ

$$B' = A' \text{o } R = A' \text{o } ((A \times B) \cup (\bar{A} \times Y)) \tag{3.22}$$

การอนุมานแบบเอ็มพีสามารถใช้ได้กับกฎผสม

IF A, THEN B, ELSE C

โดยการนิยามความสัมพันธ์

$$R = (A \times B) \cup (\bar{A} \times C) \tag{3.23}$$

การนิยามตัวดำเนินการการแจกแจงหรือทอโทโลยีในรูปเทอมของฟังก์ชัน เราจำเป็นต้องนิยาม ค่าความเป็นจริงของวาทเอกภพ (Universe of discourse) สำหรับเอกภพ Y นิยามโดย

$T(Y) = 1$ และ $T(\varnothing) = 0$

กฎ IF A, THEN B (P นิยามบนเซ็ต A ในเอกภพ X และ Q นิยามบนเซ็ต B ในเอกภพ Y) นิยามในเทอมฟังก์ชันได้คือ

$$P \rightarrow Q \Rightarrow R = (\bar{A} \times B) \cup (A \times Y)$$

$$\chi_R(x,y) = max\{(x_A(x) \wedge (x_B(y)), ((1-(x_A(x)) \wedge 1)] \quad (3.24)$$

โดย $\chi(\bullet)$ คือฟังก์ชันคุณลักษณ์ (Characteristic function)

สำหรับกฎผสม IF A, THEN B, ELSE C นิยามโดย

$$R = (A \times B) \cup (\bar{A} \times C) \Rightarrow (P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow S)$$ จะได้

$$\chi_R(x,y) = max\{(x_A(x) \wedge (x_B(y)), ((1-(x_A(x)) \wedge x_C(y))] \quad (3.25)$$

3.8 ฟัซซีลอจิก

ข้อความ (Proposition) ของฟัซซีลอจิก P คือข้อความที่เกี่ยวข้องกับคอนเส็ปท์ที่ไม่สามารถนิยามขอบเขตได้อย่างแจ่มชัด ข้อความทางภาษาซึ่งแสดงความคิดเห็นหรือความรู้สึกจะมีลักษณะของข้อความฟัซซี ตัวอย่างของข้อความที่เป็นลักษณะฟัซซีคือ ข้อความที่อธิบายความสูงของคน หรือน้ำหนัก หรือการประเมินความพึงพอใจกับสิ่งต่างๆ เป็นต้น ค่าความเป็น

จริงของ P สามารถเป็นค่าใดๆ ก็ได้ในช่วง [0,1] ดังนั้นค่าความเป็นจริงของการแม็พในช่วง [0,1] ในเอกภพ U ของ T เขียนได้เป็น

$$T : U \rightarrow [0,1] \tag{3.26}$$

ในลอจิกธรรมดานั้นเราจะกำหนดให้การเสนอข้อความลอจิกเป็นไปในรูปแบบของเซ็ตในเอกภพใดๆ สำหรับข้อความทางฟัซซีลอจิกนั้นจะเป็นไปในรูปแบบของฟัซซีเซ็ต สมมติให้ข้อความ P ถูกกำหนดบนฟัซซีเซ็ต A ค่าความเป็นจริงของข้อความแทนด้วย $T(P)$ เขียนได้เป็น

$$T(P) = \mu_A(x) \text{ โดย } 0 \leq \mu_A \leq 1 \tag{3.26}$$

ดีกรีความเป็นจริงของข้อความ $P : x \in A$ จะเท่ากับค่าฟังก์ชันสมาชิกของ x ใน A

ตัวเชื่อมทางลอจิกต่างๆ นิเสธ (Negation) ตัวเชื่อมการเลือก (Disjunction) ตัวเชื่อมร่วม (Conjunction) และ การแจกแจงเหตุสู่ผล (Implication) จะสามารถใช้ได้กับฟัซซีลอจิกเช่นกัน ตัวเชื่อมต่างๆ สำหรับข้อความ P ซึ่งนิยามบนฟัซซีเซ็ต A และ Q นิยามบนฟัซซีเซ็ต B แสดงได้คือ

นิเสธ: $$T(P) = 1-T(P) \tag{3.27}$$

ตัวเชื่อมการเลือก: $P \vee Q \Rightarrow x \text{ is } A \text{ or } B$

$$T(P \vee Q) = max(T(P), \mathrm{T}(Q)) \tag{3.28}$$

ตัวเชื่อมร่วม: $P \wedge Q \Rightarrow x \text{ is } A \text{ or } B$

$$T(P \wedge Q) = min(T(P), T(Q)) \tag{3.29}$$

การแจกแจงเหตุสู่ผล: $P \rightarrow Q \Rightarrow x \text{ is } A, \text{ then } x \text{ is } B$

$$T(P \rightarrow Q) = T(\bar{P} \vee Q) = max(T(\bar{P}), T(Q)) \quad (3.30)$$

เช่นเดียวกับลอจิกธรรมดา ตัวเชื่อมสำหรับการแจกแจงเหตุสู่ผลก็จะสร้างได้ในรูปของกฎ

$P \rightarrow Q$ *is* : IF x is A THEN y is B

และจะเทียบเท่ากับความสัมพันธ์ฟัซซี R

$$R = (A \times B) \cup (\bar{A} \times Y) \quad (3.31)$$

แสดงได้ในรูปของค่าฟังก์ชันสมาชิก

$$\mu_R(x,y) = max[(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)), (1 - \mu_A(x))] \quad (3.32)$$

3.9 การให้เหตุผลแบบฟัซซี (Fuzzy Resoning)

จุดประสงค์สูงสุดของฟัซซีลอจิกคือ การสร้างรากฐานทฤษฎีสำหรับการให้เหตุผล (Resoning) ที่เกี่ยวข้องกับข้อความใดๆ ที่มีความไม่ชัดเจน การให้เหตุผลดังกล่าวคือการให้เหตุผลโดยประมาณ การให้เหตุผลแบบนี้นั้นจะคล้ายคลึงกับการให้เหตุผลแบบลอจิกธรรมดาซึ่งเป็นข้อความที่ชัดเจน แต่จะมีการยืดขยายการคำนวนออกไปซึ่งเกี่ยวกับการหาค่าความเป็นจริงที่อาจจะมีเพียงบางส่วนเท่านั้น

ในฟัซซีลอจิกและการให้เหตุผลแบบประมาณ จะมีกฎการอนุมาน (Inference rule) สำหรับฟัซซีการแจกแจงเหตุสู่ผลที่สำคัญคือ วิธีจีเอ็มพี (Generalized Modus Ponens) และวิธีจีเอ็มที (Generalized Modus Tollens)

ก. วิธีการให้เหตุผลแบบจีเอ็มพี

Premise 1 (knowledge) : if x is A then y is B

Premise 2 (knowledge) : x is A'

Consequent (conclusion) : y is B'

กรณีนี้ Consequent B' จะเขียนได้เป็น $B' = A' \circ R$

ข.วิธีการให้เหตุผลแบบจีเอ็มที

Premise 1 (knowledge) : if x is A then y is B

Premise 2 (knowledge) : y is B'

Consequent (conclusion) : x is A'

กรณีนี้ Consequent A' จะเขียนได้เป็น $A' = R \circ B'$

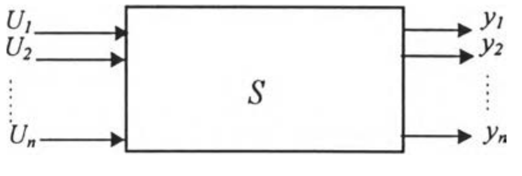
โดย R คือความสัมพันธ์ฟัซซีจากฟัซซีการแจกแจงเหตุสู่ผล “IF A THEN B” , o คือตัวดำเนินการการประกอบ (Compositional operator) และ A' คือฟัซซีเซ็ตซึ่งอาจเป็น: *A, very A, more or less A, not A*

การอนุมานของฟัซซีการแจกแจงเหตุสู่ผลจะอิงกับกฎการประกอบของการอนุมานสำหรับการให้เหตุผลโดยประมาณ ซึ่งเสนอโดย Zadeh (1973) ในที่นี้เรากำหนดฟัซซีเซ็ต A, A' $, B, B'$ เป็นตัวแปรภาษา และ x, y เป็นคริสพ์เซ็ตในลอจิกปกติ วิธีจีเอ็มพีจะลดรูปเป็น เอ็มพี (modus ponens) เมื่อ $A=A'$ และ $B=B'$ ซึ่งจะเป็นลักษณะของการอนุมานแบบไปข้างหน้า

(Forward data-driven inference) ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ในการอนุมานสำหรับตัวควบคุมฟัซซีลอจิก วิธีจีเอ็มทีจะลดรูปเป็น เอ็มที (modus tollen) เมื่อ $B'=not\ B$ และ $A'=not\ A$ ซึ่งจะเป็นลักษณะของการอนุมานแบบย้อนกลับ (Backward goal-driven inference) ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ในการอนุมานในระบบผู้เชี่ยวชาญต่างๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในวงการแพทย์

3.10 ระบบผู้เชี่ยวชาญแบบอิงกฎฟัซซี (Fuzzy rule-based expert systems)

พิจารณาระบบที่มี n อินพุท และ m เอาท์พุท แสดงในรูปที่ 3.15 ให้ X เป็นผลคูณคาร์ทีเซียนของเอกภพ x_i เมื่อ $i = 1,2, .. n$ นั่นคือ $X = x_1 \times x_2 \times x_3 \times ... \times x_n$; และ Y เป็นผลคูณคาร์ทีเซียนของเอกภพ y_j เมื่อ $j = 1,2,... m$ นั่นคือ $Y = y_1 \times y_2 \times y_3 \times ... \times y_m$; $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)'$ คือเวกเตอร์อินพุทของระบบนิยามบนปริภูมิ R^n และ $y = (y_1, y_2, y_3, ..., y_m)'$ คือเวกเตอร์อินพุทของระบบนิยามบนปริภูมิ R^m ระบบ S แทนความสัมพันธ์แบบไม่เชิงเส้นใดๆ จาก X ไป Y เช่น ระบบควบคุมในอุตสาหกรรม การระบุระบบ (System identification) หรือกระบวนการตัดสินใจ



รูปที่ 3.15 ไดอะแกรมสำหรับระบบที่มี n อินพุท และ m เอาท์พุท

โดยทั่วไปแล้ว ระบบฟัซซีจะมีปริภูมิที่ใช้อธิบายระบบทั้งหมด 3 ปริภูมิคือ

ก. ปริฎูมิของเงื่อนไขที่เป็นไปได้ของอินพุทระบบซึ่งในที่นี้แทนด้วยฟัซซีซับเซ็ต A^k เมื่อ $k = 1, 2$ ...ซึ่งก็คือฟัซซีพาร์ติชัน (Fuzzy partition) ของปริฎูมิ X แสดงได้ในรูปฟังก์ชันสมาชิก

$$A^k \in F(x)\ ;\ \mu_A k\ (x) : X \rightarrow [0,1]\ \text{สำหรับ}\ k = 1, 2\ ... \tag{3.33}$$

ข. ปริฎูมิของข้อสรุปที่เป็นไปได้เช่น เอาท์พุทของตัวควบคุม หรือข้อสรุปจากการตัดสินใจซึ่งแทนด้วยฟัซซีซับเซ็ต B^k เมื่อ $k = 1, 2$ ...ซึ่งก็คือฟัซซีพาร์ติชันของปริฎูมิ Y แสดงได้ในรูปฟังก์ชันสมาชิก

$$B^k \in F(Y)\ ;\ \mu_B k\ (x) : Y \rightarrow [0,1]\ \text{สำหรับ}\ k = 1, 2\ ... \tag{3.34}$$

และ

ค. ปริฎูมิของความสัมพันธ์ของการแม็พจากอินพุทปริฎูมิ X บนเอาท์พุทปริฎูมิ Y ซึ่งแสดงด้วยความสัมพันธ์ฟัซซี R^k เมื่อ $k = 1, 2$ ...แสดงได้ในรูปฟังก์ชันสมาชิก

$$R^k \in F(X \times Y)\ ;\ \mu_A k\ (x,y) : X \times Y \rightarrow [0,1]\ \text{สำหรับ}\ k = 1, 2\ ... \tag{3.35}$$

โดย $F(.)$ ในสมการ 3.33, 3.34, 3.35 แทนความสัมพันธ์ของฟัซซีเซ็ตในปริฎูมิต่างๆ ความเข้าใจในระบบ S ที่ใช้สร้างความสัมพันธ์ของระบบจะขึ้นอยู่กับประสบการณ์ ความชำนาญหรือความรู้ทางกายภาพของระบบที่จะอธิบาย โดยปกติแล้วความรู้นี้จะแสดงในรูปของเซ็ตของข้อจำกัดแบบไม่มีเงื่อนไข (Set of unconditional restriction) เช่นเดียวกันกับข้อความแบบมีเงื่อนไขในภาษาธรรมชาติ

ปกติแล้วประโยคทั้งแบบมีเงื่อนไขและไม่มีเงื่อนไข จะวางข้อจำกัด (Restriction) หรือผลสรุป (Consequent) ของกระบวนการ โดยอิงกับส่วนของเงื่อนไข ข้อจำกัดเหล่านี้มักเป็นลักษณะของภาษาธรรมชาติที่คลุมเครือ ซึ่งสามารถแทนได้ด้วยอัลกอริธึมฟัซซี

พิจารณาปัญหาตัวอย่างซึ่งเป็นการสังเกตุสีของทะเลสาบซึ่งแสดงในรูปของข้อความแบบผู้เชี่ยวชาญ

IF the season is spring, then the color is rather light green.

IF the season is summer, then the color is deep green.

IF the season is fall, then the color is bright and deep yellow.

etc.

เทอมที่คลุมเครือ "rather light green" ในข้อความแรก วางข้อจำกัดไว้ที่สีของทะเลสาบซึ่งขึ้นกับเงื่อนไขฟัซซี "spring" ในส่วนของเงื่อนไข

โดยสรุปแล้ว ระดับความเข้าใจแบบฟัซซีและการอธิบายระบบ จะอยู่ในรูปของข้อจำกัดของเอาท์พุทที่อิงกับเงื่อนไขแน่นอนของอินพุท ข้อจำกัดเหล่านี้จะแทนได้ด้วยฟัซซีเซ็ดและความสัมพันธ์ฟัซซี

3.10.1 ระบบผู้เชี่ยวชาญแบบอิงกฎฟัซซีในรูปแบบบัญญัติ (Canonical fuzzy rule-based expert systems)

รูปแบบบัญญัติของกฎ นิยามด้วยเซ็ตของข้อจำกัดแบบไม่มีเงื่อนไขและเซ็ตของข้อจำกัดแบบมีเงื่อนไข (ข้อความเหล่านี้จะถูกเชื่อมด้วยตัวเชื่อมทางภาษา เช่น “AND” “OR” หรือ “ELSE” รูปแบบของกฎผู้เชี่ยวชาญแสดงในรูปที่ 3.16

R^1 Restriction R^1

R^2 Restriction R^2

$\vdots$ $\vdots$

R^k Restriction R^k

R^{k+1} IF condition C^1, THEN restriction R^{k+1}

R^{k+2} IF condition C^2, THEN restriction R^{k+2}

$\vdots$ $\vdots$

R^r IF condition C^{r-k}, THEN restriction R^r

รูปที่ 3.16 รูปแบบบัญญัติของกฎผู้เชี่ยวชาญ

ข้อกำหนด $R^1, R^2 \ldots R^r$ จะถูกใช้ในการหาพฤติกรรมหรือการกระทำของเอาท์พุท โดยทั่วไปแล้วกฎผู้เชี่ยวชาญจะมีรูปแบบของประโยค 3 รูปแบบคือ

ก) ประโยคแบบกำหนด (Assignment statement) ตัวอย่างเช่น

$X \approx$ s

$x =$ small

season is spring

room temperature = hot

x is large

x is not large and not very small

ข) ประโยคเงื่อนไข (Conditional statement) ตัวอย่างเช่น

IF x is small THEN y is large ELSE y is not very large

IF x is positive THEN decrease y slightly

IF x is very small THEN stop

ค) ประโยคแบบไม่มีเงื่อนไข (Unconditional statement) ตัวอย่างเช่น

multiply by x

turn the heat lower

delete first few terms

สำหรับกรณีระบบ n อินพุท และ m เอาท์พุท ข้างต้น ฐานกฎระบบผู้เชี่ยวชาญฟัซซีสามารถแสดงได้ในรูปที่ 3.17

rule1: IF x Is A^1, THEN y is B^1
rule2: IF x Is A^2, THEN y is B^2
$\vdots$
rule r: IF x Is A^r, THEN y is B^r

รูปที่ 3.17 ฐานกฎฟัซซีของระบบผู้เชี่ยวชาญในการอธิบายระบบ S

ระบบฐานกฎในรูปที่ 3.17 เขียนได้ในรูปแบบที่สั้นลงคือ

(IF A^1 THEN B^1 "α" IF A^2 THEN B^2 "α" ... "α" IF A^r THEN B^r)

"α" คือตัวเชื่อมทางภาษาเช่น "AND", "OR", หรือ "ELSE", x และ y คือเวคเตอร์อินพุทและเอาท์พุทตามลำดับ

3.10.2 การแยกกฎแบบผสมไปสู่รูปแบบที่ง่าย (Decomposition of compound rules into simple canonical forms)

การแสดงความรู้ในรูปแบบทางภาษาของผู้เชี่ยวชาญ อาจเป็นไปได้ในลักษณะกฎผสมที่มีโครงสร้างซับซ้อนมากขึ้นได้ ดังตัวอย่างของอัลกอริธึมสำหรับการควบคุมอุณหภูมิภายในห้อง

IF it is raining hard

THEN close the window

IF the room temperature is very hot

THEN IF the heat is on

THEN turn the heat lower

ELSE IF (the window is closed) AND (the air conditioner is off)

AND (it is not raining hard)

THEN open the window

ELSE IF (the window is closed)

AND (the air conditioner is on)

THE open the window

3.10.3 เทอมภาษา (Linguistic terms) และตัวขยายทางภาษา (Linguistic hedge)

โดยทั่วไปค่าของตัวแปรภาษาจะเป็นเทอมที่ประกอบด้วยเทอมต่างๆ หลายเทอม ซึ่งเทอมเหล่านี้จำแนกได้ 4 ส่วนคือ

ก) เทอมเบื้องต้น ซึ่งบ่งชี้ฟัซซีเซ็ตของวาทเอกภพ เช่น *hot*, *cold*, *hard*, *lower* เป็นต้น

ข) ตัวเชื่อมต่างๆ เช่น "AND"และ."OR" รวมทั้ง "NOT"

ค) คำขยาย เช่น "*very*", "*much*", "*slightly*", "*more or less*" เป็นต้น

ง) เครื่องหมาย เช่น วงเล็บ

ตัวขยายทางภาษาเช่น "*very*", "*more or less*", "*slightly*" ที่ใช้ในเทอมภาษาจะเทียบเม่ากับการแปลงความสัมพันธ์แบบไม่เชิงเส้นของฟังก์ชันสมาชิกของเทอมภาษาเหล่านั้นไปสู่ฟังก์ชันสมาชิกใหม่ของเทอมผสม

พิจารณาวาทเอกภพเป็นเซ็ตของจำนวนเต็มที่อยู่ในช่วง [1,5] ฟัซซีเซ็ต "*small*"แสดงได้โดย

$$small = \frac{1}{1} + \frac{0.8}{2} + \frac{0.6}{3} + \frac{0.4}{4} + \frac{0.2}{5}$$

และฟัซซีเซ็ต "*large*" แสดงได้โดย

$$large = \frac{0.2}{1} + \frac{0.4}{2} + \frac{0.6}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{1}{5}$$

"*very small*" จะสามารถนิยามได้โดย

$$very\ small = (small)^2 \tag{3.36}$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{0.6}{2} + \frac{0.36}{3} + \frac{0.16}{4} + \frac{0.04}{5}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$very\ very\ small = (small)^4 = (very\ small)^2 \tag{3.37}$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{0.4}{2} + \frac{0.1}{3}$$

โดยไม่พิจารณาเทอมที่มีค่าน้อยๆ

โดยพื้นฐานของตัดำเนินการส่วนกลับ "*not very small*" นิยามได้โดย

$$not\ very\ small = \int \frac{1 - \mu_{very}(x)}{x} \tag{3.38}$$

$$\approx \frac{0.4}{2} + \frac{0.6}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{1}{5}$$

$$not\ very\ large \approx \frac{1}{1} + \frac{0.8}{2} + \frac{0.6}{3} + \frac{0.4}{4}$$

โดยตัวดำเนินการ "AND" เราจะนิยามฟัซซีเซ็ต "*not very small and not very large*" ได้โดย

$$not\ very\ small\ and\ not\ very\ large = (not\ very\ large) \cap (not\ very\ small) \tag{3.39}$$

$$= \left(\frac{0.4}{2} + \frac{0.6}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{1}{5}\right) \cap \left(\frac{1}{1} + \frac{0.9}{2} + \frac{0.6}{3} + \frac{0.4}{4}\right)$$

$$= \frac{0.4}{2} + \frac{0.6}{3} + \frac{0.4}{4}$$

ส่วนขยายอื่นๆ เช่น

$$\text{"plus } A\text{"} = A^{1.25} \tag{3.40}$$

“minus A” = $A^{0.75}$ (3.41)

$$\text{“more than } A\text{”} = \begin{cases} 0 & \mathit{for}\ x \le x_0 \\ 1-\mu_A(x) & \mathit{for}\ x > x_0 \end{cases} \quad (3.42)$$

เมื่อ x_0 คือสมาชิกที่มีค่าความเป็นสมาชิกสูงสุด

3.10.4 เงื่อนไขและข้อสรุปแบบหลายส่วน เชื่อมโดย “AND” หรือ “OR”

ในส่วนต่อไปนี้จะกล่าวถึงโครงสร้างของกฎผสมโดยทั่วไปที่มีหลายเงื่อนไขและหลายข้อสรุปและแสดงการแปลงกฎผสมเหล่านี้ไปสู่รูปแบบที่ง่าย

ก) IF x is A^1 AND A^2 ... AND A^L THEN y is B^S

สมมติฟัซซีเซ็ตใหม่ A^S

$$A^S = A^1 \cap A^2 \cap \ldots \cap A^L \quad (3.43)$$

แสดงในรูปของฟังก์ชันสมาชิก

$$\mu_{A^S}(x) = min\left[\mu_{A^1}(x), \mu_{A^2}(x), \ldots, \mu_{A^L}(x)\right] \quad (3.44)$$

จากนิยามตัวดำเนินการอินเตอร์เซ็คชัน กฎผสมจะเขียนได้เป็น

IF A^S THEN B^S

ข) IF x is A^1 OR A^2 ... OR A^L THEN y is B^S

เขียนได้ในรูป

IF x is A^S THEN y is B^S

ฟัซซีเซ็ต A^S นิยามจาก

$$A^S = A^1 \cup A^2 \cup \ldots \cup A^L \quad (3.45)$$

แสดงในรูปของฟังก์ชันสมาชิก

$$\mu_{A^S}(\boldsymbol{x}) = m \left[\mu_{A^1}(x), \mu_{A^2}(x), \ldots, \mu \quad (\quad) \right] \tag{3.46}$$

3.10.5 ประโยคเงื่อนไขที่มี "ELSE", "UNLESS"

ก) IF A^1 THEN (B^1 ELSE B^2) จะสามารถแยกเป็นกฎย่อยๆ ที่เชื่อมด้วย "OR" ได้เป็น

IF A^1 THEN B^1 OR IF NOT A^1 THEN B^2

ข) IF A^1 (THEN B^1) UNLESS A^2) จะแยกได้เป็น

IF A^1 THEN B^1 OR IF A^2 THEN NOT B^1

ค) IF A^1 (THEN B^1 ELSE IF A^2 THEN B^2) จะแยกได้เป็น

IF A^1 THEN B^1 OR IF NOT A^1 AND A^2 THEN B^2

3.10.6 กฎ IF-THEN แบบโครงข่าย (Nested IF-THEN rules)

ก) IF A^1 THEN (IF A^2 THEN B^1) เขียนได้ในรูป

IF A^1 AND A^2 THEN B^1

ข) IF A^1 THEN (IF A^2 THEN (IF ... B^1)) ในกรณีทั่วไปจะเขียนได้ในรูป

IF A^1 AND A^2 AND ... THEN B^1

ค) IF A^1 THEN IF A^2 THEN IF A^3 THEN B^1 ELSE B^2 ELSE B^3) เขียนได้เป็น

IF A^1 AND A^2 AND A^3 THEN B^1

OR IF A^1 AND A^2 AND NOT A^3 THEN B^2

OR IF NOT A^1 THEN B^3

หรือเขียนในรูปเครื่องหมายวงเล็บ

IF A^1 (THEN (IF A^2 (THEN IF A^3 THEN (B^1 ELSE B^2) ELSE B^3)

3.10.7 ระบบของกฎผู้เชี่ยวชาญฟัซซีในรูปของ มัลติอินพุท-มัลติเอาท์พุท (Canonical FRBES forms for multiple-input multiple-output physical systems)

ในหัวข้อนี้เป็นการอธิบายถึงรูปแบบทั่วไปของระบบฐานกฎที่ใช้ในระบบผู้เชี่ยวชาญฟัซซีที่มีหลายอินพุทหลายเอาท์พุท

ก) สำหรับระบบ *m*-เอาท์พุท และ *n*-อินพุทข้างต้น ถ้าสมมติให้ฟัซซีเซ็ตของอินพุท A^1, A^2 ... ประกอบด้วยฟัซซีเซ็ตที่ไม่กระทบถึงกัน นิยามบนเอกภพ x_i : i=1,2,...,n และฟัซซีเซ็ตเอาท์พุท B^1, B^2,... ประกอบด้วย m ฟัซซีเอาท์พุทที่ไม่กระทบถึงกัน นิยามบนเอกภพ y_j : i = 1,2,...m ระบบฐานกฎฟัซซีดังกล่าวแสดงได้ในรูปที่ 3.18

R^1 : IF x_1 is $A^1{}_1$ AND x_2 is $A^1{}_2$ AND...AND x_n is $A^1{}_n$
THEN y_1 is $B^1{}_1$ AND y_2 is $B^1{}_2$ AND...AND y_m is $B^1{}_m$
R^2 : IF x_1 is $A^1{}_1$ AND x_2 is $A^1{}_2$ AND...AND x_n is $A^1{}_n$
THEN y_1 is $B^1{}_1$ AND y_2 is $B^1{}_2$ AND...AND y_m is $B^1{}_m$
⋮
R^r : IF x_1 is $A^r{}_1$ AND x_2 is $A^r{}_2$ AND...AND x_n is $A^r{}_n$
THEN y_1 is $B^r{}_1$ AND y_2 is $B^r{}_2$ AND...AND y_m is $B^r{}_m$

รูปที่ 3.18 รูปแบบบัญญัติของระบบผู้เชี่ยวชาญฟัซซีสำหรับระบบมัลติอินพุท-มัลติเอาท์พุท

ข) ระบบฐานกฎผู้เชี่ยวชาญฟัซซีแบบมัลติอินพุท-ซิงเกิลเอาท์พุทแสดงได้ใน

รูปที่ 3.19

R^1 : IF x_1 is $A^1{}_1$ AND x_2 is $A^1{}_2$ AND...AND x_n is $A^1{}_n$

THEN y is B^1

R^2 : IF x_1 is $A^1{}_1$ AND x_2 is $A^1{}_2$ AND...AND x_n is $A^1{}_n$

THEN y is B^2

⋮ ⋮

R^r : IF x_1 is $A^r{}_1$ AND x_2 is $A^r{}_2$ AND...AND x_n is $A^r{}_n$

THEN y is B^r

รูปที่ 3.19 **ระบบกฎผู้เชี่ยวชาญฟัซซีสำหรับระบบมัลติอินพุท-ซิงเกิลเอาท์พุท**

กฎผู้เชี่ยวชาญฟัซซีในรูปแบบนี้จะเป็นรูปแบบทั่วไปที่ใช้กันมากในระบบของการควบคุมกระบวนการรวมทั้งการระบุระบบ

ค) กฎฟัซซีแบบที่ข้อจำกัดของอินพุทและเอาท์พุทเป็นแบบซิงเกลตัน (Singleton forms)

R^1 : IF $x = x_1$ THEN $y = y_1$ ELSE

R^2 : IF $x = x_2$ THEN $y = y_2$ ELSE

⋮ ⋮

R^r : IF $x = x_r$ THEN $y = y_r$

รูปที่ 3.20 กฎฟัซซีสำหรับอินพุท-เอาท์พุทเป็นแบบซิงเกลตัน

กฎฟัซซีแบบนี้ค่าของเอาท์พุทจะได้จากการจับคู่ที่แน่นอนของค่าทางอินพุทตามสมการ

IF $x = x_i \rightarrow y = y_i$: $i = 1,2, \ldots, r$

ง) กฎฟัซซีแบบที่ข้อจำกัดของอินพุทอยู่ในรูปของคริส์พและเอาท์พุทเป็นซิงเกลตัน

R^1 : IF $x_0 < x < x_1$ THEN $y = y_1$ ELSE
R^2 : IF $x_1 < x < x_2$ THEN $y = y_2$ ELSE
$\vdots$ $\vdots$
R^r : IF $x_{r-1} < x < x_r$ THEN $y = y_r$

รูปที่ 3.21 กฎฟัซซีสำหรับอินพุทอยู่ในรูปคริส์พ-เอาท์พุทแบบซิงเกลตัน

กฎฟัซซีในลักษณะนี้เขียนแทนได้ในรูปของความสัมพันธ์คือ

IF $x_{i-1} < x < x_i \rightarrow y = y = y_i$: $i = 1,2, \ldots ,r$

จ) กฎฟัซซีแบบที่ข้อจำกัดของอินพุทอยู่ในรูปของคริส์พและเอาท์พุทเป็นความสัมพันธ์ฟัซซี

R^1 : IF $x_0 < x < x_1$ THEN y is B_1 ELSE
R^2 : IF $x_1 < x < x_2$ THEN y is B_2 ELSE
$\vdots$ $\vdots$
R^r : IF $x_{r-1} < x < x_r$ THEN y is B_r

รูปที่ 3.22 กฎฟัซซีสำหรับอินพุทอยู่ในรูปคริส์พ-เอาท์พุทแบบฟัซซี

เมื่อ B^i : $I = 1,2, \ldots,r$ คือฟัซซีเซ็ตนิยามบนปริภูมิเอาท์พุทแสดงความสัมพันธ์ได้คือ

IF $x_{i-1} < x < x_i \rightarrow y = y = B^i$: $i = 1,2, \ldots ,r$

ฉ) กฎฟัซซีแบบที่ข้อจำกัดของอินพุทเป็นฟัซซีเซ็ตและเอาท์พุทเป็นแบบซิงเกลตัน หรือฟังก์ชัน

R^1 : IF x is A^1 THEN $y = y_1$ ELSE
R^2 : IF x is A^2 THEN $y = y_2$ ELSE
$\vdots$ $\vdots$
R^r : IF x is A^r THEN $y = y_r$

รูปที่ 3.23 กฎฟัซซีสำหรับอินพุทเป็นฟัซซีเซ็ต-เอาท์พุทเป็นแบบซิงเกลตัน

โดย A^k เป็นฟัซซีเซ็ตนิยามบนปริภูมิอินพุท X

และกฎฟัซซีซึ่งมีเอาท์พุทหรือข้อสรุปแบบฟังก์ชันแสดงในรูปที่ 3.24

R^1 : IF x is A^1 THEN $y = f_1(x)$ ELSE
R^2 : IF x is A^2 THEN $y = f_2(x)$ ELSE
$\vdots$ $\vdots$
R^r : IF x is A^r THEN $y = f_r(x)$

รูปที่ 3.24 กฎฟัซซีแบบเอาท์พุทเป็นฟังก์ชัน

เมื่อ $f_1(x), f_2(x)$ ... เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น กฎฟัซซีแบบนี้รู้จักกันในแบบกฎฟัซซีของซูจิโน (Sugino's fuzzy model) เป็นแบบที่ใช้ในระบบควบคุมบางประเภท

3.11 ระบบของสมการความสัมพันธ์ฟัซซี (Systems of fuzzy relational equations)

ข้อความฟัซซี IF A THEN B นั้นเป็นรูปแบบทั่วไปที่ใช้ในระบบฐานกฎของตัวควบคุมฟัซซีซึ่งรู้จักกันในแบบของ จีเอ็มพี ซึ่งมีวิธีในการทำให้ได้ความสัมพันธ์ฟัซซี R ได้หลายวิธี สามารถเขียนได้ในรูปแบบทั่วไปคือ

$$B = A \bullet R \tag{3.47}$$

โดย "•" แทนวิธีการทั่วไปของการประกอบของความสัมพันธ์ฟัซซี ดังนั้นเราอาจแสดงความสัมพันธ์ฟัซซีในรูปแบบของกฎทั่วไปได้เป็น

$$R^1 : y^1 = x \bullet R^1$$

$$R^2 : y^2 = x \bullet R^2$$

$$\vdots$$

$$R^r : y^r = x \bullet R^r \tag{3.48}$$

โดย y^k เมื่อ $k = 1, 2, \ldots$ คือเอาท์พุทของระบบที่กฎหนดในกฎที่ k นิยามโดย

$$y^k \in F(Y)\ ;\ \mu_Y k(y) : Y \to [0,1] \text{ สำหรับ } k = 1, 2 \ldots r \tag{3.49}$$

และ x คือฟัซซีเซ็ตอินพุทของระบบ

ความสัมพันธ์ฟัซซีในสมการที่ (3.48) จะเขียนได้ในรูปของ

$$R = \{R^1, R^2, \ldots R^r\} \tag{3.50}$$

3.11.1 การรวมกันของกฎ (Aggregation of rules)

เอาท์พุทของกฎฟัซซี y^k จากการอนุมานทุกกฎจะถูกนำมารวมกันด้วยการรวมของกฎสองวิธีคือ การรวมแบบร่วม (Conjunctive systems of rules) และการรวมแบบเลือก (Disjunctive systems of rules)

ก) การรวมแบบร่วม การรวมแบบนี้จะเป็นการรวมกฎที่ถูกเชื่อมด้วยตัวเชื่อม "AND" กรณีนี้เอาท์พุทที่ได้จะมาจากอินเตอร์เซ็คชันของเอาท์พุทจากกฎต่างๆ ทั้งหมด

$$y = (y^1) \text{ AND } (y^2) \text{ AND } \ldots \text{ AND } (y^r)$$

หรือ $$y = y^1 \cap y^2 \cap \ldots \cap y^r \tag{3.51}$$

สามารถเขียนได้ในรูปฟังก์ชันสมาชิก

$$\mu_y(y) = min[\mu_{y1}(y), \mu_{y2}(y), \ldots, \mu_{yr}(y)] \text{ ,สำหรับ } y \in Y \tag{3.52}$$

ข) การรวมแบบเลือก การรวมแบบนี้จะเป็นการรวมกฎที่ถูกเชื่อมด้วยตัวเชื่อม "OR" กรณีนี้เอาท์พุทที่ได้จะมาจากยูเนียนของเอาท์พุทจากกฎต่างๆ ทั้งหมด

$$y = (y^1) \text{ OR } (y^2) \text{ OR } \ldots \text{ OR } (y^r)$$

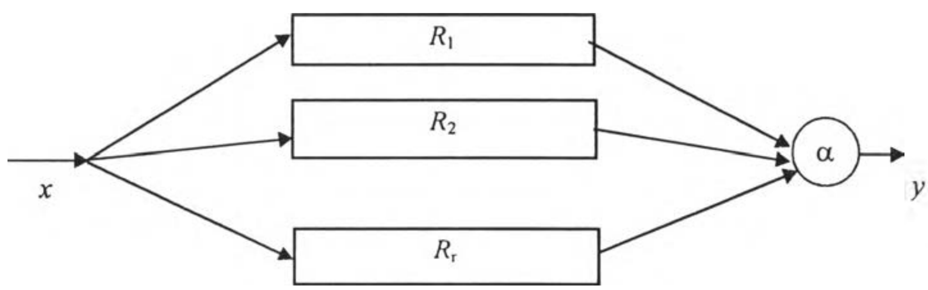
หรือ $$y = y^1 \cup y^2 \cup \ldots \cup y^r \tag{3.53}$$

สามารถเขียนได้ในรูปฟังก์ชันสมาชิก

$$\mu_y(y) = max[\mu_{y1}(y), \mu_{y2}(y), \ldots, \mu_{yr}(y)] \text{ ,สำหรับ } y \in Y \tag{3.54}$$

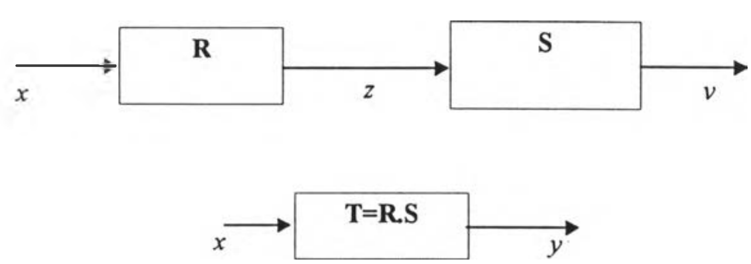
ระบบของการรวมกฎความสัมพันธ์ฟัซซีนั้นจะแสดงได้ในรูปแบบของการคำนวนแบบขนาน (Parallel computation) ซึ่งเป็นแบบที่ใช้กันทั่วไปในวิศวกรรมการควบคุม เอาท์พุทของระบบ

แสดงด้วย $y = x \bullet R$ คือผลจากการรวมแบบขนานของความสัมพันธ์ฟัซซี $R_1, R_2, \ldots R_r$ รูปที่ 3.25 แสดงการรวมกันแบบขนานของความสัมพันธ์ฟัซซีทั้งหมดโดย "α" คือโอเปอเรตอร์แบบขนานซึ่งแทนการรวมกันโดยทั่วไปเช่น ยูเนียน (*max*), อินเตอร์เซ็คชัน (*min*)

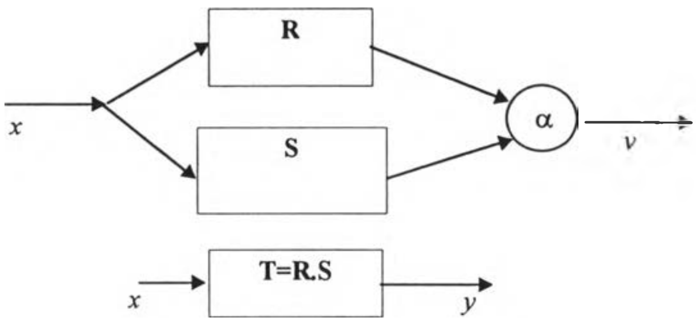


รูปที่ 3.25 การรวมแบบขนานของความสัมพันธ์ฟัซซี

ระบบซึ่งอธิบายด้วยความสัมพันธ์ฟัซซี สามารถนำมาเชื่อมต่อกันได้ในลักษณะของการเชื่อมแบบขนานและแบบอนุกรม ในกรณีการเชื่อมแบบขนานระบบจะสามารถเชื่อมต่อกันได้ด้วยการประกอบความสัมพันธ์ฟัซซีดังในรูปที่ 3.26 ในกรณีการเชื่อมต่อแบบขนานก็จะสามารถเชื่อมต่อกันได้ด้วยการรวม (Aggregation) ที่เหมาะสมแสดงในรูปที่ 3.27



รูปที่ 3.26 การเชื่อมต่อแบบอนุกรมของระบบฟัซซีสองระบบ



รูปที่ 3.27 การเชื่อมต่อแบบขนานของระบบฟัซซีสองระบบ

3.11.2 การหาความสัมพันธ์ฟัซซี R^k

การหาความสัมพันธ์ฟัซซี *R* เพื่อให้ได้ความสัมพันธ์ฟัซซีในรูปของค่าความเป็นสมาชิกซึ่งสามารถนำไปใช้ในกระบวนการหาคำตอบของระบบสมการในขั้นตอนของการแก้สมการระบบความสัมพันธ์ฟัซซี โดยทั่วไปแล้วจะมีวิธีการสองวิธีคือ วิธีการแจกแจงฟัซซี (Fuzzy implication) และโดยการใช้หลักการยืดขยาย (Extension principle) ดังนี้

ก. การแจกแจงเหตุสู่ผลของฟัซซี **(Fuzzy implication)** การหาความสัมพันธ์ฟัซซี *R* นั้นมีหลายวิธีซึ่งจะเป็นการอิงกับฟัซซีเซ็ตของส่วน IF และส่วนของ THEN ของข้อความเงื่อนไขฟัซซี IF *A* THEN *B* ซึ่งรู้จักกันว่าเป็นความสัมพันธ์ของฟัซซีการแจกแจงเหตุสู่ผล การแสดงค่าฟังก์ชันสมาชิกของความสัมพันธ์ฟัซซี *R* ซึ่งนิยามบนปริภูมิผลคูณคาร์ที่เซียน $X \times Y$ แสดงได้ในหลายรูปแบบดังต่อไปนี้

$$\mu_R(x,y) = max\{min[\mu_A(x), \mu_B(y)], 1-\mu_A(x)\} \quad (3.55)$$

$$\mu_R(x,y) = max\{\mu_B(y), [1-\mu_A(x)]\} \quad (3.56)$$

$$\mu_R(x,y) = min[\mu_A(x), \mu_B(y)] \text{ (Correlation-minimum)} \quad (3.57)$$

$$\mu_R(x,y) = min\{1,[1-\mu_A(x) + \mu_B(y)]\} \tag{3.58}$$

$$\mu_R(x,y) = min\{1,[\mu_A(x) + \mu_B(y)]\} \tag{3.59}$$

$$\mu_R(x,y) = min\left\{1,\left[\frac{\mu_B(y)}{\mu_A(x)}\right]\right\} \tag{3.60}$$

$$\mu_R(x,y) = max\{[\mu_A(x) \bullet \mu_B(y)], [1- \mu_A(x)]\} \tag{3.61}$$

$$\mu_R(x,y) = \mu_A(x) \bullet \mu_B(y) \qquad \text{(Correlation-product)} \tag{3.62}$$

$$\mu_R(x,y) = [\mu_B(y)]^{\mu_A(x)} \tag{3.63}$$

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} \mu_B(y) & for \quad \mu_B(y) < \mu_A(x) \\ 1 & otherwise \end{cases} \tag{3.64}$$

สมการ 3.46 คือการแจกแจงแบบดั้งเดิมเรียกว่า การแจกแจงของซาเดห์ (Zadeh's implication) สำหรับ $\mu_B(y) < \mu_A(x)$ สำหรับ $(x, y) \in (x\text{-}y)$ สมการ (3.55) จะลดรูปเป็นสมการ (3.56) สมการ (3.48) เรียกว่า correlation-minimum และรู้จักกันในแบบของการแจกแจงของมัมดานิ (Mumdani's implication) การแจกแจงนี้หาได้โดยผลคูณฟัซซีเซ็ต A และ B นั่นคือ $R=A \times B$ สำหรับ $\mu_A(x) \geq 0.5$ และ $\mu_B(y) \geq 0.5$ การแจกแจงของซาเดห์จะลดรูปมาเป็นการแจกแจงของมัมดานิได้ การแจกแจงความสัมพันธ์นิยามโดยสมการ (3.57) รู้จักกันในแบบของลูคาวิคส์ (Luckawic' implication) สมการที่ (3.58) เรียกว่า bounded sum implication สมการ (3.61) ถึง (3.62) อธิบายรูปแบบของการแจกแจงแบบ correlation-product การแจกแจงแบบนี้จะคล้าย

กับแบบที่ใช้ในการคำนวณของข่ายงานนิวรัล (Neural network) สมการที่ (3.64) เป็นแบบการแจกแจงของกอเดล (Godel's implication) หรือ การแจกแจงแบบ "α"

ข. หลักการยืดขยาย (Extension principle) : ให้ f เป็นการแม็พจาก $x_1 \times x_2, \times \ldots \times x_n$ ไปบนเอกภพ y ดังนั้น $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ หลักการยืดขยายยอมให้เราสามารถขยายฟัซซีเซ็ต A_1, A_2 ... A_n ไปเป็นฟัซซีเซ็ต B บน y โดยผ่านฟังก์ชัน f ในลักษณะ

$$\mu_B(y) = Sup(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f^{-1}(y)\{Min[\mu_{A1}(x_1), \mu_{A2}(x_2), \ldots, \mu_{An}(x_n)]\} \qquad (3.65)$$

$\mu_B(y) = 0$ ถ้า $f^{-1}(y) = \phi$

โดย f^{-1} คือส่วนกลับของ y และ $\mu_B(y)$ คือค่าความเป็นสมาชิกที่มากที่สุด $\mu_{A1 \times A2 \times \ldots \times An}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ของ y ด้วย $x_1, x_2, \ldots, x_n$

3.11.3 การประกอบของความสัมพันธ์ฟัซซี (Composition of fuzzy relations)

การประกอบความสัมพันธ์ฟัซซีเป็นส่วนหนึ่งของการอนุมานเพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบหรือข้อสรุปของแต่ละความสัมพันธ์ฟัซซี โดยการกระทำของตัวแปรฟัซซีในส่วนเงื่อนไขกับความสัมพันธ์ฟัซซี เพื่อนำไปสู่การหาคำตอบรวมของสมการความสัมพันธ์ฟัซซีในขั้นตอนสุดท้าย

วิธีการประกอบความสัมพันธ์ฟัซซีแบบ *Max-Min* และ *Max-Product* เป็นวิธีที่ใช้กันมากที่สุดในการทำให้ได้คำตอบของสมการความสัมพันธ์ฟัซซี นอกจากนี้ยังมีการประกอบความสัมพันธ์ฟัซซีแบบอื่นๆ ที่มีการเสนอไว้ เช่นวิธี *Max-Max, Max-Min, (p,q) Composition, Sum-Prod* และ *Max-Ave* ซึ่งแต่ละวิธีจะมีการอนุมานเฉพาะแบบ แสดงได้คือ

Max-Min composition

$$y_k = x \bullet R^k \tag{3.66}$$

$$\mu_y k(y) = max_{x \in X} \{min[\mu_x(x), \mu_R k(x,y)]\} \tag{3.67}$$

Max-Product composition

$$y_k = x * R^k \tag{3.68}$$

$$\mu_y k(y) = max_{x \in X} [\mu_x(x) * \mu_R k(x,y)] \tag{3.69}$$

Min-Max composition

$$y_k = x \, \Psi \, R^k \tag{3.70}$$

$$\mu_y k(y) = min_{x \in X} \{max[\mu_x(x), \mu_R k(x,y)]\} \tag{3.71}$$

Max-Max composition

$$y_k = x \circ R^k \tag{3.72}$$

$$\mu_y k(y) = max_{x \in X} \{max[\mu_x(x), \mu_R k(x,y)]\} \tag{3.73}$$

Min-Min composition

$$y_k = x \, \Delta \, R^k \tag{3.74}$$

$$\mu_y k(y) = min_{x \in X} \{min[\mu_x(x), \mu_R k(x,y)]\} \tag{3.75}$$

(p,q) composition

$$y_k = x \bullet^{pq} R^k \tag{3.76}$$

$$\mu_y k(y) = max_{x \in X}{}^{(p)} \{min_{(q)}[\mu_x(x), \mu_R k(x,y)]\} \tag{3.77}$$

โดย $$max_{x \in X}{}^{(p)} \; a(x) = inf_{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in x}$$

$$= \left\{ 1, \left[[a(x_1)]^p + [a(x_2)]^p + \ldots + [a(x_n)]^p \right]^{\frac{1}{p}} \right\} \tag{3.78}$$

และ $$\min_q [a(x), b(x)] = 1 - \min \left\{ \left[1, [1 - a(x)]^q + [1 - b(x)]^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\} \tag{3.79}$$

Sum-Prod composition

$$y_k = x \times R^k \tag{3.80}$$

$$\mu_y k(y) = f\{ \textstyle\sum_{x \in X} [\mu_x(x) . \mu_R k(x,y)]\} \tag{3.81}$$

Max-Ave composition

$$y_k = x \bullet_{av} R^k \tag{3.82}$$

$$\mu_y k(y) = 1/2\{max_{x \in X} [\mu_x(x) + \mu_R k(x,y)]\} \tag{3.83}$$

3.12 คำตอบของระบบสมการความสัมพันธ์ฟัซซี

(Solution of a system of fuzzy relational equations)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงวิธีการหาคำตอบของสมการความสัมพันธ์ฟัซซี ทำได้โดยการประกอบความสัมพันธ์ R^k และฟัซซีอินพุท x เข้าด้วยกัน จากนั้นแทนความสัมพันธ์ฟัซซีด้วยการแจกแจงฟัซซีจากหัวข้อการทำให้ได้ความสัมพันธ์ฟัซซีที่กล่าวมาแล้ว และรวมผลลัพท์ที่ได้

เข้าด้วยกันโดยวิธีของการรวมกันของกฎเพื่อให้ได้คำตอบทั่วไปของสมการความสัมพันธ์ซึ่งเป็นคำตอบแบบฟัซซีของระบบ

การหาคำตอบของสมการความสัมพันธ์ฟัซซีในที่นี้จะอิงกับวิธีการประกอบความสัมพันธ์ฟัซซีที่ใช้กันมากทั้งสองวิธี คือวิธี *Max-Min* และ *Max-Prod* ในสมการที่ (3.67) และ (3.68)

ก) วิธี *Max-Min* สำหรับระบบความสัมพันธ์ฟัซซีโดยการรวมความสัมพันธ์แบบเลือก คือเชื่อมแต่ละความสัมพันธ์ด้วย “OR” หรือ “ELSE” เอาท์พุท y ที่ได้จากการรวมความสัมพันธ์ทั้งหมดจากสมการที่ (3.53) และ (3.67) เป็นดังนี้

$$\mu_y(y) = max_k \left\{ max_{x \in X} \left\{ min\left[\mu_x(x), \mu_{R^k}(x,y) \right] \right\} \right\} \tag{3.84}$$

โดย $\mu_y(y)$ คือฟังก์ชันสมาชิกซึ่งอธิบายลักษณะของเอาท์พุทรวมของระบบต่อฟัซซีอินพุท x สำหรับกรณีที่ฟัซซีอินพุทแต่ละตัวเป็นแบบไม่กระทบถึงกัน (Non-interacting) สมการ (3.84) จะเขียนได้เป็น

$$\mu_y(y) = max_k \left\{ max_{x \in X} \left\{ min\left[\mu_{x_1}(x_1), \mu_{x_2}(x2), \ldots, \mu_{x_n}(x_n), \mu_{R^k}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \right] \right\} \right\} \tag{3.85}$$

โดย $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ คือเวคเตอร์ของแต่ละอินพุทในระบบฟัซซี

สำหรับกรณีของระบบความสัมพันธ์ฟัซซีโดยการรวมความสัมพันธ์แบบร่วมคือเชื่อมด้วย “AND” คำตอบของสมการความสัมพันธ์จะหาได้จากสมการที่ (3.57) และ (3.67) ด้วยวิธีเดียวกัน

ข) วิธี *Max-Prod* สำหรับระบบความสัมพันธ์ฟัซซีโดยการรวมความสัมพันธ์แบบร่วม เอาท์พุท y ที่ได้จากการรวมความสัมพันธ์ทั้งหมดจะหาได้จากสมการที่ (3.52) และ (3.69) ได้เป็น

$$\mu_y(y) = max_k \left\{ max_{x \in X} \left[\mu_x(y) \bullet \mu_{R^k}(x, y) \right] \right\} \tag{3.86}$$

สำหรับกรณีที่ฟัซซีอินพุทแต่ละตัวเป็นแบบไม่กระทบถึงกัน สมการ (3.86) จะเขียนได้เป็น

$$\mu_y(y) = max_k \left\{ max_{x \in X} \left[\mu_{x_1}(x_1) \bullet \mu_{x_2}(x_2) \bullet \ldots \bullet \mu_{x_n}(x_n), \mu_{R^k}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \right] \right\} \tag{3.87}$$

และจะเขียนได้ในรูปของ

$$\mu_y(y) = max_k \left\{ max_{x \in X} \; min\left[\mu_{x_1}(x_1), \mu_{x_2}(x_2), \ldots, \mu_{x_n}(x_n) \bullet \mu_{R^k}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \right] \right\} \tag{3.88}$$

สำหรับกรณีของระบบความสัมพันธ์ฟัซซีโดยการรวมความสัมพันธ์แบบเลือก คำตอบของสมการความสัมพันธ์จะหาได้จากสมการที่ (3.54) และ (3.69) ด้วยวิธีเดียวกัน

3.13 เทคนิคการหาคำตอบจากสมการความสัมพันธ์ฟัซซีโดยวิธีกราฟฟิค

(Graphical computation techniques for fuzzy relational equations)

เทคนิคการหาคำตอบของระบบความสัมพันธ์ฟัซซีโดยวิธีนี้เป็นที่นิยมใช้กันมากเพราะเป็นวิธีที่สามารถทำความเข้าใจได้ไม่ยากและสามารถนำไปปฏิบัติจริงได้ทันที ในที่นี้จะสมมติให้ระบบฟัซซีมีเพียง 2 อินพุท คือ x_1 และ x_2 และมี 1 เอาท์พุทคือ y แสดงได้ด้วยสมการ

$$y^k = x_1 \circ x_2 \circ R^k \quad \text{เมื่อ} \quad k = 1, 2, .., r \tag{3.89}$$

โดยที่ "o" แทนการประกอบของความสัมพันธ์ฟัซซีคือ *Max-Min* หรือ *Max-Prod* และ R^k แทนความสัมพันธ์ฟัซซี ซึ่งโดยทั่วไปจะอยู่ในรูปของ

IF x_1 is A_1^k AND x_2 is A_2^k THEN y^k is B^k : $k = 1, 2, \ldots, r$

สำหรับการควบคุมกระบวนการ โดยทั่วไปแล้วนั้นอินพุทของตัวควบคุม x_1, x_2 ที่ได้จากตัววัด (Sensor) จะเป็นสัญญาณไฟฟ้าซึ่งอยู่ในรูปของตัวแปรแบบคริสพ์ ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูปฟังก์ชันสมาชิก

$$\mu(x_1) = \delta(x_1 - \bar{x}_1) = 1 \text{ , เมื่อ } x = \bar{x}_1$$

$$= 0 \text{ , เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่นๆ} \tag{3.90}$$

$$\mu(x_2) = \delta(x_2 - \bar{x}_2) = 1 \text{ , เมื่อ } x = \bar{x}_2$$

$$= 0 \text{ , เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่นๆ} \tag{3.91}$$

จากสมการที่ (3.85) สำหรับระบบความสัมพันธ์ฟัซซีโดยการรวมความสัมพันธ์แบบเลือกตามสมการ

$$\mu_Y(y) = max_k \left\{ max_{x_1 \in X_1} \left\{ max_{x_2 \in X_2} \left\{ min\left[\mu_{x_1}(x_1), \mu_{x_2}(x_2), \mu_{R^k}(x_1, x_2, y) \right] \right\} \right\} \right\} \tag{3.92}$$

แทนค่าฟัซซีอินพุทจากสมการที่ (3.90) และ (3.91) ลงในสมการ (3.92) จะได้

$$\begin{aligned} \mu_Y(y) &= max_k \left\{ max_{x_1 \in X_1} \left\{ max_{x_2 \in X_2} \left\{ min\left[1, 1, \mu_{R^k}(x_1, x_2, y) \right] \right\} \right\} \right\} \\ &= max_k \left[\mu_{R^k}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, y) \right] \end{aligned} \tag{3.93}$$

เพื่อที่จะหาค่าของเอาท์พุทจากการรวมความสัมพันธ์ทั้งหมด เราจำเป็นต้องหาค่าความสัมพันธ์ฟัซซี R^k ที่ $x_1 = \bar{x}_1$, $x_2 = \bar{x}_2$ และ $y = y$ จากการแจกแจงเหตุสู่ผลในสมการ (3.57) สมการคำตอบสุดท้ายหลังจากการแทนค่าจะเป็น

$$\mu_Y(y) = max_k \left\{ min\left[\mu_{A_1^k}(\overline{x_1}), \mu_{A_2^k}(\overline{x_1}), \mu_{B^k}(y) \right] \right\} \tag{3.94}$$

จากสมการคำตอบของระบบฟัซซี สมการที่ (3.94) จะสามารถแสดงได้ในรูปแบบของภาพใน รูปที่ 3.28 และคำตอบของระบบซึ่งเป็นคำตอบในรูปแบบของคริสพ์จะหาได้ด้วยเทคนิคการดีฟัซซีตามสมการ

$$y = DEFUZZ[\mu_Y(y)] \tag{3.95}$$

สำหรับกรณีที่การประกอบความสัมพันธ์ฟัซซีแบบ *Max-Prod* นั้นเอาท์พุทที่ได้จากการรวมความสัมพันธ์จากสมการที่ (3.86) เขียนได้โดย

$$\mu_Y(y) = max_k\left\{max_{x_1 \in X_1}\left\{max_{x_2 \in X_2}\left[\mu_{x_1}(x_1).\ \mu_{x_2}(x_2).\ \mu_{R^k}(x_1, x_2, y)\right]\right\}\right\} \tag{3.96}$$

แทนค่าฟัซซีอินพุทจากสมการที่ (3.94) และ (3.95) ลงในสมการ (3.96) จะได้

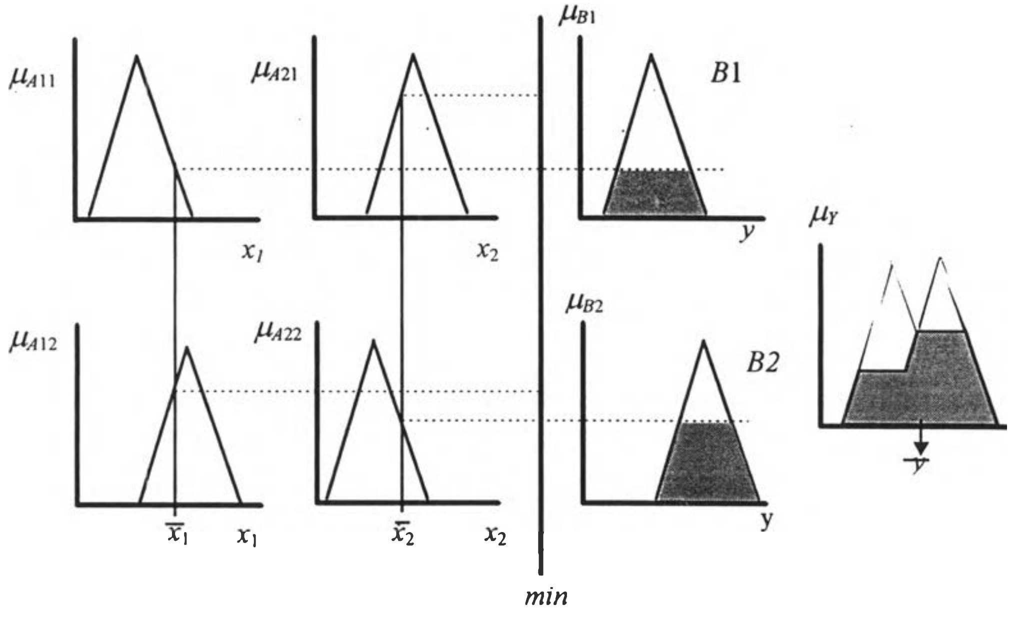
$$\begin{aligned}\mu_Y(y) &= max_k\left\{max_{x_1 \in X_1}\left\{max_{x_2 \in X_2}\left\{\left|\sigma(x_1 - \overline{x_1}).\ \sigma(x_1 - \overline{x_1}).\ \mu_{R^k}(x_1, x_2, y)\right|\right\}\right\}\right\} \\ &= max_k\left|\ \mu_{R^k}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, y)\right|\end{aligned} \tag{3.97}$$

หาค่าความสัมพันธ์ฟัซซี R^k ที่ $x_1 = \overline{x}_1$, $x_2 = \overline{x}_2$ และ $y = y$ จากการการแจกแจงเหตุสู่ผลในสมการที่ (3.53) สมการคำตอบสุดท้ายหลังจากการแทนค่าจะเป็น

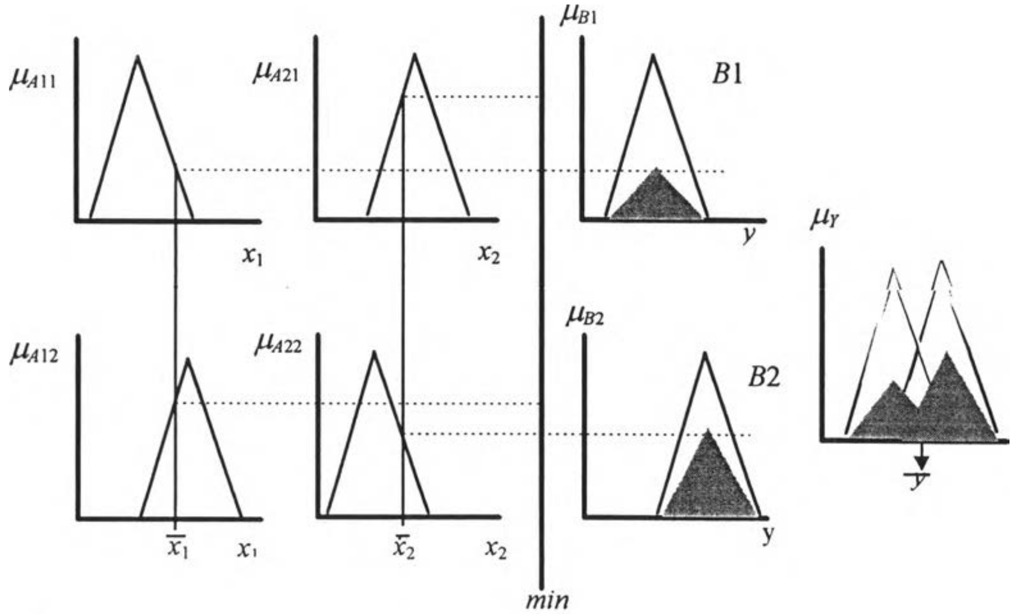
$$\mu_Y(y) = max_k\left\{\left[\ \mu_{A_1^k}(\overline{x_1}).\ \mu_{A_2^k}(\overline{x_2}).\ \mu_{B^k}(y)\right]\right\} \tag{3.98}$$

จากสมการคำตอบของระบบฟัซซี สมการที่ (3.98) จะสามารถแสดงได้ในรูปแบบของภาพใน รูปที่ 3.30 และคำตอบของระบบซึ่งเป็นคำตอบในรูปแบบของคริสพ์จะหาได้ด้วยเทคนิคการดีฟัซซีตามสมการ

$$y = DEFUZZ[\mu_Y(y)] \tag{3.99}$$



รูปที่ 3.28 วิธีการอนุมานแบบ *Max-min*



รูปที่ 3.29 วิธีการอนุมานแบบ *Max-Prod*

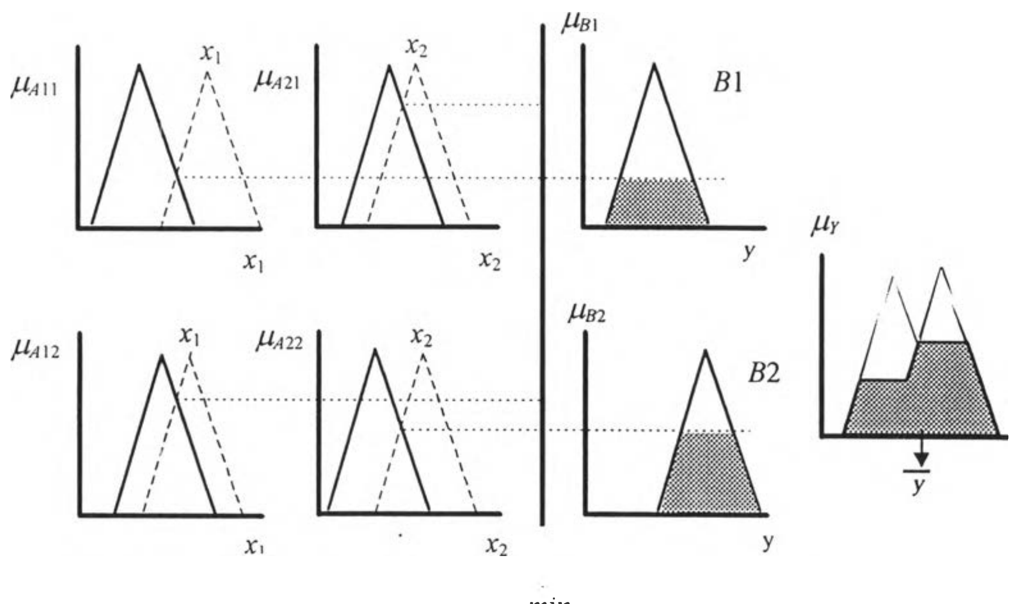
สำหรับกรณีที่อินพุท x_1 และ x_2 เป็นตัวแปรฟัซซีซึ่งแทนด้วยฟังก์ชันสมาชิก แทนค่าความสัมพันธ์ในสมการที่ (3.85) สำหรับกฎที่รวมความสัมพันธ์แบบเลือก ผลรวมเอาท์พุทเขียนได้เป็น

$$\mu_Y(y) = max_k \left\{ max_{x_1 \in X_1} \left\{ max_{x_2 \in X_2} \left\{ min \left[\mu_{x_1}(x_1), \mu_{x_2}(x_2), \mu_{R^k}(x_1, x_2, y) \right] \right\} \right\} \right\} \quad (3.100)$$

โดยการแจกแจงตามสมการที่ (3.57) จะได้คำตอบของระบบฟัซซีเป็น

$$\mu_Y(y) = max_k \left\{ max_{x_1 \in X_1} \left\{ max_{x_2 \in X_2} \left\{ min \left[\mu_{x_1}(x_1), \mu_{x_2}(x_2), \mu_{A_1^k}(x_1), \mu_{A_2^k}(x_2), \mu_{B^k}(x_1, x_2, y) \right] \right\} \right\} \right\} \quad (3.101)$$

สมการที่ (3.101) สามารถแสดงได้ในรูปที่ 3.30



รูปที่ 3.30 วิธีการอนุมานแบบ *Max-min*

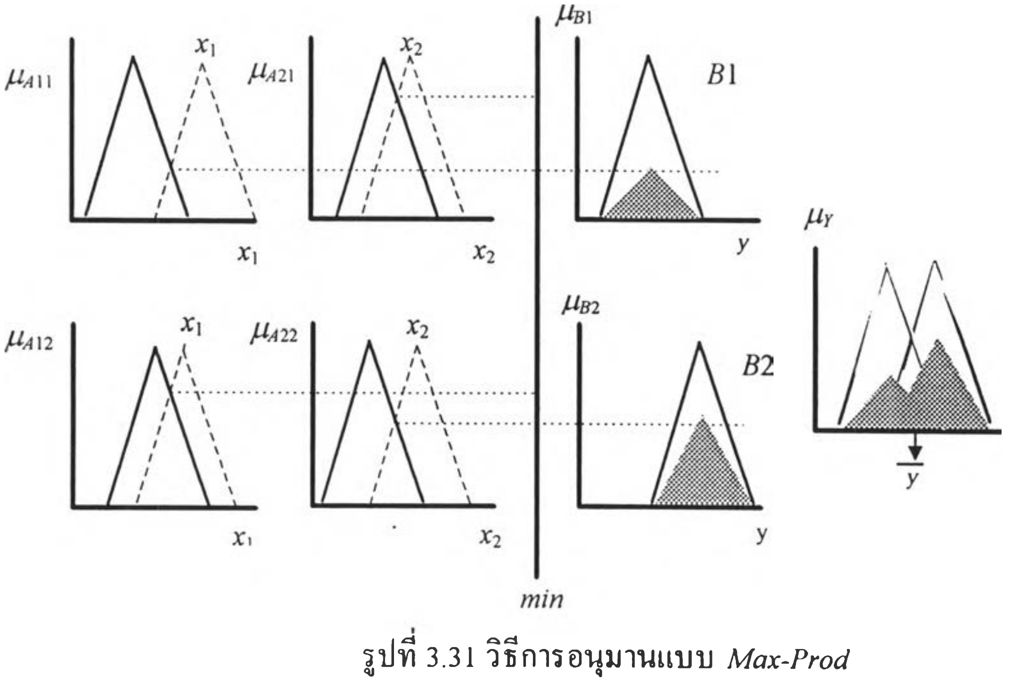
ในกรณีการประกอบแบบ *Max-Prod* สำหรับกฎที่รวมความสัมพันธ์แบบเลือก ผลรวมเอาท์พุท เขียนได้เป็น

$$\mu_Y(y) = max_k \left\{ max_{x_1 \in X_1} \left\{ max_{x_2 \in X_2} \left\{ min\left[\mu_{x_1}(x_1) \bullet \mu_{x_2}(x_2) \bullet \mu_{R^k}(x_1, x_2, y) \right] \right\} \right\} \right\} \quad (3.102)$$

โดยการแจกแจงตามสมการที่ (3.86) จะได้คำตอบของระบบฟัซซีเป็น

$$\mu_Y(y) = max_k \left\{ max_{x_1 \in X_1} \left\{ max_{x_2 \in X_2} \left\{ min\left[\mu_{A_1^k}(\overline{x}_1) \bullet \mu_{A_2^k}(\overline{x}_2) \bullet \mu_{B^k}(y) \right] \right\} \right\} \right\} \quad (3.103)$$

สมการที่ (3.103) สามารถแสดงได้ในรูปที่ 3.31



รูปที่ 3.31 วิธีการอนุมานแบบ *Max-Prod*

สำหรับกรณีที่อินพุท x_1 และ x_2 เป็นฟัซซีเซ็ตและระบบสามารถอธิบายด้วยฟังก์ชันคริส์พ เช่น

$y = f(x_1,x_2)$ เอาท์พุทของระบบจะสามารถหาได้ด้วยหลักการยืดขยายของซาเดห์

$$\mu_Y(y) = \max_{(x_1,x_2) \in f^{-1}(y)} \left\{ \min\left[\mu_{x1}(x_1), \mu_{x2}(x_2) \right] \right\} \tag{3.104}$$

เอาท์พุทสุดท้ายของระบบจะสามารถหาได้ด้วยการดีฟัซซีตามปกติ

3.14 การดีฟัซซี (Defuzzification)

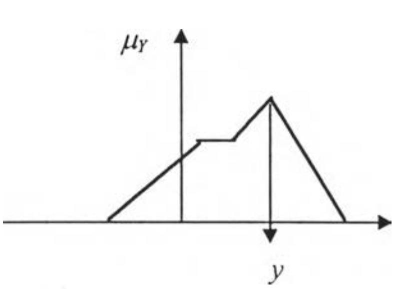
การดีฟัซซีนิยามโดย การเปลี่ยนรูปของปริมาณทางฟัซซีซึ่งเป็นรูปแบบของฟังก์ชันสมาชิกให้อยู่ในรูปแบบของคริส์พ วิธีการที่ใช้กันโดยทั่วไปมี 3 วิธีดังต่อไปนี้

ก) วิธีค่าสูงสุด (Maximum method)

วิธีนี้จะใช้ค่าของคริส์พที่สอดคล้องกับค่าฟังก์ชันสมาชิกที่มากที่สุด (peak point) เป็นคำตอบของระบบแสดงได้โดยสมการ

$$y = DEFUZZ[\mu_Y(y)] \tag{3.105}$$

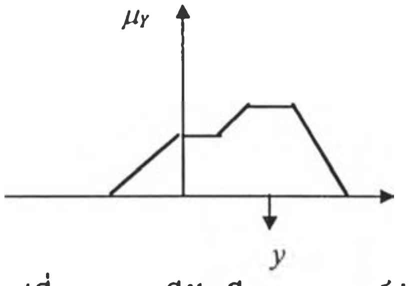
โดย
$$\max_{y \in Y} [\mu_Y(y)] = \mu_Y(y) \tag{3.106}$$



รูปที่ 3.32 การดีฟัซซีแบบค่าสูงสุด

ข) วิธีจุดศูนย์ถ่วง (Centroid method) การดีฟัซซีวิธีนี้จะใช้ค่าน้ำหนักเฉลี่ยของฟังก์ชันสมาชิกหรือจุดศูนย์ถ่วงของพื้นที่ในฟังก์ชันสมาชิก เป็นคำตอบตัวแทนเอาท์พุทของระบบฟัซซี แสดงโดยสมการ

$$\bar{y} = \frac{\int \mu_Y(y).ydy}{\int \mu_Y(y)dy} \tag{3.107}$$



รูปที่ 3.33 การดีฟัซซีแบบจุดศูนย์ถ่วง

ค) วิธีดีฟัซซีแบบค่าเฉลี่ยความสูง (Mean of maxima) การดีฟัซซีวิธีนี้จะใช้ได้ในกรณีที่ฟังก์ชันสมาชิกของแต่ละเอาท์พุทจากกฎฟัซซี เป็นแบบที่สมมาตร (Symetrical functions) สมมติให้

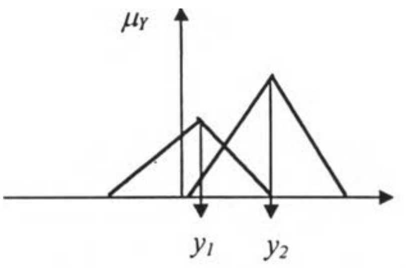
$$\mu_Y(y) = max\left[\mu_{y^1}(y), \mu_{y^2}(y), \ldots, \mu_{y^r}(y)\right] \tag{3.108}$$

และ

$$\mu_{y^k}\left(\overline{y^k}\right) = max\left[\mu_{y^k}(y)\right] \tag{3.109}$$

เอาท์พุทจากการดีฟัซซีจะเป็น

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^{k=r} \mu_{y^k}\left(\overline{y^k}\right)\overline{y^k}}{\sum_{k=1}^{k=r} \mu_{y^k}\left(\overline{y^k}\right)} \tag{3.110}$$

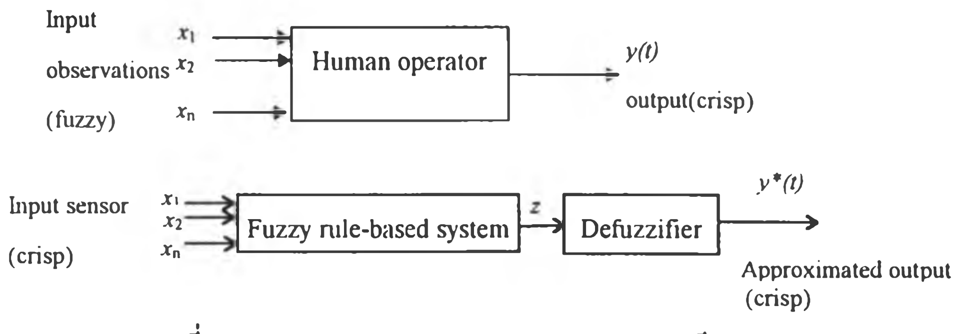


รูปที่ 3.34 การดีฟัซซีแบบความสูง

3.15 การควบคุมแบบฟัซซีและตัวควบคุมฟัซซีลอจิก

ระบบการควบคุมแบบฟัซซีคือระบบควบคุมที่อิงกับฐานกฎฟัซซี ซึ่งเซ็ตของกฎเหล่านั้นจะแสดงถึงกลไกการตัดสินใจในการควบคุมกระบวนการเพื่อลดผลกระทบต่างๆ ที่เข้าสู่ระบบ จุดประสงค์ของระบบควบคุมแบบฟัซซีคือเพื่อแทนที่การควบคุมที่ทำโดยผู้ปฏิบัติการมนุษย์ด้วยระบบฐานกฎฟัซซี รูปที่ 3.35 แสดงไดอะแกรมของแนวความคิดของการควบคุมแบบฟัซซี จากรูปผู้ปฏิบัติการมนุษย์สังเกตุปริมาณของตัวแปรควบคุมโดยอ่านค่าจากมิเตอร์ที่ใช้วัดกระบวนการและทำการตัดสินใจเพื่อที่จะทำการปรับกระบวนการ เช่น หมุนปุ่มควบคุมต่างๆ ปรับอัตราการไหลให้มากขึ้นหรือน้อยลง ซึ่งก็คือการให้การกระทำแบบคริส์พแก่กระบวนการหรือให้เอาท์พุท y ในทำนองเดียวกัน ตัวควบคุมฟัซซีก็ใช้ข้อมูลแบบคริส์พที่ได้จากตัววัดผ่านเข้าไปสู่กระบวนการฟัซซิฟิเคชันซึ่งทำหน้าที่เปลี่ยนตัวแปรธรรมดาเหล่านั้นให้เป็นตัวแปรภาษาโดยแสดงในรูปของค่าความเป็นสมาชิก จากนั้นตัวแปรดังกล่าวจะผ่านเข้าไปสู่กฎการควบคุมที่อยู่ในรูปของ “IF-THEN” ด้วยกลไกการอนุมานคล้ายเช่นเดียวกันกับระบบผู้เชี่ยวชาญและได้ผลคือข้อสรุปฟัซซี z ข้อสรุปนี้จะถูกเปลี่ยนให้กลับสู่ค่าแบบคริส์พ y^* ด้วย

กระบวนการดีฟัซซีโดยวิธีการเฉลี่ยค่าน้ำหนักเช่น วิธีดีฟัซซีแบบจุดศูนย์ถ่วง ได้เป็นเอาท์พุทที่จะปรับกระบวนการนั่นเอง



รูปที่ 3.35 ความหมายของการควบคุมแบบฟัซซี

จากที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ตัวควบคุมฟัซซีจะใช้กฎ IF-THEN ในแบบที่ส่วนเงื่อนไข (IF) และส่วนข้อสรุป (THEN) เป็นฟังก์ชันสมาชิก ข้อสรุปที่ได้จากแต่ละกฎจะถูกนำมารวมกัน (โดยทั่วไปแล้วเป็นการรวมแบบยูเนียน หรือ *max*) และหาค่าตัวแทนจากผลรวมทั้งหมดไปเป็นค่าเอาท์พุทของตัวควบคุมภายในขอบข่ายของระบบผู้เชี่ยวชาญฟัซซีเช่นเดียวกับระบบผู้เชี่ยวชาญทั่วไป กฎการควบคุมจะได้จากข้อมูลหรือความรู้ในการควบคุมของผู้ปฏิบัติการ

วิธีการของการควบคุมแบบฟัซซีลอจิกนั้นความสัมพันธ์ระหว่างอินพุทและเอาท์พุทของตัวควบคุมจะเป็นไปในลักษณะของความรู้ของผู้เชี่ยวชาญมนุษย์ ซึ่งจะอยู่ในรูปแบบของกฎฟัซซี กฎเหล่านี้จะถูกออกแบบโดยอาศัยข้อมูลจากความรู้ความเข้าใจการทำงานของกระบวนการของผู้ควบคุมเท่านั้น ดังนั้นวิธีการควบคุมแบบนี้จึงไม่ต้องการสมการแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่แน่ชัดของกระบวนการที่ถูกควบคุม

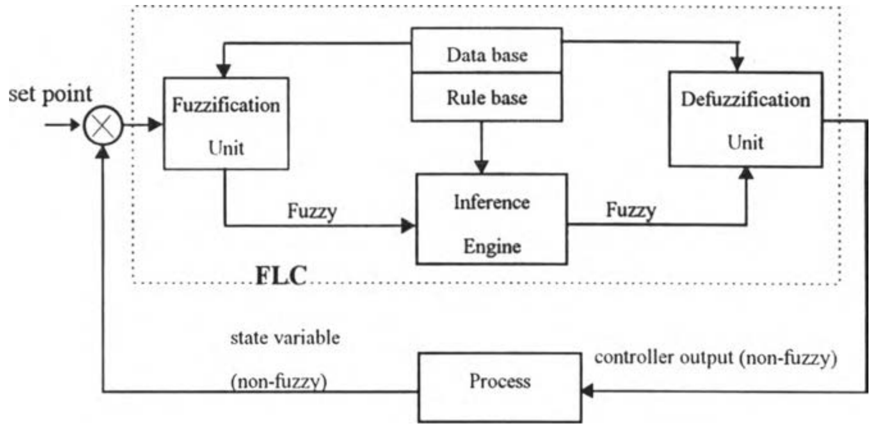
ในการออกแบบตัวควบคุมแบบฟัซซีลอจิกนั้นมีปัจจัยที่สำคัญในการออกแบบได้แก่

ก. ตัวแปรอินพุท-เอาท์พุทและ เอกภพของตัวแปร

ข. ฟังก์ชันสมาชิกของฟัซซีเซ็ตสำหรับตัวแปรอินพุทและเอาท์พุท

ค. ฐานกฎฟัซซี

โครงสร้างของตัวควบคุมแบบฟัซซีแสดงได้ในรูปที่ 3.36 ซึ่งแสดงขั้นตอนที่สำคัญของตัวควบคุมได้แก่กระบวนการฟัซซิฟิเคชัน กระบวนการอนุมาน และกระบวนการดีฟัซซี



รูปที่ 3.36 โครงสร้างโดยทั่วไปของตัวควบคุมแบบฟัซซีลอจิก

ตัวแปรกระบวนการจะถูกวัดและเปรียบเทียบกับค่าเซ็ทพอยท์เพื่อใช้แสดงสถานการณ์ของการควบคุม จากนั้นจะทำการสเกล (Scaling) ด้วยแฟคเตอร์การสเกล (Scaling factors) ของอินพุท แล้วแม็พค่าตัวแปรให้อยู่ในขอบเขตของเอกภพของฟัซซีอินพุทนั้นๆ ค่าที่ได้จากการแม็พจะถูกเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของตัวแปรฟัซซีภายในกระบวนการฟัซซิฟิเคชันโดยการแทนค่าลงในฟังก์ชันสมาชิกที่ได้นิยามไว้สำหรับแต่ละฟัซซีเซ็ต ตัวแปรฟัซซีที่ได้จะถูกส่งเข้าสู่หน่วยอนุมานเพื่อทำการอนุมานกับกฎการควบคุมที่อยู่ในรูปแบบของข้อความ “IF-THEN” เพื่อให้ได้ข้อสรุปที่เป็นพฤติกรรมการควบคุม ข้อสรุปฟัซซีที่ได้จะถูกเปลี่ยนกลับให้อยู่ในรูปของค่าตัว

แปรแบบคริสัพ ซึ่งจะใช้เป็นเอาท์พุทของตัวควบคุมโดยกระบวนการดีฟัซซิฟิเคชันแล้วทำการเปลี่ยนเรนจ์(Range)ให้อยู่ในเอกภพของตัวแปรเอาท์พุทและสเกลค่าด้วยแฟคเตอร์การสเกลไปเป็นสัญญาณปรับกระบวนการ

3.15.1 ตัวแปรระบบและพารามิเตอร์ฟัซซี

การออกแบบตัวควบคุมฟัซซีลอจิกนั้น ในส่วนแรกจำเป็นที่จะต้องรู้ถึงจำนวนของตัวแปรอินพุท/เอาท์พุทที่จะใช้ซึ่งจำนวนของตัวแปรเหล่านี้จะขึ้นอยู่กับความซับซ้อนของกระบวนการที่ถูกควบคุม สำหรับตัวควบคุมแบบฟัซซีลอจิกที่ใช้ในระบบมัลติอินพุท-ซิงเกิลเอาท์พุทในลักษณะของตัวควบคุมแบบพีไอดี ตัวแปรอินพุทจะได้แก่ ความผิดพลาดจากกระบวนการ (e), ผลรวมของความผิดพลาด ($\sum e$) และอนุพันธ์ของความผิดพลาด (de) ตัวแปรเหล่านี้ จะเขียนได้เป็น เวกเตอร์ของตัวแปรอินพุท E โดยที่ $E = [\, e, \sum e,\ de\,]$ และ ตัวแปรเอาท์พุทของตัวควบคุมคือ u เช่น แรงดัน, กระแส เป็นต้น

ฟัซซีเซ็ตสำหรับแต่ละตัวแปรในระบบนั้นจะนิยามในเทอมทางภาษา (Linguistic term) เช่น PB (Positive Big), PM (Positive Mediun), PS (Positive Small), ZE (Zero), NS (Negative Small), NM (Negative Medium), NB (Negative Big) ฯลฯ จำนวนของฟัซซีเซ็ตเหล่านี้จะขึ้นอยู่กับความละเอียดที่ต้องการในการควบคุม

ฟังก์ชันสมาชิกสำหรับฟัซซีเซ็ตนั้น จะนิยามโดยสองวิธี คือ นิยามโดยตัวเลข วิธีนี้จะเป็นการกำหนดดีกรีของการเป็นสมาชิกของแต่ละฟัซซีเซ็ตในลักษณะของเวกเตอร์ของจำนวนซึ่งจะมีจำนวนมิติที่ขึ้นอยู่กับระดับของการดีสกรีตในเอกภพ วิธีที่สอง คือการนิยามด้วยฟังก์ชัน

วิธีนี้ดีกรีของความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซ็ตนั้นจะเป็นในลักษณะของฟังก์ชัน เช่น ฟังก์ชัน S ฟังก์ชัน π ฟังก์ชันสามเหลี่ยม ฟังก์ชันสี่เหลี่ยมคางหมู ฯลฯ ในการใช้งานนั้นสามารถใช้การนิยามได้ทั้งสองวิธี

3.15.2 กระบวนการฟัซซิฟิเคชัน

ฟัซซิฟิเคชัน คือกระบวนการแม็พจากค่าอินพุทที่วัดได้จริงจากกระบวนการ กับฟัซซีเซ็ตในเอกภพ ซึ่งในการควบคุมกระบวนการนั้น ข้อมูลที่วัดได้โดยปกติแล้วจะอยู่ในรูปของคริพส์ ซึ่งจะถูกแม็พไปสู่ค่าฟัซซีที่สอดคล้องเพื่อใช้เป็นตัวแปรอินพุทของระบบ ข้อมูลที่ได้จากการแม็พนี้จะถูกเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของเทอมทางภาษาที่เหมาะสมซึ่งก็คือฟัซซีเซ็ตที่ได้นิยามไว้สำหรับแต่ละตัวแปรอินพุท กระบวนการดังกล่าวเขียนได้เป็น

$$x = \text{Fuzzifier}\,(x_0) \tag{3.111}$$

โดย x_0 คือ เวกเตอร์ของค่าแบบคริพส์ของตัวแปรอินพุทจากกระบวนการ, x คือ ตัวแปรเวกเตอร์ของฟัซซีเซ็ตที่นิยามไว้ และ Fuzzifier คือ ตัวดำเนินการฟัซซิฟิเคชันซึ่งทำหน้าที่แม็พข้อมูลคริพส์กับฟัซซีเซ็ต

3.15.3 ฐานความรู้ (Knowledge Base)

ฐานความรู้ฟัซซีประกอบด้วยข้อมูลสำคัญของตัวควบคุมได้แก่ ฐานข้อมูล (Data base) และฐานกฎ (Rule base) ฐานข้อมูลจะทำหน้าที่เก็บข้อมูลจากการนิยามฟังก์ชันสมาชิกของฟัซซีเซ็ตในเอกภพนั้นๆ ฐานกฎจะประกอบไปด้วยกฎฟัซซีซึ่งเป็นกฎที่ใช้ในการควบคุม โดยเป็น

รูปแบบของกฎทางภาษา (Linguistic rule) ซึ่งเป็นส่วนที่ทำให้ตัวควบคุมสามารถทำงานได้ตามวัตถุประสงค์ที่ต้องการ

ก. โครงสร้างฐานข้อมูล

โครงสร้างฐานข้อมูลจะเกี่ยวข้องกับการนิยามเอกภพสำหรับแต่ละตัวแปร จำนวนของฟัซซีเซ็ตและฟังก์ชันสมาชิก

การนิยามเอกภพ

สำหรับการควบคุมกระบวนการในอุตสาหกรรม สัญญาณที่วัดได้จากกระบวนการจะเป็นแบบอะนาล็อก การนิยามเอกภพนั้นสามารถทำได้สองแบบ คือแบบต่อเนื่อง (Continuous) และแบบดีสกรีต (Discrete) ซึ่งถ้าเป็นการนิยามเอกภพแบบดีสกรีตโดยปกติแล้วจะทำบนพื้นฐานของการควอนไทซ์ (Quantization) ซึ่งจะทำการดีสกรีตเอกภพของสัญญาณวัดจากกระบวนการให้มีจำนวนเซกเมนต์ (Segment) ที่แน่นอน เซกเมนต์นี้จะเป็นตัวแทนของค่าสัญญาณวัดเดิมที่เป็นแบบอะนาล็อก

ระดับของการควอนไทซ์จะขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของปริภูมิอินพุท เช่นสำหรับค่าความผิดพลาดที่วัดได้มีค่ามากแล้วควรจะใช้การควอนไทซ์ที่ค่อนข้างหยาบ แต่ถ้าค่าความผิดพลาดมีค่าน้อยๆ แล้วก็ควรที่จะใช้ระดับควอนไทซ์ที่ละเอียด ระดับของการควอนไทซ์แสดงได้ด้วยสมการ

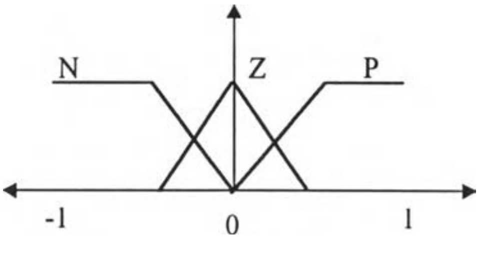
$$L = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{RES} \tag{3.112}$$

โดย RES = ความละเอียดของการควบคุมที่ต้องการ

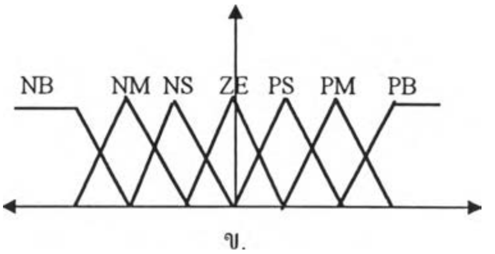
x_{max} - x_{min} = เรนจ์ของเอกภพ L = ระดับควอนไทซ์

ฟัซซีพาร์ติชันของปริภูมิอินพุท/เอาท์พุท (Fuzzy partition of input/output spaces)

ฟัซซีเซ็ตในส่วนเงื่อนไขของกฎจะเป็นตัวกำหนดรูปแบบของปริภูมิฟัซซีอินพุทภายในเอกภพของอินพุท ในขณะที่ส่วนของข้อสรุปจะกำหนดปริภูมิของฟัซซีเอาท์พุทในเอกภพของเอาท์พุท ฟัซซีเซ็ตเหล่านี้จะแบ่งปริภูมิอินพุทและเอาท์พุท ไปเป็นค่าฟัซซีหลายๆ ค่า จำนวนของฟัซซีเซ็ตที่นิยามสำหรับแต่ละตัวแปร จะมีผลโดยตรงกับจำนวนที่เป็นไปได้มากที่สุดของกฎฟัซซี ซึ่งจำนวนฟัซซีเซ็ตที่เหมาะสมนั้นจะขึ้นอยู่กับความยากง่ายและความแม่นยำในการควบคุมที่ต้องการ โดยส่วนมากแล้วจะใช้การพิจารณาจากประสบการณ์และการลองผิดลองถูกเป็นหลัก



ก.



ข.

รูปที่ 3.37 แสดงฟัซซีพาร์ติชัน ก.) ชนิดหยาบ ข.) ชนิดละเอียด

ข. ฐานกฎฟัซซี

ฐานกฎฟัซซีจะประกอบไปด้วยกฎการควบคุมหลายกฎซึ่งจุดมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการควบคุมจะกำหนดโดยผู้เชี่ยวชาญ กฎการควบคุมเหล่านี้จะอยู่ในรูปแบบของ 'IF-THEN' ที่เป็นลักษณะของการอนุมานแบบไปข้างหน้าระดับเดียว (จีเอ็มพี) (One-level forward data-driven) กล่าวคือข้อสรุปที่ได้จากแต่ละกฎจะไม่ถูกนำไปใช้ในส่วนของเงื่อนไขในกฎอื่นๆ สำหรับระบบ มัลติอินพุท-ซิงเกิลเอาท์พุท กฎควบคุมฟัซซีจะแสดงในรูปของ

Rule 1 : IF x_1 is A_{11} AND .... AND x_m is A_{1m} THEN y is B_1

Rule 2 : IF x_1 is A_{21} AND .... AND x_m is A_{2m} THEN y is B_2

$\vdots$ $\vdots$

Rule n : IF x_1 is A_{n1} AND .... AND x_m is A_{nm} THEN y is B_n

เมื่อ x_j คือตัวแปรอินพุทของระบบ เช่น ความผิดพลาด, อนุพันธ์ของความผิดพลาด ฯลฯ A_{ij} คือฟัซซีเซ็ตสำหรับ x_j เช่น *PB, PM, PS, ZE, NS* ฯลฯ, y คือตัวแปรเอาท์พุทของระบบ เช่น สัญญาณกระแสสำหรับขับมอเตอร์, B_i คือ ฟัซซีเซ็ตสำหรับ y เช่น *PB, PM, PS, ZE, NS, NB* ฯลฯ AND คือ ตัวดำเนินการฟัซซี และ $i = 1, ... ,n; j = 1, ... ,m$

3.15.4 การให้เหตุผลของตัวควบคุมฟัซซี

การให้เหตุผลฟัซซีสำหรับการนำไปใช้ในการควบคุมทางอุตสาหกรรมนั้น ปัจจุบันจะใช้การอนุมานเพียงสองแบบตามทฤษฎีที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อ 3.12 คือ

ก. วิธีการอนุมานแบบ *Max-Min*

ข. วิธีการอนุมานแบบ *Max-Prod*

เนื่องจากการควบคุมกระบวนการในทางปฏิบัตินั้นอินพุทของระบบจะเป็นแบบคริพส์ ดังนั้นวิธีการอนุมานทั้งสองแบบจะเป็นไปโดยมีตัวแปรฟัซซีอินพุทตามสมการที่ 3.81 และ 3.82

โดยสมมติให้ระบบมีกฎการควบคุมเพียงสองกฎ

Rule 1 : IF x_1 is A_{11} AND x_2 is A_{12} THEN y is B_1

Rule 2 : IF x_1 is A_{21} AND x_2 is A_{22} THEN y is B_2

กำหนดให้ความแรงที่ได้จากการอนุมานในแต่ละกฎเป็น α สำหรับอินพุท x_1 และ x_2 ความแรง α_1 , α_2 ของกฎสามารถเขียนได้เป็น

$$\alpha_1 = min\{\mu_{A1}(x_1), \mu_{B1}(x_2)\} \tag{3.113}$$

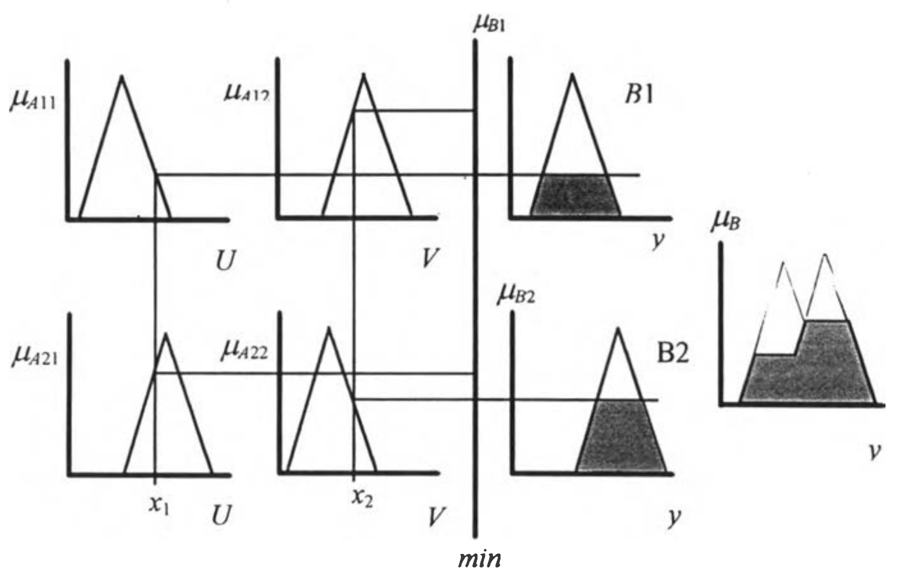
$$\alpha_2 = min\{\mu_{A2}(x_1), \mu_{B2}(x_2)\} \tag{3.114}$$

ก. การให้เหตุผลฟัซซีแบบ *Max-Min*

วิธีการให้เหตุผลแบบนี้ การตัดสินใจในกฎที่ i จะแสดงในรูปของ $\alpha_i \wedge \mu_{Bi}(y)$ ดีกรีความเป็นสมาชิกของข้อสรุป B จะเป็นไปตามสมการที่ (3.94) ดังนั้นจะได้สมการคำตอบคือ

$$\mu_B(y) = max\{min[(a_1, \mu_{B1}(y))], min[(a_2, \mu_{B2}(y))]\} \tag{3.106}$$

รูปที่ 3.38 จะแสดงกระบวนการอนุมานแบบ *Max-Min* สำหรับอินพุทคริพส์ x_1 และ x_2



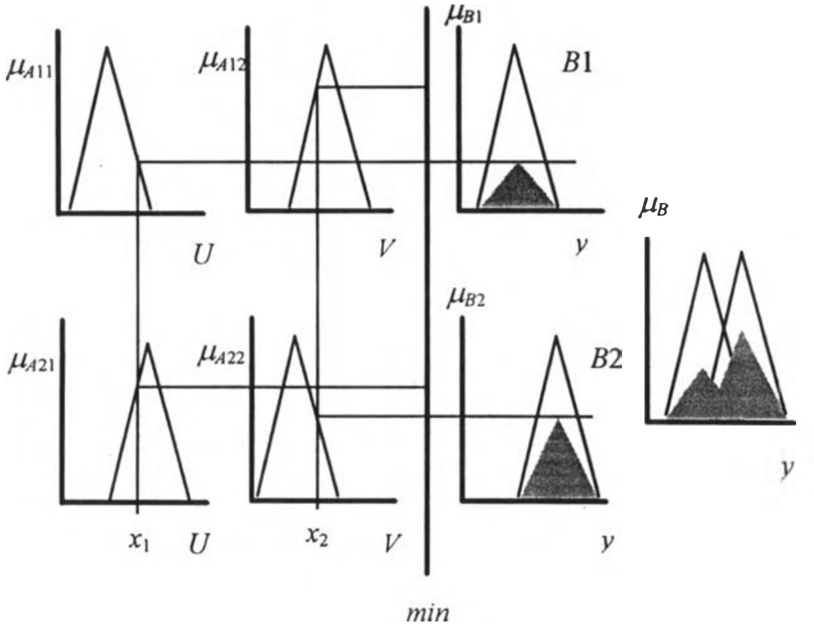
รูปที่ 3.38 แสดงการอนุมานฟัซซีแบบ *Max-Min*

ข. การให้เหตุผลฟัซซีแบบ *Max-Prod*

วิธีการให้เหตุผลแบบนี้ การตัดสินใจในกฎที่ i จะแสดงในรูปของ $\alpha_i . \mu_{Bi}(y)$ ดีกรีความเป็นสมาชิกของข้อสรุป B จะเป็นไปตามสมการที่ (3.97) ดังนั้นจะได้สมการคำตอบคือ

$$\mu_B(y) = max\{(a_1 . \mu_{B1}(y)),(a_2 . \mu_{B2}(y))\} \qquad (3.115)$$

รูปที่ 3.39 จะแสดงกระบวนการอนุมานแบบ *Max-Prod* สำหรับอินพุทคริพส์ x_1 และ x_2



รูปที่ 3.39 แสดงการอนุมานฟัซซีแบบ *Max-Prod*

3.15.5 กระบวนการดีฟัซซิฟิเคชัน

กระบวนการดีฟัซซิฟิเคชันคือ การแม็พระหว่างปริภูมิของพฤติกรรมการควบคุมที่อ้างถึงกับปริภูมิของพฤติกรรม นอน-ฟัซซี (คริพส์) ซึ่งแสดงได้ด้วยสมการ

$$y_0 = \text{Defuzzifier}\ (y) \tag{3.108}$$

โดยที่ y คือพฤติกรรมฟัซซี

y_0 คือพฤติกรรมการควบคุมคริพส์ และ Defuzzifier คือตัวดำเนินการดีฟัซซี

ในทางปฏิบัตินั้น โดยปกติแล้วจะนิยมใช้หลักในการดีฟัซซีเพียงสองวิธีคือ วิธีค่าเฉลี่ยของค่าสูงสุด (Mean of maximum) และ วิธีหาจุดศูนย์ถ่วงของพื้นที่ (Center of area) ตามสมการที่ (3.107) และ (3.110) ตามลำดับซึ่งจะเขียนได้เป็น

$$\overline{W} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{W_i}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \tag{3.118}$$

สำหรับวิธี ค่าเฉลี่ยค่าสูงสุด

และ
$$\overline{W} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i M_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i} \tag{3.119}$$

สำหรับวิธีจุดศูนย์ถ่วง

โดยที่ α_i เป็นค่าความแรงที่ได้จากกระบวนการอนุมานในแต่ละกฎ

$\overline{W}$ *เป็น*ค่าคริพส์ที่ใช้เป็นเอาท์พุทในการควบคุม

$\overline{W_i}$ เป็นค่าซับพอร์ท (Suport value) ที่ค่าความเป็นสมาชิกในฟัซซีเซ็ตมีค่าสูงที่สุด

M_i คือจุดศูนย์ถ่วงของฟัซซีเซ็ตที่ได้นิยามไว้สำหรับเอาท์พุทของแต่ละกฎ

A_i คือพื้นที่ของฟัซซีเซ็ตที่ได้จากการอนุมานในแต่ละกฎ

n คือจำนวนของกฎ